

Chapitre 3

Théorie des noeuds

3.1 Notions de base

Définition 3.1.1. Un noeud K dans \mathbb{R}^3 est une sous-variété difféomorphe au cercle.

Remarque 3.1.2. On considérera des noeuds lisses. On obtient une théorie équivalente en considérant des noeuds linéaires par morceaux.

Exemple 3.1.3. Le noeud trivial : $S^1 \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$.

Exemple 3.1.4. La sphère unité de \mathbb{C}^2 est notée S^3 . On utilisera la projection stéréographique $s : S^3 \setminus \{(0, i)\} \cong \mathbb{R}^3$. Pour p et q premiers entre eux le noeud torique $K_{p,q}$ est l'image du plongement :

$$\begin{aligned} \gamma_{p,q} : S^1 &\mapsto \mathbb{R}^3 \\ z &\mapsto s\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(z^p, z^q)\right) \end{aligned}$$

Exercice 3.1.5. Calculer un paramétrage du noeud $K_{p,q}$. Dessiner la projection sur le premier plan de coordonnées de $K_{2,3}$ et $K_{3,2}$.

Définition 3.1.6. Un entrelacs L à n composantes dans \mathbb{R}^3 est une sous-variété difféomorphe à l'union disjointe de n cercles

Définition 3.1.7. Une isotopie (ambiante) entre les deux noeuds K et K' dans \mathbb{R}^3 est une application continue

$$\begin{aligned} h : [0, 1] \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, x) &\mapsto h(t, x) = h_t(x) \end{aligned}$$

telle que : $h_0 = Id_{\mathbb{R}^3}$, $h_1(K) = K'$, pour tout t , h_t est un difféomorphisme.

Les deux noeuds K et K' sont isotopes si et seulement s'il existe une isotopie entre eux. Si les noeuds K et K' sont orientés, on demande de plus que h_1 respecte les orientations.

Remarque 3.1.8. La même définition vaut pour les entrelacs. Il convient de préciser si les composantes sont ordonnées ou non.

On identifie la sphère $S^3 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ au compactifié d'Alexandroff de \mathbb{R}^3 via la projection stéréographique de pôle $(0, i)$. Un noeud dans \mathbb{R}^3 est ainsi un noeud dans S^3 .

Proposition 3.1.9. *a) Tout noeud dans $S^3 \approx \hat{\mathbb{R}}^3$ est isotope à un noeud dans \mathbb{R}^3 .
b) Deux noeuds dans \mathbb{R}^3 sont isotopes si et seulement s'il le sont dans $\hat{\mathbb{R}}^3 \approx S^3$.*

Le problème fondamental en théorie des noeuds est la classification à isotopie près. On obtient une classification a priori plus fine si on prend en compte l'orientation.

Remarque 3.1.10. Tout difféomorphisme orienté de S^3 est isotope à l'identité par une isotopie lisse (Cerf). Il en résulte que les équivalences définies respectivement avec l'isotopie, avec l'existence d'un difféomorphisme orienté, ou avec l'isotopie lisse, sont les mêmes.

Définition 3.1.11. Un noeud est inversible si et seulement s'il est isotope au noeud muni de l'orientation opposée.

Il existe des noeuds non inversibles. Il est difficile de trouver des invariants qui les détectent.

Définition 3.1.12. Le miroir d'un noeud K est l'image de K par la réflexion $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$. Un noeud est (positivement) amphichéral si et seulement s'il est isotope à son miroir.

Définition 3.1.13. Un diagramme de noeud est une immersion générique d'un cercle dans le plan orienté \mathbb{R}^2 , avec une information *dessus-dessous* en chaque point double. Ici générique signifie que les éventuels points multiples sont des points doubles à tangentes distinctes.

A chaque diagramme on associe une classe d'isotopie de noeud dans \mathbb{R}^3 : on considère d'abord la courbe immergée dans $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, puis on *résout les points doubles* en déplaçant le point de l'arc de dessous au niveau $z = -\epsilon < 0$, et les points voisins à des niveaux intermédiaires.

