REPRÉSENTABILITÉS

Table des matières

Introduction

Objectif. L'objectif de cette première partie du cours est de construire un espace de module pour les variétés abéliennes polarisées munies de quelques structures additionnelles, le *schéma de Siegel-Mumford*. C'est dans un avatar de cet espace que nous découperons, dans un second temps, des *variétés de Shimura* (de type PEL, c'est-à-dire classifiant des variétés abéliennes munies de **P**olarisations, d'**E**ndomorphismes, et de structures de niveaux (**L**evel structures en anglais)).

Construction du Schéma de Siegel-Mumford. La construction de cet espace de module est un véritable légo, dont voici les grands acteurs.

Le foncteur $\mathbf{A}^g_{d,n}$*.* Il classifie les schémas abéliens $f : A \to S$ de dimension relative g, munis d'une polarisation $\lambda : A \to A^t$ de degré d^2, et d'une structure de niveau n naïve $\kappa : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}_S \simeq A[n]$. La polarisation λ permet de construire un faisceau inversible $\mathcal{L}(\lambda)$ sur A qui est ample sur S et tel que $\mathcal{E}(\lambda) = f_*(\mathcal{L}(\lambda)^{\otimes 3})$ est un faisceau localement libre sur S de rang $N+1$, où $N = N(g,d)$ est un entier que l'on explicitera. Le morphisme d'adjonction $f^*\mathcal{E}(\lambda) \to \mathcal{L}(\lambda)^{\otimes 3}$ est surjectif, et définit un plongement $\iota(\lambda) : A \hookrightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E}(\lambda))$.

Le foncteur $\mathbf{RA}^g_{d,n}$*.* Il classifie les quadruplets $(A, \lambda, \kappa, \phi)$ où (A, λ, κ) est comme ci-dessus, et où $\phi : \mathcal{E}(\lambda) \simeq \mathcal{O}_S^{N+1}$ est une rigidification. Cette rigidification nous fournit un isomorphisme $\mathbf{P}(\mathcal{E}(\lambda)) \simeq \mathbf{P}(\mathcal{O}_S^{N+1}) = \mathbf{P}^N_S$, et le triplet (A, λ, ϕ) induit donc un plongement $\iota(\lambda, \phi) : A \hookrightarrow \mathbf{P}^N_S$. L'oubli de ϕ donne un morphisme $\mathbf{RA}^g_{d,n} \to \mathbf{A}^g_{d,n}$.

Le foncteur $\mathbf{Hilb}^{2g}_N$*.* Il classifie les couples formés d'un sous-schéma fermé Z de $\mathbf{P}^N_S$ qui est plat sur S et de $2g$ sections $\kappa_i : S \to Z$. Le choix d'une base e_i de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{2g}$ permet de définir un morphisme $\mathbf{RA}^g_{d,n} \to \mathbf{Hilb}^{2g}_N$ qui à $(A, \lambda, \kappa, \phi)$ associe le sous-schéma fermé S-plat $Z = \iota(\lambda, \phi)(A) \subset \mathbf{P}^N_S$ muni des $2g$-sections $\iota(\lambda, \phi) \circ \kappa(e_i)$.

Le foncteur $\mathbf{Hilb}_N$*.* Il classifie les sous-schémas fermés Z de $\mathbf{P}^N_S$ qui sont plats sur S. L'oubli des $2g$-sections fournit un morphisme $\mathbf{Hilb}^{2g}_N \to \mathbf{Hilb}_N$.

Les foncteurs $\mathbf{Hilb}^{\phi}_N$*.* Ce sont des sous-foncteurs ouverts et fermés de $\mathbf{Hilb}_N$ qui classifient les sous-schémas fermés S-plats Z de $X = \mathbf{P}^N_S$ dont le polynôme de Hilbert ϕ_Z est constant sur S, égal à un polynôme fixé ϕ. Pour de tels sous-schémas, on montre qu'il existe un entier $m(\phi)$ tel que pour tout $m \geq m(\phi)$, la surjection $\mathcal{O}_X(m) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_Z(m)$ induit une surjection $\pi_*\mathcal{O}_X(m) \twoheadrightarrow \pi_*\mathcal{O}_Z(m)$ entre *faisceaux localement libres sur* S*,* le rang de $\pi_*\mathcal{O}_Z(m)$ étant égal à $\phi(m)$.

