Université Paris Diderot MT1 MM1
L1 - Sciences Exactes 2010-2011

SECTION A — Amphis 1–4–5

Partiel du 13 novembre 2010

Durée: 3 heures.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.

Questions de cours

1. Soient E, F des ensembles (non vides) et $f : E \to F$ une application. Donner la définition de l'injectivité de f, de la surjectivité de f.
2. Dans $\mathbb{R}^n$, à quelle condition dit-on que les m ($m \leqslant n$) vecteurs $v_1, \ldots, v_m$ forment une famille libre ?
3. Qu'est-ce qu'une base de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1-i)z - 2 + i = 0$. On exprimera les racines sous forme algébrique (ou cartésienne).

Exercice 2

1. Soient E, F deux ensembles non vides et $\varphi : E \to F$ une application. Après avoir rappelé la définition de l'image directe et de l'image réciproque, montrer que pour toute partie A de E on a l'inclusion suivante : $A \subset \varphi^{-1}\big(\varphi(A)\big)$.
2. On considère l'application:
$$\begin{aligned} f : [-\pi,\pi] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos x\,. \end{aligned}$$
   (a) Décrire les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:
$$f^{-1}\big(\{0\}\big)\,,\; f^{-1}\big(\,]0,+\infty[\,\big)\,,\; f^{-1}\big([-1,0]\big)\,,\; f\big([\pi/6,\,\pi/3]\big)\,,\; f\big([\pi/2,\,\pi]\big)\,.$$
   (b) Donner un exemple de partie A de $[-\pi,\pi]$ pour laquelle:
$$f^{-1}\big(f(A)\big) \neq A\,.$$

Exercice 3

1. Déterminer la forme polaire des racines de l'équation $z^5 = 1$, où $z \in \mathbb{C}$.
2. Déduire de la question précédente les factorisations dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ du polynôme $X^5 - 1$.

3. Effectuer la division euclidienne du polynôme $X^5 - 1$ par le polynôme $X - 1$.

4. Déduire des deux questions précédentes l'identité suivante :

$$(\star) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad 1+z+z^2+z^3+z^4 = \left(z^2 - 2\cos\frac{2\pi}{5} \cdot z + 1\right)\left(z^2 - 2\cos\frac{4\pi}{5} \cdot z + 1\right).$$

5. On se propose à présent de calculer $a = \cos\frac{2\pi}{5}$ et $b = \cos\frac{4\pi}{5}$.
   A l'aide de l'identité $(\star)$ de la question précédente calculer $a+b$ et $2ab$, puis en déduire que a, b sont racines du trinôme :
$$P(X) = X^2 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{4}.$$

6. Déduire de ce qui précède une expression algébrique exacte de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

Exercice 4 On considère la partie suivante de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; x+3y-2z+4t = 0 \;\text{ et }\; 2x+5y+4z-t = 0\right\}$$

1. Prouver que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminer une base de F.

Exercice 5 On considère les vecteurs de $\mathbb{R}^4$: $u_1 = (1,-2,1,-3)$, $u_2 = (3,-7,4,-5)$ et $u_3 = (2,-1,0,-9)$.

1. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une famille libre.

2. A l'aide d'un théorème du cours que l'on citera, montrer sans calcul que (u_1, u_2, u_3) n'est pas une famille génératrice de $\mathbb{R}^4$.

Exercice 6 Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$T_0(X) = 1,\; T_1(X) = X, \;\text{ et } \forall n \geqslant 1,\; T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X).$$

Ces polynômes s'appellent les *polynômes de Tchebychev* de première espèce. On se propose ici de factoriser $T_n(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

1. Démontrer que $T_2(X) = 2X^2 - 1$ et $T_3(X) = 4X^3 - 3X$.

2. Calculer les racines dans $\mathbb{C}$ des polynômes $T_2(X)$ et $T_3(X)$.

3. En procédant par récurrence, déterminer le degré de $T_n(X)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Calculer par récurrence le cœfficient dominant de $T_n(X)$ (c'est-à-dire le cœfficient du terme de plus haut degré).

5. Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(\theta)\cos(n\theta).$$
   indication : on pourra utiliser la formule classique suivante :
$$\forall a, b \in \mathbb{R},\; 2\cos(a)\cos(b) = \cos(a+b) + \cos(a-b).$$

6. Déduire de la question précédente que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \ \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta).$$

7. Etablir que l'ensemble des racines de $T_n(X)$ est l'ensemble

$$\mathcal{Z}(T_n) = \left\{ \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \mid 0 \leqslant k \leqslant n-1 \right\}$$

indication : on observera que les n réels $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$, pour k tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$, sont deux à deux distincts.

8. Finalement en déduire la factorisation de $T_n(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Examen du 7 janvier 2011

Durée : 3 heures.

SECTION A
Amphis 1, 4 et 5

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.

Exercice 1.
Déterminer les nombres complexes z tels que : $z^3 = 8i$ sous forme polaire, puis sous forme algébrique.

Exercice 2.
Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-ensemble $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x - 2y - 4z = 0\right\}$.

1. Quelles sont les propriétés qu'une partie P de $\mathbb{R}^3$ doit satisfaire pour être un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Puis vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ en montrant qu'elle satisfait ces propriétés.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de F ; en déduire la dimension de F.

Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les trois vecteurs suivants :

$$v_1 = (1, 6, 1),\ v_2 = (1, 3, -5) \text{ et } v_3 = (2, 7, -8).$$

3. Justifier *sans aucun calcul* que la dimension de G vérifie : $2 \leqslant \dim G \leqslant 3$.
4. Démontrer que la famille (v_1, v_2, v_3) n'est pas libre. *Sans aucun calcul supplémentaire*, extraire de cette famille une base $\mathcal{B}_2$ de G, en justifiant soigneusement qu'il s'agit bien d'une base de G. Préciser la dimension de G.
5. Montrer que G est défini par l'équation $11x - 2y + z = 0$. (Autrement dit, montrer que les vecteurs de G sont exactement les vecteurs $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que $11x - 2y + z = 0$.)
6. Déterminer une base $\mathcal{B}_3$ du sous-espace vectoriel $F \cap G$; en déduire la dimension de $F \cap G$.
7. Soit $\mathcal{F}$ la famille de vecteurs obtenue en réunissant $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_3$. Déterminer sans calculs supplémentaires si $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.

a) Donner la définition exacte (en termes de ε) de la formule : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, où $l \in \mathbb{R}$.

b) Déterminer les limites suivantes en justifiant les résultats :

$$(1)\ \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 8} \qquad (2)\ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\sqrt{1 + x + x^2} - 1\right).$$

c) Etudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par :

$$\left[\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f(x) = x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) \quad \text{pour tout } x \neq 0. \end{array}\right.$$

Puis calculer sa dérivée f' et étudier la continuité de f' sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.

1. Rappeler les énoncés du théorème des valeurs intermédiaires et du théorème du maximum.
2. Existe-t-il une application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et telle que $f([0, +\infty[) = [-1, 0] \cup [1, +\infty[$?
3. Existe-t-il une application $f : [0, 1] \to [0, +\infty[$ continue et surjective ?