Ce qui précède s'étend naturellement aux entrelacs.

Définition 3.1.14. Un noeud dans \mathbb{R}^3 est en position générique si et seulement si sa projection sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ est une courbe immergée générique.

Proposition 3.1.15. *Dans l'espace des plongements de S^1 dans \mathbb{R}^3 les plongements en position générique forment un ouvert dense. En particulier, pour tout noeud on peut trouver un noeud isotope arbitrairement proche en position générique.*

Théorème 3.1.16 (Reidemeister). *Deux diagrammes définissent des nœuds (resp. des entrelacs), isotopes si et seulement s'ils se correspondent par une suite d'isotopies planes et de mouvements de Reidemeister décrits dans la figure 3.1.*

Remarque 3.1.17. Dans le cas orienté il y a lieu de considérer chaque mouvement de Reidemeister avec les différentes orientations.

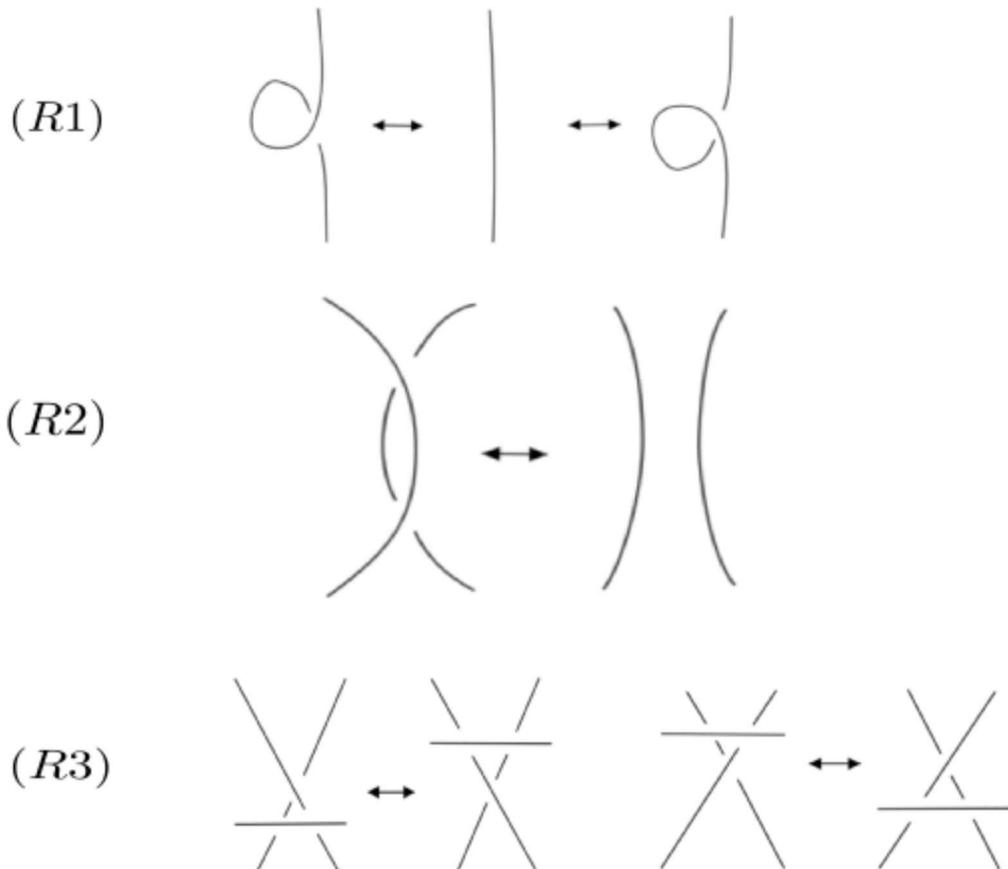


FIGURE 3.1 – Mouvements de Reidemeister

Ce théorème permet de définir des invariants d'isotopie à partir de fonctions sur les diagrammes. Un premier exemple est l'enlacement de deux composantes orientées K et K' . A chaque croisement d'un diagramme on attribue un signe ± 1 selon la règle indiquée sur la figure 3.2.

