

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - PARIS 7
Année 2013-2014, Master 1
Géométrie différentielle

Examen du 13/5/2014, éléments de correction

I

1. Soit $U_z \subset \mathbb{R}P^2$ l'ouvert défini par la condition $z \neq 0$; U_z est un plan affine, et la carte correspondante $\phi_z : U_z \rightarrow \mathbb{R}^2$ est définie par $\phi_z([x : y : z]) = (\frac{x}{z}, \frac{y}{z})$. L'expression du champ de vecteur X dans cette carte, est obtenue en dérivant $\phi_z \circ \gamma_u$, où $u = \phi_z^{-1}(x, y) = [x, y, 1]$. On obtient $(\phi_z)_*(x, y) = (-2x, -y)$.
 De même : $(\phi_y)_*(x, z) = (-x, z)$, $(\phi_x)_*(y, z) = (y, 2z)$.
2. Dans la carte ϕ_z , le flot est défini par :

$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = -y \end{cases}$$

Ce qui s'intègre en $x(t) = x_0 e^{-2t}$, $y(t) = y_0 e^{-t}$. On peut écrire l'expression dans les autres cartes. On obtient (sans surprise!) l'expression globale du flot : $u_t([x, y, z]) = [x e^t, y e^{2t}, z e^{3t}]$.

3. On obtient les courbes d'équations : $x = y^2$, $xz = 1$ et $z = y^2$.

II

1. On vérifie que la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial g_i}{\partial u}, \frac{\partial g_i}{\partial v} \right)_{1 \leq i \leq 4}$ est de rang 2.
2. On montre que g passe au quotient :

$$\forall (m, n) \in \mathbb{Z}^2, g(u + m, v + n) = g(u, v)$$

et on justifie que l'application quotient est différentiable : en restreignant convenablement la projection canonique $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ on obtient des cartes, dans lesquelles l'expression de $\bar{g}$ est celle de l'énoncé; l'argument montre que $\bar{g}$ est toujours une immersion.

3. Puisque $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ est une variété compacte, son image est compacte, et $\bar{g}$ est un difféomorphisme local. L'image K est donc une sous-variété compacte. On vérifie que

$$\bar{g}(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{g}(\bar{u}', \bar{v}') \Leftrightarrow (\bar{u}', \bar{v}') = (\bar{u}, \bar{v}) \text{ ou } (\bar{u}', \bar{v}') = (-\bar{u}, \bar{v}' + \frac{1}{2}).$$

La variété K est un quotient non orientable du tore : la bouteille de Klein.

III

1. On vérifie que les applications β_N, β_S :
 ont la même classe que α_N et α_S ,
 ont le bon support,
 sont de somme égale à 1,
 vérifient $\beta_S = \beta_N \circ A$.
2. (a) Les vecteurs tangents à S^2 en x sont les vecteurs orthogonaux à x . La formule $\mu_x(u, v) = \det(x, u, v)$ définit une 2-forme alternée sur $T_x(S^2)$ (propriété du déterminant). Cette 2-forme ne s'annule pas : elle est non nulle sur deux vecteurs indépendants de $T_x(S^2)$. Il convient de dire un mot sur la différentiabilité : c'est la restriction à S^2 et $T(S^2) \subset T(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ de la 2 forme $\Omega_{(x_1, x_2, x_3)} = x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2$ qui de part son expression est lisse.
 (b) $A^*(\mu)_x(u, v) = \mu_{A(x)}(T(A)_x(u, v)) = \mu_{-x}(-u, -v) = -\mu_x(u, v)$.

- (c) On peut utiliser les cartes stéréographiques ϕ_N , et $\phi_S = \phi_N \circ A$ avec un changement de signe pour corriger le fait que ϕ_S n'est pas orientée, ceci avec la partition de l'unité β_N, β_S :

$$\int_{S^2} f\mu = \int_{\mathbb{R}^2} (\phi_N^{-1})^*(\beta_N f\mu) - \int_{\mathbb{R}^2} (\phi_S^{-1})^*(\beta_S f\mu) .$$

On a : $(\phi_S^{-1})^*(\beta_S f\mu) = \phi_N^*(A^*(\beta_N f\mu))$, et
 $A^*(\beta_S f\mu)_x = \beta_N(-x)f(-x)(-\mu_x) = \beta_N(x)f(x)\mu_x \dots$

3. (a) On a : $p = p \circ A$, donc $p^*(\omega) = (A^* \circ p^*)(\omega) = f\mu$. Or $A^*(f\mu)_x = f(-x)A^*(\mu)_x = -f(-x)\mu_x$, donc $\forall x \in S^2, f(-x) = -f(x) \dots$
- (b) Si ω est une 2-forme qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}P^2$, alors $p^*\omega$ qui s'écrit $f\mu$, avec f qui ne s'annule pas a une intégrale non nulle : contradiction.