

Topologie des variétés de petite dimension

Christian Blanchet

M2, Paris-Diderot (Paris 7), 2015-2016

Résumé

Le but du cours est d'introduire à l'étude topologique des variétés de dimension 3 et 4 et de leurs invariants, notamment les invariants quantiques en dimension 3. La présentation sera faite dans le cadre différentiable et utilisera les outils de base de topologie différentielle : théorie de Morse et transversalité. On développera le calcul de chirurgie pour les variétés de dimension 3 et 4 et on l'appliquera à la construction d'invariants. Le formalisme des TQFTs (Topological Quantum Field Theories) sera abordé.

Programme :

1. Construction de variétés de dimension 3 et 4.
2. Théorie classique des noeuds et entrelacs ; construction d'invariants.
3. Présentations des variétés de dimension 3 ; construction d'invariants.
4. Cobordisme, TQFT.
5. Présentations des variétés de dimension 4 ; calcul des invariants classiques.

Bibliographie :

1. Robert Gompf, Andras Stipsicz, 4-manifolds and Kirby calculus, AMS.
2. Dale Rolfsen, Knots and Links, AMS Chelsea Publishing 2003.
3. Louis Kauffman, Knots and Physics, Series on knots and everything.
4. Vladimir Turaev, Quantum Invariants of Knots and 3-manifolds, De Gruyter.
5. Joachim Kock, Frobenius Algebras and 2D Topological Quantum Field Theories, Cambridge University Press.
6. Tomotada Ohtsuki, Quantum Invariants, World Scientific.

Chapitre 1

Construction de variétés de dimension 3 et 4

1.1 Variétés à bord, recollement

On rappelle qu'une variété topologique de dimension n est un espace topologique séparé à base dénombrable (donc paracompact), dont tout point a un voisinage homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n . Un tel homéomorphisme est une carte. Un atlas est un ensemble de cartes qui recouvrent la variété. En remplaçant \mathbb{R}^n par le demi-espace $] -\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$ on obtient la notion de variété à bord.¹

Une variété lisse est une variété munie d'un atlas maximal dont les changements de carte sont de classe C^∞ . Dans ce cours nous considérerons le plus souvent des variétés lisses.

Remarque 1.1.1. Les variétés topologiques de dimension inférieure ou égale à 3 admettent une structure lisse unique à difféomorphisme près.

Etant donné deux variétés lisses à bord, M_1 et M_2 , de dimension n , et $f : \partial M_2 \rightarrow \partial M_1$ un difféomorphisme, on définit le recollement $M = M_1 \cup_f M_2$ comme l'espace topologique quotient de l'union disjointe $M_1 \amalg M_2$ par la relation d'équivalence engendrée par $x_2 \sim f(x_2)$ pour tout $x_2 \in \partial M_2$.

Théorème 1.1.2. *a) Le recollement $M = M_1 \cup_f M_2$ est une variété topologique de dimension n .*

b) M admet une structure lisse qui étend celle de M_1 et M_2 , unique à difféomorphisme près de support un voisinage arbitraire du lieu de recollement.

Remarque 1.1.3. Une paire de colliers détermine une structure lisse précise sur le recollement M .

1. On pourra consulter le livre de Lee, Introduction to smooth manifolds.

On peut faire cette construction dans le cas où $f : A \rightarrow \partial M_1$ est un plongement d'une sous-variété à bord de dimension $n - 1$, $A \subset \partial M_2$.

Exercice 1.1.4. Montrer que le recollement précédent le long d'une sous-variété du bord admet une structure lisse.

Exercice 1.1.5. Définir une structure lisse sur le produit de deux variétés à bord.

Dans le cadre différentiable, une orientation d'une variété est défini par un atlas orienté : les changements de cartes sont de jacobien positif. Dans le cadre topologique une orientation d'une variété à bord M , de dimension n , est un choix continu pour $x \in M - \partial M$ de générateurs μ_x de $H_n(M, M - x) \simeq \mathbb{Z}$. L'orientation du bord est telle que la restriction au bord d'une carte orientée d'image un ouvert de $] - \infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$ est orientée. La règle pratique s'énonce *normale sortante, premier vecteur*.

Proposition 1.1.6. *Si M_1 et M_2 sont deux variétés différentiables orientées, et si f renverse l'orientation (resp. respecte l'orientation), alors $M = M_1 \cup_f M_2$ est orientée (resp. $M = M_1 \cup_f \overline{M_2}$ est orientée)*

La notation $\overline{M_2}$ désigne la variété M_2 munie de l'orientation opposée.

Définition 1.1.7. a) Une isotopie (lisse) de la variété V vers la variété M est une application (lisse) $H : [0, 1] \times V \rightarrow M$ telle que tout $t \in [0, 1]$, l'application $H_t = H(t, \cdot)$ est un plongement.

b) Deux plongements lisses $f, g : V \rightarrow M$ sont isotopes si et seulement s'il existe une isotopie H telle que $f = H_0$ et $g = H_1$.

