Chapitre 5

Les coniques

Dans ce chapitre, le corps de base $\mathbb{K}$ est supposé de caractéristique différente de 2.

5.1 Formes quadratiques affines

Etant donné un espace vectoriel V sur le corps $\mathbb{K}$, on rappelle qu'une application $q : V \to \mathbb{K}$ est une forme quadratique si et seulement s'il existe une forme bilinéaire symétrique $b : V \times V \to \mathbb{K}$ telle que :

$$\forall u \in V,\ q(u) = b(u, u)\ .$$

La forme bilinéaire b est alors déterminée par la formule :

$$2b(u, v) = q(u + v) - q(u) - q(v)\ ,$$

et s'appelle la forme polaire de q ; elle est représentée dans une base par une matrice symétrique et q s'exprime par un polynôme homogène de degré 2.

Définition 5.1.1. Sur un espace affine E, une forme quadratique affine est une application $f : E \to \mathbb{K}$ qui s'exprime dans un repère par un polynôme de degré 2 (qui n'est plus nécessairement homogène).

Remarque 5.1.2. Si f a une expression polynomiale de degré 2 dans un repère, c'est aussi le cas dans un autre repère. Pour une définition plus intrinsèque, voir le livre de Michèle Audin, VI.1.

Définition 5.1.3. Une quadrique de E est une équation de la forme $f(M) = 0$, où f est une forme quadratique affine. L'image de la quadrique est l'ensemble des points M de E qui vérifient $f(M) = 0$.

Remarque 5.1.4. Cette distinction entre l'équation et le sous-ensemble qu'elle définit est commune en géométrie algébrique. On peut aussi dire qu'une quadrique de E est une forme quadratique affine, à un coefficient multiplicatif non nul près.

Dans ce chapitre on va étudier les quadriques du plan, qu'on appelle des coniques. Le but est de comprendre leur classification et leurs propriétés géométriques en distinguant le cadre affine et le cadre euclidien. Le cadre projectif permet ici aussi d'avoir un point de vue plus global.

5.2 Coniques affines

Soit E_2 un plan affine sur $\mathbb{K}$.

Définition 5.2.1. Une conique de E_2 est une équation de la forme $f(M) = 0$, où f est une forme quadratique affine. L'image de la conique est l'ensemble des points M de E_2 qui vérifient $f(M) = 0$.

Exemples.
Réduction de l'équation dans le cas réel.

5.3 Coniques projectives

Soit V_3 un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3. L'équation $Q(u) = 0$ définit un sous-ensemble de V_3 qui est soit réduit au vecteur nul, soit une réunion de droites ; cet ensemble est appelé le cône isotrope de Q.

Définition 5.3.1. Une conique projective dans le plan projectif $P(V_3)$ est une équation $Q(M) = 0$, où Q est une forme quadratique sur V_3. L'image de la conique est l'ensemble des points M du plan projectif $P(V_3)$ qui vérifient $Q(M) = 0$. La conique projective est dite propre (ou non dégénérée) si et seulement si la forme quadratique Q est de rang 3.

L'intersection d'une conique projective avec un plan affine est une conique affine. Le théorème suivant projectivise les coniques affines.

Théorème 5.3.2. *La conique affine d'équation*

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \ ,$$

est l'intersection avec le plan affine défini par $z = 1$, de la conique projective d'équation

$$ax^2 + by^2 + cxy + dxz + eyz + fz^2 = 0 \ .$$

L'équation ci-dessus est appelée équation homogénéisée ; la conique correspondante est la *conique projectivisée.*

Définition 5.3.3. Une conique affine est propre (ou non dégénérée) si et seulement si son équation homogénéisée définit une conique projective propre (forme quadratique de rang 3).

Classification des coniques réelles

Une conique projective réelle propre de signature $(3, 0)$ a une image vide. Une conique projective réelle propre d'image non vide est définie par une forme quadratique de signature $(2, 1)$.

Théorème 5.3.4. *Toutes les coniques projectives propres d'image non vide sont équivalentes et admettent une forme réduite :* $X^2 + Y^2 - Z^2 = 0$.

Théorème 5.3.5. *Il y a trois classes d'équivalence de coniques affines réelles propres d'image non vide, correspondant aux formes réduites suivantes :*
$X^2 + Y^2 = 1$ *(ellipse),*
$X^2 - Y^2 = 1$ *(hyperbole),*
$X^2 - Y = 0$ *(parabole).*

Remarque 5.3.6. La classification est donnée par le nombre de points sur la droite à l'infini de la conique projectivisée.