Exercice 5.
On considère la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $F(x) = e^x + e^{-x} + 2$.

1. La fonction F est-elle paire ou impaire ? Justifier votre réponse.
2. Après avoir justifié la continuité et la dérivabilité de F, étudier ses variations. Puis, déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{F(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{F(x)}{x}$.

On note f la restriction de F à l'intervalle $[0, +\infty[$.

3. Montrer que l'application f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[4, +\infty[$ et que l'application réciproque $f^{-1} : [4, +\infty[\to [0, +\infty[$ est continue.
4. Montrer que l'application réciproque f^{-1} est dérivable sur $]4, +\infty[$. Est-elle dérivable en 4 ?
5. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$: $f'(x) = \sqrt{f(x)\big(f(x) - 4\big)}$.
6. En déduire que la dérivée $(f^{-1})'$ de f^{-1} vérifie pour tout $y > 4$:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{y(y-4)}}$$

Exercice 6.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{x-2}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left[\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n)\,. \end{array}\right.$$

On note $I = [0, \frac{1}{2}]$.

1. Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est définie et appartient à I.
2. Montrer que si la suite $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors sa limite appartient à I et est solution de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$.
3. Déterminer l'unique solution dans l'intervalle I de l'équation $x^2 - 3x + 1 = 0$.
   On note α ce nombre.
4. Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que

$$\text{pour tous } x \text{ et } y \text{ dans } I,\ |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{2}\,|x - y|$$

5. Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$.
6. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
7. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
8. Comment obtenir, à l'aide des résultats précédents, une approximation de α par un nombre rationnel avec une erreur inférieure à 10^{-3} ?

Université Paris–Diderot (Paris 7) MT1–MM1
L1, Sciences exactes 2011–2012

Examen de seconde session du 18 juin 2011

Durée : 3 heures.
Sans document, ni calculette, téléphones mobiles éteints et rangés.

Exercice 1.
Dans cet exercice θ désignera un nombre réel.

1. Trouver les solutions Z complexes de l'équation : $Z^2 - 2\cos(\theta)\,Z + 1 = 0$.
2. Donner les solutions complexes des deux équations suivantes :
$$z^3 = e^{i\theta}, \qquad \text{et} \qquad z^3 = e^{-i\theta}.$$
3. Calculer le polynôme $(z - e^{i\frac{\theta}{3}})(z - e^{-i\frac{\theta}{3}})$ et montrer que ses coefficients sont des nombres réels.
4. En utilisant les questions précédentes, montrer que le polynôme suivant
$$z^6 - 2\cos(\theta)\; z^3 + 1$$
peut s'écrire comme produit de trois polynômes à coefficients réels et chacun de degré 2 que l'on écrira explicitement.

Exercice 2.
Soient $a < b$ deux réels, on considère une fonction f deux fois continument dérivable sur $[a, b]$. On veut montrer la propriété suivante :

$$\text{Il existe } c \in]a, b[\text{ tel que : } \frac{f(a) + f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(c) \tag{1}$$

Pour montrer cette propriété, on pose, pour tout $x \in [a, b]$:

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(a)}{2} - f\left(\frac{x+a}{2}\right) - \frac{(x-a)^2}{8} A$$

avec A un réel.

1. Calculer $\varphi(a)$ et calculer $\varphi'(x)$, pour tout $x \in [a, b]$.
2. Montrer que l'on peut choisir A tel que $\varphi(b) = 0$. (Dans la suite, on suppose donc que le réel A est choisi tel que $\varphi(b) = 0$.)
3. Après avoir énoncé soigneusement le théorème de Rolle, montrer qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que $\varphi'(\xi) = 0$.
4. Après avoir énoncé soigneusement le théorème des accroissements finis, appliquer-le à la fonction f', sur l'intervalle $[\frac{a+\xi}{2}, \xi]$, et montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $A = f''(c)$.
5. Enfin, montrer que la propriété (1) est vérifiée.

SECTION A

Partiel du 12 novembre 2011

Durée : 3 heures.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.

Questions de cours

1. Soit $P(X)$ un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$. Quand dit-on que $r \in \mathbb{C}$ est une racine (ou un zéro) de $P(X)$? Qu'est-ce qu'une racine multiple (de multiplicité $m > 1$) ?
2. Dans $\mathbb{R}^n$, à quelle condition dit-on que les m ($m \geqslant n$) vecteurs $v_1, \ldots, v_m$ forment une famille génératrice ?
3. Qu'est-ce qu'une base de $\mathbb{R}^n$?

Exercice 1 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $\frac{1}{2} z^2 + 2\sqrt{2}\, z + 3 + i = 0$. On exprimera les racines sous forme algébrique (ou cartésienne, c'est-à-dire sous forme $a + ib$, avec a, b des réels).

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^4 - (2+i)z^2 + 1 + i = 0$. On pourra commencer par résoudre l'équation $Z^2 - (2+i)Z + 1 + i = 0$ et on exprimera les racines sous forme algébrique (ou cartésienne).

Exercice 3

1. Soient E, F deux ensembles non vides et $\varphi : E \to F$ une application.
   (a) Rappeler la définition de l'image directe $\varphi(A)$ d'un sous-ensemble $A \subset E$ par φ.
   (b) Rappeler la définition de l'image réciproque $\varphi^{-1}(B)$ d'un sous-ensemble $B \subset F$ par φ.
   (c) Montrer que pour toute partie B de F on a l'inclusion suivante :
   $$\varphi\big(\varphi^{-1}(B)\big) \subset B.$$
2. On considère l'application :
   $$f\colon [-\pi, 2\pi] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x) + 1.$$
   (a) Etudier les variations de la fonction f sur $[-\pi, 2\pi]$, puis représenter son graphe et déterminer son image $f([-\pi, 2\pi])$.
   (b) Décrire les sous-ensembles suivants de $[-\pi, 2\pi]$:
   $$f^{-1}\big(\{2\}\big)\,, f^{-1}\big(\{0\}\big)\,,\ f^{-1}\big(\{1\}\big)\,,\ f^{-1}\big(\{-1\}\big)\,,\ f^{-1}\big(]0,+\infty[\big)\,,\ f^{-1}\big([0,1]\big)$$
   (c) Décrire les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$:
   $$f\big([0,\pi]\big)\,,\ f\big([-\pi,0]\big)\,.$$
   (d) Donner un exemple de partie B de $\mathbb{R}$ pour laquelle : $f\big(f^{-1}(B)\big) \neq B\,.$

Exercice 4

1. Déterminer la forme exponentielle des racines de l'équation $z^7 = 1$, où $z \in \mathbb{C}$.
2. Effectuer la division euclidienne du polynôme $X^7 - 1$ par le polynôme $X - 1$.

