UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT
Année 2014-2015, Master 2
Topologie des variétés de petite dimension.

Examen du 03/03/2015 (durée : 3 heures)

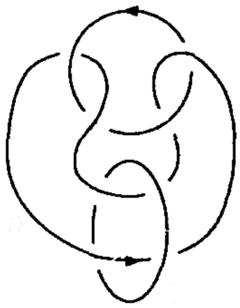
I

On considère la suite de noeuds parallélisés K_n, $n \geq 1$, ci-dessous :

1. Identifier le noeud K_1 (noeud trivial, trèfle droit, trèfle gauche ?).
2. Ecrire une présentation du module d'Alexander de K_2.
3. Calculer le polynôme d'Alexander de K_2.
4. Calculer le polynôme d'Alexander de K_n pour n impair.

II

1. Calculer l'homologie $H_*(S^3(L))$ de la variété obtenue par chirurgie sur l'entrelacs L représenté ci-dessous.



2. Soit $j = j_{-1} \amalg j_+ : D^2 \times S^0 \to S^2$ un plongement orienté. Décomposer en anses la variété $W = D^3 \times S^1 \cup_g D^2 \times D^1 \times S^1$, où $g : D^2 \times S^0 \times S^1 \to \partial(D^3 \times S^1) = S^2 \times S^1$, est définie par $g(x, -1, y) = (j_{-1}(x), y)$ et $g(x, 1, y) = (j_1(\overline{x}), \overline{y})$.
3. Montrer que le bord de W est difféomorphe au *mapping tore*

$$T_f = [0,1] \times S^1 \times S^1 / (1, x, y) \sim (0, f(x, y)) ,$$

où $f : S^1 \times S^1 \to S^1 \times S^1$ est l'application définie par $f(x, y) = (\overline{x}, \overline{y})$.

4. Montrer que T_f est difféomorphe à $S^3(L)$.

III

Dans cet exercice on étudie le crochet de Kauffman évalué en $A = e^{\frac{i\pi}{8}}$. On utilise la notation $< \ >$ pour cette évaluation.

1. Calculer la valeur en A du crochet de Kauffman a) pour le noeud trivial avec framing k, b) pour le noeud de trèfle droit avec framing k.
2. Démontrer que $< L >$ est nul si l'entrelacs L contient une composante L_j qui a un enlacement total impair avec l'ensemble des autres : $\mathrm{lk}(L_j, L - L_j) = 0$. On pourra commencer par le cas où la composante L_j est triviale.

   L'entrelacs L est dit **propre** si toute composante a un enlacement pair avec l'ensemble des autres.
3. Démontrer que si l'entrelacs L est propre, un entrelacs L' obtenu en connectant par une bande deux composantes de L est propre et on a :

   $$< L >= (-A^2 - A^{-2}) < L' > \ .$$

   (On pourra observer que, dans cette situation, l'entrelacs L'' représenté ci-dessous n'est pas propre.)
4. Démontrer que pour un noeud K de framing k, on a

   $$< K >= (-A^2 - A^{-2})(-A^3)^k \epsilon_K \ \text{, où } \epsilon_K = \pm 1.$$

   Remarque $\epsilon_K = (-1)^{Arf(K)}$ définit l'invariant d'Arf : $Arf(K) \in \{0, 1\}$.