Chapitre 1

Construction de variétés de dimension 3 et 4

1.1 Variétés à bord, recollement

On rappelle qu'une variété topologique de dimension n est un espace topologique séparé paracompact, dont tout point a un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Un tel homéomorphisme est une carte. Un atlas est un ensemble de cartes qui recouvre la variété. En remplaçant $\mathbb{R}^n$ par le demi-espace $]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$ on obtient la notion de variété à bord.

Une variété lisse est une variété munie d'un atlas maximal dont les changements de carte sont de classe C^∞. Dans ce cours nous considérerons le plus souvent des variétés lisses.

Remarque 1.1.1. Les variétés topologiques de dimension inférieure ou égale à 3 admettent une structure lisse unique à difféomorphisme près.

Etant donné deux variétés lisses à bord M_1 et M_2 de dimension n, et $f : \partial M_2 \to \partial M_1$ un difféomorphisme, on définit le recollement $M = M_1 \cup_f M_2$ comme l'espace topologique quotient de l'union disjointe $M_1 \amalg M_2$ par la relation d'équivalence engendrée par $x_2 \sim f(x_2)$ pour tout $x_2 \in \partial M_2$.

Exercice 1.1.2. Montrer que pour toute variété lisse à bord M, il existe un collier : un plongement lisse $c :]-1, 0] \times \partial M \to M$ tel que $c(0, .) = \mathrm{Id}_{\partial M}$.

Proposition 1.1.3. *a) Le recollement $M = M_1 \cup_f M_2$ est une variété topologique de dimension n.*
b) M admet une structure lisse qui étend celle de M_1 et M_2, unique à difféomorphisme près de support un voisinage arbitraire du lieu de recollement.
c) Si M_1 et M_2 sont orientées, et si f renverse l'orientation, alors M est orientée,

Remarque 1.1.4. Une paire de colliers détermine une structure lisse précise sur le recollement M.

On peut faire cette construction dans le cas où $f : A \to M_1$ est un plongement d'une sous-variété à bord de dimension $n-1$, $A \subset \partial M_2$.

Exercice 1.1.5. Montrer que le recollement précédent *le long d'une sous-variété du bord* admet une structure lisse.

Exercice 1.1.6. Définir une structure lisse sur la produit de deux variétés à bord.

Définition 1.1.7. a) Une isotopie ambiante d'une variété lisse M est une application continue

$$\begin{array}{rccl} h: & [0,1] \times M & \to & M \\ & (t,x) & \mapsto & h(t,x) = h_t(x) \end{array}$$

telle que : $h_0 = Id_M$, et pour tout t, h_t est un difféomorphisme.
b) Deux plongements $f, g : A \to N$ sont isotopes si et seulement s'il existe un isotopie h telle que : $g = h_1 \circ f$.

Exercice 1.1.8. Montrer que si $f, g : A \to \partial M_1$ sont des plongements isotopes d'une sous variété à bord A de même dimension que ∂M_2, alors les variétés recollées $M = M_1 \cup_f M_2$ et $M' = M_1 \cup_g M_2$ sont difféomorphes .

Référence : Hirsch, Differential topology, ch 8.

1.2 Exemples de variétés de dimension 3

1.2.1 Exemples élémentaires

S^3, $S^2 \times S^1$, $\Sigma_g \times S^1$, $\mathbb{R}P^3$.
S^3/Γ, $\Gamma \subset S^3$ sous-groupe fini ; $L(p,q) = S^3/ < (\zeta, \zeta^q) >$, $\zeta = e^{\frac{i2\pi}{p}}$, $PGCD(p,q) = 1$.

1.2.2 Chirurgie sur un noeud

Soit $g : D^2 \times S^1 \to S^3$ un plongement. On obtient une variété orientée de dimension 3 :

$$M_g = (S^3 - g(\mathring{D}^2 \times S^1)) \cup_{g_{|S^1 \times S^1}} S^1 \times D^2 \ .$$

La variété M_g est dite obtenue par chirurgie sur le noeud solide (ou noeud parallélisé) défini par g. Ici un noeud solide (ou noeud parallélisé) est une plongement du tore plein $D^2 \times S^1$, le plus souvent considéré à isotopie près.

Remarque 1.2.1. A difféomorphisme près, la variété obtenue ne dépend que de la classe d'isotopie de g.

Exercice 1.2.2. a) Montrer que la sphère S^3 est difféomorphe au recollement $S^1 \times D^2 \cup_{Id_{S^1 \times S^1}} D^2 \times S^1$.
On note $g : D^2 \times S^1 \to S^3$ le plongement obtenu avec l'inverse du difféomorphisme précédent.
b) Déterminer M_g.
Soit t le difféomorphisme de $D^2 \times S^1$ défini par $t(\alpha, \beta) = (\alpha\beta, \beta)$.
c) Pour $p \in \mathbb{Z}$, montrer que $M_{g \circ t^p}$ est l'une des variétés de la liste de la sous-section précédente.