Le foncteur $\mathbf{Grass}(\mathcal{F}, r)$*.* Pour $\mathcal{F} = \pi_*\mathcal{O}_X(m)$ et $r = \phi(m)$ (avec $m \geq m(\phi)$), le foncteur $\mathbf{Grass}(\mathcal{F}, r)$ classifie les quotients $\mathcal{F} \to \mathcal{Q}$ qui sont localement libres de rang r sur S. La construction ci-dessus $Z \mapsto \mathcal{Q} = \pi_*(\mathcal{O}_Z(m))$ donne donc un morphisme $\mathbf{Hilb}^{\phi}_N \to \mathbf{Grass}(\mathcal{F}, r)$.

La construction. Pour résumer, on a donc le diagramme suivant :

$$\mathbf{Grass}(\mathcal{F}, r) \leftarrow \mathbf{Hilb}^{\phi}_N \hookrightarrow \mathbf{Hilb}_N \leftarrow \mathbf{Hilb}^{2g}_N \leftarrow \mathbf{RA}^g_{d,n} \to \mathbf{A}^g_{d,n}.$$

Nous démontrons la représentabilité de ces foncteurs "de gauche à droite". En chemin, nous expliquerons un peu les techniques qui permettent de "transférer" la propriété pour un foncteur (sur une catégorie de schémas) d'être représentable à travers un morphisme de foncteurs $F : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$. Il y a un critère simple pour que $\mathbf{Y}$ représentable implique $\mathbf{X}$ représentable : il faut que F soit relativement représentable, cf. proposition 1. Il est beaucoup plus difficile d'aller dans l'autre sens : $\mathbf{X}$ représentable implique $\mathbf{Y}$ représentable. Nous verrons quelques critères pour cette *descente*, et tâcherons de l'appliquer au cas de $\mathbf{RA}^g_{d,n} \to \mathbf{A}^g_{d,n}$.

Schéma de Picard. Pour la formulation même du problème $\mathbf{A}^g_{d,n}$, nous devons savoir définir le *schéma abélien dual* A^t/S de A/S. Il nous faut pour cela étudier encore un autre foncteur, le foncteur de Picard $\mathbf{Pic}_{X/S}$ d'un schéma X/S (dans le cas où X est projectif et lisse sur S, et muni d'une section). Sans entrer dans trop de détails, celui-ci s'obtient par un légo du type suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & D(\phi) & \to & \mathbf{Pic}^{\phi}_{X/S} \\ & & \cap & & \cap \\ \mathbf{Hilb}_{X/S} & \leftarrow & \mathbf{Div}_{X/S} & \to & \mathbf{Pic}_{X/S} \end{array}$$

où $\mathbf{Div}_{X/S}$ classifie les diviseurs effectifs sur X qui sont plats sur S, $\mathbf{Hilb}_{X/S}$ tous les sous-schémas fermés Z de X plats sur S, et où $\mathbf{Pic}_{X/S} = \coprod \mathbf{Pic}^{\phi}_{X/S}$ est un découpage par des polynômes de Hilbert associés au choix d'un plongement $X \hookrightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E})$. Comme dans le cas précédent, la partie la plus difficile de la preuve est la descente $D(\phi) \to \mathbf{Pic}^{\phi}_{X/S}$.

Références. La référence principale pour la construction de $\mathbf{A}^g_{d,n}$ est le livre [12] de Mumford, qui s'appuie sur [10] pour la théorie des variétés abéliennes sur un corps, et sur [6] pour l'existence des schémas de Hilbert et de Picard. La construction de ceux-ci a été réactualisée avec beaucoup plus de détail dans [5]. La preuve de Mumford est aussi exposée dans un chapitre du très dense livre [8] de Hida.

Première partie 1. Critères de représentabilité et exemples

1. Critères de Représentabilité

1.1. **Morphismes relativement représentables.** Soit $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morphisme de foncteur $\mathcal{F}, \mathcal{G} : (\mathbf{Sch}/S)^0 \to \mathbf{Ens}$. Pour tout T/S et $g \in \mathcal{G}(T)$, on note $\mathcal{F}_g$ le sous-foncteur de la restriction $\mathcal{F}|T : (\mathbf{Sch}/T)^0 \to \mathbf{Ens}$ qui est défini par

$$\mathcal{F}_g(T') = \{f \in \mathcal{F}(T') : \alpha(f) = g|T'\}.$$

On dit que α est relativement représentable si et seulement si pour tout T/S et tout $g \in \mathcal{G}(T)$, le foncteur $\mathcal{F}_g : (\mathbf{Sch}/T)^0 \to \mathbf{Ens}$ est représentable.