Définition 1.1.8. a) Une isotopie ambiante (lisse) d'une variété lisse M est une application (lisse)

$$\begin{aligned} h : [0, 1] \times M &\rightarrow M \\ (t, x) &\mapsto h(t, x) = h_t(x) \end{aligned}$$

telle que : $h_0 = Id_M$, et pour tout t , h_t est un difféomorphisme.

b) Deux plongements $f, g : A \rightarrow N$ sont a-isotopes si et seulement s'il existe un isotopie h telle que : $g = h_1 \circ f$.

Lorsque V est compacte, les notions d'isotopies et d'a-isotopie sont équivalentes. Voir : Hirsch, Differential Topology, ch 8. Dans les deux définition précédentes on pourrait demander que H soit un chemin continu dans les plongements ou les difféomorphismes ; les notions d'isotopie correspondantes sont équivalentes.

Exercice 1.1.9. Montrer que si $f, g : A \rightarrow \partial M_1$ sont des plongements a-isotopes d'une sous variété à bord A de même dimension que ∂M_2 , alors les variétés recollées $M = M_1 \cup_f M_2$ et $M' = M_1 \cup_g M_2$ sont difféomorphes .

1.2 Exemples de variétés de dimension 3

1.2.1 Exemples élémentaires

$S^3, S^2 \times S^1, \Sigma_g \times S^1, \mathbb{R}P^3.$

$S^3/\Gamma, \Gamma \subset S^3$ sous-groupe fini.

Pour deux entiers p et q premiers entre eux, l'espace lenticulaire $L(p, q)$ est le quotient de la sphère S^3 par l'action multiplicative du groupe cyclique d'ordre $p : \langle (\zeta, \zeta^q) \rangle$, $\zeta = e^{\frac{i2\pi}{p}}$.

1.2.2 Chirurgie sur un noeud

Soit $g : D^2 \times S^1 \rightarrow S^3$ un plongement orienté. On obtient une variété orientée de dimension 3 :

$$M_g = (S^3 - g(\mathring{D}^2 \times S^1)) \cup_{g|_{S^1 \times S^1}} \overline{S^1 \times D^2}.$$

La variété M_g est dite obtenue par chirurgie sur g . Le plongement g du tore plein est appelé un noeud solide ou noeud épais.

Remarque 1.2.1. A difféomorphisme près, la variété obtenue ne dépend que de la classe d'isotopie de g .

Exercice 1.2.2. a) Montrer que la sphère S^3 est difféomorphe au recollement $S^1 \times D^2 \cup_{Id_{S^1 \times S^1}} D^2 \times S^1$.

On note $g : D^2 \times S^1 \rightarrow S^3$ le plongement obtenu avec l'inverse du difféomorphisme précédent.

b) Déterminer M_g .

Soit t le difféomorphisme de $D^2 \times S^1$ défini par $t(\alpha, \beta) = (\alpha\beta, \beta)$.

c) Pour $p \in \mathbb{Z}$, montrer que $M_{g \circ t^p}$ est l'une des variétés de la liste de la sous-section précédente.

Etant donné un noeud solide $g : D^2 \times S^1 \rightarrow S^3$, l'homologie $H_1(S^3 - g(\mathring{D}^2 \times S^1))$ est libre, engendrée par la classe du méridien $m = g(S^1 \times 1)$. La classe du parallèle $l = g(1 \times S^1)$ définit un entier $n_g : [l] = n_g[m] \in H_1(\mathring{D}^2 \times S^1)$.

Proposition 1.2.3. *A difféomorphisme près, la variété obtenue ne dépend que de la classe d'isotopie de l'âme du noeud solide : $g|_{0 \times S^1}$ et de l'entier n_g .*

Ici $l = g(1 \times S^1)$ est appelé *parallèle de chirurgie*, et n_g est le coefficient d'autoenlacement ; c'est le nombre d'intersection avec signe de l avec une surface orientée plongée dans S^3 , de bord $K = g(0 \times S^1)$ (surface de Seifert pour K).

1.3 Exemples de variétés de dimension 4

Variétés sans bord : $\mathbb{C}P^2, S^1 \times S^3, S^2 \times S^2, \Sigma_g \times S^2.$

1.3.1 Attachement d'une anse d'indice 2

Soit $g : D^2 \times S^1 \rightarrow S^3$ un plongement orienté. On définit la variété recollée :

$$W_g = D^4 \cup_g D^2 \times \overline{D^2},$$

qu'on appelle variété obtenue par attachement sur la boule d'une anse d'indice 2 le long de g . Son bord $M_g = \partial W_g$ est la variété de dimension 3 étudiée précédemment.

