

# Chapitre 4

## Calcul de Kirby et applications

### 4.1 Modification de Kirby

On rappelle qu'un entrelacs parallélisé  $L$  définit une variété de dimension  $W_L$ , obtenue par attachement d'anses d'indice 2 le long de  $L$  et son bord  $\partial W_L = S^3(L)$ . On dit que  $S^3(L)$  est la variété obtenue par chirurgie le long de  $L$ .

*Remarque 4.1.1.* Il n'est pas nécessaire d'orienter  $L$  : En changeant l'orientation de  $L$  on obtient des variétés difféomorphes

Si  $L'$  est obtenu en ajoutant à  $L$  une composante triviale avec coefficient de framing 1 (resp.  $-1$ ), alors  $S^3(L')$  est difféomorphe à  $S^3(L)$ , et  $W_{L'}$  est somme connexe de  $W_L$  avec  $\mathbb{C}P^2$  (resp.  $\overline{\mathbb{C}P^2}$ ). Cette modification est appelée une stabilisation.

Si  $L'$  est obtenu à partir de  $L$  en remplaçant la composant  $L_j$  par  $L'_j$  qui est somme connexe de  $L_j$  avec un parallèle de  $L_i$  qui suit la parallélisation, alors  $W_{L'}$  est difféomorphe à  $W_L$ . Cette modification est appelée glissement d'anse.

En faisant glisser plusieurs fois sur une composante triviale, on obtient la modification de Fenn-Rourke décrite dans la figure 4.1.

### 4.2 Théorème de Kirby

**Théorème 4.2.1.** *Deux variétés  $S^3(L)$  et  $S^3(L')$ , obtenues par chirurgie sur les entrelacs parallélisés non orientés  $L$  et  $L'$ , sont difféomorphes si et seulement si on peut passer de  $L$  à  $L'$  par une suite finie de stabilisations et glissements d'anse.*

**Corollaire 4.2.2.** *Deux variétés  $S^3(L)$  et  $S^3(L')$ , obtenues par chirurgie sur les entrelacs parallélisés non orientés  $L$  et  $L'$ , sont difféomorphes si et seulement si on peut passer de  $L$  à  $L'$  par une suite finie de stabilisation négative et modification de Fenn-Rourke 4.1.*

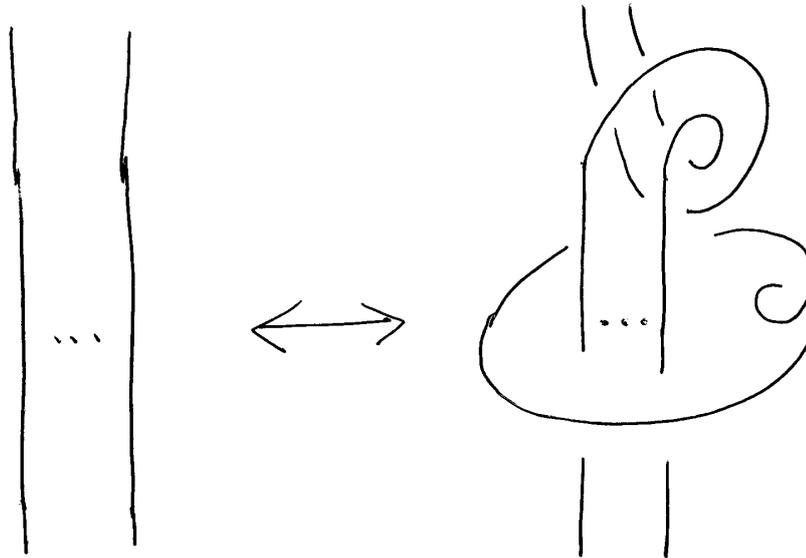


FIGURE 4.1 – Mouvement de Fenn-Rourke

### 4.3 Le crochet de Kauffman colorié

On définit le module de Jones-Kauffman du tore plein comme le  $\mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ -module engendré par les entrelacs non orientés parallélisés dans le tore plein  $D^2 \times S^1$ , quotienté par les relations de Kauffman (les deux relations locales qui définissent le crochet de Kaufman). On le note :  $\mathcal{K}(D^2 \times S^1)$ . Les générateurs sont représentés par des diagrammes dans la couronne  $[-1, 1] \times S^1$ . Il y a une structure d'algèbre induite par la superposition de deux diagrammes.