Proposition 1. *Supposons que $\mathcal{G}$ est représentable. Alors $\mathcal{F}$ est représentable si et seulement si α est relativement représentable.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont représentables par des S-schémas F et G, et soit $F \to G$ le morphisme correspondant à α. Soit T/S et $g \in \mathcal{G}(T)$, correspondant à un morphisme $T \to G$. Alors $\mathcal{F}_g$ est représentable par $F \times_G T$, donc α est relativement représentable. Supposons ensuite que $\mathcal{G}$ est représentable par un S-schéma G. Soit $g \in \mathcal{G}(G)$ l'élément universel. Si $\mathcal{F}_g$ est représentable par un G-schéma F, alors le S-schéma sous-jacent à F représente $\mathcal{F}$ et α correspond au morphisme structural $F \to G$. □

1.2. **Faisceaux et Représentabilité, I.** Soit $\mathcal{F} : (\mathbf{Sch}/S)^0 \to \mathbf{Ens}$ un foncteur. On dit que $\mathcal{F}$ est un faisceau (pour la topologie de Zariski) si et seulement si pour tout S-schéma T sur S et pour tout recouvrement ouvert T_i de T,

$$\mathcal{F}(T) = \ker\left(\prod_i \mathcal{F}(T_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} \mathcal{F}(T_{i,j})\right) \quad \text{où } T_{i,j} = T_i \cap T_j = T_i \times_T T_j.$$

Si $T' = \coprod T_i$, on a donc $\mathcal{F}(T') = \prod \mathcal{F}(T_i)$, $\mathcal{F}(T' \times_T T') = \prod_{i,j} \mathcal{F}(T_{i,j})$ et

$$\mathcal{F}(T) = \ker\left(\mathcal{F}(T') \rightrightarrows \mathcal{F}(T' \times_T T')\right) \tag{1.1}$$

On vérifie facilement que *tout foncteur représentable est un faisceau.* Inversement :

Proposition 2. *Soit $\mathcal{F} : (\mathbf{Sch}/S)^0 \to \mathbf{Ens}$ un foncteur, (S_i) un recouvrement ouvert de S et $S' = \coprod S_i$. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau pour la topologie de Zariski, les conditions suivantes sont équivalentes.*

(1) *$\mathcal{F}$ est représentable,*

(2) *Pour tout i, $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}|S_i : (\mathbf{Sch}/S_i)^0 \to \mathbf{Ens}$ est représentable,*

(3) *$\mathcal{F}' = \mathcal{F}|S' : (\mathbf{Sch}/S')^0 \to \mathbf{Ens}$ est représentable.*

Démonstration. (1) $\Rightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3) sont faciles. Pour (2) $\Rightarrow$ (1) : soit X_i/S_i représentant $\mathcal{F}_i$, $f_i : X_i \to S_i$ le morphisme structural, $S_{ij} = S_i \cap S_j$ et $X_{ij} = f_i^{-1}(S_{ij})$. Alors X_{ij}/S_{ij} et X_{ji}/S_{ij} représentent $\mathcal{F}_i|S_{ij} = \mathcal{F}|S_{ij} = \mathcal{F}_j|S_{ij}$, ce qui nous fournit une *donnée de recollement* $\phi_{ij} : X_{ij} \simeq X_{ji}$. En considérant de même des intersections de trois ouverts, on voit que ces données de recollement vérifient une condition naturelle de compatibilité qui permettent de recoller tous les X_i/S_i en un schéma X/S. Soit $\mathcal{G}$ le foncteur représenté par ce schéma, de sorte que $\mathcal{F}|S_i \simeq \mathcal{G}|S_i$ pour tout i. Pour tout $T \to S$, soit T_i et T_{ij} les images inverses de S_i et S_{ij}. Puisque $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des faisceaux, on a