Exercice 1.3.1. Déterminer les groupes $H_*(W_g)$ et $H_*(W_g, M_g)$ ainsi que l'application d'inclusion $i_* : H_*(W_g) \rightarrow H_*(W_g, M_g)$.

Exercice 1.3.2. a) Lorsque g est le plongement standard de $D^2 \times S^1$ dans $S^3 \cong S^1 \times D^2 \cup D^2 \times S^1$.

b) Soit t le difféomorphisme de $D^2 \times S^1$ défini par $t(\alpha, \beta) = (\alpha\beta, \beta)$. Reconnaitre la variété W_{got} .

1.3.2 Attachement d'anses d'indice 2

Soit $g = \amalg_{i=1}^m g_i : \amalg_{i=1}^m (D^2 \times S^1)_i \rightarrow S^3$ un plongement. On définit la variété recollée :

$$W_g = D^4 \cup_g (\amalg_i (D^2 \times D^2)_i),$$

et son bord $M_g = \partial W_g$.

Théorème 1.3.3. a) $H_k(W_L)$ est nul sauf pour $k = 0$ et $k = 2$, et $H_2(W_L)$ est libre de rang m . On obtient une base avec les classes e_i , $1 \leq i \leq m$, où $e_i = [\widehat{\Sigma}_i] = [\Sigma_i \cup (0 \times \overline{D^2})_i]$ est représentée par une surface orientée Σ_i de bord $L_i = g_i(0 \times S^1)$ recollée avec le disque qui est l'âme de l'anse.

b) $H_k(W_L, M_L)$ est nul sauf pour $k = 4$ et $k = 2$, et $H_2(W_L, M_L)$ est libre de rang m . La base de $H_2(W_L, M_L)$ duale de (e_i) , est $f_i = [(D^2 \times 0)_i]$, $1 \leq i \leq m$.

c) Dans les bases précédentes, la matrice du morphisme d'inclusion est :

$$B = (b_{ij})$$

où b_{ij} est déterminé par $[L_i^+] = b_{ij}[m_j] \in H_1(S^3 - L_j)$, avec $L_i^+ = g_i(1 \times S^1)$ et $m_j = g_j(S^1 \times 1)$.

Remarque 1.3.4. Les nombres b_{ij} sont des enlacements pour $i \neq j$ et des auto-enlacements (framings) dans les cas $i = j$. Nous les reverrons en théorie des noeuds.

La suite exacte associée à l'inclusion du bord permet de calculer l'homologie du bord.

Théorème 1.3.5. a) $H_2(M_L)$ est isomorphe au noyau de B_L .

b) $H_1(M_L)$ est isomorphe au conoyau de B_L .

1.4 Forme d'intersection

Etant donnée une variété compacte M de dimension n , de bord décomposée en deux sous-variétés de même bord : $\partial M = A \cup B$, alors on définit pour $p + q = n$ une forme d'intersection

$$H^p(M, B) \otimes H^q(M, A) \rightarrow \mathbb{Z}$$

par $\beta.\alpha = \langle \beta \cup \alpha, [M] \rangle$.

Cette forme est nulle sur la torsion, mais non dégénérée après avoir quotienté par la torsion, ce qui veut dire que chaque quotient d'un groupe par sa torsion est isomorphe au dual de l'autre.

En utilisant la dualité de Poincaré D , on définit la forme d'intersection sur l'homologie : Pour $a = D\alpha \in H_p(M, B)$, $b = D\beta \in H_q(M, A)$: $a.b = \beta.\alpha$.

Dans le cas d'une variété M de dimension $n = 4k$, on obtient une forme d'intersection symétrique sur l'homologie en dimension $2k$: Pour $x, y \in H_{2k}(M)$, $x.y = i_*(x).y$, où $i_* : H_{2k}(M) \rightarrow H_{2k}(M, \partial M)$ est induit par l'inclusion.

Définition 1.4.1. La signature d'une variété compacte orientée W de dimension $4k$ est la signature de la forme d'intersection sur $H_{2k}(W)$.

La signature est un invariant topologique orienté, et la variété opposée a une signature opposée.

Exercice 1.4.2. Déterminer la signature de $\mathbb{C}P^2$, de $S^2 \times S^2$.

Proposition 1.4.3. La forme d'intersection sur $H_2(W_L)$ a pour matrice B_L ; la signature est donc celle de la matrice symétrique B_L .

Chapitre 2

Théorie des noeuds

2.1 Notions de base

Définition 2.1.1. Un noeud K dans \mathbb{R}^3 est une sous-variété difféomorphe au cercle.

Remarque 2.1.2. On considérera des noeuds lisses. On obtient une théorie équivalente en considérant des noeuds linéaires par morceaux.

Exemple 2.1.3. Le noeud trivial : $S^1 \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$.