Proposition 3.1.18. *Soit (K, K') un entrelacs orienté à deux composantes, représenté par un diagramme (D, D') , alors la demi-somme des signes des croisements (mixtes) entre D et D' est un entier invariant par mouvement de Reidemeister, et donc ne dépend que de la classe d'isotopie orientée de (K, K') .*

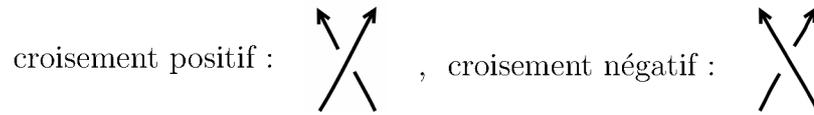


FIGURE 3.2 – Signe d'un croisement

Définition 3.1.19. On appelle enlacement de K et K' l'invariant de la proposition précédente.

Exercice 3.1.20. Montrer que si Σ est une surface orientée de bord K plongée dans S^3 et transversale à K' , alors l'enlacement de K et K' est égal à l'intersection algébrique de Σ et K' .

Noeuds parallélisés

Définition 3.1.21. Un nœud parallélisé est un nœud muni d'une classe d'homotopie de champs de vecteurs transversaux au nœud.

Un diagramme définit un nœud parallélisé en utilisant la parallélisation du tableau.

Théorème 3.1.22. Deux diagrammes orientés définissent des nœuds parallélisés isotopes si et seulement s'ils se correspondent par isotopie plane et mouvements de Reidemeister $R1'$, $R2$ et $R3$.

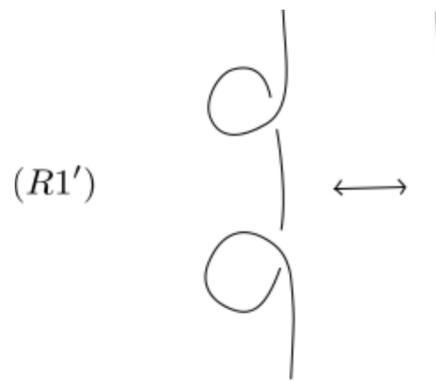


FIGURE 3.3 – Mouvement de Reidemeister $R1'$

3.2 Invariants classiques : groupe fondamental et module d'Alexander

Pour un nœud K dans $S^3 \approx \hat{\mathbb{R}}^3 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, on note : $X_K = S^3 \setminus K$.

Définition 3.2.1. Le groupe du nœud est le groupe fondamental $\pi_1(X_K, \infty)$ du complément du nœud (on suppose que K évite le point ∞).

Le groupe fondamental du nœud ne dépend pas de l'orientation, mais l'orientation est utile pour préciser des générateurs. Etant donné un diagramme orienté, on associe à chaque arc un élément du groupe fondamental représenté par un méridien qui enlace positivement, relié au point de base par un chemin vertical dans le demi-espace positif.

Théorème 3.2.2 (Présentation de Wirtinger). *Le groupe fondamental d'un nœud (ou d'un entrelacs) associé à un diagramme D admet une présentation avec comme générateurs un lacet méridien pour chaque arc, et une relation pour chaque croisement, de la forme $ab = ca$ (a est le lacet correspondant à l'arc supérieur).*

Exercice 3.2.3. Donner une présentation du groupe fondamental de nœud de trèfle (nœud torique $K_{3,2}$) et montrer qu'il existe un morphisme surjectif sur le groupe symétrique \mathcal{S}_3 .

Exercice 3.2.4. Montrer que les deux nœuds représentés dans la figure 3.4 (nœud carré et nœud de mémé) ont des groupes fondamentaux isomorphes.



FIGURE 3.4 – Nœud carré et nœud de mémé

Exercice 3.2.5. Donner une présentation du groupe du nœud associé à un diagramme, avec un générateur pour chaque face bornée représenté par un lacet vertical (générateurs de Dehn).

