Chapitre 3

Extensions des espaces affines

3.1 Extension linéaire universelle

Définition 3.1.1. a) Une extension linéaire d'un espace affine E est un espace vectoriel V et une application affine injective (plongement affine) $F : E \to V$ dont l'image ne contient pas le vecteur nul.
b) Une extension linéaire est de codimension 1 si et seulement si le sous-espace affine image admet une direction supplémentaire de dimension 1.

Théorème 3.1.2. *a) Soit E un espace affine sur $\mathbb{K}$ et Ω un point de E, alors $V = \overrightarrow{E} \times \mathbb{K}$ muni de l'application $f : E \to V$ qui à M associe $(\overrightarrow{\Omega M}, 1)$ est une extension linéaire de codimension 1 de E.*
b) Soit $f : E \to V$ une extension linéaire de codimension 1. Pour toute extension linéaire $g : E \to V'$, il existe une unique application linéaire $h : V \to V'$ telle que $g = h \circ f$. On dit que $f : E \to V$ est une extension linéaire universelle.

Définition 3.1.3. Il en résulte que deux extensions linéaires de codimension 1 d'un espace affine E sont canoniquement isomorphes. En particulier, celle construite au a) ne dépend pas du choix de Ω : on l'appelle *l'extension vectorielle universelle.* On la note $\widehat{E}$, et on considère E comme un sous-espace affine de $\widehat{E}$.

Remarque 3.1.4. Il existe une unique forme linéaire sur $\widehat{E}$ qui vaut 1 sur E. On peut définir un espace affine comme un espace vectoriel muni d'une forme linéaire non nulle.

3.2 Interprétation des notions affines dans l'extension linéaire universelle

Sous-espaces affines

Pour un sous-espace affine F de E, l'extension linéaire universelle est un sous-espace vectoriel $\widehat{F} \subset \widehat{E}$.

Proposition 3.2.1. *L'application qui à F associe $\widehat{F}$ définit une bijection entre les sous-espaces affines de E et les sous-espaces vectoriels de $\widehat{E}$ non contenus dans $\overrightarrow{E}$. En particulier, les points de F sont en correspondance avec les droites vectorielles de $\widehat{E}$ non contenues dans $\overrightarrow{E}$.*

Applications affines

Proposition 3.2.2. *Une application affine $f : E \to E'$, admet une unique extension linéaire $\widehat{f} : \widehat{E} \to \widehat{E'}$, et si $g : E' \to E''$ est une autre application affine, alors $\widehat{g \circ f} = \widehat{g} \circ \widehat{f}$.*

Repère affine et coordonnées barycentriques

Un repère affine de E est une base de $\widehat{E}$ et les coordonnées barycentriques (somme égale à 1) dans E sont les coordonnées dans $\widehat{E}$. Les points de E (resp. $\overrightarrow{E}$) sont ceux dont la somme des coordonnées vaut 1 (resp. 0).

3.3 Notions projectives

Définition 3.3.1. Etant donné un espace vectoriel V, on appelle espace projectif issu de V l'ensemble noté $P(V)$ des droites vectorielles de V.

Définition 3.3.2. Le complété projectif d'un espace affine E est l'ensemble $P(\widehat{E})$. A un point de E correspond une unique droite vectorielle de $\widehat{E}$, qui est un point de $P(\widehat{E})$: $E \subset P(\widehat{E})$.

Remarque 3.3.3. On a : $P(\widehat{E}) - E = P(\overrightarrow{E})$; c'est le *lieu à l'infini*.

Définition 3.3.4. Un sous-espace projectif de $P(V)$ est un sous-ensemble de la forme $P(W)$ pour W sous-espace vectoriel de V. Si W est de dimension finie, la dimension de $P(W)$ est la dimension de W diminuée de 1.

Remarque 3.3.5. Les sous-espaces de dimension 0 de $P(V)$ sont les droites de V, c'est à dire les points de $P(V)$.

Théorème 3.3.6 (Incidence). *a) Dans un espace projectif, deux points distincts sont contenus dans une unique droite.*
b) Dans un plan projectif, deux droites distinctes ont un unique point d'intersection.

Théorème 3.3.7. *Si W est un hyperplan de V (on dit que $P(W)$ est un hyperplan de $P(V)$), alors $P(V) - P(W)$ est un espace affine de direction W.*

Exercice 3.3.8. Etudier la géométrie du plan projectif sur le corps à 5 éléments : $\mathbb{F}_5 = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$: nombre de points, nombre de droites, application.

