

Cours de géométrie différentielle

Christian Blanchet

M1, Paris-Diderot, 2013-2014

Résumé

L'objectif du cours est de traiter les notions de bases en géométrie des variétés différentiables : espace tangent, formes différentielles, champs de vecteurs, connexions, structures riemanniennes, en présentant de nombreux exemples de petite dimension et un choix de théorèmes significatifs.

Bibliographie

- Introduction aux variétés différentielles, Jacques Lafontaine.
- Differential Geometry, Clifford Henry Taubes.
- Differential Geometry I, Ko Honda,
[http ://www-bcf.usc.edu/~khonda/math535a/notes.pdf](http://www-bcf.usc.edu/~khonda/math535a/notes.pdf) .
- Géométrie différentielle élémentaire, Frédéric Paulin,
[http ://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_geodiff.pdf](http://www.math.u-psud.fr/~paulin/notescours/cours_geodiff.pdf)

Chapitre 1

Variétés différentiables

1.1 Topologie : rappels et compléments

Définition 1.1.1. Une **topologie** sur un ensemble X est un ensemble $\mathcal{T}$ de parties de X

- a) qui contient $\emptyset$ et X ,
- b) qui est stable par intersection finie,
- c) qui est stable par réunion quelconque.

Les éléments de $\mathcal{T}$ sont les **ouverts**, leurs compléments sont les **fermés**.

Définition 1.1.2. Etant donnée une topologie $\mathcal{T}$ sur X , le sous-ensemble $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ est une **base** de la topologie $\mathcal{T}$ si et seulement si tout ouvert $U \in \mathcal{T}$ est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$.

Proposition 1.1.3. Etant donné un ensemble $\mathcal{B}$ de parties de X ? il existe une topologie de base $\mathcal{B}$ si et seulement si :

- a) $\mathcal{B}$ recouvre X ,
- b) $\forall U \in \mathcal{B}, \forall V \in \mathcal{B}, \forall x \in U \cap V, \exists W \in \mathcal{B} \ x \in W \subset U \cap V$.

Une distance définit une topologie qui a pour base les boules ouvertes. La définition métrique de la continuité s'étend aux espaces topologiques :

Définition 1.1.4. Une application entre espaces topologiques est **continue** si et seulement si l'image inverse de tout ouvert est un ouvert.

La **topologie induite** sur un sous-ensemble Y d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ a pour ouverts les $U \cap Y, U \in \mathcal{T}$.

Exercice 1.1.5. a) Vérifier que la restriction à $Y \subset X$ d'une application continue de X dans Z est continue.

b) Montrer que si $f : Z \rightarrow X$ est une application continue telle que $f(Z) \subset Y$, alors f définit une application continue de Z dans Y .

Etant donné un espace topologique X et une relation d'équivalence $\sim$ sur X , la **topologie quotient** est la topologie la plus fine (avec le maximum d'ouverts) qui rend continue la projection canonique $p : X \rightarrow X/\sim$.

Exercice 1.1.6. a) Décrire les ouverts de la topologie quotient.

b) Montrer que si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue compatible avec la relation $\sim$ (préciser ce que cela veut dire), alors l'application induite sur le quotient : $\bar{f} : X/\sim \rightarrow Y$ est continue.

De façon plus générale, étant donnée une famille d'applications :

$$f_i : A_i \rightarrow X, i \in I,$$

de sources les espaces topologiques X_i , la topologie la plus fine qui rend continues les f_i , est appelée la **topologie finale** associée à la famille $(f_i)_{i \in I}$.

Exercice 1.1.7. a) Définir la topologie initiale associée à une famille d'applications à valeurs dans des espaces topologiques :

$$g_i : X \rightarrow B_i, i \in I.$$

b) Définir la topologie produit.

Définition 1.1.8. Un espace compact est un espace topologique séparé qui vérifie la propriété de Borel-Lebesgue : de tout recouvrement ouvert on peut extraire un sous-recouvrement fini.

En français, on dit **quasi-compact** pour un espace topologique non nécessairement séparé qui vérifie la propriété de Borel-Lebesgue. En anglais : *a compact space is not necessarily a Hausdorff space*.

