# Chapitre 2

# Fibré tangent, fibrés vectoriels

## 2.1 Fibré tangent à une sous-variété de $\mathbb{R}^p$

Soit $M$ une sous-variété de $\mathbb{R}^p$, de dimension $m$ et de classe $C^1$ (au moins). Un chemin de classe $C^1$ dans $M$ est une application de classe $C^1$ d'un intervalle dans $M$.

**Définition 2.1.1.** Pour $a \in M$, un vecteur $u \in \mathbb{R}^p$ est tangent à $M$ en $a$ si et seulement s'il existe un chemin de classe $C^1$, $\gamma : ]-\epsilon, \epsilon[ \to M$, tel que : $\gamma(0) = a$, et $\gamma'(0) = u$.

**Proposition 2.1.2.** *L'ensemble $T_a(M)$ des vecteurs tangents en $a$ à $M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ de dimension $m$.*

**Proposition 2.1.3.** *Si $M$ est définie localement en $a$ par une équation implicite $f(x) = 0$ ($f : (V, a) \to (\mathbb{R}^n, 0)$, où $V$ est un voisinage ouvert de $a$ dans $\mathbb{R}^{m+n}$, est une submersion en $0$), alors $T_a(M) = \{u, f'(a).u = 0_n\}$.*

**Définition 2.1.4.** On appelle fibré tangent à la sous-variété $M$ le sous-ensemble de $M \times \mathbb{R}^p$ défini par : $T(M) = \{(a, u),\ a \in M,\ u \in T_a(M)\}$.

**Proposition 2.1.5.** *Si $M$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^p$, de dimension $m$ et de classe $C^k$, $k \geq 1$, alors son fibré tangent est une sous-variété de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$ de dimension $2m$ et de classe $C^{k-1}$.*

## 2.2 Fibré tangent à une variété

Dans le cas intrinsèque, on va définir les vecteurs tangents comme classe d'équivalence de chemins.

**Définition 2.2.1.** Soit $M$ une variété de classe $C^1$ (au moins). Deux chemins locaux de classe $C^1$ en $a$ :

$$\gamma_i : (]-\epsilon, \epsilon[, 0) \to (M, a)\ , i \in \{1, 2\}$$

ont même germe en $a$ si et seulement si en composant avec une carte locale $\phi$ on obtient deux chemins de même vecteur dérivé : $(\phi \circ \gamma_1)'(0) = (\phi \circ \gamma_1)'(0)$.

*Remarque* 2.2.2. La condition ne dépend pas de la carte locale choisie.

**Proposition 2.2.3.** *Soit $M$ une variété de dimension $m$ et de classe $C^1$. Pour $a \in M$, l'ensemble $T_a(M)$ des germes de chemins locaux de classe $C^1$ en $a$ est un espace vectoriel de dimension $m$.*

**Définition 2.2.4.** Sous les hypothèses précédentes, l'espace tangent en $a$ à $M$ est l'espace vectoriel $T_a(M)$, et le fibré tangent à $M$ est : $T(M) = \{(a,u),\ a \in M,\ u \in T_a(M)\}$ .

Etant donné une carte sur $M$, $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^m$, le fibré tangent à $U$ est le sous-ensemble $T(U) = \{(a,u)\ a \in U,\ u \in T_a(M)\} \subset T(M)$. On a une bijection :

$$\begin{array}{rrcl} T(\phi): & T(U) & \to & T(V) = V \times \mathbb{R}^n \\ & (a,[\gamma]) & \mapsto & (\phi(a), (\phi \circ \gamma)'(0)) \end{array}$$

Il existe une unique topologie sur $T(M)$ pour laquelle les applications $T(\phi)$ sont des cartes pour toutes les cartes $\phi$ d'un atlas de $M$.

*Remarque* 2.2.5. On obtient la même topologie avec un atlas équivalent.

**Proposition 2.2.6.** *Si $M$ est une variété de dimension $m$ et de classe $C^k$, $k \geq 1$, alors son fibré tangent $T(M)$ est une variété de dimension $2m$ et de classe $C^{k-1}$.*

## 2.3 Fibrés vectoriels

Le fibré tangent est un exemple de fibré vectoriel.

**Définition 2.3.1.** Un fibré vectoriel réel de rang $n$ est un triplet $(E,B,p)$ où $E$ est un espace topologique (l'espace total), $B$ est un espace topologique (la base) et $p : E \to B$ (la projection) est une application continue telle que :
a) pour tout $b \in B$, $E_b = p^{-1}(b)$ est un espace vectoriel réel de dimension $n$ ;
b) pour tout $b \in B$, il existe une trivialisation locale, c'est à dire un voisinage ouvert $V_b$ de $b$ et un homéomorphisme $\Phi : p^{-1}(V_b) \to V_b \times \mathbb{R}^n$, qui commute avec les projections sur $V_b$ et est linéaire sur chaque fibre $E_x$, $x \in V_b$.

*Remarque* 2.3.2. On peut dans cette définition remplacer réel par complexe. Dans la suite, sauf précision contraire, les fibrés considérés sont réels.

