Chapitre 4

Formes différentielles

Dans ce chapitre les variétés et les applications différentiables sont lisses.

4.1 1-formes différentielles

Définition 4.1.1. Une 1-forme différentielle (ou forme différentielle de degré 1) sur une variété M est une section du fibré cotangent : $\omega \in \Gamma(T^*M)$.

On note $\Omega^1(M)$ l'espace des 1-formes différentielles sur M. C'est un module sur $C^\infty(M) = \Omega^0(M)$, et la dérivée des fonctions définit une application $\mathbb{R}$-linéaire :

$$d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M) \ .$$

Dans le cas d'un ouvert U de $\mathbb{R}^m$, $\Omega^1(U)$ est libre sur $\Omega^0(U)$, de base les dx_i, $1 \leq i \leq m$, où dx_i est la section constante égale au vecteur e_i^* de la base canonique de $(\mathbb{R}^m)^*$.

Une 1-forme sur U s'écrit donc de manière unique :

$$\omega = \sum_{i=1}^{m} f_i dx_i \ .$$

Une application différentiable $g : M \to N$ induit une application

$$\begin{array}{rccc} g^* : & \Omega^1(N) & \to & \Omega^1(M) \\ & \omega & \mapsto & T^*(g) \circ \omega \circ g \end{array}$$

Si $\phi : U \to V$ est une carte sur la variété M de dimension m, alors l'expression locale d'une 1-forme différentielle ω est :

$$(\phi^{-1})^*\omega = \sum_{i=1}^{m} f_i dx_i \ .$$

Si $\psi : U' \to V'$ est une autre carte sur M, avec expression locale :

$$(\psi^{-1})^*\omega = \sum_{j=1}^{m} g_j dy_j \ ,$$

alors le changement de base s'écrit formellement :

$$dy_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} dx_i \ .$$

La matrice de passage est donc la transposée de la matrice jacobienne du changement de carte.

Définition 4.1.2. Un arc orienté dans M est l'immersion d'un intervalle à reparamétrage orienté près.

Définition 4.1.3. L'intégration d'une 1-forme différentielle sur un arc orienté K paramétré par $\gamma : [a, b] \to M$ est définie avec la formule suivante :

$$\int_K \omega = \int_a^b \gamma^*\omega \ .$$

Le changement de variable montre que cette intégration est bien définie.

4.2 Le fibré des k-formes alternées

Une k-forme alternée sur l'espace vectoriel (réel) V est une forme multilinéaire $u : V^k \to \mathbb{R}$ qui est nulle sur toute suite $(x_1, \dots, x_k)$ dans laquelle il y a une répétition.

Il en résulte que pour toute permutation $\sigma \in \mathcal{S}_k$, on a :

$$u(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = \epsilon_\sigma u(x_1, \dots, x_k) \ .$$

Si V est un espace vectoriel de base $(e_1, \dots, e_m)$, on note $e^*_{i_1} \wedge \dots \wedge e^*_{i_k}$ la k-forme alternée définie par :

$$< e^*_{i_1} \wedge \dots \wedge e^*_{i_k}, (e_{j_1}, \dots, e_{j_k}) >= 0 \text{ si } \{i_1, \dots, i_k\} \neq \{j_1, \dots, j_k\} \ ,$$
$$< e^*_{i_1} \wedge \dots \wedge e^*_{i_k}, (e_{i_k}, \dots, e_{i_1}) >= 1 \ .$$

Proposition 4.2.1. *Si V est un espace vectoriel de base $(e_1, \dots, e_m)$, alors l'espace des k-formes alternées est nul pour $k > m$ et pour $k \leq m$ il a pour base les $e^*_{i_1} \wedge \dots \wedge e^*_{i_k}$, $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m$.*

On note $\Lambda^k(V^*)$ l'espaces de k-formes alternées sur l'espace vectoriel de dimension finie V. On convient que $\Lambda^0(V^*) = \mathbb{R}$. Il existe un produit extérieur des formes alternées :

$$\wedge : \Lambda^k V^* \times \Lambda^l V^* \to \Lambda^{k+l} V^* \ ,$$

qui munit $\Lambda(V^*) = \sum_{k=0}^{\dim(V)} \Lambda^k(V^*)$ d'une structure d'algèbre graduée (super commutative : $g \wedge f = (-1)^{\deg(f)\deg(g)} f \wedge g$). Etant donné une variété, les espaces des k-formes alternées sur les espaces tangents forment un fibré vectoriel noté $\Lambda^k T^*M$.

4.3 k-formes différentielles

Définition 4.3.1. Une k-forme différentielle (ou forme différentielle de degré k) sur une variété M est une section du fibré des k-formes alternées : $\omega \in \Gamma(\Lambda^k T^* M)$.