5.4 Polarité

Une forme quadratique de rang 3 sur l'espace vectoriel V_3, de dimension 3, définit une notion d'orthogonalité entre droites et plans.

Définition 5.4.1. La polarité associée à une conique projective propre de $P(V_3)$ est la relation entre points et droites du plan projectif induite par l'orthogonalité pour une forme quadratique sur V_3 qui définit la conique : la polaire d'un point est une droite, et le pôle d'une droite est un point.

Proposition 5.4.2. *Une droite du plan projectif rencontre une conique projective propre en au plus deux points.*

Définition 5.4.3. Une droite du plan projectif est tangente à une conique si et seulement si elle la rencontre en un seul point.

Théorème 5.4.4. *Il existe une unique droite tangente en un point donné à une conique projective propre : la polaire de ce point.*

Application aux coniques affines

La projectivisée d'une conique affine propre rencontre la droite à l'infini en au plus deux points. On a vu que dans le cas réel cela donne la classification affine : hyperbole pour deux points d'intersection, ellipse pour une intersection vide et parabole pour un point d'intersection.

Avec un corps de base général, $\mathbb{K}$, une parabole est une conique affine dont la projectivisée est tangente à l'infini. Les autres coniques propres ont un centre de symétrie : ce sont les coniques à centre.

Théorème 5.4.5. *Le centre d'une conique affine est le pôle de la droite à l'infini pour la conique projectivisée.*

Remarque 5.4.6. Pour une parabole, on peut considérer que le centre est sur la droite à l'infini.

Théorème 5.4.7. *Soit $\mathcal{C}$ une conique projective propre, et Δ une droite qui a deux points communs avec $\mathcal{C}$: A et B. Alors la polaire d'un point M de Δ est sécante à Δ au point N déterminé par le birapport $[A,B,M,N]=-1$ (N est conjugué harmonique de M par rapport à A et B).*

Exercice 5.4.8. a) Montrer que s'il existe deux tangentes à la conique projective propre $\mathcal{C}$ issues du point M, alors la polaire de M est la droite qui passe par les points de contact.
b) Montrer que si la droite Δ rencontre la conique projective propre $\mathcal{C}$ en deux points, alors le pôle de Δ est l'intersection des deux tangentes en ces points.

5.5 Coniques euclidiennes

On étudie dans cette section les coniques du plan affine euclidien E_2. Les théorèmes ci-dessous décrivent les formes réduites dans des repères orthonormés. La classification à isométrie près en résulte.

Théorème 5.5.1. *Toute ellipse du plan affine euclidien a forme réduite unique :*

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2+\left(\frac{Y}{b}\right)^2=1\ ,\ 0<b\leq a\ .$$

Théorème 5.5.2. *Toute hyperbole du plan affine euclidien a forme réduite unique :*

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2-\left(\frac{Y}{b}\right)^2=1\ ,\ 0<b\ ,\ 0<a\ .$$

Théorème 5.5.3. *Toute parabole du plan affine euclidien a forme réduite unique :*

$$Y^2=2pX,\ p>0\ .$$

Définition monofocale

Théorème 5.5.4. *Soient $\mathcal{D}$ une droite du plan, F un point extérieur à $\mathcal{D}$ et $e > 0$. L'ensemble des points M tels que*

$$MH = e\, d(M, \mathcal{D}) \ ,$$

est une conique, plus précisément :

une parabole pour $e = 1$,
une ellipse pour $e < 1$,
une hyperbole pour $e > 1$.

Remarque 5.5.5. Le paramètre e est l'excentricité.

La parabole d'équation $Y^2 = 2pX$ a une unique définition monofocale, avec :

$$F(\frac{p}{2}, 0) \ , \ \mathcal{D} : X = -\frac{p}{2} \ .$$

L'ellipse d'équation $\left(\frac{X}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y}{b}\right)^2 = 1$ a deux définitions monofocales,

$$F(c, 0) \ , \ \mathcal{D} : X = \frac{a^2}{c} \ ; \ F'(-c, 0) \ , \ \mathcal{D}' : X = -\frac{a^2}{c} \ ;$$

avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $e = \frac{c}{a}$.

L'hyperbole d'équation $\left(\frac{X}{a}\right)^2 - \left(\frac{Y}{b}\right)^2 = 1$ a deux définitions monofocales,

$$F(c, 0) \ , \ \mathcal{D} : X = \frac{a^2}{c} \ ; \ F'(-c, 0) \ , \ \mathcal{D}' : X = -\frac{a^2}{c} \ ;$$

avec $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $e = \frac{c}{a}$.