Exemple 2.1.4. La sphère unité de \mathbb{C}^2 est notée S^3 . On utilisera la projection stéréographique $s : S^3 \setminus \{(0, i)\} \cong \mathbb{R}^3$. Pour p et q premiers entre eux le noeud torique $K_{p,q}$ est l'image du plongement :

$$\begin{aligned} \gamma_{p,q} : S^1 &\mapsto \mathbb{R}^3 \\ z &\mapsto s\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(z^p, z^q)\right) \end{aligned}$$

Exercice 2.1.5. Calculer un paramétrage du noeud $K_{p,q}$. Dessiner la projection sur le premier plan de coordonnées de $K_{2,3}$ et $K_{3,2}$.

Définition 2.1.6. Un entrelacs L à n composantes dans \mathbb{R}^3 est une sous-variété difféomorphe à l'union disjointe de n cercles

Définition 2.1.7. Une isotopie (ambiante et lisse) entre les deux noeuds K et K' dans \mathbb{R}^3 est une application lisse

$$\begin{aligned} h : [0, 1] \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, x) &\mapsto h(t, x) = h_t(x) \end{aligned}$$

telle que : $h_0 = Id_{\mathbb{R}^3}$, $h_1(K) = K'$ et pour tout t , h_t est un difféomorphisme.

Les deux noeuds K et K' sont isotopes si et seulement s'il existe une isotopie entre eux. Si les noeuds K et K' sont orientés, on demande de plus que h_1 respecte les orientations.

Remarque 2.1.8. La même définition vaut pour les entrelacs. Il convient de préciser si les composantes sont ordonnées ou non.

On identifie la sphère $S^3 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ au compactifié d'Alexandroff de \mathbb{R}^3 via la projection stéréographique de pôle $(0, i)$. Un noeud dans \mathbb{R}^3 est ainsi un noeud dans S^3 .

Proposition 2.1.9. *a) Tout noeud dans $S^3 \cong \hat{\mathbb{R}}^3$ est isotope à un noeud dans \mathbb{R}^3 .
b) Deux noeuds dans \mathbb{R}^3 sont isotopes si et seulement s'il le sont dans $\hat{\mathbb{R}}^3 \cong S^3$.*

Le problème fondamental en théorie des noeuds est la classification à isotopie près. On obtient une classification a priori plus fine si on prend en compte l'orientation.

Remarque 2.1.10. Tout difféomorphisme orienté de S^3 est isotope à l'identité par une isotopie lisse (Cerf). Il en résulte que les équivalences définies respectivement avec l'existence d'un difféomorphisme orienté, ou avec l'isotopie, sont les mêmes.

Définition 2.1.11. Un noeud est inversible si et seulement s'il est isotope au noeud muni de l'orientation opposée.

Il existe des noeuds non inversibles. Il est difficile de trouver des invariants qui les détectent.

Définition 2.1.12. Le miroir d'un noeud K est l'image de K par la réflexion $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$. Un noeud est (positivement) amphichéral si et seulement s'il est isotope à son miroir.

Définition 2.1.13. Un diagramme de noeud est une immersion générique d'un cercle dans le plan orienté \mathbb{R}^2 , avec une information *dessus-dessous* en chaque point double. Ici générique signifie que les éventuels points multiples sont des points doubles à tangentes distinctes.

A chaque diagramme on associe une classe d'isotopie de noeud dans \mathbb{R}^3 : on considère d'abord la courbe immergée dans $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, puis on *résout les points doubles* en déplaçant le point de l'arc de dessous au niveau $z = -\epsilon < 0$, et les points voisins à des niveaux intermédiaires.

Ce qui précède s'étend naturellement aux entrelacs.

Définition 2.1.14. Un noeud dans \mathbb{R}^3 est en position générique si et seulement si sa projection sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ est une courbe immergée générique.

Proposition 2.1.15. *Dans l'espace des plongements de S^1 dans \mathbb{R}^3 les plongements en position générique forment un ouvert dense. En particulier, pour tout noeud on peut trouver un noeud isotope arbitrairement proche en position générique.*

Exercice 2.1.16. Déterminer une présentation du groupe fondamental d'un noeud donné par un diagramme.

Exercice 2.1.17. Soit K un noeud dans S^3 donné par un diagramme planaire, et $X_K = S^3 - K$ son complément. Le revêtement infini cyclique de X_K est le revêtement (régulier) \tilde{X}_K associé à l'abélianisation $\pi_1(X_K, *) \rightarrow H_1(X_K) \simeq \mathbb{Z}$. Déterminer une présentation de $H_1(\tilde{X}_K)$.

Théorème 2.1.18 (Reidemeister). *Deux diagrammes définissent des nœuds (resp. des entrelacs), isotopes si et seulement s'ils se correspondent par une suite d'isotopies planes et de mouvements de Reidemeister décrits dans la figure 2.1.*

Remarque 2.1.19. Dans le cas orienté il y a lieu de considérer chaque mouvement de Reidemeister avec les différentes orientations.

