

# Chapitre 4

## Géométrie euclidienne

### 4.1 Structure euclidienne

On rappelle qu'un espace vectoriel euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire, c'est à dire une forme bilinéaire symétrique définie positive. Nous utiliserons les notations standard :  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  pour le produit scalaire,  $\|\vec{u}\|$  pour la norme,  $W^\perp$  pour le sous-espace orthogonal.

**Définition 4.1.1.** Un espace affine euclidien est un espace affine réel dont la direction est un espace vectoriel euclidien. On définit la distance entre deux points par  $d(A, B) = \|\vec{AB}\|$ , noté aussi  $AB$ .

**Proposition 4.1.2.** La distance satisfait l'inégalité triangulaire :

$$AC \leq AB + BC ,$$

de plus il y a égalité si et seulement si  $B$  est sur le segment  $[AC]$ .

### 4.2 Autour de l'orthogonalité

Etant donné un sous-espace affine  $F$  d'un espace affine euclidien  $E$ , le sous-espace vectoriel  $\vec{F}^\perp$  est supplémentaire de  $\vec{F}$ , d'où la définition de la projection orthogonale sur  $F$  (de direction  $\vec{F}^\perp$ ) et de la symétrie orthogonale par rapport à  $F$  (de direction  $\vec{F}^\perp$ ).

La proposition qui suit pourra être utile pour des calculs.

**Proposition 4.2.1.** Soit  $W$  un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien. Si  $W$  a pour base orthonormée  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k)$ , alors la projection vectorielle orthogonale sur  $W$  est donnée par :

$$\vec{u} \mapsto \sum_{i=1}^k (\vec{u} \cdot \vec{e}_i) \vec{e}_i .$$

## 4.3 Isométries : généralités

**Définition 4.3.1.** Une application  $f$  d'un espace affine euclidien  $E$  dans lui-même est une isométrie si et seulement si elle respecte la distance.

On rappelle qu'une application linéaire entre espaces vectoriels euclidiens conserve la norme si et seulement si elle conserve le produit scalaire. Les endomorphismes d'un espace vectoriel euclidien  $\vec{E}$  qui conservent le produit scalaire s'appellent endomorphismes orthogonaux. Ils forment le groupe orthogonal  $\mathcal{O}(\vec{E})$ .

**Théorème 4.3.2.** Une application  $f$  d'un espace affine euclidien  $E$  dans lui-même est une isométrie si et seulement si c'est une application affine dont l'application linéaire associée est un endomorphisme orthogonal.

**Corollaire 4.3.3.** L'ensemble des points invariants par une isométrie d'un espace affine euclidien  $E$  est soit vide, soit un sous-espace affine.

Il en résulte aussi qu'une isométrie d'un espace affine euclidien  $E$  est bijective. Ces isométries forment un groupe noté  $\mathcal{I}(E)$ . Les endomorphismes orthogonaux de l'espace vectoriel euclidien  $\vec{E}$  sont de déterminants  $\pm 1$ , ceux de déterminants 1 forment le sous-groupe  $\mathcal{O}^+(\vec{E}) \subset \mathcal{O}(\vec{E})$ . Les applications affines dont l'endomorphisme associé est de déterminant 1 forment le sous-groupe des déplacements  $\mathcal{I}^+(E) \subset \mathcal{I}(E)$ , les autres sont des antidéplacements.

*Exercice 4.3.4.* Démontrer que dans un espace affine euclidien, une symétrie est une isométrie si et seulement si elle est orthogonale. A quelle condition est-ce un déplacement ?

**Définition 4.3.5.** Une réflexion d'un espace affine euclidien est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Une réflexion est un antidéplacement.

**Proposition 4.3.6.** Une isométrie pour laquelle l'ensemble des points invariants est un hyperplan est une réflexion.

**Théorème 4.3.7.** Une isométrie d'un espace affine euclidien de dimension  $n$  s'écrit comme composée d'au plus  $n + 1$  réflexions.