3. Déduire de la question précédente que si $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ vérifie $z^7 = 1$, alors :

$$(\star) \quad 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 0.$$

4. Soit $\omega = e^{2i\pi/7}$. Notons $S = \omega + \omega^2 + \omega^4$ et $T = \omega^3 + \omega^5 + \omega^6$.
   (a) Calculer la partie imaginaire de S, puis en déduire qu'elle est strictement positive.
   (b) Démontrer que : $\overline{S} = T$.
   (c) Démontrer que : $S + T = -1$.
   (d) Démontrer que : $S \cdot T = 2$.
5. Déduire de la question précédente que S et T sont les racines du trinôme

$$X^2 + X + 2,$$

   puis calculer la forme algébrique (ou cartésienne) de S et T.

Exercice 5

1. Montrer que le système d'équations linéaires homogène suivant :

$$\begin{cases} x - y + 2z = & 0 \\ y - 2z = & 0 \\ 2x - z = & 0\,. \end{cases}$$

   admet pour unique solution le vecteur nul $(0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$.
   En déduire que les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants (qui sont les “colonnes du système”) :

$$(1, 0, 2),\ (-1, 1, 0),\ (2, -2, -1)$$

   sont linéairement indépendants.
2. Montrer que le système d'équations linéaires homogène suivant :

$$\begin{cases} x - y + 2z = & 0 \\ -x + 2y - 4z = & 0 \\ 2x - y + 2z = & 0\,. \end{cases}$$

   admet une infinité de solutions et déterminer une base de l'espace des solutions du système. Calculer la dimension de l'espace des solutions du système.
   Les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivants :

$$(1, -1, 2),\ (-1, 2, -1),\ (2, -4, 2)$$

   sont-ils linéairement indépendants ?
3. Considérons maintenant le système d'équations linéaires avec second membre suivant :

$$\begin{cases} x - y + 2z = & a \\ -x + 2y - 4z = & b \\ 2x - y + 2z = & c\,. \end{cases}$$

   Montrer que ce système possède au moins une solution si, et seulement si,

$$c = 3a + b.$$

4. On suppose que $a = 0$, $b = c = 1$. Calculer l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} x - y + 2z = & 0 \\ -x + 2y - 4z = & 1 \\ 2x - y + 2z = & 1\,. \end{cases}$$

Examen du 6 janvier 2012

Durée : 3 heures.

SECTION A
Amphis 2A & 4C

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.

Exercice 1.
Déterminer tous les nombres complexes z tels que :

$$z^7 = 64\sqrt{3} + 64i.$$

Exercice 2.

1. On suppose que b est un paramètre dans $\mathbb{C}$ et on considère la fonction polynomiale $S_b(X) = X^3 - b^3$ de la variable complexe X. Effectuer la division euclidienne de $S_b(X)$ par $X - b$.
2. On considère dans la suite le polynôme $P(X) = X^3 - 3X^2 + 3X - 9$. Effectuer la division euclidienne de $P(X)$ par $X - 1$.
3. Déduire de la question précédente que $P(X)$ peut s'écrire comme la différence entre deux cubes.
4. Déduire des questions précédentes une factorisation de $P(X)$ en un produit de polynômes de degré un à coefficients complexes.

Exercice 3.

Soient les vecteurs $u_1 = (1, 3, 2)$, $u_2 = (2, 4, 0)$, $u_3 = (2, 7, 6)$, $u_4 = (2, 5, 2)$ et $u_5 = (1, 2, 1)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

1. Rappeler la définition d'une base d'un espace vectoriel puis celle de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie. Quelle est la dimension de $\mathbb{R}^3$?
2. La famille de vecteurs (u_2, u_4, u_5) est-elle libre ?
3. Justifier soigneusement et *sans aucun calcul* le fait que (u_2, u_4, u_5) est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer les coordonnées du vecteur $(1, 1, 3)$ dans la base (u_2, u_4, u_5).

On considère la partie $F = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 4a + 2b - 3c = 0\}$ de $\mathbb{R}^3$.

5. Rappeler la définition de *sous-espace vectoriel*, puis montrer que la partie F de $\mathbb{R}^3$ vérifie cette définition.
6. *Sans effectuer aucun calcul*, déterminer le sous-espace engendré par u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

On considère le sous-espace G de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4.

7. Déterminer *sans faire de calcul* si la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4) est libre.

8. Montrer que pour tout vecteur $v = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$, l'équation vectorielle :

$$x\,u_1 + y\,u_2 + z\,u_3 + t\,u_4 = v$$

possède (au moins) une solution (x, y, z, t) si et seulement si $4a - 2b + c = 0$.

9. Peut-on conclure à l'aide de la question précédente que l'on a :

$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 4x - 2y + z = 0\right\} ?$$

Justifier soigneusement la réponse.

10. Extraire de la famille de vecteurs (u_1, u_2, u_3, u_4) une base de G et préciser $\dim G$.
11. Justifier le fait que le sous-ensemble $F \cap G$ de $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de ce sous-espace $F \cap G$ puis calculer $\dim(F \cap G)$.

Exercice 4.

1. Rappeler la définition précise (en termes de ε) de la continuité d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en $a \in \mathbb{R}$.
2. Donner la définition exacte (en termes de ε) de la formule : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$, où $l \in \mathbb{R}$.

On considère la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $F(x) = e^x + e^{-x}$.

3. La fonction F est-elle paire ou impaire ? Etudier les variations de F puis esquisser le graphe de F sur $\mathbb{R}$.
4. Déterminer $\lim_{x \to -\infty} \frac{F(x)}{x}$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{2^x}$.

On note f la restriction de F à $[0, +\infty[$.

5. Montrer que l'application f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[2, +\infty[$ et que l'application réciproque $f^{-1} : [2, +\infty[\to [0, +\infty[$ est continue.
6. Montrer que l'application f^{-1} est dérivable sur $]2, +\infty[$. Est-elle dérivable en 2 ?
7. Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$: $f'(x) = \sqrt{(f(x) - 2)(f(x) + 2)}$.
8. En déduire que la dérivée $(f^{-1})'$ de f^{-1} vérifie pour tout $y > 2$

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{\sqrt{(y-2)(y+2)}}.$$

Exercice 5.

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{3}(1 + \cos(x))$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\left[\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n)\,. \end{array}\right.$$

On note $I = [0, 1]$.

1. Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est définie et appartient à I.
2. Montrer que l'équation $x = f(x)$ admet une unique solution dans l'intervalle I.
   On note α ce nombre.
3. Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{3}\,|u_n - \alpha|$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{3^n}$.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α.

Examen du 20 décembre 2012

SECTION A (Cours : J. Dubois)

Durée : 3 heures. Sans document, ni calculette, téléphones mobiles éteints et rangés.

Exercice 1.
On considère les equations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$E \ : \ z^5 + 1 = 0 \qquad E' \ : \ z^4 + \bar{z} = 0$$

1. Ecrire -1 sous forme polaire.
2. Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.
3. Montrer que les solutions de (E) sont solutions de (E').
4. Soit z une solution non nulle de (E'), montrer que $|z| = 1$ puis que z est solution de (E).
5. Résoudre l'équation (E') dans $\mathbb{C}$.