$$\mathcal{F}(T) = \ker\left(\prod \mathcal{F}(T_i) \to \prod \mathcal{F}(T_{ij})\right) = \ker\left(\prod \mathcal{G}(T_i) \to \prod \mathcal{G}(T_{ij})\right) = \mathcal{G}(T)$$

donc $\mathcal{F} \simeq \mathcal{G}$, i.e. X représente $\mathcal{F}$. □

Remark 3. On dit aussi souvent d'un foncteur $\mathcal{F} : (\mathbf{Sch}/S)^0 \to \mathbf{Ens}$ qui est un faisceau (pour la topologie de Zariski) qu'il est local sur S (pour cette même topologie). Nous rencontrerons plus tard d'autres "topologies", plus fines que la topologie de Zariski, et pour lesquelles à nouveau tous les foncteurs représentables sont des faisceaux. Les plus classiques de ces topologies sont

$$top \in \{fpqc, fppf, et\}.$$

On dit que $\mathcal{F}$ est un faisceau pour la topologie *top* si et seulement si pour toute famille $(T_i)_i$ de S-schémas $\mathcal{F}(\coprod T_i) = \prod \mathcal{F}(T_i)$ et si de plus (1.1) est valide pour tout S-morphisme $T' \to T$ qui est **f**idèlement **p**lat et **q**uasi-**c**ompact, ou **f**idèlement **p**lat et de **p**résentation **f**inie, ou **ét**ale respectivement. Un faisceau pour la topologie fpqc est a fortiori un faisceau pour la topologie fppf, et de même tout faisceau fppf est un faisceau étale, et tout faisceau étale est un faisceau pour la topologie de Zariski. On montre que tout foncteur $\mathcal{F}$ qui est représentable est un faisceau pour chacune de ces topologies. Dans la suite du texte, un faisceau (pour une topologie non précisée) est un faisceau pour la topologie de Zariski.

Definition 4. On dit d'une famille de sous-foncteurs $\{\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}\}$ de $\mathcal{F}$ que c'est un *recouvrement ouvert* de $\mathcal{F}$ si et seulement si (1) pour tout i, l'inclusion $\mathcal{F}_i \hookrightarrow \mathcal{F}$ est relativement représentable par des immersions ouvertes, et (2) pour tout S-schéma ponctuel x (i.e. dont l'espace sous-jacent est un point), $\mathcal{F}(x) = \cup \mathcal{F}_i(x)$.

Proposition 5. *Soit $(\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F})_i$ un recouvrement ouvert d'un faisceau $\mathcal{F}$. Alors $\mathcal{F}$ est représentable si et seulement si tous les $\mathcal{F}_i$ le sont.*

Démonstration. Soit X_i représentant $\mathcal{F}_i$, $\alpha_i \in \mathcal{F}_i(X_i) \subset \mathcal{F}(X_i)$ l'élément universel, $X_{i,j}$ l'ouvert de X_i représentant $(\mathcal{F}_j)_{\alpha_i}$ et $\alpha_{i,j} \in \mathcal{F}_j(X_{i,j}) \subset \mathcal{F}(X_{i,j})$ l'élément universel. Alors $\alpha_{i,j} = \alpha_i|X_{i,j}$ et $(X_{i,j}, \alpha_{i,j})$ représente $\mathcal{F}_i \cap \mathcal{F}_j$. Il existe donc un (unique) isomorphisme $\phi_{i,j} : X_{i,j} \to X_{j,i}$ qui envoie $\alpha_{i,j}$ sur $\alpha_{j,i}$. Ces isomorphismes vérifient la condition de cocycle, et les X_i se recollent en un S-schéma X. Puisque $\mathcal{F}$ est un faisceau, les α_i se recollent aussi en une section α de $\mathcal{F}$ sur X. Vérifions que (X, α) représente $\mathcal{F}$. Soit donc T/S et $\gamma \in \mathcal{F}(T)$. Soient T_i les ouverts qui représentent $(\mathcal{F}_i)_\gamma$, et $\gamma_i = \gamma|T_i$. Alors γ_i correspond à un morphisme $f_i : T_i \to X_i$ tel que $\gamma_i = f^*\alpha_i$ et $f_i^{-1}(X_{i,j}) = T_i \cap T_j$ et $f_i = f_j$ sur $T_i \cap T_j$: les morphismes f_i se recollent en un morphisme $f : \cup T_i \to X$. Puisque les $\mathcal{F}_i$ recouvrent $\mathcal{F}$, $\cup T_i = T$. Enfin $f^*\alpha = \gamma$ car $\mathcal{F}$ est un faisceau et $f^*\alpha|T_i = f_i^*\alpha_i = \gamma_i = \gamma|T_i$. Le morphisme f est unique car ses restrictions aux T_i le sont. □

