

Chapitre 3

Présentation des variétés de dimension 3, construction d'invariants

3.1 Décomposition en anses

3.1.1 Cas général

Définition 3.1.1. Soient W une variété à bord de dimension n et $g : D^{n-k} \times S^{k-1} \rightarrow \partial W$ un plongement. L'attachement d'une anse d'indice k suivant g est la variété $W' = W \cup_g (D^{n-k} \times D^k)$.

Lorsque W est orientée, on dit que l'attachement est orienté si l'orientation de W s'étend à W' .

Définition 3.1.2. Une décomposition en anses d'une variété compacte est un difféomorphisme avec une variété obtenue par attachement successifs d'anses.

La théorie de Morse produit des décompositions en anses.

Proposition 3.1.3. *Toute variété compacte admet une décomposition en anses pour laquelle les attachements se font dans l'ordre des indices. Dans le cas sans bord (resp. à bord), il existe une décomposition avec une seule anse d'indice 0 et une seule anse d'indice maximal (resp. aucune anse d'indice maximal).*

Remarque 3.1.4. Si on isotope l'application d'attachement d'une anse, on obtient une variété difféomorphe.

Proposition 3.1.5. *La classe d'isotopie d'un plongement $g : D^{n-k} \times S^{k-1} \rightarrow M$ est déterminée par celle de $g|_{0 \times S^{k-1}}$ et la classe d'homotopie du champ de repères défini par $dg|_{0 \times S^{k-1}}$*

On appelle corps en anses de dimension n et de genre g , la variété obtenue par attachement orienté de g anses d'indice 1 à une boule de dimension n .

Remarque 3.1.6. Tous les attachements orientés d'anses d'indice 1 à une variété connexe sont isotopes.

3.1.2 Cas des V variétés de dimension 3

Définition 3.1.7. Un scindement de Heegaard d'une variété compacte orientée sans bord de dimension 3, M , est une décomposition comme réunion de deux corps en anses de bord commun : $M \simeq H \cup_{\Sigma} H'$.

Proposition 3.1.8. *Toute variété compacte orientée sans bord de dimension 3 admet un scindement de Heegaard.*

Définition 3.1.9. Une coupure (cut system) sur une surface compacte orientée sans bord de genre g , Σ_g , est un ensemble de g courbes disjointes plongées dont le complément est connexe.

Un corps en anse de bord Σ_g , peut être obtenu à partir de $[0, 1] \times \Sigma_g$ par attachement sur $1 \times \Sigma_g$ de g anses d'indice 2, puis d'une anse d'indice 3. Les courbes d'attachement des anses d'indice 2 forme une coupure a qui détermine le corps en anse H_a à un difféomorphisme près qui est l'identité sur le bord.

Définition 3.1.10. Un diagramme de Heegaard de genre g est une surface Σ_g , munie de deux coupures $a = \{a_1, \dots, a_g\}$, $b = \{b_1, \dots, b_g\}$ (on peut supposer que a et b sont transverses).

Un diagramme de Heegaard (Σ_g, a, b) définit une variété de dimension 3 $M = H_a \cup_{\Sigma_g} (-H_b)$.

Proposition 3.1.11. *Toute variété de dimension 3 est difféomorphe à une variété construite à partir d'un diagramme de Heegaard.*

3.2 Calcul de Kirby

On rappelle qu'un entrelacs parallélisé L définit une variété de dimension W_L , obtenue par attachement d'anses d'indice 2 le long de L et son bord $\partial W_L = S^3(L)$. On dit que $S^3(L)$ est la variété obtenue par chirurgie le long de L .

