Chapitre 2

Décomposition en anses, cobordisme

2.1 Décomposition en anses : cas général

Définition 2.1.1. Soient W une variété à bord de dimension n et $g : D^{n-k} \times S^{k-1} \to \partial W$ un plongement. L'attachement d'une anse d'indice k suivant g est la variété $W' = W \cup_g (D^{n-k} \times D^k)$.

Lorsque W est orientée, on dit que l'attachement est orienté si l'orientation de W s'étend à W'.

Définition 2.1.2. Une décomposition en anses d'une variété compacte est un difféomorphisme avec une variété obtenue par attachement successifs d'anses.

La théorie de Morse produit des décompositions en anses.

Proposition 2.1.3. *Toute variété compacte admet une décomposition en anses pour laquelle les attachements se font dans l'ordre des indices. Dans le cas sans bord (resp. à bord), il existe une décomposition avec une seule anse d'indice* 0 *et une seule anse d'indice maximal (resp. aucune anse d'indice maximal).*

Remarque 2.1.4. Si on isotope l'application d'attachement d'une anse, on obtient une variété difféomorphe.

Proposition 2.1.5. *La classe d'isotopie d'un plongement $g : D^{n-k} \times S^{k-1} \to M$ est déterminée par celle de $g_{|0 \times S^{k-1}}$ et la classe d'homotopie du champ de repères défini par $dg_{|0 \times S^{k-1}}$*

2.1.1 Corps en anses

On appelle corps en anses de dimension n et de genre g, la variété obtenue par attachement orienté de g anses d'indice 1 à une boule de dimension n.

Remarque 2.1.6. Tous les attachements orientés d'anses d'indice 1 à une variété connexe sont isotopes.

2.2 Variétés de dimension 3

Définition 2.2.1. Un scindement de Heegaard d'un variété compacte orientée sans bord de dimension 3, M, est une décomposition comme réunion de deux corps en anses de bord commun : $M \simeq H \cup_\Sigma H'$.

Proposition 2.2.2. *Toute variété compacte orientée sans bord de dimension* 3 *admet un scindement de Heegaard.*

Définition 2.2.3. Une coupure (cut system) sur une surface compacte orientée sans bord de genre g, Σ_g, est un ensemble de g courbes disjointes plongées dont le complément est connexe.

Un corps en anse de bord Σ_g, peut être obtenu à partir de $[0,1] \times \Sigma_g$ par attachement sur $0 \times \Sigma_g$ de g anses d'indice 2, puis d'une anse d'indice 3. Les courbes d'attachement des anses d'indice 2 forme une coupure a qui détermine le corps en anse H_a à un difféomorphisme près qui est l'identité sur le bord.

Définition 2.2.4. Un diagramme de Heegaard de genre g est une surface Σ_g, munie de deux coupures $a = \{a_1, \ldots, a_g\}$, $b = \{b_1, \ldots, b_g\}$ (on peut supposer que a et b sont transverses).

Un diagramme de Heegaard (Σ_g, a, b) définit une variété de dimension 3 $M = H_a \cup_{\Sigma_g} (-H_b)$.

Proposition 2.2.5. *Toute variété de dimension* 3 *est difféomorphe à une variété construite à partir d'un diagramme de Heegaard.*

2.3 Variétés de dimension 4

2.3.1 Attachement d'anses d'indice 2

Soit $h = \amalg_{i=1}^m h_i : \amalg_{i=1}^m -(D^2 \times S^1)_i \to S^3$ un plongement. On définit la variété recollée :

$$W_h = D^4 \cup_h (\amalg_i (D^2 \times D^2)_i \ ,$$

et son bord $M_h = \partial W_h$. A difféomorphisme près cette variété ne dépend que de l'entrelacs parallélisé L définit par h. On utilise alors la notation W_l, $M_L = S^3(L)$.

Théorème 2.3.1. *a)* $H_k(W_L)$ *est nul sauf pour* $k = 0$ *et* $k = 2$*, et* $H_2(W_L)$ *est libre de rang* m*. Une base notée* $[L_i]$ *de* $H_2(W_L)$ *est représentée par une surface orientée de bord* $l_i = h_i(0 \times S^1)$ *recollée à* $-(0 \times D^2)_i$*.*
b) $H_k(W_L, M_L)$ *est nul sauf pour* $k = 4$ *et* $k = 2$*, et* $H_2(W_L, M_L)$ *est libre de rang* m*.*

La base notée $[L^i]$ de $H_2(W_L)$, duale de la base $[L_i]$ est représentée par $(D^2 \times 0)_i$.
c) Dans les bases précédentes, la matrice du morphisme d'inclusion est :

$$B_h = (lk(l_i^+, l_j))$$

où $l_i^+ = h_i(1 \times S^1)$, et $lk(l_i^+, l_j)$ est l'enlacement, défini comme l'intersection algébrique de l_i^+ avec une surface orientée dans S^3 de bord l_j.

Définition 2.3.2. La signature d'une variété compacte orientée de dimension 4 est la signature de la forme d'intersection sur $H_2(W_L)$.

Proposition 2.3.3. *La forme d'intersection sur $H_2(W_L)$ a pour matrice B_L ; la signature est donc celle de la matrice symétrique B_L.*

La suite exacte associée à l'inclusion du bord permet de calculer l'homologie du bord.

Théorème 2.3.4. *a) $H_2(M_L)$ est isomorphe au noyau de B_L.*
b) $H_1(M_L)$ est isomorphe au conoyau de B_L.

Notons $\delta : H_2(W_L, M_L) \to H_1(M_L)$ l'homomorphisme de bord, et $B_L^{\mathbb{Q}}$ le produit tensoriel $B_L \otimes \mathbb{Q}$.

2.3.2 Description des variétés de dimension 4 sans bord

cf Gompf-Stipsicz ch4.

2.4 Cobordisme

Groupes de cobordisme orienté Ω_n : cf Milnor-Stasheff sections 17-18 et l'article de Thom.

Théorème 2.4.1. *a) $\Omega_3 = 0$. b) $\Omega_4 = \mathbb{Z}$, l'isomorphisme étant donné par la signature.*