Le module d'Alexander

Définition 3.2.6. On appelle revêtement cyclique infini du nœud K le revêtement régulier \tilde{X}_K du complément du nœud K , associé au morphisme d'abélianisation :

$$h : \pi_1(X_K, \infty) \rightarrow H_1(X_K, \mathbb{Z}) .$$

Une orientation du nœud K permet de choisir un générateur de $H_1(X_K, \mathbb{Z})$, représenté par un méridien qui enlace K positivement. On identifie alors $H_1(X_K, \mathbb{Z})$ avec le groupe multiplicatif $G = \{t^n, n \in \mathbb{Z}\}$. Le groupe G agit sur le revêtement \tilde{X}_K . Cette action s'étend en une action de l'anneau $\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ sur le complexe singulier $C_*(\tilde{X}_K)$, et cette action commute avec le bord. L'homologie $H_*(\tilde{X}_K, \mathbb{Z})$ est donc un module sur $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$.

Définition 3.2.7. On appelle module d'Alexander du nœud K le $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ module $H_1(\tilde{X}_K, \mathbb{Z})$.

Etant donné un diagramme D d'un nœud orienté K , on associe à chaque face F du diagramme un lacet γ_F , pointé en ∞ , dont l'image orientée est une droite verticale qui intersecte F positivement.

Exercice 3.2.8. Donner une présentation du groupe du nœud avec les générateurs $[\gamma_F]$ (générateurs de Dehn).

On choisit un relevé $\tilde{\infty}$ du point de base dans \tilde{X}_K . Chaque lacet $[\gamma_F]$ se relève en un chemin d'origine $\tilde{\infty}$, noté $\tilde{\gamma}_F$. L'extrémité de ce chemin est un point : $t^{I(F)}\tilde{\infty}$.

Proposition 3.2.9. Pour chaque face F , $I(F)$ est l'enlacement de γ_F avec K .

Si on fixe une face F_e , avec $I_{F_e} = \pm 1$ (on peut prendre une face adjacente à la face non bornée), alors pour chaque face F , on obtient un cycle $c_F = \tilde{\gamma}_F - \frac{t^{I(F)} - 1}{t^{I_{F_e}} - 1} \tilde{\gamma}_{F_e}$, dont la classe est simplement notée F .

Théorème 3.2.10. On obtient une présentation du module d'Alexander $H_1(\tilde{X}_K, \mathbb{Z})$ comme $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ module, avec comme générateurs les faces bornées F , $F \neq F_e$ et pour chaque croisement décrit dans la figure 3.5 une relation : $A - tB + tC - D = 0$.

$$\begin{array}{ccc}
 B & & A \\
 & -t & | & 1 \\
 \hline
 & & t & | & -1 \\
 & & & \downarrow & \\
 C & & & & D
 \end{array}$$

FIGURE 3.5 – Relation d'Alexander

3.2.1 Idéaux élémentaires et polynôme d'Alexander

Soit M un module de présentation finie sur un anneau commutatif Λ . On choisit une présentation donnée par la suite exacte ci-dessous :

$$\Lambda^m \xrightarrow{A} \Lambda^n \rightarrow M \rightarrow 0 .$$

Quitte à ajouter des relations triviales, on peut supposer que $m \geq n$.

Définition 3.2.11. Pour $0 \leq k \leq n$, le k -ième idéal élémentaire ou idéal de Fitting de la présentation est l'idéal $E_k(A)$ engendré par les mineurs d'ordre $n - k$ de la matrice A .

Proposition 3.2.12. *Les idéaux élémentaires ne dépendent pas de la présentation.*

Définition 3.2.13. Les idéaux élémentaires ou de Fitting d'un module de présentation finie sont ceux d'une matrice de présentation.

Remarque 3.2.14. Référence : Eisenbud, Commutative Algebra, ch20. L'hypothèse *génération finie* est suffisante.