Remarque 3.2.1. Il n'est pas nécessaire d'orienter L : En changeant l'orientation de L on obtient des variétés difféomorphes

Théorème 3.2.2 (Rochlin, Lickorish, Wallace). *Toute variété de dimension 3 orientée compacte sans bord admet une présentation de chirurgie, c'est à dire est difféomorphe à une variété $S^3(L)$.*

Si L' est obtenu en ajoutant à L une composante triviale avec coefficient de framing 1 (resp. -1), alors $S^3(L')$ est difféomorphe à $S^3(L)$, et $W_{L'}$ est somme connexe de W_L avec $\mathbb{C}P^2$ (resp. $\overline{\mathbb{C}P^2}$). Cette modification est appelée une stabilisation.

Si L' est obtenu à partir de L en remplaçant la composant L_j par L'_j qui est somme connexe de L_j avec un parallèle de L_i qui suit la parallélisation, alors $W_{L'}$ est difféomorphe à W_L . Cette modification est appelée glissement d'anse.

En faisant glisser plusieurs fois sur une composante triviale, on obtient la modification de Fenn-Rourke décrite dans la figure 3.1.

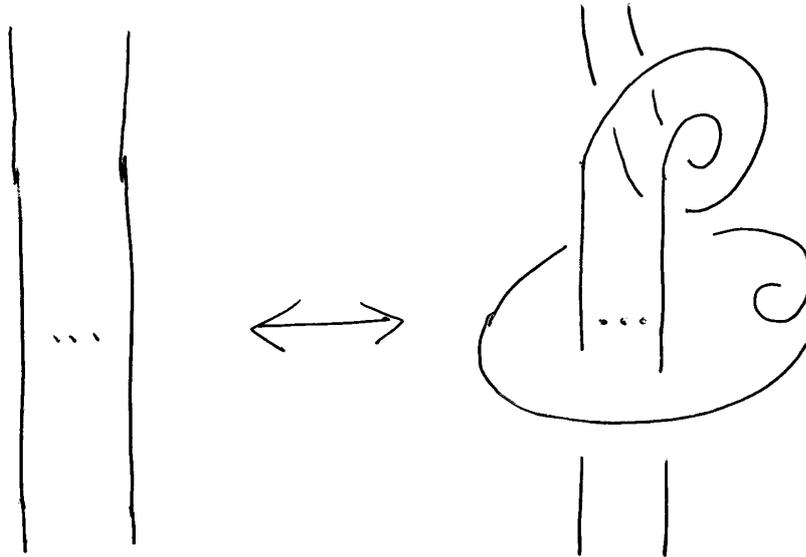


FIGURE 3.1 – Mouvement de Fenn-Rourke

Théorème 3.2.3 (Kirby). *Deux variétés $S^3(L)$ et $S^3(L')$, obtenues par chirurgie sur les entrelacs parallélisés non orientés L et L' , sont difféomorphes si et seulement si on peut passer de L à L' par une suite finie de stabilisations et glissements d'anse.*

Corollaire 3.2.4. *Deux variétés $S^3(L)$ et $S^3(L')$, obtenues par chirurgie sur les entrelacs parallélisés non orientés L et L' , sont difféomorphes si et seulement si on peut passer de L à L' par une suite finie de stabilisations négatives et de modifications de Fenn-Rourke 3.1.*

3.3 Construction d'invariants par théorie *skein*

On définit le module de Jones-Kauffman du tore plein comme le $\mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ -module engendré par les entrelacs non orientés parallélisés dans le tore plein $D^2 \times S^1$, quotienté par les relations de Kauffman (les deux relations locales qui définissent le crochet de Kaufman). On le note : $\mathcal{K}(D^2 \times S^1)$. Les générateurs sont représentés par des diagrammes dans la couronne $[-1, 1] \times S^1$. Il y a une structure d'algèbre induite par la superposition de deux diagrammes.

Proposition 3.3.1. *L'algèbre de Jones-Kauffman du tore plein est isomorphe à $\mathbb{Z}[A, A^{-1}][z]$, où le générateur z est représenté par l'âme du tore.*

En spécialisant le paramètre A dans un anneau ou un corps \mathbf{k} , on obtient l'algèbre de Jones-Kauffman spécialisée : $\mathcal{K}_A(D^2 \times S^1) = \mathbf{k}[z]$.