Exercice 2.
On considère le polynôme suivant $P(x) = x^6 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$, où a, b, c et d sont réels.
On suppose que -1 est racine de multiplicité exactement 3 et 1 est racine simple de $P(x)$.

1. Rappeler la définition d'une racine simple, puis celle d'une racine de multiplicité exactement 3.
2. Estimer le nombre de racines de l'équation $P(x) = 0$ en fonction du degré de $P(x)$.
3. Quelles propriétés de P et de ses dérivées peut-on déduire de l'énoncé ?
4. A l'aide de la question précédente, déterminer les coefficients inconnues de $P(x)$.
5. Après avoir effectué la division euclidienne de $P(x)$ par $A(x) = (x+1)^3\,(x-1)$ factoriser $P(x)$ dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 3.
Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le sous-ensemble $F = \{\,(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x - 2y + 3z = 0\,\}$ et les vecteurs $u_1 = (1, 1, 2)$, $u_2 = (2, -1, 1)$ et $u_3 = (-1, 3, 2)$.
On note $G = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ sous-espace vectoriel engendré par (u_1, u_2, u_3).

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base $\mathcal{B}$ de F puis sa dimension.
3. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ? Justifier votre réponse.
4. En déduire la dimension de G.
5. On forme la famille $\mathcal{E}$ en réunissant les vecteurs de $\mathcal{B}$ à ceux de la famille (u_1, u_2, u_3). $\mathcal{E}$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Justifier votre réponse.
6. La famille $\mathcal{B}$ est-elle génératrice de $\mathbb{R}^3$? Justifier votre réponse.
7. En déduire que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme la somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de G.

Exercice 4.
Dans $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs $u_1 = (1, 2, -1, -3)$, $u_2 = (2, -1, -1, 2)$ et $u_3 = (-3, 2, 2, -1)$.
On note $F = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ le sous-espace vectoriel engendré par (u_1, u_2, u_3).

1. Justifier que $F \neq \mathbb{R}^4$ puis calculer une équation de F.
2. Rappeler la définition d'une base de F.
3. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de F.
4. Soit $v = (3, 3, -1, 1)$.
   Montrer que $v \in F$ puis déterminer les coordonnées de v dans la base (u_1, u_2, u_3).

Exercice 5.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2\, e^{-\frac{1}{x^2}}$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f. Calculer sa dérivée.
2. Etudier la limite de f en 0 puis définir $f(0)$ pour obtenir un prolongement par continuité de f en 0.
3. Etudier alors la dérivabilité de f en 0.
4. Calculer $I = f(\mathbb{R}_+)$. Pourquoi I est-il nécessairement un intervalle ?
5. On note g la restriction de f à $\mathbb{R}_+$. Démontrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} et préciser le domaine de définition de g^{-1}.
6. Etudier la continuité et la dérivabilité de g^{-1} ; g^{-1} est-elle dérivable en 0 ? (justifier votre réponse)
7. Calculer $g(1)$ puis déterminer la valeur de la dérivée de g^{-1} en $\dfrac{1}{e}$?

Exercice 6.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{1}{2}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left[\begin{array}{l} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n)\,. \end{array}\right.$$

On note $I = [0, \frac{\pi}{2}]$.

1. Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$ et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est définie et appartient à I.
2. Montrer que l'équation $x = f(x)$ admet une unique solution dans l'intervalle I.
   On note α ce nombre.
3. Soit x, y des réels tels que $x < y$.
   Enoncer le théorème des accroissements finis pour l'application f sur $[x, y]$.
4. Montrer que, pour tous réels x, y, on a $|f(x) - f(y)| \leqslant \dfrac{1}{2}\,|x - y|$.
5. En déduire que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{\pi}{2}\,.$$
6. Que peut-on en conclure pour la suite (u_n) ?
7. Trouver un entier n tel que $|u_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$.

Université Paris–Diderot (Paris 7) MT1–MM1
L1, Sciences exactes 2012–2013

Examen de seconde session du 17 juin 2013

Durée : 3 heures.
Sans document, ni calculette, téléphones mobiles éteints et rangés.

Exercice 1. ***Questions de cours***

1. Qu'est-ce que le *degré* d'un polynôme $P(X) \in \mathbb{C}[X]$?
2. Qu'appelle-t-on *racine* d'un polynôme $P(X) \in \mathbb{C}[X]$?
3. Donner la définition d'une *racine d'ordre p* d'un polynôme $P(X) \in \mathbb{C}[X]$?
4. Déterminer, dans $\mathbb{C}$, les racines des polynômes $P(X) = X^5 - 1$ et $Q(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$. Préciser leur multiplicité puis factoriser sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$, les polynômes $P(X) = X^5 - 1$ et $Q(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$.

Exercice 2.

1. Rappeler la définition d'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^n$. Qu'appelle-t-on *dimension* d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$? Quelle est la dimension de $\mathbb{R}^n$?

Dans $\mathbb{R}^3$ muni des coordonnées (x, y, z), on note $v = (2, 3, 0)$ et $w = (0, 1, 1)$ et on considère les sous-ensembles

$$E := \{(x, y, z) \,|\, -3x + 2y + 3z = 0\} \quad \text{et} \quad F := \{(x, y, z) \,|\, x + y - z = 0\}.$$

2. Pour chacun des ensembles suivants, dire en justifiant votre réponse s'ils sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ ou non : E, F, $E \cap F$, $E \cup F$, $E + F := \{e + f \,|\, e \in E, f \in F\}$.
3. Donner les dimensions de E et F respectivement.
4. Trouver une base, que l'on notera $\mathcal{B}_0$ de $E \cap F$ et donner la dimension de $E \cap F$.
5. Soit $\mathcal{B}_1 := \mathcal{B}_0 \cup \{v\}$. Montrer que $\mathcal{B}_1$ est une base de E.
6. Soit $\mathcal{B}_2 := \mathcal{B}_0 \cup \{w\}$. Montrer que $\mathcal{B}_2$ est une base de F.
7. Montrer que $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.
Soient A et B deux réels. On définit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + 2\,A\,x, & \text{si } x \geqslant 0, \\[2ex] \dfrac{B^2}{1 + x^2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. Expliquer pour quelle(s) valeur(s) de A et B la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Expliquer pour quelle(s) valeur(s) de A et B, la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4.
Dans cet exercice a, b sont des nombres réels tels que $a < b$.

1. Enoncer le Théorème de Rolle.
2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et dérivable sur $[a, b]$ telle que sa dérivée f' soit aussi continue et dérivable sur $[a, b]$. On suppose que $f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$. Montrer que la fonction g définie pour tout x dans $[a, b]$ par :

$$g(x) = (f'(x) - f(x))\, e^x,$$

satisfait aux conditions du Théorème de Rolle.
3. Déduire des questions précédentes qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f''(c) = f(c).$$

Exercice 5.
Dans cet exercice, α désigne un nombre réel tel que $\cos(\alpha) \neq 0$.