On utilise la notation $\Omega^k(M)$ pour l'espace des k-formes différentielles sur M : $\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k T^* M)$. C'est un module sur $C^\infty(M) = \Omega^0(M)$.

Le produit extérieur des formes différentielles (produit extérieur sur chaque fibre)

$$\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \to \Omega^{k+l}(M) \ ,$$

munit $\Omega(M) = \sum_{k=0}^{\dim(V)} \Omega^k(M)$ d'une structure d'algèbre graduée (super commutative : $g \wedge f = (-1)^{\deg(f)\deg(g)} f \wedge g$).

Une application différentiable $g : M \to N$ induit une application

$$\begin{array}{rccl} g^* : & \Omega^k(N) & \to & \Omega^k(M) \\ & \omega & \mapsto & \Lambda^k T^*(g) \circ \omega \circ g \end{array}$$

Dans une carte ϕ, une k-forme différentielle s'écrit :

$$(\phi^{-1})^* \omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1, \ldots, i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \ .$$

Si $\psi : U' \to V'$ est une autre carte sur M, avec expression locale :

$$(\psi^{-1})^* \omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{j_1, \ldots, j_k} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} \ .$$

alors le changement de base s'écrit formellement :

$$dy_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} dx_i \ .$$

4.4 Cohomologie de De Rham

La dérivée des fonctions, $d : \Omega^0(M) \to \Omega^1(M)$, s'étend aux formes différentielles.

Définition 4.4.1. La dérivée extérieure d'une k-forme différentielle ω est la $(k+1)$-forme $d\omega$ définie dans une carte ϕ où $(\phi^{-1})^* \omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1, \ldots, i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ par :

$$(\phi^{-1})^* d\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} df_{i_1, \ldots, i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \ .$$

Proposition 4.4.2. $d \circ d = 0$

Définition 4.4.3. Une forme différentielle est exacte si et seulement si elle est dans l'image de d, et fermée si et seulement si elle est dans le noyau de d.

On note $B^k(M)$ l'espace des k-formes différentielles exactes, et $Z^k(M)$ l'espace des k-formes différentielles fermée ; on a : $B^k(M) \subset Z^k(M)$.

Définition 4.4.4. Le k-ième groupe de cohomologie de De Rham est :

$$H^k_{DR}(M) = \frac{Z^k_{DR}(M)}{B^k_{DR}(M)} \ .$$

Proposition 4.4.5 (Fonctorialité)**.** *Toute application différentiable $g : M \to N$ induit une application linéaire*

$$g^* : H^k(N) \to H^k(M) \ ,$$

et $(h \circ g)^* = g^* \circ h^*$.

4.5 Calcul de la cohomologie

Proposition 4.5.1. *a) Pour M connexe, on a $H^0_{DR}(M) = \mathbb{R}$.*
b)Union disjointe : $H^k_{DR}(M \amalg N) = H^k_{DR}(M) \oplus H^k_{DR}(N)$.

Théorème 4.5.2 (Mayer-Vietoris)**.** *Si $M = U \cup V$, avec U et V ouverts, alors il existe une suite exacte longue en cohomologie :*

$$\to H^k_{DR}(M) \xrightarrow{\alpha} H^k_{DR}(U) \oplus H^k_{DR}(V) \xrightarrow{\beta} H^k_{DR}(U \cap V) \xrightarrow{\delta} H^{k+1}_{DR}(M) \to$$

où α est induite par les inclusions : $\alpha = i^*_U \oplus i^*_V$,
β est la différence des deux applications d'inclusion : $\beta = j^*_U - j^*_V$,
δ (le connectant) est défini sur la classe de la forme fermée $\omega = j^*_U(\omega_U) - j^*_V(\omega_V)$, par $\delta[\omega] = [\tilde{\omega}]$, si $i^*_U(\tilde{\omega}) = \omega_U$ et $i^*_V(\tilde{\omega}) = \omega_V$.

Lemme 4.5.3. *Avec les hypothèses précédentes, on a une suite exacte courte :*

$$0 \to \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \longrightarrow \Omega^k(U \cap V) \longrightarrow 0$$

où la première application est induite par les inclusions : $i^*_U \oplus i^*_V$,
et la seconde est la différence des deux applications d'inclusion : $j^*_U - j^*_V$.

Exercice 4.5.4. a) Démontrer que $H^1_{DR}(S^1)$ est de dimension 1.
b) Utiliser l'exponentielle $\theta \mapsto e^{i\theta}$ pour définir un atlas de S^1. Quel est le changement de carte ? En déduire qu'il existe une 1-forme qui s'écrit $d\theta$ dans les deux cartes.
c) Montrer que la forme $d\theta$ précédente représente une base de $H^1_{DR}(S^1)$.