2. Premiers exemples de foncteurs représentables

2.1. **Représentabilité de conditions sur des morphismes.**

Lemma 6. *Soit $f, g : S \to X$ deux sections d'un S-schéma X. La condition $f = g$ est représentable par le sous-schéma $S(f = g) = (f, g)^{-1}(\Delta_X)$ de S, où l'on a noté $\Delta_X : X \to X \times_S X$ la diagonale. Si X/S est séparé, $S(f = g)$ est un sous-schéma fermé de S.*

Démonstration. C'est essentiellement une tautologie. □

Lemma 7. *Soient S un schéma, X et Y deux S-schémas propres et plats sur S et $f : X \to Y$ un S-morphisme. Les conditions suivantes sont représentables par des ouverts de S : (1) f est plat, (2) f est fini, (3) f est un isomorphisme.*

Démonstration. (1) Soit $S' = S - \pi_X(X - X')$ où $X' = \{x \in X | f \text{ est plat en } x\}$. D'après [1, IV, 11.3.1], X' est ouvert, donc $X - X'$ est fermé, $\pi_X(X - X')$ aussi puisque π_X est propre donc fermé, donc S' est ouvert. Par construction, pour tout $s \in S'$, $X_s \subset X'$ donc $f_s : X_s \to Y_s$ est plat. D'après [1, IV, 11.3.10], f est alors plat au-dessus de S'. Soit maintenant $T \to S$ tel que $f_T : X_T \to Y_T$ est plat. Pour $t \in T \mapsto s \in S$, $f_t : X_t \to Y_t$ est plat, donc $f_s : X_s \to Y_s$ est plat d'après [1, IV, 2.5.1]. Une nouvelle application de [1, IV, 11.3.10] montre alors que f est plat en tout point de X_s (puisque π_X est plat), i.e. $X_s \subset X'$ et $s \in S'$. Donc T se factorise par S'.

(2) Soit $S' = S - \pi_X(X - X')$ où $X' = \{x \in X | x \text{ est isolé dans } f^{-1}f(x)\}$. Puisque X et Y sont propres sur S, $f : X \to Y$ est propre d'après [1, II, 5.4.3]. Donc X' est ouvert dans X, $X - X'$ est fermé, $\pi_X(X - X')$ aussi puisque π_X est propre donc fermé et S' est ouvert. Par construction, pour tout $s \in S'$, $X_s \subset X'$ donc $f_s : X_s \to Y_s$ est quasi-fini. Puisque $f : X \to Y$ est propre, f est propre et quasi-fini au-dessus de S', donc fini d'après [1, IV, 8.11.1]. Soit maintenant $T \to S$ tel que $f_T : X_T \to Y_T$ soit fini. Pour $t \in T \mapsto s \in S$, $f_t : X_t \to Y_t$ est fini, donc $f_s : X_s \to Y_s$ est fini d'après [1, IV, 2.7.1, xv]. Ainsi $X_s \subset X'$ et $s \in S'$, i.e. $T \to S$ se factorise par S'.

(3) On peut déjà supposer que f est plat et fini. Soit $S' = S - \pi_Y(Y - Y')$ où $Y' = \{y \in Y : f^{-1}(y) \simeq y\}$. C'est l'ouvert de Y où $f_*\mathcal{O}_X$ est de rang 1 sur $\mathcal{O}_Y$. Puisque π_Y est propre donc fermé, S' est ouvert dans S. Par construction, $\pi^{-1}(S') \subset Y'$, donc $f : X \to Y$ est de rang 1 au-dessus de S', i.e. c'est un isomorphisme. Soit maintenant $T \to S$ tel que $f_T : X_T \to Y_T$ soit un isomorphisme. Pour $t \in T \mapsto$

$s \in S$, $f_t : X_t \to Y_t$ est un isomorphisme, donc $f_s : X_s \to Y_s$ est un isomorphisme d'après [1, IV, 2.7.1, viii]. En particulier, $Y_s \subset Y'$, donc $s \in S'$ et $T \to S$ se factorise par S', CQFD. □