Un **homéomorphisme** est une bijection continue dont la réciproque est continue. La proposition suivante est utile dans la construction d'homéomorphismes.

Proposition 1.1.9. *Toute application continue bijective d'un espace quasi-compact dans un espace séparé est un homéomorphisme.*

Exemple : Le quotient de $\mathbb{R}$ par la congruence modulo $2\pi\mathbb{Z}$ est homéomorphe au cercle unité : $\mathbf{S}^1 \subset \mathbb{C}$.

1.2 Exemples préliminaires

La sphère de dimension 2 et les projections stéréographiques.

Le plan projectif réel et ses cartes affines.

1.3 Variétés topologiques, variétés différentiables

Définition 1.3.1. Pour $n \geq 0$, un espace topologique est localement euclidien de dimension n si et seulement si tout point admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1.3.2. On démontre avec la topologie algébrique que la dimension est bien définie : pour $n \neq m$, un ouvert de $\mathbb{R}^n$ n'est pas homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^m$.

Définition 1.3.3. a) Une **carte** de dimension n sur un espace topologique X est un homéomorphisme entre un ouvert de X et un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

b) Un **atlas** de dimension n d'un espace topologique X est une famille de cartes de dimension n dont les domaines recouvrent X .

Remarque 1.3.4. Un espace topologique est **localement euclidien** de dimension n si et seulement s'il admet un atlas de dimension n .

Exercice 1.3.5. Trouver un atlas sur le tore $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{S}^1$.

Exercice 1.3.6. Montrer qu'un espace localement euclidien connexe (rappeler la définition) est connexe par arcs.

Une variété est un espace localement euclidien séparé avec une condition technique additionnelle, dans ce cours : la paracompacité, qui assure notamment l'existence de *partitions de l'unité*.

Définition 1.3.7. Soit $\mathcal{U} = \{U_i, i \in I\}$, un recouvrement ouvert de l'espace topologique X .

a) Un recouvrement ouvert $\mathcal{V} = \{V_j, j \in J\}$ est **subordonné** à $\mathcal{U}$ si et seulement si tout V_j est contenu dans l'un des U_i .

b) Un recouvrement ouvert $\mathcal{V} = \{V_j, j \in J\}$ est **localement fini** si et seulement si chaque point $x \in X$ a un voisinage ouvert qui ne rencontre qu'un nombre fini de V_j .

Définition 1.3.8. Un espace topologique est *paracompact* si et seulement si il est séparé et pour tout recouvrement ouvert il existe un recouvrement ouvert localement fini subordonné.

Remarque 1.3.9. Un espace topologique est paracompact si et seulement si ses composantes connexes le sont.

Définition 1.3.10. Une **variété topologique** est un espace localement euclidien paracompact.

Théorème 1.3.11. *Un espace topologique localement euclidien connexe est paracompact si et seulement s'il est séparé et réunion dénombrable de compacts (on dit dénombrable à l'infini).*

Changements de cartes, atlas de classe C^k , atlas équivalents.

Définition 1.3.12. Pour $k \geq 1$, une **variété différentiable** de classe C^k est une variété topologique munie d'une classe d'équivalence d'atlas de classe C^k . Une variété lisse est une variété différentiable de classe C^∞ .

Exemples.

1.4 Applications différentiables

Définition 1.4.1. Soient M et N des variétés différentiables de classe C^k , $k \geq 1$; soient $U \subset M$ un ouvert.

- a) Une application $f : U \rightarrow N$ est **différentiable** de classe C^k au voisinage de a si et seulement si, pour toute carte locale ϕ en a et toute carte locale ψ en $b = f(a)$, la composée $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ est différentiable de classe C^k au voisinage de $\phi(a)$.
- b) Une application $f : U \rightarrow N$ est différentiable de classe C^k sur U si et seulement si elle est différentiable de classe C^k au voisinage de tout point a de U .

Remarque 1.4.2. Il suffit de vérifier la condition de différentiabilité pour un choix de cartes.