1. Rappeler les définitions du module et d'un argument d'un nombre complexe $z \neq 0$.
2. Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe $-i$.
3. Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe z_0 donné par :

$$z_0 = \frac{1 + i\, \tan(\alpha)}{1 - i\, \tan(\alpha)}.$$

4. Trouver les nombres réels α vérifiant l'équation :

$$\left(\frac{1 + i\, \tan(\alpha)}{1 - i\, \tan(\alpha)}\right)^2 = -i.$$

Exercice 6.
On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{4}\left(2 + e^{-x} + e^{-2x}\right)$ et la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ u_{n+1} &= f(u_n) \end{cases}$$

On note $I = [0, 1]$ et on note $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = x - f(x)$.

1. Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$, et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.
2. Montrer que l'équation $x = f(x)$ admet une unique solution dans I. **On note α ce nombre.**
3. Montrer que l'équation $x = f(x)$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R} \setminus I$. En déduire que α est en fait l'unique solution de cette équation dans $\mathbb{R}$.
4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, tels que $x < y$. Enoncer le théorème des accroissements finis pour l'application f sur $[x, y]$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

6. Que peut-on en déduire pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Partiel du 19 octobre 2013

Durée : 2 heures.

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.

Les exercices sont indépendants entre eux.

Questions de cours.

(a) Donner la définition d'une application injective, d'une application surjective, d'une application bijective.

(b) Écrire la formule du binôme de Newton. On rappelle que les coefficients binomiaux sont notés $\binom{n}{k}$ ou C_n^k.

Exercice 1. On rappelle que la forme *algébrique* ou *cartésienne* d'un nombre complexe z est son écriture sous la forme $z = a + \mathrm{i}b$ où a et b désignent deux nombres réels.

(a) Exprimer les racines 3-ièmes de l'unité sous formes exponentielle et algébrique.

(b) Exprimer les racines 3-ièmes de $2 + 2\mathrm{i}$ sous forme exponentielle.

(c) Trouver une racine 3-ième de $2 + 2\mathrm{i}$ qui s'écrive simplement sous la forme algébrique $a + \mathrm{i}b$. Déduire de ce qui précède les formes algébriques des autres racines 3-ièmes de $2 + 2\mathrm{i}$.

(d) En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

(e) Exprimer $\sin(2\alpha)$ en fonction de $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.

(f) Linéariser $\cos^3\alpha$.

(g) Vérifier les formules des points (e) et (f) pour $\alpha = \frac{\pi}{12}$.

Exercice 2. Soit $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $f(z) = z^2 + 2\mathrm{i}z - 2\mathrm{i}$.

(a) Soit w un nombre complexe. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(z) = w$ où l'inconnue est z. L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

(b) Trouver les nombres complexes $z \in \mathbb{C}$ tels que

$$z^2 + (2\mathrm{i} - 1)z - 2i = 0.$$

(c) En déduire l'ensemble $A = \{z \in \mathbb{C} \mid f(z) = z\}$ des points fixes de f.

Soit $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $g(z) = \mathrm{i}z - \mathrm{i} + 1$.

(d) Montrer que g est bijective et déterminer la bijection réciproque g^{-1}.

(e) Déterminer l'ensemble $g^{-1}(A)$.

(f) Donner une interprétation géométrique de l'application g : est-ce une translation, une rotation, une homothétie ? Justifier votre réponse.

Exercice 3. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \cos(2x)$.

(a) Décrire les ensembles $f(\mathbb{R})$ et $f^{-1}(\{0\})$.

Soit $g\colon [0, \pi] \to \mathbb{R}$, définie par $g(x) = \cos(2x)$, la restriction de f à l'intervalle $[0, \pi]$.

(b) Etudier les variations de la fonction g et en dresser le tableau de variations.

(c) Décrire les ensembles $g([0, \frac{\pi}{2}])$ et $g^{-1}(\{0\})$.

Soient maintenant E, F deux ensembles, A, B, deux parties de E, et $h\colon E \to F$ une application.

(d) Montrer que $h(A \cap B) \subset h(A) \cap h(B)$.

(e) Calculer $g^{-1}([0, \frac{1}{2}])$ et en déduire deux intervalles I, $J \subset [0, \pi]$ tels que $g(I \cap J) \neq g(I) \cap g(J)$.

Université Paris–Diderot (Paris 7) MT1–MM1
L1, Sciences exactes 2013–2014

Examen de seconde session du 16 juin 2014

Durée : 3 heures.
Sans document, ni calculette, téléphones mobiles éteints et rangés.

Exercice 1.

1. Déterminer tous les nombres complexes z tels que

$$z^5 = 16 + 16\,\mathrm{i}\sqrt{3}$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - (3-i)z + 4 = 0.$$

Exercice 2.

Les différentes sous-sections sont indépendantes.

1. **Sous-espaces vectoriels**
   (a) Le sous-ensemble $E = \{(3a, a+b, b+2) \,|\, a,\, b \in \mathbb{R}\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
   (b) Le sous-ensemble $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \begin{cases} x - 3y = 0 \\ z - 2x = 0 \end{cases}\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
2. **Famille libre, famille génératrice, base**
   Considérons les vecteurs $u_1 = (1,0,-1)$, $u_2 = (0,-1,1)$, $u_3 = (1,1,0)$ et $u_4 = (3,3,3)$ de $\mathbb{R}^3$.
   (a) La famille (u_1, u_2) engendre-t-elle $\mathbb{R}^3$?
   (b) La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre ?
   (c) La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
3. **Dimension et système d'équations cartésiennes**
   Soit G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $v_1 = (2,-1,0)$ et $v_2 = (3,0,1)$.
   (a) Quelle est la dimension de G ?
   (b) Donner une équation cartésienne de G.

Exercice 3.
On considère la fonction $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2+1} - e^{-\frac{1}{x}}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Rappeler la définition exacte (en termes de ε) de la formule : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, où $l \in \mathbb{R}$.
   En déduire à l'aide de la première question qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in]c,+\infty[\quad f(x) \leqslant 1$.

3. Montrer que f se prolonge par continuité en une fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\left[\begin{array}{l} g(0) = y_0 \\ g(x) = f(x) \quad \text{si} \;\; x > 0 \end{array}\right.$$

où y_0 est un réel que l'on précisera.

4. À l'aide d'un théorème du cours qu'on énoncera, montrer qu'il existe un réel $x_0 \in [0, c]$ tel que : $\forall x \in [0, c] \quad g(x) \leqslant g(x_0)$. En déduire à l'aide de la question 2 que f est majorée sur $]0, +\infty[$.
5. Montrer que $f(2) > 0$. À l'aide d'un théorème du cours qu'on énoncera, en déduire que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $]0, 2]$.

Université Paris-Diderot | **8 novembre 2014**
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I | Toutes sections

Examen Partiel

Durée : 2 heures.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1. Questions de cours

1. On considère le sous-ensemble $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$ de $\mathbb{R}^2$.
   Montrer, en justifiant votre réponse, que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. En utilisant la formule du binôme de Newton, développer l'expression $(z - \mathrm{i})^5$, où z désigne un nombre complexe.
3. On considère l'ensemble $E = \{1, 2, 3\}$.
   Décrire l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. Quel est le cardinal de $\mathcal{P}(E)$?