2.2. **Schémas Affines.**

Proposition 8. *Soit $\mathcal{B}$ une $\mathcal{O}_S$-algèbre quasi-cohérente. Alors*

$$(\mathbf{Sch}/S)^0 \to \mathbf{Ens} : \qquad (T \xrightarrow{\pi} S) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T-alg}(\mathcal{B}_T, \mathcal{O}_T) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S-alg}(\mathcal{B}, \pi_*\mathcal{O}_T)$$

est représentable par un S-schéma affine que l'on note $\mathrm{Spec}\mathcal{B}$.

Démonstration. Le problème est local sur S, on peut donc supposer que $S = \mathrm{Spec}A$ et $\mathcal{B} = \widetilde{B}$ où B est une A-algèbre, et le résultat résulte alors du lemme suivant. □

Lemma 9. *Pour tout S-schéma T, on a*

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S-alg}(\widetilde{B}, \pi_*\mathcal{O}_T) = \mathrm{Hom}_{A-alg}\left(B, \Gamma(T, \mathcal{O}_T)\right) = \mathrm{Hom}_S(T, \mathrm{Spec}B).$$

Démonstration. Ce problème là est local sur T, que l'on peut donc supposer affine, et le lemme résulte alors de l'anti-équivalence de catégorie entre anneaux et schémas affines, où plus précisément entre A-algèbres et S-schémas affines. □

2.3. **Fibrés vectoriels.**

Proposition 10. *Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent. Alors*

$$(\mathbf{Sch}/S)^0 \to \mathbf{Ab} : \qquad T \mapsto \Gamma(T, \mathcal{F}_T^\vee) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{F}_T, \mathcal{O}_T)$$

est représentable par un S-schéma affine $\mathbf{V}(\mathcal{F}) = \mathrm{Spec}(\mathcal{S}(\mathcal{F}))$.

Démonstration. En effet, soit $\mathcal{S}(\mathcal{F})$ l'algèbre symétrique définie par $\mathcal{F}$, qui est quasi-cohérente sur S et de formation compatible au changement de base. Alors

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{F}_T, \mathcal{O}_T) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T-alg}\left(\mathcal{S}(\mathcal{F}_T), \mathcal{O}_T\right) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T-alg}\left(\mathcal{S}(\mathcal{F})_T, \mathcal{O}_T\right)$$

Donc $\mathbf{V}(\mathcal{F}) = \mathrm{Spec}\left(\mathcal{S}(\mathcal{F})\right)$ convient. □

Remark 11. Ce foncteur atterrit dans la catégorie des groupes abéliens : le S-schéma qui le représente est donc notre premier exemple de S-schéma en groupes (abéliens). Pour $\mathcal{F} = \mathcal{O}_S^n$, on trouve $\mathbf{V}(\mathcal{F}) = \mathbf{A}_S^n$.

Proposition 12. *Soit $f : X \to S$ un morphisme propre et de présentation finie, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des $\mathcal{O}_X$-modules cohérents, avec $\mathcal{G}$ plat sur S et $\mathcal{F}$ localement sur S conoyau d'un morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang fini. Alors*

$$(\mathbf{Sch}/S)^0 \to \mathbf{Ab} : \qquad T \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{X_T}}\left(\mathcal{F}_T, \mathcal{G}_T\right)$$

est représentable par un S-schéma affine $\underline{\mathrm{Hom}}_{X/S}(\mathcal{F}, G)$.

Démonstration. On se ramène au cas où S est affine, avec une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_0 \to \mathcal{F} \to 0$ où $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_0$ sont localement libres. Alors

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{X/S}\left(\mathcal{F}, \mathcal{G}\right) = \ker\left(\underline{\mathrm{Hom}}_{X/S}\left(\mathcal{E}_0, \mathcal{G}\right) \to \underline{\mathrm{Hom}}_{X/S}\left(\mathcal{E}_1, \mathcal{G}\right)\right)$$

est représentable et affine sur S si $\underline{\mathrm{Hom}}_{X/S}\left(\mathcal{E}_\star, \mathcal{G}\right) = \underline{\mathrm{Hom}}_{X/S}\left(\mathcal{O}_X, \mathcal{E}_\star^\vee \otimes \mathcal{G}\right)$ l'est pour $\star \in \{0, 1\}$, ce qui nous ramène au cas où $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$. D'après le corollaire 48 ci-dessous, il existe un faisceau cohérent $\mathcal{Q}$ sur S tel que

