UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - PARIS 7
Année 2013-2014, Licence 3, U3GA35
Géométrie affine et euclidienne

Examen partiel du 8/11/2013 (durée : 3 heures)
Aucun document autorisé

I

On se place dans un espace affine réel E de dimension 3, rapporté à un repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k})$.

1. Soit D le sous-ensemble défini par les équations :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x - 2y + 3z - 4 & = & 0 \\ 2x + y + z - 5 & = & 0 \end{array} \right.$$

   (a) Justifier brièvement pourquoi D est une droite affine.

   (b) Déterminer un repère de D.

2. (a) Montrer qu'il existe un unique plan P contenant D et dont la direction contient le vecteur $\overrightarrow{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (b) Donner une équation de P.

II

Dans un espace affine réel de dimension finie, soit t une translation de vecteur non nul $\vec{u}$ et h l'homothétie affine de centre O et de rapport k $(k \neq 1)$.
Décrire les applications (nature et éléments géométriques) :

$$f_1 = t \circ h \circ t^{-1}\,; \quad f_2 = h^{-1} \circ t \circ h\,; \quad f_3 = t \circ h \circ t\,.$$

III

Dans un plan affine réel, on considère un triangle ABC. Le point M est tel que les droites (AM), (BM) et (CM) rencontrent respectivement (CB), (AC) et (AB) en A', B' et C' ; ce point M a pour coordonnées barycentriques (a, b, c), $a + b + c = 1$, dans le repère affine (A, B, C).
On note D et K les symétriques respectifs de M et A' par rapport à (AB) parallèlement à (CC').

1. Montrer que les sommes $a + b$, $b + c$ et $c + a$ sont non nulles.
2. Ecrire M comme barycentre de A et A', puis K comme barycentre de A et D.
3. Montrer que K, B' et C' sont alignés. Ecrire K comme barycentre de B' et C'.

IV

Soit $\tau : V \to \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel V, et $E = \tau^{-1}(1)$.

1. Justifier pourquoi E est un espace affine et préciser sa direction $\overrightarrow{E}$.
2. Soit $\phi : V \to V$ une application linéaire. Montrer que si $\tau \circ \phi = \tau$, alors la restriction de ϕ à E définit une application affine de E dans E.
3. (a) Montrer que toute application affine $f : E \to E$ est la restriction d'une unique application linéaire de V dans V qu'on notera $\widehat{f}$.

   (b) Montrer que pour toute application affine $f : E \to E$, on a $\tau \circ \widehat{f} = \tau$.

   (c) Montrer que pour toute application affine $f : E \to E$, 1 est valeur propre de $\widehat{f}$.
4. On suppose V de dimension finie. Soit $f : E \to E$ une application affine telle que 1 n'est pas valeur propre de $\overrightarrow{f}$.

   (a) Montrer que 1 est valeur propre simple de $\widehat{f}$.

   (b) En déduire que f a un unique point fixe.