UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - PARIS 7
Année 2013-2014, Master 1
Géométrie différentielle

Examen partiel du 18/3/2014 (durée : 3 heures)
Aucun document autorisé

I

On note $\mathcal{C}$ le cylindre d'équation $x^2 + y^2 = 1$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Justifier que $\mathcal{C}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.
2. On note $\mathcal{C}_x^+$ (resp. $\mathcal{C}_x^-$) l'intersection de $\mathcal{C}$ avec le demi-espace $x > 0$ (resp. $x < 0$).
   (a) En utilisant la projection sur le plan des coordonnées (y, z), définir des cartes : $\phi_x^\epsilon : \mathcal{C}_x^\epsilon \to]-1, 1[\times\mathbb{R}$, $\epsilon \in \{+, -\}$, et exprimer les applications réciproques $(\phi_x^+)^{-1}$, $(\phi_x^-)^{-1}$.
   (b) Définir de même des cartes ϕ_y^ϵ, $\epsilon \in \{+, -\}$, de façon à obtenir un atlas ; justifier.
3. Soit $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x, y, z) = (x + 1)^2 + y^2 + z^2$.
   (a) Donner l'expression de l'application f dans les cartes, c'est à dire les expressions de $f \circ (\phi_x^+)^{-1}$, etc.
   (b) Pour quels $r > 0$ peut-on prouver par le critère de submersion que $\Gamma_r = f^{-1}(r)$ est une sous-variété ?
   (c) Montrer que $\Gamma_4 \cap \{z \geq 0\}$ est l'image d'une immersion (chercher un paramétrage).
   (d) Montrer que Γ_4 est l'image d'une immersion.

II

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ les applications définies par :

$$f(x, y) = 4x^2(x^2 - 1) + y^2 \ , \ g(x, y, z) = f(x, y)^2 + z^2 \ .$$

1. Pour quelles valeurs du paramètre réel k le sous-ensemble C_k de $\mathbb{R}^2$ défini par l'équation $f(x, y) = k$ est-il une sous-variété ?
2. Montrer que le sous-ensemble Σ de $\mathbb{R}^2$ défini par l'équation $g(x, y, z) = \frac{1}{4}$ est une sous-variété de dimension 2 (une surface).
3. Discuter la nature de l'intersection de Σ avec les plans d'équation $z = h$, $h \in \mathbb{R}$: Est-ce une sous-variété ? Combien compte-t-elle de composantes connexes ?

III

La notation S^n désigne la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ pour la métrique euclidienne.
Soit $F : S^2 \to \mathbb{R}^6$ l'application définie par :

$$F(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}yz, \sqrt{2}zx) \ .$$

Montrer que $F(S^2)$ est une sous-variété de S^5 difféomorphe au plan projectif $\mathbb{R}P^2$.