Exercice 2.

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'image directe $f\,([0, +\infty[)$ de $[0, +\infty[$ par f.
3. Déterminer les images réciproques $f^{-1}\left([\frac{1}{2}, +\infty[\right)$ et $f^{-1}\,([5, +\infty[)$ des intervalles $[\frac{1}{2}, +\infty[$ et $[5, +\infty[$ par l'application f.
4. L'application f est-elle injective, surjective, bijective ? Justifier vos réponses.
5. On considère l'application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $g(n) = f(n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. L'application g est-elle injective, surjective, bijective ? Justifier vos réponses.

Exercice 3.

1. Ecrire le nombre complexe $-\mathrm{i}$ sous forme exponentielle.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = -\mathrm{i}$.

   On définit $u = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \mathrm{i}\frac{1}{2}$.

3. Exprimer u sous forme exponentielle et calculer u^3, u^5, u^{11} et u^{24} sous formes exponentielles, trigonométriques et cartésiennes, en faisant le moins de calculs possible.

4. On définit l'application $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $g(z) = u^3 z - i$.
   (a) Déterminer l'ensemble des points fixes de g.
   (b) La transformation g est-elle une homothétie, une rotation, une translation ? Justifier votre réponse.
   (c) Déterminer le rapport et le centre de g si g est une homothétie, ou l'angle et le centre de g si g est une rotation, ou le vecteur de translation de g si g est une translation, suivant votre réponse à la question précédente.
5. On définit l'application $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par $h(z) = u^{24} z - i$.
   (a) Déterminer l'ensemble des points fixes de h.
   (b) La transformation h est-elle une homothétie, une rotation, une translation ? Justifier votre réponse.
   (c) Déterminer le rapport et le centre de h si h est une homothétie, ou l'angle et le centre de h si h est une rotation, ou le vecteur de translation de h si h est une translation, suivant votre réponse à la question précédente.

Exercice 4.

On définit l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$f(z) = (1 + \mathrm{i})z^2 + (3 + \mathrm{i})z + 2 - 2\mathrm{i},$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$

1. Calculer les racines complexes de l'équation$(1 + \mathrm{i})z^2 + (3 + \mathrm{i})z + 2 - 2\mathrm{i} = 0$.

2. Déterminer les ensembles $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{2 - 2\mathrm{i}\})$.

   On définit à présent l'application $g : \mathbb{C} \setminus \{i, -2\} \to \mathbb{C}$ par

$$g(z) = \frac{1}{(1 + \mathrm{i})z^2 + (3 + \mathrm{i})z + 2 - 2\mathrm{i}}.$$

3. Déterminer les ensembles $g^{-1}(\{0\})$, et $g^{-1}(\{\frac{1+\mathrm{i}}{4}\})$.
4. L'application g est-elle injective ? surjective ? bijective ? Justifier vos réponses.

Université Paris-Diderot
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I — Toutes Sections

2014

Examen du Jeudi 18 décembre Version 2

Durée : 3 heures.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1. Questions de cours.

1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Dire à quelle(s) condition(s) l'ensemble A admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. Donner la définition de la borne supérieure de A.
2. ***Variante*** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$ un nombre réel. Donner la définition précise de $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ell$.
3. On considère l'application $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $g(z) = iz + 3$. Quelle est la nature géométrique de g ? Préciser les caractéristiques de g.

Exercice 2.

1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^6 = 1$.
2. Montrer que i est une solution de l'équation $z^6 = -1$. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $z^6 = -1$ dans $\mathbb{C}$ en exprimant les racines de cette équation sous formes exponentielles, cartésiennes et trigonométriques, et les dessiner sur le cercle unité.

Exercice 3. Considérons dans $\mathbb{R}^3$ les trois vecteurs suivants

$$u_1 = (1, -1, 2), \qquad u_2 = (1, 3, -1), \qquad u_3 = (3, 1, 3).$$

Soit $F = \mathrm{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ le sous-espace vectoriel engendré par u_1, u_2 et u_3.

1. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle libre ? Quelle information peut-on en déduire pour $\dim F$?
2. Le sous-espace vectoriel F est-il de dimension 0 ? de dimension 1 ?
3. En déduire la dimension de F. Montrer que (u_1, u_2) est une base de F. Exprimer le vecteur u_3 comme une combinaison linéaire des vecteurs u_1 et u_2.

Considérons le sous-ensemble G de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -5x + 3y + 4z = 0\}.$$

4. Le sous-ensemble G de $\mathbb{R}^3$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
5. Donner une base $\mathcal{B}$ de G et la dimension de G.
6. Compléter la base $\mathcal{B}$ de G en une base de $\mathbb{R}^3$.

7. A-t-on $F = G$?

Exercice 4. On considère la fonction $h : [-1,1] \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \frac{1}{x}\big(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\big).$$

1. Pour $|u| < 1$, calculer $\big(\sqrt{1+u} - \sqrt{1-u}\big)\,\big(\sqrt{1+u} + \sqrt{1-u}\big)$, puis montrer que $\lim_{x\to 0} h(x) = 0$.
   On note f le prolongement par continuité de h en 0.
2. Etudier la parité et la continuité de f.
3. Montrer que f est dérivable en 0.
4. Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[\setminus\{0\}$. Calculer sa dérivée sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ et montrer qu'elle vérifie :
$$\forall x \in\,]-1,1[\setminus\{0\}\,,\ f'(x) \text{ est du même signe que la fonction } \sqrt{x^2+1} - \sqrt{1-x^2}.$$
5. Déterminer le signe de f' sur $]0,1[$ et dresser le tableau de variation de f.
6. Déterminer $J = f([-1,1])$.
7. On définit l'application $g : [-1,1] \to J$ par $g(x) = f(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$.
   Montrer que g est une bijection.
   On note g^{-1} la bijection réciproque de g.
8. Déterminer la parité, la continuité et le sens de variation de g^{-1}.
9. Etudier la dérivabilité de g^{-1} sur $]-1,1[$. Donner la formule du cours permettant de calculer la dérivée de g^{-1} à partir de celle de g et calculer la dérivée de g^{-1} en 0.
10. Tracer le graphe de g^{-1}.

Université Paris-Diderot
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I — Toutes Sections

Examen de seconde session du 22 Juin 2015 Version 3

Durée : 3 heures.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1.
On se place dans le plan complexe $\mathbb{C}$.

1. Donner l'ensemble des racines cubiques (ou troisièmes) de l'unité, c'est à dire les solutions complexes de l'équation $z^3 = 1$ sous forme exponentielle et sous forme cartésienne.

   Dans la suite on désigne par j la racine cubique dont la partie imaginaire est strictement positive. Soient $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ les applications définies par $f(z) = jz$ et $g(z) = -z$.

