Chapitre 4

Cobordisme

On va considérer des variétés compactes orientées.

Définition 4.0.6. Un cobordisme topologique est une variété W de dimension $n+1$ dont le bord est décomposé comme union disjointe orientée : $\partial W = -\partial_- W \amalg \partial_+ W$. On note $(W, \partial_- W, \partial_+ W)$; on dit que W est un cobordisme de $\partial_- W$ à $\partial_+ W$).

Pour $n \geq 1$, il est équivalent de demander l'existence d'un atlas orienté avec des cartes modelées sur $[0,1] \times \mathbb{R}^n$. Les points de $\partial_+ W$ (resp. $\partial_- W$) sont ceux qui par une carte (donc toutes) correspondent à des points de $1 \times \mathbb{R}^n$ (resp. $0 \times \mathbb{R}^n$).

Définition 4.0.7. Un cobordisme lisse est une variété lisse W de dimension $n+1$ dont le bord est décomposé comme union disjointe orientée : $\partial W = -\partial_- W \amalg \partial_+ W$. On a de plus fixé des identifications orientées du stabilisé des espaces tangents aux composantes du bord :

$$\theta \oplus T\partial_\epsilon W \approx TW_{|\partial_\epsilon W} \ ,$$

repectivement entrantes et sortantes pour $\partial_- W$ et $\partial_+ W$.

Pour $n \geq 1$, il est équivalent de demander l'existence d'un atlas orienté avec des cartes modelées sur $[0,1] \times \mathbb{R}^n$ qui respectent le vecteur tangent $(1,0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aux points du bord.

Exemple 4.0.8. Le disque avec 2 trous : $D^2 - (B(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \cup B(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4})$ est un cobordisme des deux cercles intérieurs vers le cercle extérieur (*pantalon*).

Exemple 4.0.9. Si M est une variété compacte orientée, $([0,1] \times M, \{0\} \times M, \{1\} \times M)$ est un cobordisme ; $([0,1] \times M, \emptyset, -\{0\} \times M \cup \{1\} \times M)$ et $([0,1] \times M, -\{1\} \times M \cup \{0\} \times M, \emptyset)$ sont également des cobordismes.

Exemple 4.0.10. Si $f : M \to M'$ est un difféomorphisme, alors le cylindre de f, C_f est un cobordisme de $\{0\} \times M \cong M$ à M'.

$$C_f = \frac{[0,1] \times M \ \amalg \ M'}{(1,x) \sim f(x)} \ .$$

Etant donné deux cobordismes (W, M, M') et (W', M', M''), on obtient un cobordisme recollé : $(W \cup W', M, M'')$.

Etant donné un cobordisme $(W, \partial_- W, \partial_+ W)$ et des difféomorphismes $\phi : M \to \partial_- W$, $\phi' : M' \to \partial_+ W$, le cobordisme $(C_f \cup W \cup C_{f'}, M, M')$ est noté $(W, (M, \phi), (M', \phi'))$ ou simplement (W, M, M').

Groupes de cobordisme.

L'existence d'un cobordisme entre deux variétés de dimension n est une relation d'équivalence. On note Ω_n l'ensemble des classes d'équivalence (classes de cobordisme).

Proposition 4.0.11. *L'union disjointe induit sur Ω_n une structure de groupe commutatif.*

Théorème 4.0.12. *Pour $n = 4k$, la signature définit un homomorphisme du groupe Ω_n vers $\mathbb{Z}$.*

Il en résulte que $[^2] \in \Omega_4$ est un élément primitif (non divisible) d'ordre infini.

La construction de Thom ramène le calcul des groupes de cobordisme à un problème homotopique. Les premiers résultats sont élémentaires : $\Omega_0 = \mathbb{Z}$, $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$. On obtient ensuite $\Omega_3 = 0$, $\Omega_4 = \mathbb{Z}$ (engendré par $\mathbb{C}P^2$).

Catégorie de cobordisme.

Pour obtenir une catégorie dont les objets sont les variétés orientées de dimension n, il convient de mettre une relation d'équivalence sur les cobordismes :

Définition 4.0.13. Deux cobordismes (W, M, M') et (W', M, M') sont équivalents si et seulement s'il existe un difféomorphisme $\phi : W \to W'$ tel que $(d\phi)_{|\partial W}$ est l'identité.

Proposition 4.0.14. *Le recollement des cobordismes définit une catégorie notée $n - Cob$ dont les objets sont les variétés orientées compactes de dimension n, et dont les morphismes sont les classes d'équivalence de cobordismes de dimension $n + 1$.*

Cette catégorie est munie d'une structure additionnelle donnée par l'union disjointe (une structure *monoïdale*), avec dualité donnée par la variété opposée. Le propos des TQFTs est d'en étudier les représentations algébriques.