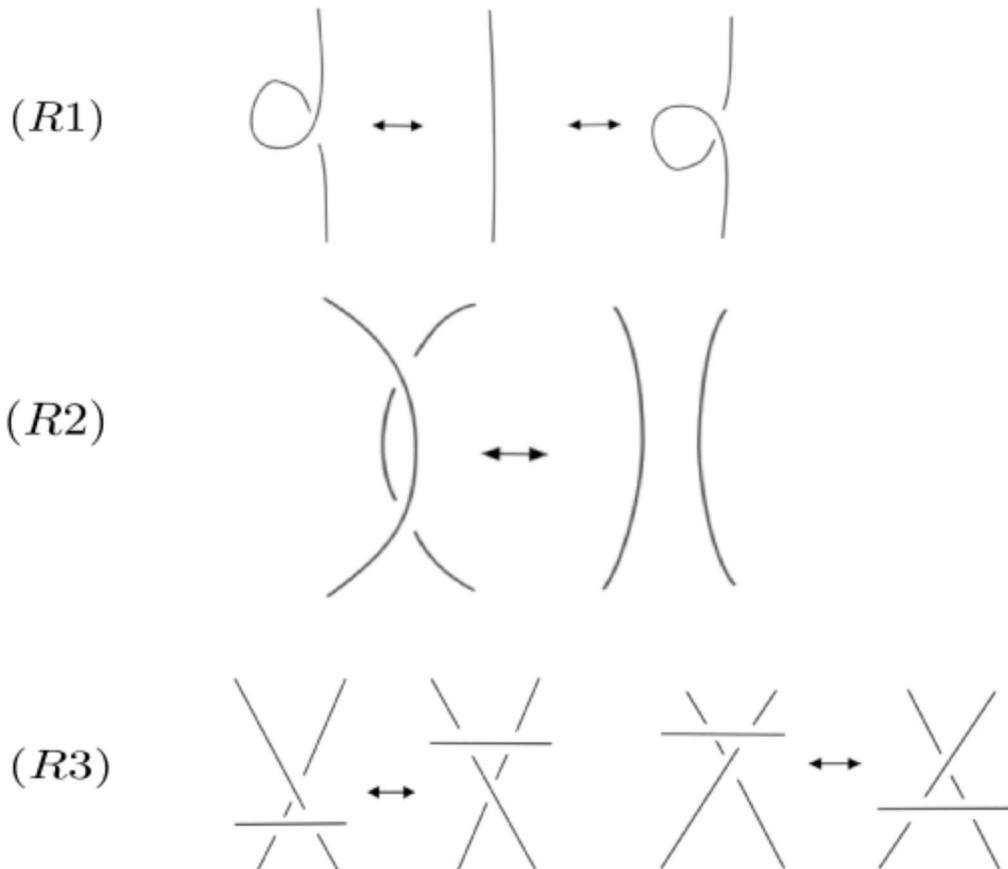


FIGURE 2.1 – Mouvements de Reidemeister

Ce théorème permet de définir des invariants d'isotopie à partir de fonctions sur les diagrammes. Un premier exemple est l'enlacement de deux composantes orientées K et K' . A chaque croisement d'un diagramme on attribue un signe ± 1 selon la règle indiquée sur la figure 2.2.

Proposition 2.1.20. *Soit (K, K') un entrelacs orienté à deux composantes, représenté par un diagramme (D, D') , alors la demi-somme des signes des croisements (mixtes) entre D et D' est un entier invariant par mouvement de Reidemeister, et donc ne dépend que de la classe d'isotopie orientée de (K, K') .*

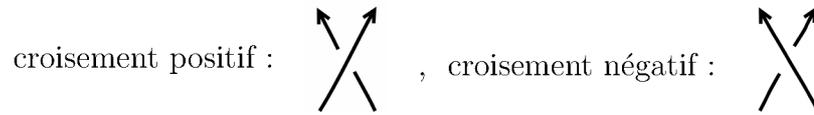


FIGURE 2.2 – Signe d'un croisement

Définition 2.1.21. On appelle enlacement de K et K' l'invariant de la proposition précédente.

Exercice 2.1.22. Montrer que si Σ est une surface orientée de bord K plongée dans S^3 et transversale à K' , alors l'enlacement de K et K' est égal à l'intersection algébrique de Σ et K' .

Noeuds parallélisés

Définition 2.1.23. Un nœud parallélisé est un nœud muni d'une classe d'homotopie de champs de vecteurs transversaux au nœud.

Un diagramme définit un nœud parallélisé en utilisant la parallélisation du tableau.