**Lemme 4.3.8.** Une isométrie pour laquelle l'ensemble des points invariants est non vide et de codimension  $k > 0$  s'écrit comme composée d'au plus  $k$  réflexions.

## 4.4 Isométries planes

Rappel : Endomorphismes orthogonaux en dimension 2.

En dimension 2, une isométrie dont l'endomorphisme associé est une rotation vectorielle a un unique point fixe.

**Définition 4.4.1.** Dans le plan affine euclidien  $E_2$ , on appelle rotation de centre  $\Omega$  une isométrie qui fixe  $\Omega$  dont l'endomorphisme associé est une rotation vectorielle.

*Remarque 4.4.2.* Pour mesurer l'angle de la rotation, il convient d'orienter, c'est à dire de choisir une base de référence. Les bases directes sont alors celles obtenues par changement de base de déterminant positif. ns toute base orthonormée directe. La rotation vectorielle d'angle  $\theta$  a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

**Théorème 4.4.3** (Classification des isométries planes). a) *Un déplacement d'un plan affine euclidien est soit une translation soit une rotation.*

b) *Un antidéplacement d'un espace affine euclidien est soit une réflexion, soit une réflexion glissée c'est à dire la composée commutative d'une réflexion et d'une translation de vecteur non nul.*

*Remarque 4.4.4.* La forme réduite de la symétrie glissée du b) est unique et la translation est dans l'axe de la réflexion.

En conclusion, les isométries qui ont au moins un point fixe sont classifiées par leur sous-espace de points invariants. Les autres le sont par leur endomorphisme associé.

## 4.5 Isométries de l'espace

Rappel : Endomorphismes orthogonaux en dimension 3.

**Définition 4.5.1.** Une rotation d'un espace affine euclidien de dimension 3 est une isométrie qui a au moins un point fixe et dont l'endomorphisme associé est une rotation vectorielle. L'ensemble des points fixes d'une rotation est une droite : l'axe de la rotation.

*Remarque 4.5.2.* Pour mesurer l'angle de rotation, il convient d'orienter l'espace (choix d'une base directe de référence), et aussi l'axe. La matrice de la rotation vectorielle d'axe orienté par  $\vec{u}$  et d'angle  $\theta$  s'écrit dans toute base orthonormée directe  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

**Proposition 4.5.3.** *Une isométrie d'un espace affine euclidien de dimension 3 dont l'endomorphisme associé est une rotation vectorielle s'écrit de manière unique comme une composée qui commute d'une rotation et d'une translation.*

**Définition 4.5.4.** Une isométrie d'un espace affine euclidien de dimension 3 dont l'endomorphisme associé est une rotation vectorielle et qui n'a pas de point fixe est un vissage. La forme réduite permet de décrire ses éléments géométriques : son axe, son vecteur dans la direction de cet axe et son angle.

**Théorème 4.5.5** (Classification des déplacements de l'espace). *Un déplacement d'un espace affine euclidien est soit une translation, soit une rotation, soit un vissage.*

**Proposition 4.5.6.** *Une isométrie d'un espace affine euclidien de dimension 3 dont l'endomorphisme associé est une symétrie orthogonale par rapport à un plan (réflexion vectorielle) est soit une réflexion, soit une réflexion glissée c'est à dire la composée commutative d'une réflexion et d'une translation de vecteur non nul (dans la direction du plan de réflexion).*

**Proposition 4.5.7.** *Une isométrie d'un espace affine euclidien de dimension 3 dont l'endomorphisme associé n'a pas 1 comme valeur propre a un unique point fixe, et s'écrit de manière unique comme une composée qui commute d'une rotation et d'une réflexion par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe de la rotation.*

*Remarque 4.5.8.* La translation de la forme réduite du b) est dans l'axe de la réflexion.

En conclusion, en dimension 3 les isométries qui ont au moins un point fixe sont classifiées par leur sous-espace de points invariants. Les autres le sont par leur endomorphisme associé.