Lorsque $E_0(M)$ est un idéal principal l'ordre de M est le générateur de l'idéal $E_0(M)$. Il est défini modulo les inversibles de Λ .

Définition 3.2.15. Le polynôme d'Alexander d'un noeud K est l'ordre du module d'Alexander (qui est principal) $E_0(H_1(\tilde{X}_K))$. Il est défini modulo $\pm t^k$. En particulier, le polynôme d'Alexander est égal modulo $\pm t^k$ au déterminant de la matrice d'Alexander donnée par la présentation du théorème 3.2.10.

3.3 Surfaces de Seifert

Définition 3.3.1. Une surface de Seifert d'un noeud (ou entrelacs) orienté K dans S^3 est une surface orientée plongée dans S^3 de bord K .

Proposition 3.3.2. *Tout entrelacs admet une surface de Seifert.*

Démonstration. Algorithme de Seifert.

Autre preuve : image inverse d'un point régulier par $f : S^3 - K \rightarrow S^1$ qui représente le générateur de $H^1(S^3 - K) = \mathbb{Z}$. □

La définition de l'enlacement s'étend à une paire de cycles disjoints dans S^3 .

Définition 3.3.3. La forme de Seifert associée à une surface de Seifert connexe Σ d'un noeud K est :

$$\begin{aligned} S : H_1(\Sigma) \otimes H_1(\Sigma) &\rightarrow \mathbb{Z} \\ [a] \otimes [b] &\mapsto lk(a^+, b) \end{aligned}$$

Ici a^+ est obtenu en poussant le cycle a suivant la normale positive à Σ . La forme est bien définie : l'enlacement est indépendant du cycle dans sa classe d'homologie.

Théorème 3.3.4. *Soit V la matrice de la forme de Seifert associée à une surface de Seifert Σ du noeud K munie d'une base de $H_1(\Sigma)$. Alors une présentation du module d'Alexander de K est donnée par la matrice $tV - V^T$ (V^T est la matrice transposée).*

Corollaire 3.3.5. *Le polynôme d'Alexander est $\Delta_K = \det(tV - V^T)$ modulo $\pm t^k$.*

Corollaire 3.3.6 (Symétrie du polynôme d'Alexander). $\Delta_K(t^{-1}) = \Delta_K(t)$ modulo $\pm t^k$.

Le polynôme d'Alexander-Conway

Voir l'article de Kauffman : The Conway polynomial, *Topology*, 20(1) :101–108, (1981).

Définition 3.3.7. Le polynôme d'Alexander-Conway d'un entrelacs orienté L est $\nabla_L = \det(xV - x^{-1}V^T)$, où V est une matrice de Seifert de L : matrice de la forme de Seifert pour une surface de Seifert connexe de L .

Théorème 3.3.8. *a) Le polynôme d'Alexander-Conway est bien défini : il ne dépend ni de la surface de Seifert, ni de la base. b) Le polynôme d'Alexander-Conway du nœud trivial vaut 1, celui d'un entrelacs trivial avec plusieurs composantes est nul. c) Si L_+ , L_- et L_0 forment un triplet de Conway, alors :*

$$\nabla_{L_+} - \nabla_{L_-} = (x - x^{-1})\nabla_{L_0}$$

Ici un triplet de Conway est constitué de trois entrelacs L_+ , L_- , L_0 qui sont identiques en dehors d'une boule où L_+ est représenté par un croisement positif, L_- par un croisement négatif, et L_0 sans croisement.

Théorème 3.3.9. *Deux surfaces de Seifert connexes d'un même entrelacs se correspondent par isotopie et modification chirurgicale d'indice un ou deux : ajout ou suppression d'un tube.*

Exercice 3.3.10. a) Ecrire une preuve du théorème précédent utilisant la théorie de Morse. b) Démontrer que le polynôme d'Alexander-Conway défini comme le déterminant de $xV - x^{-1}V^T$, V étant une matrice de Seifert pour une surface de Seifert connexe, est un invariant des entrelacs

3.4 Crochet de Kauffman et polynôme de Jones

Voir l'article de Kauffman : State model and the Jones polynomial, *Topology*, 26(3) :395–407, (1987).