2. Déterminer la nature géométrique de l'application f. Montrer qu'elle est bijective, donner l'expression de sa bijection réciproque f^{-1} et déterminer la nature géométrique de l'application f^{-1}.
3. Déterminer la nature géométrique de l'application g. Montrer qu'elle est bijective, donner l'expression de sa bijection réciproque g^{-1} et déterminer la nature géométrique de l'application g^{-1}.
4. On définit le sous-ensemble X de $\mathbb{C}$ par $X = \{z \in \mathbb{C} \mid \ z^3 = |z|^3\}$
   (a) Etudier, la stabilité ou non du sous-ensemble X pour chacune des applications f, g, f^{-1}, g^{-1}. (On rappelle que, par définition, une partie A d'un ensemble E est stable par une application $\varphi : E \to E$ si $\varphi(A) \subset A$).
   (b) Dessiner l'ensemble X dans le plan complexe.

Exercice 2.

1. Soient a, b et c trois nombres réels.

   Résoudre, dans $\mathbb{R}^3$, le système $(E_{(a,b,c\}})$ $\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & y & & & = & a \\ 3x & + & y & + & z & = & b \\ & & y & + & z & = & c \end{array}\right.$

2. On pose
$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$
   En justifiant soigneusement votre réponse, dire si la famille (v_1, v_2, v_3)
   — est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$;
   — est une famille libre dans $\mathbb{R}^3$;
   — est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 3.
Soient $H_1 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4, x+y+z+t=0\}$ et H_2 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs v_1, v_2, v_3, v_4 avec

$$v_1 = (1,1,1,3), v_2 = (3,-1,1,3), v_3 = (3,2,1,6), v_4 = (1,-1,1,1).$$

1. Montrer que H_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Calculer sa dimension et en donner une base.
2. Déterminer un système d'équations linéaires définissant le sous-espace vectoriel H_2. En déduire la dimension de H_2 et donner une base de H_2.
3. À l'aide de la question précédente, calculer la dimension de $H_1 \cap H_2$, et en donner une base.
4. (a) Trouver deux vecteurs u_1 et u_2 dans $\mathbb{R}^4$ tels que :
   — on ait $u_1 \in H_1$ et $u_1 \notin H_2$;
   — on ait $u_2 \in H_2$ et $u_2 \notin H_1$;
   (b) On pose $u = u_1 + u_2$. A-t-on $u \in H_1$? A-t-on $u \in H_2$?
   (c) Le sous-ensemble $H_1 \cup H_2$ est-il un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$? Justifier votre réponse.

Exercice 4. On considère la fonction définie de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{(1-x)\ln(1-x)}{x-2} & \text{si } x < 1 \\ \\ \exp\left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur les intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.
2. Calculer $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ et $\lim_{x \to 1^+} f(x)$. Montrer que la fonction f est prolongeable par continuité au point 1.

   On note désormais g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ et qui prolonge f par continuité.
3. Justifier soigneusement que la fonction g est dérivable sur les intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$. Calculer la dérivée de la fonction g sur chacun de ces intervalles.
4. Etudier la dérivabilité de la fonction g au point 1.
5. On note $f_{|]-\infty,0[}$ la restriction de la fonction g à l'intervalle $]-\infty, 0[$. Dresser le tableau de variations de la fonction $f_{|]-\infty,0[}$.
6. Déterminer l'image directe $J = f_{|]-\infty,0[}(]-\infty,0[)$ de l'intervalle $]-\infty, 0[$ par $f_{|]-\infty,0[}$.
7. Montrer que la fonction $\tilde{f} :]-\infty, 0[\to J$ définie par $\tilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x < 0$ est bijective.
8. Soit h la bijection réciproque de $\tilde{f}$. Montrer que h est continue et dérivable sur son domaine de définition et déterminer son tableau de variations.
9. Calculer $h'(-\frac{2\ln 2}{3})$, la dérivée de h au point $-\frac{2\ln 2}{3}$.

Examen Partiel

Durée : 2 heures.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1.
Dans chacun des cas suivants, dire, en le justifiant, si la famille considérée est libre dans $\mathbb{R}^3$ **et/ou** génératrice de $\mathbb{R}^3$.

1. (u_1, u_2) avec $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 1, 1)$;
2. (v_1, v_2, v_3) avec $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 1, 0)$;
3. (w_1, w_2, w_3, w_4) avec $w_1 = (1, 0, 0)$, $w_2 = (0, 1, 0)$, $w_3 = (1, 1, 0)$, $w_4 = (2, -1, -1)$.

Exercice 2.
Soient E le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ défini par $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $f : E \to E$ l'application définie par

$$\begin{cases} f(n) = 2n - 1, & \text{si } 1 \leq n \leq 3, \\ f(n) = 7 - n, & \text{si } 4 \leq n \leq 6. \end{cases}$$

1. Calculer $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5), f(6)$.
2. Déterminer $f(\{2, 4, 6\})$.
3. Déterminer $f^{-1}(\{3, 4, 5\})$.
4. L'application f est-elle injective ? Justifier votre réponse.
5. L'application f est-elle surjective ? Justifier votre réponse.

Exercice 3.

1. Déterminer les racines carrées du nombre complexe $1 + 2\mathrm{i}$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 - 2z - 2\mathrm{i} = 0.$$

Exercice 4.

1. Donner sous formes exponentielles et cartésiennes les racines cubiques complexes de $27\mathrm{i}$.
2. À l'aide du binome de Newton, développer l'expression $(\mathrm{i}z+1)^3$.
3. En utilisant les questions précédentes, donner sous forme algébrique les solutions complexes de l'équation
$$\mathrm{i}z^3 + 3z^2 - 3\mathrm{i}z - 1 + 27\mathrm{i} = 0.$$

   On définit les applications f, g et h de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ par
$$f(z) = z^3 \ , \ g(z) = iz + 1 \text{ et } h(z) = f \circ g(z)$$
   pour tout $z \in \mathbb{C}$.

4. Quelle est la nature géométrique de l'application g ? Déterminer son centre si g est une rotation ou une homothétie.
5. (a) Représenter graphiquement le triangle T_1 dont les sommets sont les points de $f^{-1}(\{27\mathrm{i}\})$.
   (b) On note T_2 le triangle dont les sommets sont les points de $h^{-1}(\{27\mathrm{i}\})$. Par quelle transformation du plan T_2 est-il obtenu à partir de T_1 ?
   (c) Représenter graphiquement le triangle T_2 en utilisant (a) et (b).
6. On considère le sous-ensemble D de $\mathbb{C}$ défini par $D = \{z \in \mathbb{C} | \arg(z - i) = -\frac{\pi}{4} (\mathrm{mod}\ 2\pi)\}$. Déterminer $g(D)$, l'image directe de D par g et $h(D)$, l'image directe de D par h. Représenter graphiquement D, $g(D)$ et $h(D)$.

