

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - PARIS 7
Année 2013-2014, Master 1
Géométrie différentielle

Examen du 13/5/2014 (durée : 3 heures)
Aucun document autorisé

I

Soit X le champ de vecteurs sur le plan projectif $\mathbb{R}P^2$ tel que, pour $u = [x : y : z] \in \mathbb{R}P^2$, $X(u)$ est représenté par le chemin local γ_u où $\gamma_u(t) = [(1+t)x : (1+2t)y : (1+3t)z]$ pour $-1 < t < 1$: $X(u) = \gamma'_u(0) = T_0(\gamma_u)(1)$.

1. Donner l'expression de X dans les trois cartes affines associées aux plans de coordonnées de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le flot de X .
3. Dessiner dans chacune des trois cartes la courbe intégrale qui passe par le point $[1 : 1 : 1]$.

II

Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ l'application définie par $g = (g_1, g_2, g_3, g_4)$ avec :

$$\begin{cases} g_1(u, v) &= (2 + 3 \cos(2\pi u)) \cos(4\pi v) \\ g_2(u, v) &= (2 + 3 \cos(2\pi u)) \sin(4\pi v) \\ g_3(u, v) &= 3 \sin(2\pi u) \cos(2\pi v) \\ g_4(u, v) &= 3 \sin(2\pi u) \sin(2\pi v) \end{cases}$$

On note K l'image de g .

1. Démontrer que g est une immersion.
2. Démontrer que g induit une application différentiable $\bar{g}$ du tore $T = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{R}^4$.
3. Démontrer que K est une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^4$ difféomorphe à un quotient de T qu'on précisera.

III

On note $N = (0, 0, 1)$ et $S = (0, 0, -1)$ les pôles de la sphère S^2 , et A l'application qui à $x \in S^2$ associe $-x$.

1. Soit $\alpha_N : S^2 \rightarrow [0, 1]$, $\alpha_S : S^2 \rightarrow [0, 1]$, une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de la sphère S^2 par $S^2 - \{N\}$ et $S^2 - \{S\}$.
Démontrer que :

$$\beta_N(x) = \frac{\alpha_N(x) + \alpha_S(-x)}{2} \text{ et } \beta_S(x) = \frac{\alpha_N(-x) + \alpha_S(x)}{2}$$

forment une partition de l'unité telle que $\beta_S = \beta_N \circ A$.

2. (a) Montrer que la forme différentielle μ définie par $\mu_x(u, v) = \det(x, u, v)$ est 2-forme sur la sphère S^2 qui ne s'annule pas (une forme d'aire).
(b) Démontrer que $A^*(\mu) = -\mu$.
(c) Démontrer que si $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est telle que pour tout $x \in S^2$ on a $f(x) = -f(-x)$, alors l'intégrale $\int_{S^2} f\mu$ est nulle.
3. On note $p : S^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2$ la projection canonique sur le plan projectif.
(a) Démontrer que si ω est une forme différentielle de degré 2 sur le plan projectif $\mathbb{R}P^2$, alors $\int_{S^2} p^*(\omega)$ est nulle.
(b) En déduire que sur le plan projectif il n'existe pas de forme différentielle de degré 2 qui ne s'annule pas, puis que $\mathbb{R}P^2$ n'est pas orientable.