Définition 1.4.3. Soient M et N des variétés différentiables de classe C^1 , U un ouvert de M .

- a) Une application différentiable de classe C^1 , $f : U \rightarrow N$ est **régulière** en $a \in U$ si et seulement si il existe une carte locale ϕ en a et une carte locale ψ en $b = f(a)$ telle que la différentielle $D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(\phi(a))$ est surjective.
- b) Une valeur $b \in N$ est régulière si et seulement si f est régulière sur $f^{-1}(b)$. Lorsque $f^{-1}(b)$ est non vide et que b est une valeur régulière, on dit que f est une **submersion** en b .

1.5 Inversion locale et fonctions implicites

Théorème 1.5.1 (Inversion locale). Soient V un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application différentiable de classe C^k , $k \geq 1$. Si la différentielle en $a \in V$ est un isomorphisme : $f'(a) \in GL(\mathbb{R}^n)$, alors f est un difféomorphisme local de classe C^k en a .

Remarque 1.5.2. Si f est un difféomorphisme local en tout point de V , alors f est ouverte.

Théorème 1.5.3 (Fonctions implicites). Soient $V \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application différentiable de classe C^k , $k \geq 1$. Si la différentielle partielle par

rapport à la seconde variable $x \in \mathbb{R}^n$ est un isomorphisme en $(a, b) \in V : \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \in GL(\mathbb{R}^n)$, alors l'équation $f(x, y) = f(a, b)$ définit localement une application de classe C^k , $\phi : W \rightarrow W'$; c'est à dire qu'il existe des voisinages ouverts respectifs de a et $b : W$ et W' , tels que :

$$W \times W' \subset V, \text{ et } \forall x \in W \quad \forall y \in W' \quad f(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \phi(x) .$$

Théorème 1.5.4 (Fonctions implicites, version submersion). Soient $V \subset \mathbb{R}^{m+n}$ un ouvert et $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application différentiable de classe C^k , $k \geq 1$. Si f est une submersion en $z \in \mathbb{R}^n$, alors l'équation $f(x) = z$, $x \in V$, définit une variété de classe C^k de dimension m .

Théorème 1.5.5 (Fonctions implicites, version submersion, cas général). Soient M une variété différentiable de classe C^k de dimension $m + n$, et M' une variété différentiable de classe C^k de dimension n , $f : M \rightarrow M'$ une application différentiable de classe C^k , $k \geq 1$. Si f est une submersion en $z \in M'$, alors l'équation $f(x) = z$, $x \in M$, définit une variété N de classe C^k de dimension m .

Démonstration. On démontre en fait que N est une sous-variété de M (cf section suivante).

Soient $a \in N$ et $b = f(a)$. On peut trouver des cartes locales

$$\phi_a : (U_a, a) \rightarrow (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, 0), \quad \psi_b : (U'_b, b) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0),$$

telles que $g = \psi_b \circ f \circ \phi_a^{-1}$ est bien définie. L'hypothèse submersion en a dit que $g'(0)$ est surjective, et quitte à permuter les coordonnées dans $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, on peut supposer que la différentielle partielle par rapport à la seconde variable en zéro, $\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)_0$, est un isomorphisme. L'application $G : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ définie par $G(x, y) = (x, g(x, y))$ satisfait les hypothèses du théorème d'inversion locale : en remplaçant éventuellement ϕ_a et ψ_b par des cartes plus petites (on conserve les mêmes notations), G est un difféomorphisme de classe C^k . La composée :

$$G \circ \phi_a : U_a \rightarrow \mathbb{R}^{m+n},$$

définit une *carte relative* : c'est un difféomorphisme de classe C^k qui induit un homéomorphisme entre $U_a \cap N$ et $\mathbb{R}^m \times \{0\}$. Les cartes ainsi construites forment un atlas de classe C^k sur N . $\square$

1.6 Sous-variétés

Définition 1.6.1. Soit M une variété différentiable de classe C^k de dimension $m+n$. Une partie $N \subset M$ est une sous-variété de classe C^k de dimension m , si et seulement s'il existe un atlas tel que pour toute carte $\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{n+m}$ on a $\phi(U \cap N) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{0\})$.