Université Paris-Diderot — Année 2015-2016
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I — Toutes sections

Examen du 17 Décembre 2015

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1. Soit $\mathcal{D} = \mathbb{C} \setminus \{-2\mathrm{i}\}$. Soit $H : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ l'application définie par $H(z) = \dfrac{2z-4}{\mathrm{i}z-2}$.

(a) Montrer que $H(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$.

(b) Calculer $H \circ H(z)$ pour tout $z \in \mathcal{D}$.

(c) En déduire que $H : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ est bijective.

(d) Déterminer les points fixes de H, c'est-à-dire les éléments z de $\mathcal{D}$ tels que $H(z) = z$.

Exercice 2. On considère le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - 2y + 2z - t = 0\}.$$

(a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(b) Donner une base $\mathcal{B}$ de F. Quelle est la dimension de F ?

(c) Compléter la base $\mathcal{B}$ en une base de $\mathbb{R}^4$.

(d) Montrer que les vecteurs

$$v_1 = (1, 1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 2, 3, 3), \quad v_3 = (1, 1, 2, 3)$$

appartiennent à F.

(e) Montrer que ces vecteurs forment une base de F.

Les points précédents impliquent que tout vecteur $v \in F$ s'écrit de façon unique sous la forme $v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$, avec $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des réels. Les valeurs $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ sont appelées les *coordonnées* de v par rapport à la base (v_1, v_2, v_3).

(f) Soit $v = (-3, 1, 3, 1)$. Montrer que $v \in F$, et déterminer les coordonnées de v par rapport à la base (v_1, v_2, v_3).

Exercice 3. Soit E une partie de $\mathbb{R}$.

(a) Donner la définition d'un *minorant* de E.

(b) Donner la définition de *borne inférieure* de E.

Soit maintenant $E = \left\{ \dfrac{1}{2n+1} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$.

(c) Donner les valeurs de $\inf E$ et $\sup E$ (sans le justifier).

(d) Montrer, en utilisant la définition de borne inférieure, que la valeur de $\inf E$ est bien celle donnée au point précédent.

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes :

(a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+x^2}}{\cos(\pi x)+2}$, (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|\,(1+x)}{\sqrt{x^2+x^4}}$, (c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}(x^2-x)$.

Exercice 5. On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \frac{1-\cos(\pi x)}{2}.$$

(a) Justifier que f est une fonction continue et dérivable.
(b) Donner l'expression de la dérivée de la fonction f.
(c) Que valent $f(0)$, $f(1)$, $f(\frac{1}{3})$, $f'(0)$, $f'(\frac{1}{3})$?
(d) Montrer que f est strictement croissante sur l'intervalle $I=[0,1]$.
(e) Calculer l'image directe $J=f(I)$ de I par f.

On désigne par $g: I\to J$ la fonction définie par $g(x)=f(x)$ pour tout $x\in I$.

(f) Déduire des points précédents que $g: I\to J$ est bijective.

On note $g^{-1}: J\to I$ la bijection réciproque de g.

(g) Soit $y_0=\frac{1}{4}$. Montrer que $y_0\in J$. Montrer que g^{-1} est dérivable en y_0. Calculer $(g^{-1})'(y_0)$. (*Indication* : il n'est pas nécessaire de calculer explicitement l'expression de g^{-1}.)

Questions bonus.

On définit la fonction h par

$$\begin{array}{rccl} h: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{si } x>0, \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases} \end{array}$$

(h) Montrer que h est continue à droite en 0 (on pourra utiliser la définition de dérivabilité de f en 0).
(i) Montrer que h est continue sur I. En déduire qu'il existe $c\in I$ tel que $h(x)\le h(c)$ pour tout $x\in I$.

Université Paris-Diderot **Juin 2016**
MM1 - Algèbre et analyse élémentaires I Toutes sections

Examen de deuxième session

Durée : 3 heures.
Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et les téléphones portables.
Les exercices sont indépendants entre eux.

Exercice 1. On considère la fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ qui à z associe $f(z) = z^3 - 3iz^2 - 2z + 9i$.

1. Dans cette partie on cherche à résoudre l'équation $f(z) = 9i$.
   (a) Montrer que résoudre l'équation $f(z) = 9i$ équivaut à résoudre l'équation
   $$z(z^2 - 3iz - 2) = 0.$$
   (b) Déterminer les solutions de l'équation $z(z^2 - 3iz - 2) = 0$.
   (c) Montrer que les trois solutions de l'équation $z(z^2 - 3iz - 2) = 0$ sont sur une même droite du plan complexe.
2. Montrer que si un nombre z est sur l'axe imaginaire, son image $f(z)$ est également sur l'axe imaginaire.
3. Trouver les nombres réels dont les images par f sont sur l'axe imaginaire.

Exercice 2. On considère les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :
$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| \leq 2 \right\}, \quad F = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; y < x \right\}.$$

1. Tracer sur une même figure les ensembles E et F.
2. (a) Montrer que E n'est pas inclus dans F.
   (b) Montrer que F n'est pas inclus dans E.
3. Déterminer l'ensemble $G = E \cap F$.
4. Soit A le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ constitué des ordonnées des points (x, y) avec $(x, y) \in G$, c'est-à-dire
   $$A = \left\{ y \in \mathbb{R} \;\middle|\; (x, y) \in G \right\}.$$
   (a) Calculer la borne supérieure de A.
   (b) Montrer que A n'est pas minoré.

Exercice 3. Considérons le système
$$S : \left\{ \begin{array}{rrrl} x & -3y & +4z = & 0 \\ -x & +2y & -2z = & -1 \\ 3x & -4y & +2z = & 5 \end{array} \right.$$

Soit $V = \left\{ v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; v \text{ est solution du système } S \right\}$.

1. Dire, en justifiant votre raisonnement, si l'ensemble V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Résoudre le système S par la méthode du pivot de Gauss.

Exercice 4. On considère dans $\mathbb{R}^3$ la famille de vecteurs suivante :

$$\mathcal{E} = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (-2,0,0), v_3 = (1,1,0), v_4 = (2,2,0), v_5 = (-1,-1,0), v_6 = (1,1,1)\}.$$

1. Trouver deux éléments de $\mathcal{E}$ qui ne forment pas une famille libre (justifier la réponse).
2. Trouver un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ qui est une base de $\mathbb{R}^3$ (justifier la réponse).
3. En vous appuyant sur les points précédents et sans faire de calcul, déterminer si la famille $\mathcal{E}$ est libre.
4. En vous appuyant sur les points précédents et sans faire de calcul, déterminer si la famille $\mathcal{E}$ est génératrice.
5. Soit $\mathcal{B}$ un sous-ensemble de $\mathcal{E}$. Montrer que si $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ alors $v_6 \in \mathcal{B}$.

Exercice 5. Soient a et b deux réels et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2\sin(\pi x^2 - \pi)}{\sqrt{x}} & \text{si } 1 < x \\ ax + b & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^3 - 2x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

1. Pour quelles valeurs des paramètres a et b la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Pour quelles valeurs des paramètres a et b la fonction f est-elle continue au point $x = -1$ et dérivable au point $x = -1$?
3. Calculer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.
4. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.