Théorème 2.1.24. Deux diagrammes orientés définissent des nœuds parallélisés isotopes si et seulement s'ils se correspondent par isotopie plane et mouvements de Reidemeister $R1'$, $R2$ et $R3$.

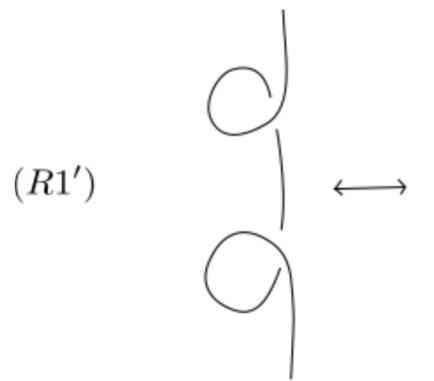


FIGURE 2.3 – Mouvement de Reidemeister $R1'$

2.2 Invariants classiques : groupe fondamental et module d'Alexander

Pour un nœud K dans $S^3 \approx \hat{\mathbb{R}}^3 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, on note : $X_K = S^3 \setminus K$.

Définition 2.2.1. Le groupe du nœud est le groupe fondamental $\pi_1(X_K, \infty)$ du complément du nœud (on suppose que K évite le point ∞).

Le groupe fondamental du nœud ne dépend pas de l'orientation, mais l'orientation est utile pour préciser des générateurs. Etant donné un diagramme orienté, on associe à chaque arc un élément du groupe fondamental représenté par un méridien qui enlace positivement, relié au point de base par un chemin vertical dans le demi-espace positif.

Théorème 2.2.2 (Présentation de Wirtinger). *Le groupe fondamental d'un nœud (ou d'un entrelacs) associé à un diagramme D admet une présentation avec comme générateurs un lacet méridien pour chaque arc, et une relation pour chaque croisement, de la forme $ab = ca$ (a est le lacet correspondant à l'arc supérieur).*

Exercice 2.2.3. Donner une présentation du groupe fondamental de nœud de trèfle (nœud torique $K_{3,2}$) et montrer qu'il existe un morphisme surjectif sur le groupe symétrique \mathcal{S}_3 .

Exercice 2.2.4. Montrer que les deux nœuds représentés dans la figure 2.4 (nœud carré et nœud de mémé) ont des groupes fondamentaux isomorphes.



FIGURE 2.4 – Nœud carré et nœud de mémé

Exercice 2.2.5. Donner une présentation du groupe du nœud associé à un diagramme, avec un générateur pour chaque face bornée représenté par un lacet vertical (générateurs de Dehn).

Le module d'Alexander

Définition 2.2.6. On appelle revêtement cyclique infini du nœud K le revêtement régulier \tilde{X}_K du complément du nœud K , associé au morphisme d'abélianisation :

$$h : \pi_1(X_K, \infty) \rightarrow H_1(X_K, \mathbb{Z}) .$$

Une orientation du nœud K permet de choisir un générateur de $H_1(X_K, \mathbb{Z})$, représenté par un méridien qui enlace K positivement. On identifie alors $H_1(X_K, \mathbb{Z})$ avec le groupe multiplicatif $G = \{t^n, n \in \mathbb{Z}\}$. Le groupe G agit sur le revêtement \tilde{X}_K . Cette action s'étend en une action de l'anneau $\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ sur le complexe singulier $C_*(\tilde{X}_K)$, et cette action commute avec le bord. L'homologie $H_*(\tilde{X}_K, \mathbb{Z})$ est donc un module sur $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Définition 2.2.7. On appelle module d'Alexander du nœud K le $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ module $H_1(\tilde{X}_K, \mathbb{Z})$.

Etant donné un diagramme D d'un nœud orienté K , on associe à chaque face F du diagramme un lacet γ_F , pointé en ∞ , dont l'image orientée est une droite verticale qui intersecte F positivement.

Exercice 2.2.8. Donner une présentation du groupe du nœud avec les générateurs $[\gamma_F]$ (générateurs de Dehn).

On choisit un relevé $\tilde{\infty}$ du point de base dans \tilde{X}_K . Chaque lacet $[\gamma_F]$ se relève en un chemin d'origine $\tilde{\infty}$, noté $\tilde{\gamma}_F$. L'extrémité de ce chemin est un point : $t^{I(F)}\tilde{\infty}$.

Proposition 2.2.9. Pour chaque face F , $I(F)$ est l'enlacement de γ_F avec K .

Si on fixe une face F_e , avec $I_{F_e} = \pm 1$ (on peut prendre une face adjacente à la face non bornée), alors pour chaque face F , on obtient un cycle $c_F = \tilde{\gamma}_F - \frac{t^{I(F)} - 1}{t^{I_{F_e}} - 1} \tilde{\gamma}_{F_e}$, dont la classe est simplement notée F .