Définition 4.5.5. Une homotopie différentiable entre deux applications différentiables $f, g : M \to N$ est, pour un $\epsilon > 0$, une application différentiable

$$\begin{array}{rrcl} H : &]-\epsilon, 1+\epsilon[\times M & \to & N \\ & (t,x) & \mapsto & H(t,x) = H_t(x) \end{array}$$

telle que : $H_0 = f$ et $H_1 = g$.

On dit que f et g sont différentiablement homotopes.

Théorème 4.5.6 (Homotopie)**.** *Deux applications différentiablement homotopes induisent la même application en cohomologie de De Rham.*

Corollaire 4.5.7 (Equivalence d'homotopie)**.** *Si $f : M \to N$ et $g : N \to M$ sont des applications différentiables telles que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont différentiablement homotopes aux identités, alors $f^* : H^k(M) \to H^k(N)$ est un isomorphisme pour tout k.*

Corollaire 4.5.8 (Lemme de Poincaré)**.** *Pour $k > 0$, $H^k_{DR}(\mathbb{R}^m)$ est nul : toute k-forme fermée sur $\mathbb{R}^m$ est exacte.*

Exercice 4.5.9. Soit $m > 1$. Démontrer que pour tout k, $H^k_{DR}(\mathbb{R}^m - \{0\})$ est isomorphe à $H^k_{DR}(S^{m-1})$.

Proposition 4.5.10. *Pour $m \geq 1$, $H^k_{DR}(S^m)$ est de dimension 1 pour $k = 0$ ou $k = m$, et est nul sinon.*

4.6 Variétés orientables

Définition 4.6.1. Un atlas est orienté si et seulement si tous les changements de cartes sont de déterminant jacobien positif.

Définition 4.6.2. Une variété est orientable si et seulement si elle admet un atlas orienté. Une orientation d'une variété est un atlas orienté, à équivalence orientée près (ou un atlas orienté maximal).

Proposition 4.6.3. *Une variété de dimension m est orientable si et seulement s'il existe sur M une m-forme différentielle qui ne s'annulle pas.*

Une telle forme différentielle définit une orientation et s'appelle forme volume (ou forme d'aire pour les surfaces).

Exercice 4.6.4. Démontrer que les sphères S^m sont des variétés orientables.

Exercice 4.6.5. Démontrer que $\mu_x(u, v) = \det(x, u, v)$ définit une forme d'aire sur la sphère $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

4.7 Intégration des formes différentielles

On va définir l'intégration d'une m-forme différentielle à support compact sur une variété M orientée de dimension m. On utilise pour cela un atlas orienté $\phi_j : U_j \to V_j$, $j \in J$, et une partition de l'unité ρ_j subordonnée aux U_j.

Définition 4.7.1. L'intégrale sur la variété orientée M de dimension m d'une m-forme différentielle ω est définie par :

$$\int_M \omega = \sum_j \int_{V_j} (\phi_j^{-1})^*(\rho_j \omega) \ .$$

Sur $V_j \subset \mathbb{R}^m$ on utilise l'intégrale standard des fonctions à support compact. On démontre (changement de variable) que cette définition ne dépend pas des choix de cartes et de partition de l'unité.

Exercice 4.7.2. Calculer l'intégrale de la forme d'aire μ de l'exercice 4.6.5.

Théorème 4.7.3 (Formule de Stokes, cas compact sans bord)**.** *Soit M une variété compacte orientée de dimension m et ω une m-forme différentielle exacte sur M, alors*

$$\int_M \omega = 0 \ .$$

Remarque 4.7.4. Le cas général du théorème de Stokes traite des formes à support compact sur les variétés orientées à bord (voir document complémentaire).

Corollaire 4.7.5. *Si M est une variété orientable compacte de dimension m, alors $H^m_{DR}(M)$ est non nul : une forme volume n'est pas exacte.*

Corollaire 4.7.6. *Soit M est une variété orientée compacte de dimension m. Deux m-formes sur M qui sont cohomologues (égales en cohomologie) ont la même intégrale.*

On démontre que pour une variété compacte orientée connexe la réciproque est vraie :

Théorème 4.7.7. *Soit M est une variété orientable compacte de dimension m. Alors l'intégrale définit un isomorphisme entre $H^m_{DR}(M)$ et $\mathbb{R}$.*

Exercice 4.7.8. Soit M une variété compacte orientable. Démontrer qu'un difféomorphisme de M qui change l'orientation n'est pas homotope à l'identité. Etudier le cas de l'application antipode sur S^2.

Exercice 4.7.9. Démontrer que sur la sphère S^2 il n'existe pas de champ de vecteur qui ne s'annulle pas. (Montrer qu'avec un tel champ de vecteur on aurait une homotopie entre l'antipode et l'identité).