**Définition 2.3.3.** Lorsque $E$ et $B$ sont des variétés différentiables de classe $C^k$, le fibré vectoriel $(E,B,p)$ est de classe $C^k$ si et seulement si $p$ est de classe $C^k$, et il existe des trivialisations locales de classe $C^k$.

Le fibré tangent à une variété de classe $C^k$, $k \geq 1$, est un fibré vectoriel de classe $C^{k-1}$.
Exemples : le fibré normal à une sous-variété de $\mathbb{R}^p$ ; le fibré canonique sur l'espace projectif $\mathbb{R}P^n$ (défini comme l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^{n+1}$), d'espace total $E = \{(D, v);\ D \in \mathbb{R}P^n\ ,\ v \in D\}$.

**Définition 2.3.4.** Un morphisme de fibrés (resp. de fibrés de classe $C^k$) est une application continue (resp. différentiable de classe $C^k$) qui commute avec les projections et est linéaire sur la fibre.

Les fibrés vectoriels (resp. les fibrés vectoriel de classe $C^k$) avec les morphismes de fibrés (resp. de classe $C^k$) forment une catégorie.

## 2.4 Construction de fibrés

**Définition 2.4.1.** Etant donné un fibré vectoriel $(E, B, p)$, $E' \subset E$ est un sous-fibré de rang $m$, si et seulement si :
a) pour tout $b \in B$, $E'_b = E_b \cap F$ est un sous-espace vectoriel de dimension $m$, et
b) la restriction de $p$ à $E'$ définit un fibré vectoriel $(E', B, p_{|E'})$.

*Exemple* 2.4.2. Soit $(F, f) : (E_1, B_1) \to (E_2, B_2)$, un morphisme de fibrés vectoriel entre $(E_1, B_1, p_1)$ et $(E_2, B_2, p_2)$. Si $F$ est surjectif sur chaque fibre, alors le noyau de $F$ est un sous-fibré.

*Exercice* 2.4.3. Soit $(F, f) : (E_1, B_1) \to (E_2, B_2)$, un morphisme de fibrés vectoriels entre $(E_1, B_1, p_1)$ et $(E_2, B_2, p_2)$. On suppose que $F$ est de rang constant, c'est à dire que les images des fibres ont une dimension constante. Démontrer que l'image et le noyau de $F$ sont des sous-fibrés.

Le quotient d'un fibré vectoriel par un sous-fibré est un fibré vectoriel.
Le dual d'un fibré vectoriel est un fibré vectoriel.

## 2.5 Le foncteur tangent

Soit $f : M \to N$ une application différentiable de classe $C^k$. On définit $T(f) : T(M) \to T(N)$ par : $T(f)(a, [\gamma]) = (f(a), [f \circ \gamma])$ ; ici $[\gamma]$ est le germe représenté par le chemin local $\gamma$.

**Proposition 2.5.1.** *La formule précédente est bien définie et fonctorielle.*

Il en résulte un foncteur $T$ de la catégorie des variétés différentiables de classe $C^k$ vers la catégorie des fibrés vectoriels de classe $C^{k-1}$. On peut donner une caractérisation du foncteur $T$ :

**Proposition 2.5.2.** *Le foncteur $T$ est caractérisé de façon unique par :*
*a) pour toute variété $M$, $T(M)$ est le fibré tangent ;*
*b) pour toute application différentiable entre ouverts euclidiens, $f : U \to V$, $T(f) : T(U) = U \times \mathbb{R}^m \to T(V) = V \times \mathbb{R}^n$, est donné par la différentielle : $T(f)(a, v) = (f(a), f'(a).v)$ ;*
*c) pour toute carte sur $M$, $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^m$, $T(\phi)$ est la carte associée sur le tangent (cf : prop. 2.2.6).*

La restriction à une fibre de l'application tangente :

$$T_a(f) : T_a(M) \to T_{f(a)}(N) ,$$

est l'application linéaire tangente ou différentielle en $a$. Elle s'exprime dans des cartes locales comme une matrice jacobienne.

## 2.6 Immersions, plongements

**Définition 2.6.1.** Une application de classe $C^k$, $k \geq 1$ entre variétés de classe $C^k$ est une immersion en $a$ si et seulement si l'application tangente $T_a(f)$ est injective. C'est une immersion, si et seulement si c'est une immersion en tout point.

*Remarque* 2.6.2. Il existe des immersions non injectives, et il existe des immersions injectives dont l'image n'est pas une sous-variété.

**Définition 2.6.3.** Une application de classe $C^k$, $k \geq 0$, $f : M \to N$, est un plongement de classes $C^k$ si et seulement si son image est une sous-variété de classe $C^k$ et $f : M \to f(M)$ est un difféomorphisme de classe $C^k$.

**Théorème 2.6.4.** *Une immersion de classe $C^k$ qui est injective et de source une variété compacte est un plongement de classe $C^k$.*

*Exercice* 2.6.5. Montrer que dans l'énoncé précédent on peut remplacer $M$ compacte par $f$ est propre.