Un plongement $g : D^2 \times S^1 \rightarrow S^3$ définit une forme linéaire :

$$\mathcal{K}(g) : \mathcal{K}(D^2 \times S^1) \rightarrow \mathcal{K}(S^3) = \mathbb{Z}[A, A^{-1}] ,$$

consistant à évaluer le crochet de Kauffman de l'image de l'entrelacs par g (\mathcal{K} s'étend en un foncteur pour les variétés de dimension 3 orientées avec leur plongements).

La forme linéaire $\mathcal{K}(g)$ ne dépend que de la classe d'isotopie de g , représentée par le noeud parallélisé K . Elle ne dépend pas de l'orientation de K . On note $\langle K(x) \rangle$ l'évaluation sur $x \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$, qu'on appelle *crochet de Kauffman de K colorié par x* .

La construction s'étend aux entrelacs. On obtient une forme multilinéaire. On utilise les notations $\langle L_1(x_1), \dots, L_m(x_m) \rangle = \langle L(x_1, \dots, x_m) \rangle = \langle L(x_1 \otimes \dots \otimes x_m) \rangle$. Le choix d'un élément inversible $A \in \mathbf{k}$ permet d'évaluer le crochet de Kauffman. On utilise la même notation $\langle \rangle$.

Définition 3.3.2. Une *couleur de Kirby* associée à la spécialisation $A \in \mathbf{k}$ est un élément $\Omega \in \mathbf{k}[z]$ tel que :

- a) $\forall x \in \mathbf{k}[z], \langle H_{(1,1)}(x, \Omega) \rangle = \langle U_0(x) \rangle \langle U_1(\Omega) \rangle$,
- b) $\langle U_1(\Omega) \rangle \langle U_{-1}(\Omega) \rangle$ est inversible. Ici $H_{(1,1)}$ est l'entrelacs de Hopf avec coefficients de framing +1, et U_ϵ est le noeud trivial avec coefficient de framing ϵ .

Théorème 3.3.3. *Si $\Omega \in \mathbf{k}[z]$ est une couleur de Kirby, alors il existe un invariant des variétés de dimension 3 défini pour une présentation de chirurgie $L = (L_1, \dots, L_m)$ par :*

$$\tau(S^3(L)) = \frac{\langle L_1(\Omega), \dots, L_m(\Omega) \rangle}{\langle U_1(\Omega) \rangle^{b_+} \langle U_{-1}(\Omega) \rangle^{b_-}} ,$$

où (b_+, b_-) est la signature signée de la matrice d'enlacement B_L .

On définit les polynômes de Chebyshev $e_j \in \mathbf{k}[z], j \geq -1$, par

$$e_{-1} = 0 , e_0 = 1 , ze_j = e_{j+1} + e_{j-1} .$$

Pour $j \geq 0, d_j = e_j(-A^2 - A^{-2}) = (-1)^j \frac{A^{2j+2} - A^{-2j-2}}{A^2 - A^{-2}}$.

Théorème 3.3.4. *Si $A \in \mathbf{k}$ est une racine de l'unité d'ordre $2p$, $p \geq 3$, et si p est inversible dans \mathbf{k} , alors*

$$\Omega_p = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{p-2} d_j e_j$$

est une couleur de Kirby.

On note $\tau_p(M)$ l'invariant des 3-variétés ainsi obtenu.

Proposition 3.3.5. *Pour $p = 2r > 2$ (resp. $p = 2r + 1 > 2$) on obtient $\tau_p(M)$ avec la couleur de Kirby réduite :*

$$\tilde{\Omega}_p = \sum_{j=0}^{r-2} d_j e_j \quad (\text{resp. } \tilde{\Omega}_p = \sum_{j=0}^{r-1} d_j e_j).$$