UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - PARIS 7
Année 2013-2014, Licence 3, U3GA35
Géométrie affine et euclidienne

Examen du 9/1/2014 (durée : 3 heures)
Aucun document autorisé, barême indicatif : 5+8+4+3

I

Dans un plan affine réel E_2, soient ABC un triangle et D un point distinct des sommets tel que :

la droite (AD) est sécante à (BC) en a,
la droite (BD) est sécante à (AC) en b, et
la droite (CD) est sécante à (AB) en c.

1. (a) Montrer que si a est le milieu de $[BC]$, alors les droites (BC) et (bc) sont parallèles.
   (b) Etudier l'énoncé réciproque.
2. Dans le cas où la droite (bc) est sécante à (BC) en d, utiliser les théorèmes de Céva et Ménélaus pour déterminer le birapport $[B, C, a, d]$
3. On considère la même figure dans un plan projectif réel.
   (a) Justifier l'existence du point d et calculer le birapport $[B, C, a, d]$ en utilisant la question 1.
   (b) En déduire une nouvelle preuve du résultat de la question 2.

II

L'espace affine euclidien de dimension 3, E_3, est muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
L'application $f : E_3 \to E_3$ associe au point $M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ le point $M' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ défini par :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{3}{2} \\ y' & = & \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z' & = & -z + 2 \end{array} \right.$$

1. (a) Démontrer que f est une isométrie.
   (b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.
   (c) Calculer $f \circ f$. En déduire la nature de f.
2. Soit D la droite de repère $(0, \vec{\imath})$, et D' la droite de repère $(A, \vec{u})$ avec $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}$. On étudie l'ensemble G des isométries qui conservent globalement la réunion de D et D'.
   (a) Montrer qu'il existe une unique droite Δ qui est perpendiculaire commune aux droites D et D' (sécante et orthogonale).
   (b) Montrer que le demi-tour ρ d'axe Δ appartient à G.
   (c) Montrer que f appartient à G.
   (d) Déterminer l'application $g = f \circ \rho$: nature et éléments géométriques.
   (e) Donner la liste complète des éléments de G et la table de composition.

III

Le plan affine réel est rapporté à un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Pour a paramètre réel, soit $\mathcal{C}_a$ la conique d'équation

$$x^2 + 2axy + y^2 + 4x - a^2 = 0 \ .$$

1. Ecrire l'équation homogénéisée. Est-ce que $\mathcal{C}_a$ est une conique propre ? Discuter suivant les valeurs de a.
2. Etudier les points à l'infini de la conique $\mathcal{C}_a$ et en déduire sa nature suivant les valeurs de a.
3. Déterminer le centre de $\mathcal{C}_a$, discuter les cas particuliers.

IV

Soit ABC un triangle non dégénéré du plan projectif sur un corps K de caractéristique différente de 2, et soit O un point qui n'appartient à aucun des cotés de ABC. Soit A' l'intersection de (AO) avec (BC), B' celle de (BO) avec (CA) et C' celle de (CO) avec (AB). Soit Γ une conique passant par A', B' et C' et tangente aux cotés du triangle en A' et B'.

1. Montrer que A' est distinct de B' et déterminer le pôle de $(A'B')$ (par rapport à Γ),
2. Soit C'' le point d'intersection de $(A'B')$ avec (CC') et M le point d'intersection de $(A'B')$ avec (AB). Montrer que les points A', B', M et C'' forment une division harmonique c'est à dire que le birapport $[A', B', M, C'']$ vaut -1.
3. En déduire que Γ est tangente à (AB) en C'.