Pour un diagramme non orienté D , le crochet de Kauffman de D est le polynôme de Laurent défini par la formule qui suit. La somme est indexée par les applications s de l'ensemble des croisements dans $\{-1, 1\}$, qu'on appelle *états* du diagramme (en l'absence de croisement, on considère un état). A chaque état s correspond une courbe plongée D_s définie localement dans la figure 3.6. On note $\#D_s$ le nombre de composantes de la courbe ; on pose $\delta = -A^2 - A^{-2}$, et $s(D) = \sum_c s(c)$.

$$\langle D \rangle = \sum_s A^{s(D)} \delta^{\#D_s} .$$



FIGURE 3.6 – Crochet de Kauffman : résolution des croisements

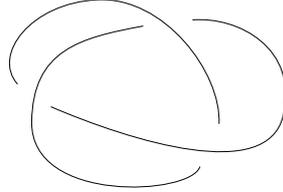


FIGURE 3.7 – Nœud de trèfle positif

Exemples 3.4.1. Pour le diagramme trivial on obtient δ , pour le diagramme du nœud de trèfle positif représenté dans la figure 3.7 on obtient $(-A^{-3} - A^{-7} - A^5)\delta$.

Relations locales : On écrira des relations entre les valeurs du crochet de Kauffman pour des diagrammes qui sont identiques en dehors d'un petit disque où on représente la modification. Le crochet de Kauffman vérifie par exemple les relations décrites dans la figure 3.8. De plus ces relations déterminent le crochet de Kauffman, si on normalise avec la valeur 1 pour l'entrelacs vide.

$$\langle \diagdown \diagup \rangle = A \langle \rangle \quad \langle \rangle + A^{-1} \langle \frown \smile \rangle$$

$$\langle D \circ \rangle = \langle D \rangle \delta$$

FIGURE 3.8 – Relations de Kauffman

Théorème 3.4.2. a) *Le crochet de Kauffman est invariant par les mouvements de Reidemeister R2 et R3.*

b) *Le mouvement R1 multiplie le crochet de Kauffman par $-A^{\pm 3}$ (figure 3.9).*

Pour un diagramme orienté D on note $w(D)$ la somme des signes des croisements (on peut l'appeler le vrillage, *writhe* en anglais). On obtient un invariant d'entrelacs orienté en corrigeant le crochet de Kauffman avec $w(\vec{D})$.

Théorème 3.4.3. *L'expression $f(D) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$ est invariante par mouvement de Reidemeister et définit un invariant d'entrelacs orienté.*

$$\langle \text{positive crossing} \rangle = -A^3 \langle \text{parallel strands} \rangle \quad \langle \text{negative crossing} \rangle = -A^{-3} \langle \text{parallel strands} \rangle$$

FIGURE 3.9 – Crochet de Kauffman : Reidemeister 1

Le polynôme de Jones original est $V(L) = \left(\frac{f(L)}{-A^2 - A^{-2}} \right)_{A=t^{-\frac{1}{2}}}$. Il est déterminé par $V(\text{trivial}) = 1$ et la relation de Jones

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) = (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(L_0)$$

Ici L_+ , L_- et L_0 ont des diagrammes identiques en dehors d'un disque où il y a respectivement : un croisement positif, un croisement négatif et pas de croisement.

Exercice 3.4.4. Montrer que le polynôme V distingue les nœuds de trèfle droit et gauche.

Exercice 3.4.5. Calculer V pour le nœud de huit (figure 3.10) et son miroir. Est-ce que le nœud de huit est isotope à son miroir ?

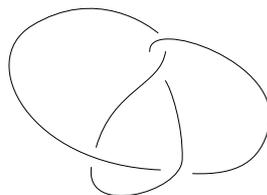


FIGURE 3.10 – Nœud de huit