Théorème 2.2.10. On obtient une présentation du module d'Alexander $H_1(\tilde{X}_K, \mathbb{Z})$ comme $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ module, avec comme générateurs les faces bornées F , $F \neq F_e$ et pour chaque croisement décrit dans la figure 2.5 une relation : $A - tB + tC - D = 0$.

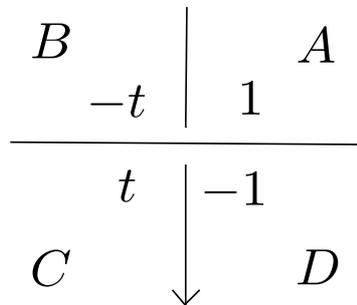


FIGURE 2.5 – Relation d'Alexander

2.2.1 Idéaux élémentaires et polynôme d'Alexander

Soit M un module de présentation finie sur un anneau commutatif Λ . On choisit une présentation donnée par la suite exacte ci-dessous :

$$\Lambda^m \xrightarrow{A} \Lambda^n \rightarrow M \rightarrow 0 .$$

Quitte à ajouter des relations triviales, on peut supposer que $m \geq n$.

Définition 2.2.11. Pour $0 \leq k \leq n$, le k -ième idéal élémentaire ou idéal de Fitting de la présentation est l'idéal $E_k(A)$ engendré par les mineurs d'ordre $n - k$ de la matrice A .

Proposition 2.2.12. *Les idéaux élémentaires ne dépendent pas de la présentation.*

Définition 2.2.13. Les idéaux élémentaires ou de Fitting d'un module de présentation finie sont ceux d'une matrice de présentation.

Remarque 2.2.14. Référence : Eisenbud, Commutative Algebra, ch20. L'hypothèse *génération finie* est suffisante.

Lorsque $E_0(M)$ est un idéal principal l'ordre de M est le générateur de l'idéal $E_0(M)$. Il est défini modulo les inversibles de Λ .

Définition 2.2.15. Le polynôme d'Alexander d'un noeud K est l'ordre du module d'Alexander (qui est principal) $E_0(H_1(\tilde{X}_K))$. Il est défini modulo $\pm t^k$. En particulier, le polynôme d'Alexander est égal modulo $\pm t^k$ au déterminant de la matrice d'Alexander donnée par la présentation du théorème 2.2.10.

2.3 Surfaces de Seifert

Définition 2.3.1. Une surface de Seifert d'un noeud (ou entrelacs) orienté K dans S^3 est une surface orientée plongée dans S^3 de bord K .

Proposition 2.3.2. *Tout entrelacs admet une surface de Seifert.*

Démonstration. Algorithme de Seifert.

Autre preuve : image inverse d'un point régulier par $f : S^3 - K \rightarrow S^1$ qui représente le générateur de $H^1(S^3 - K) = \mathbb{Z}$. □

La définition de l'enlacement s'étend à une paire de cycles disjoints dans S^3 .

Définition 2.3.3. La forme de Seifert associée à une surface de Seifert connexe Σ d'un noeud K est :

$$S : \begin{array}{l} H_1(\Sigma) \otimes H_1(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z} \\ [a] \otimes [b] \mapsto lk(a^+, b) \end{array}$$

Ici a^+ est obtenu en poussant le cycle a suivant la normale positive à Σ . La forme est bien définie : l'enlacement est indépendant du cycle dans sa classe d'homologie.

Théorème 2.3.4. *Soit V la matrice de la forme de Seifert associée à une surface de Seifert Σ du noeud K munie d'une base de $H_1(\Sigma)$. Alors une présentation du module d'Alexander de K est donnée par la matrice $tV - V^T$ (V^T est la matrice transposée).*

Corollaire 2.3.5. *Le polynôme d'Alexander est $\Delta_K = \det(tV - V^T)$ modulo $\pm t^k$.*

Corollaire 2.3.6 (Symétrie du polynôme d'Alexander). $\Delta_K(t^{-1}) = \Delta_K(t)$ modulo $\pm t^k$.

Le polynôme d'Alexander-Conway

Voir l'article de Kauffman : The Conway polynomial, *Topology*, 20(1) :101–108, (1981).

Définition 2.3.7. Le polynôme d'Alexander-Conway d'un entrelacs orienté L est $\nabla_L = \det(xV - x^{-1}V^T)$, où V est une matrice de Seifert de L : matrice de la forme de Seifert pour une surface de Seifert connexe de L .

Théorème 2.3.8. *a) Le polynôme d'Alexander-Conway est bien défini : il ne dépend ni de la surface de Seifert, ni de la base. b) Le polynôme d'Alexander-Conway du nœud trivial vaut 1, celui d'un entrelacs trivial avec plusieurs composantes est nul. c) Si L_+ , L_- et L_0 forment un triplet de Conway, alors :*

$$\nabla_{L_+} - \nabla_{L_-} = (x - x^{-1})\nabla_{L_0}$$

Ici un triplet de Conway est constitué de trois entrelacs L_+ , L_- , L_0 qui sont identiques en dehors d'une boule où L_+ est représenté par un croisement positif, L_- par un croisement négatif, et L_0 sans croisement.