Théorème 1.6.2. Dans les conditions du théorème ??, l'équation $f(x) = z$ définit une sous-variété de classe C^k de dimension m .

Remarque 1.6.3. Une sous-variété de classe C^k est une variété de classe C^k .

Exemples.

Exercice 1.6.4. Pour une partie $N \subset \mathbb{R}^{n+m}$, démontrer qu'il y a équivalence entre ($k \geq 1$) :

- a) N est une sous-variété différentiable de classe C^k de dimension m ;
- b) N est localement le graphe d'une application de classe C^k d'un ouvert de $\mathbb{R}^m$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$;
- c) N est défini localement par une submersion de classe C^k à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

1.7 Variétés complexes

Cette section n'a pas été traitée en cours.

Définition 1.7.1. Une variété complexe de dimension n est une variété topologique de dimension réelle $2n$ munie d'une classe d'équivalence de cartes à valeur dans un ouvert de $\mathbb{C}^n$ telles que les changements de cartes sont holomorphes.

Exercice 1.7.2. Montrer que la droite projective $\mathbb{C}P^1$ a une structure de variété complexe.

Exercice 1.7.3 (Théorème de d'Alembert-Gauss). Le projectivisé de $\mathbb{C}$ est la droite projective complexe $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \approx \mathbb{C}P^1$.

1. Montrer que la fonction polynomiale $z \mapsto P(z)$ s'étend en une fonction holomorphe $\widehat{P}$ de $\widehat{\mathbb{C}}$ dans lui-même.
2. Montrer que $\widehat{P}$ a au plus n valeurs critiques (non régulières).
3. On note K l'ensemble des valeurs critiques. Montrer que $z \mapsto \text{card}(\widehat{P}^{-1}(z))$ définit une application localement constante sur $\widehat{\mathbb{C}} - K$.
4. Démontrer que $\widehat{P}$ est surjective. Conclure.

Chapitre 2

Espace Tangent, fibrés vectoriel

2.1 Espace tangent à une sous-variété de $\mathbb{R}^n$

Soit M une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, de dimension m et de classe C^k , $k \geq 1$. Un chemin de classe C^k dans M est une application continue d'un intervalle dans M .

Définition 2.1.1. Pour $a \in M$, un vecteur $u \in \mathbb{R}^n$ est tangent à M en a si et seulement s'il existe un chemin de classe C^1 $\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow M$, tel que : $\gamma(0) = a$, et $\gamma'(0) = u$.

Proposition 2.1.2. L'ensemble $T_a(M)$ des vecteurs tangents en a à M est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension m .

Proposition 2.1.3. Si M est définie localement en a par une équation implicite $f(x) = 0$ ($f : V \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ où V est un voisinage ouvert de a dans $\mathbb{R}^n$), alors $T_a(M) = \{u, f'(a).u = 0_{n-m}\}$.

On appelle espace tangent à la sous-variété M le sous-ensemble de $M \times \mathbb{R}^n$ défini par : $T(M) = \{(a, u), a \in M, u \in T_a(M)\}$.

Proposition 2.1.4. Si M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$, de dimension m et de classe C^k , $k \geq 1$, alors son espace tangent est une sous-variété de dimension $2m$ et de classe C^{k-1} de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

2.2 Espace tangent à une variété

Dans le cas intrinsèque, on va définir les vecteurs tangents comme classe d'équivalence de chemins.

2.2.1 L'espace tangent comme ensemble

Définition 2.2.1. Soit M une variété de classe C^k , $k \geq 1$. Deux chemins locaux de classe C^1 en a :

$$\gamma_i :]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow (M, a) ,$$

ont même germe en a si et seulement si en composant avec une carte locale ϕ on obtient deux chemins de même vecteur dérivé : $(\phi \circ \gamma_1)'(0) = (\phi \circ \gamma_2)'(0)$.

Remarque 2.2.2. La condition ne dépend pas de la carte locale choisie.

2.2.2 L'espace tangent comme variété

2.3 Fibrés vectoriels

2.4 Le foncteur tangent