**Proposition 4.3.1.** *L'algèbre de Jones-Kauffman du tore plein est isomorphe à  $\mathbb{Z}[A, A^{-1}][z]$ , où le générateur  $z$  est représenté par l'âme du tore.*

En spécialisant le paramètre  $A$  dans un anneau ou un corps  $\mathbf{k}$ , on obtient l'algèbre de Jones-Kauffman spécialisée :  $\mathcal{K}_A(D^2 \times S^1) = \mathbf{k}[z]$ .

Un plongement  $g : D^2 \times S^1 \rightarrow S^3$  définit une forme linéaire :

$$\mathcal{K}(g) : \mathcal{K}(D^2 \times S^1) \rightarrow \mathcal{K}(S^3) = \mathbb{Z}[A, A^{-1}] ,$$

consistant à évaluer le crochet de Kauffman de l'image de l'entrelacs par  $g$  ( $\mathcal{K}$  s'étend en un foncteur pour les variétés de dimension 3 orientées avec leur plongements).

La forme linéaire  $\mathcal{K}(g)$  ne dépend que de la classe d'isotopie de  $g$ , représentée par le noeud parallélisé  $K$ . Elle ne dépend pas de l'orientation de  $K$ . On note  $\langle K(x) \rangle$  l'évaluation sur  $x \in \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ , qu'on appelle *crochet de Kauffman de  $K$  colorié par  $x$* .

La construction s'étend aux entrelacs. On obtient une forme multilinéaire. On utilise les notations  $\langle L_1(x_1), \dots, L_m(x_m) \rangle = \langle L(x_1, \dots, x_m) \rangle = \langle L(x_1 \otimes \dots \otimes x_m) \rangle$ .

## 4.4 Invariants des variétés de dimension 3

Le choix d'un élément inversible  $A \in \mathbf{k}$  permet d'évaluer le crochet de Kauffman. On utilise la même notation  $\langle \rangle$ .

**Définition 4.4.1.** Une *couleur de Kirby* associée à la spécialisation  $A \in \mathbf{k}$  est un élément  $\Omega \in \mathbf{k}[z]$  tel que :

- a)  $\forall x \in [z], \langle H_{(1,1)}(x, \Omega) \rangle = \langle U_0(x) \rangle \langle U_1(\Omega) \rangle$ ,
- b)  $\langle U_1(\Omega) \rangle \langle U_{-1}(\Omega) \rangle \neq 0$ . Ici  $H_{(1,1)}$  est l'entrelacs de Hopf avec coefficients de framing  $+1$ , et  $U_\epsilon$  est le noeud trivial avec coefficient de framing  $\epsilon$ .

**Théorème 4.4.2.** Si  $\Omega \in \mathbf{k}[z]$  est une couleur de Kirby, alors il existe un invariants des variétés de dimension 3 défini pour une présentation de chirurgie  $L = (L_1, \dots, L_m)$  par :

$$\text{tau}(S^3(L)) = \langle L_1(\Omega), \dots, L_m(\Omega) \rangle \langle U_1(\Omega) \rangle^{b_+} \langle U_{-1}(\Omega) \rangle^{b_-} ,$$

où  $(b_+, b_-)$  est la signature signée de la matrice d'enlacement  $B_L$ .

**Théorème 4.4.3.** Si  $A \in \mathbf{k}$  est une racine de l'unité d'ordre  $2p$ , alors il existe une couleur de Kirby, unique à coefficient multiplicatif près et modulo le noyau commun du crochet de Kauffman colorié.