3.4 Deux théorèmes projectifs

Le théorème de Pappus

Théorème 3.4.1 (Pappus projectif). *Soient D et D' deux droites distinctes d'un plan projectif sur un corps commutatif, A,B,C des points distincts respectivement sur $D \setminus D'$ et sur $D' \setminus D$. Si $(AB') \cap (A'B) = \{I\}$, $(BC') \cap (B'C) = \{J\}$ et $(AC') \cap (CA') = \{K\}$, alors I, J et K sont alignés.*

Corollaire 3.4.2. *Soient D et D' deux droites distinctes d'un plan affine sur un corps commutatif, A,B,C et A',B',C' des points distincts respectivement sur $D \setminus D'$ et sur $D' \setminus D$. Si $(AB') \cap (A'B) = \{I\}$ et $(BC') \cap (B'C) = \{J\}$, alors :*

soit $(AC') \parallel (CA') \parallel (IJ)$,
soit (AC') et (CA') s'intersectent en un point K aligné avec I et J.

Remarque 3.4.3. En affine, il y a d'autres cas : cf p89 dans l'ouvrage d'Aebischer.

Le théorème de Desargues

Théorème 3.4.4 (Desargues en projectif). *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles d'un espace projectif, sans sommet commun. On suppose que les droites (AB), (BC) et (CA) sont sécantes respectivement aux droites $(A'B')$, $(B'C')$ et $(C'A')$, en I, J et K. Alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes si et seulement si les points I, J et K sont alignés.*

3.5 Droite projective, birapport

Soit V_2 un espace vectoriel de dimension 2, avec une base (e_0, e_1). La droite vectorielle définie par un vecteur non nul $xe_0 + ye_1$ définit un point de la droite projective $P(V_2)$. Deux couples $(x, y) \neq (0, 0)$ et $(x', y') \neq (0, 0)$ définissent le même point de la droite projective si et seulement s'il y a proportionalité : $\exists \lambda \neq 0 \ x' = \lambda x, \ y' = \lambda y$.

Définition 3.5.1. On appelle coordonnées homogènes d'un point de la droite projective $P(V_2)$ dans la base (e_0, e_1) la classe de coordonnées modulo proportionalité. On note $[x, y]$.

Remarque 3.5.2. La donnée de deux points de $P(V_2)$ ne suffit pas pour déterminer base et coordonnées homogènes.

Proposition 3.5.3. *Etant donnés trois points distincts A_0, A_1, et A_2 de la droite projective $P(V_2)$, alors il existe des vecteurs e_0, e_1, e_2 représentant ces trois points tels que $\mathrm{e}_2 = \mathrm{e}_0 + \mathrm{e}_1$, de plus le choix de ces vecteurs est unique à un coefficient global près.*

Définition 3.5.4. Un repère projectif de la droite projective $P(V_2)$ est une suite (A_0, A_1, A_2) de trois points distincts. Les coordonnées dans ce repère sont les coordonnées homogènes dans une base (e_0, e_1) où e_0, e_1, $e_0 + e_1$ représentent respectivement A_0, A_1, A_2.

Définition 3.5.5. Le birapport noté $[A, B, C, D]$ de quatre points A, B, C, D de la droite projective $P(V_2)$ est défini pour A, B et C distincts :

si $D \neq A$, alors $[A, B, C, D] = \rho$ avec D de coordonnées homogènes $[\rho, 1]$ dans le repère projectif (A, B, C) ;

$[A, B, C, A] = \infty$.

Remarque 3.5.6. On peut voir le birapport comme un élément de la droite projective canonique : $P(\widehat{\mathbb{K}}) = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$.

Théorème 3.5.7. *Soient A, B, C, D quatre points de la droite projective $P(V_2)$, représentés respectivement par les vecteurs non nuls a, b, c, d. Si A, B, et C sont distincts et $D \neq A$, alors le birapport est donné par :*

$$[A, B; C, D] = \frac{\det(a, c)}{\det(a, d)} \frac{\det(b, d)}{\det(b, c)} \ .$$

Théorème 3.5.8. *Soient A, B, C, D quatre points d'une droite affine $\mathcal{D}$. Si A, B, et C sont distincts et $D \neq A$, alors le birapport est donné par :*

$$[A, B; C, D] = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \ .$$

Homographie

Un endomorphisme bijectif du plan vectoriel $f : V_2 \to V_2$ transforme une droite vectorielle en une droite vectorielle, et donc induit une application sur la droite projective, $P(f) : P(V_2) \to P(V_2)$.

Définition 3.5.9. On appelle homographie de la droite projective $P(V_2)$ toute application qui est induite par un endomorphisme bijectif de $P(V_2)$.

Proposition 3.5.10. *a) Une homographie conserve le birapport.*
b) Si on fixe un repère projectif (A, B, C)*, alors une homographie associe au point* M *défini par le birapport* $[A, B, C, M] = \rho \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$*, le point* M' *défini par le birapport* $[A, B, C, M] = \rho' \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ *de la forme* $\rho' = \frac{\alpha\rho+\beta}{\gamma\rho+\delta}$.