Théorème 2.3.9. *Deux surfaces de Seifert connexes d'un même entrelacs se correspondent par isotopie et modification chirurgicale d'indice un ou deux : ajout ou suppression d'un tube.*

Exercice 2.3.10. a) Ecrire une preuve du théorème précédent utilisant la théorie de Morse. b) Démontrer que le polynôme d'Alexander-Conway défini comme le déterminant de $xV - x^{-1}V^T$, V étant une matrice de Seifert pour une surface de Seifert connexe, est un invariant des entrelacs

2.4 Crochet de Kauffman et polynôme de Jones

Voir l'article de Kauffman : State model and the Jones polynomial, *Topology*, 26(3) :395–407, (1987).

Pour un diagramme non orienté D , le crochet de Kauffman de D est le polynôme de Laurent défini par la formule qui suit. La somme est indexée par les applications s de l'ensemble des croisements dans $\{-1, 1\}$, qu'on appelle *états* du diagramme (en l'absence de croisement, on considère un état). A chaque état s correspond une courbe plongée D_s définie localement dans la figure 2.6. On note $\#D_s$ le nombre de composantes de la courbe ; on pose $\delta = -A^2 - A^{-2}$, et $s(D) = \sum_c s(c)$.

$$\langle D \rangle = \sum_s A^{s(D)} \delta^{\#D_s} .$$



FIGURE 2.6 – Crochet de Kauffman : résolution des croisements

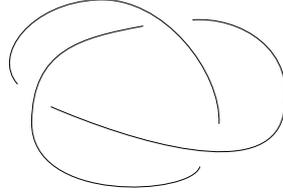


FIGURE 2.7 – Nœud de trèfle positif

Exemples 2.4.1. Pour le diagramme trivial on obtient δ , pour le diagramme du nœud de trèfle positif représenté dans la figure 2.7 on obtient $(-A^{-3} - A^{-7} - A^5)\delta$.

Relations locales : On écrira des relations entre les valeurs du crochet de Kauffman pour des diagrammes qui sont identiques en dehors d'un petit disque où on représente la modification. Le crochet de Kauffman vérifie par exemple les relations décrites dans la figure 2.8. De plus ces relations déterminent le crochet de Kauffman, si on normalise avec la valeur 1 pour l'entrelacs vide.

$$\langle \text{crossing} \rangle = A \langle \text{arc} \rangle + A^{-1} \langle \text{arc} \rangle$$

$$\langle D \circ \rangle = \langle D \rangle \delta$$

FIGURE 2.8 – Relations de Kauffman

Théorème 2.4.2. a) *Le crochet de Kauffman est invariant par les mouvements de Reidemeister R2 et R3.*

b) *Le mouvement R1 multiplie le crochet de Kauffman par $-A^{\pm 3}$ (figure 2.9).*

Pour un diagramme orienté D on note $w(D)$ la somme des signes des croisements (on peut l'appeler le vrillage, *writhe* en anglais). On obtient un invariant d'entrelacs orienté en corrigeant le crochet de Kauffman avec $w(\vec{D})$.

Théorème 2.4.3. *L'expression $f(D) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$ est invariante par mouvement de Reidemeister et définit un invariant d'entrelacs orienté.*

$$\langle \text{positive crossing} \rangle = -A^3 \langle \text{parallel lines} \rangle \quad \langle \text{negative crossing} \rangle = -A^{-3} \langle \text{parallel lines} \rangle$$

FIGURE 2.9 – Crochet de Kauffman : Reidemeister 1

Le polynôme de Jones original est $V(L) = \left(\frac{f(L)}{-A^2 - A^{-2}} \right)_{A=t^{-\frac{1}{2}}}$. Il est déterminé par $V(\text{trivial}) = 1$ et la relation de Jones

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(L_0)$$

Ici L_+ , L_- et L_0 ont des diagrammes identiques en dehors d'un disque où il y a respectivement : un croisement positif, un croisement négatif et pas de croisement.

Exercice 2.4.4. Montrer que le polynôme V distingue les nœuds de trèfle droit et gauche.

Exercice 2.4.5. Calculer V pour le nœud de huit (figure 2.10) et son miroir. Est-ce que le nœud de huit est isotope à son miroir ?

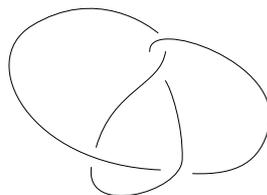


FIGURE 2.10 – Nœud de huit

Bibliographie

[test] ...