Université Paris 7 - Denis Diderot **Algèbre M1**

Examen partiel, Lundi 15 novembre 2010

L'épreuve dure 3 heures. Les exercices **A**, **B**, **C** et **D** peuvent être traités indépendamment. Les résumés de cours sont autorisés. Le barème est donné à titre indicatif. Pour p premier on notera $\mathbb{F}_p$ le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

A–

1. Combien y a-t-il de polynôme(s) irréductibles de degré 2 dans $\mathbb{F}_2[X]$?
2. Déterminer dans $\mathbb{F}_2[X]$ la décomposition en facteurs irréductibles des polynômes X^5+1 et X^5+X+1.
3. Démontrer que le polynôme $X^5 - 82X + 43$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
4. Est-ce que le polynôme $X^5 + X - 1$ a une racine dans $\mathbb{Q}$? Est-il irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$?

B–

1. Etudier l'anneau $\mathbb{Z}[i]/(i+1)$: Quelle est sa caractéristique ? Est-ce un corps ? Combien compte-t-il d'éléments ?
2. Soit q un entier premier.
   (a) Quelle est la caractéristique de l'anneau $\mathbb{Z}[i]/(q)$?
   (b) Démontrer que l'anneau $\mathbb{Z}[i]/(q)$ est isomorphe à $\mathbb{F}_q[X]/(X^2+1)$. Quel est le nombre d'éléments de $\mathbb{Z}[i]/(q)$?
   (c) Pour quelles valeurs de q l'anneau $\mathbb{Z}[i]/(q)$ est-il un corps ?
   (d) Pour quelles valeurs de q l'anneau $\mathbb{Z}[i]/(q)$ est-il isomorphe à $\mathbb{F}_q^2$?

C–

1. Calculer le résultant en X des polynômes $X^3 - 7$ et $(Y-X)^2 - 2$.
2. Montrer, sans effectuer le calcul, que $Y = \sqrt{2} + \sqrt[3]{7}$ annule le polynôme précédent.
3. Montrer que l'ensemble $\mathcal{O}$ des nombres complexes qui sont racines d'un polynôme unitaire à coefficients entiers forme un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

D–

1. Calculer les anneaux $\mathbb{Z}[X]/(X-2)$ et $\mathbb{Z}[X]/(2X-1)$. On montrera qu'ils sont isomorphes soit à $\mathbb{Z}$, soit à un sous-anneau de $\mathbb{Q}$ qu'on précisera (anneau de fraction).

   Dans le reste du problème on étudie l'anneau $\mathbb{Z}[[X]]/(X-2)$, noté $\mathbb{Z}_2$.
2. Montrer que $\mathbb{Z}_2$ est un anneau intègre de caractéristique nulle.

   On considérera désormais $\mathbb{Z}$ comme un sous-anneau de $\mathbb{Z}_2$.
3. Montrer qu'un élément α de $\mathbb{Z}_2$ admet un unique représentant de la forme $\sum_{n\geq 0} a_n X^n$, avec, pour tout n, $a_n \in \{0,1\}$.
4. Montrer que tous les entiers impairs sont inversibles dans $\mathbb{Z}_2$.
5. Montrer que $\mathbb{Z}_2$ est un anneau local. Préciser son idéal maximal.
6. Montrer que $\mathbb{Z}_2$ est un anneau principal.
7. On note $\mathbb{Q}_2$ le corps des fractions de $\mathbb{Z}_2$. Montrer que le polynôme $2Y^2 - Y + 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$, mais pas sur $\mathbb{Q}_2$.