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{X/S}\left(\mathcal{O}_X, \mathcal{G}\right) = \pi_*(\mathcal{G}) = \mathcal{Q}^\vee = \underline{\mathrm{Hom}}_{S/S}\left(\mathcal{Q}, \mathcal{O}_S\right)$$

sur $\mathbf{Sch}/S$: ce foncteur est donc représentable par $\mathbf{V}(\mathcal{Q}) = \mathrm{Spec}\left(\mathcal{S}(\mathcal{Q})\right)$. □

Corollary 13. *Avec les hypothèses ci-dessus, soient $x, y : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ deux morphismes de $\mathcal{O}_X$-modules. La condition $x = y$ définit un sous-schéma fermé $S(x = y)$ de S.*

Démonstration. On applique le lemme 6 aux sections x et y du S-schéma affine (donc séparé sur S) que l'on vient juste de construire. □

Lemma 14. *Soit $f : X \to S$ un morphisme propre, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang fini, et $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morphisme de $\mathcal{O}_X$-modules. La condition "α est un isomorphisme" définit un sous-schéma ouvert de S.*

Démonstration. Puisque un morphisme propre est fermé, il suffit de traiter le cas où $X = S$. La question étant locale sur S, on peut supposer que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont libres et de même rang sur S affine, alors α a un déterminant, et on veut que ce déterminant soit inversible : c'est bien une condition ouverte. □

2.4. **Fibrés projectifs et Grassmaniennes.**

Proposition 15. *Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_S$-module localement libre et r un entier. Alors*

$$(\mathbf{Sch}/S)^0 \to \mathbf{Ens} : \qquad T \mapsto \{\textit{quotients } \mathcal{E}_T \twoheadrightarrow \mathcal{Q} \textit{de } \mathcal{E}_T \textit{ localement libres de rang } r\}$$

est représentable par un S-schéma que l'on note $\mathbf{Grass}(\mathcal{E}, r)$.

Démonstration. On commence par réécrire ce foncteur

$$T \mapsto \mathcal{P}(T) = \{\mathcal{G} \subset \mathcal{E}_T | \mathcal{E}_T/\mathcal{G} \text{ localement libre de rang } r\}.$$

Le foncteur est local sur S, et l'on peut donc supposer que S est affine et $\mathcal{E}$ libre, disons $\mathcal{E} = \mathcal{O}_S^m$. Soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des parties de $I = \{1, \cdots, m\}$ de cardinal r, et pour tout $J \in \mathcal{J}$, soit

$$\mathcal{P}_J(T) = \left\{\mathcal{G} \subset \mathcal{O}_T^m | \mathcal{G} \oplus \mathcal{O}_T^J = \mathcal{O}_T^m\right\}.$$

C'est un sous-foncteur de $\mathcal{P}$. On a

$$\mathcal{P}_J(T) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_T}(\mathcal{O}_T^{I-J}, \mathcal{O}_T^J)$$

via $\mathcal{G} \mapsto \pi_{\mathcal{G}} | \mathcal{O}_T^{I-J}$ où $\pi_{\mathcal{G}} : \mathcal{O}_T^I = \mathcal{G} \oplus \mathcal{O}_T^J \to \mathcal{O}_T^J$ est la deuxième projection. La bijection inverse est $(\phi : \mathcal{O}_T^{I-J} \to \mathcal{O}_T^J) \mapsto \mathcal{G} = \ker(\phi + \mathrm{Id} : \mathcal{O}_T^{I-J} \oplus \mathcal{O}_T^J \to \mathcal{O}_T^J)$. On voit donc que ce sous-foncteur est représentable : par $\mathbf{V}(\mathcal{O}_S^{J \times I-J}) = \mathbf{A}_S^{r\cdot(m-r)}$. On conclut d'après la proposition 5 avec le lemme suivant. □

Lemma 16. *Les $\mathcal{P}_J \hookrightarrow \mathcal{P}$ forment un recouvrement ouvert de $\mathcal{P}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{G} \in \mathcal{P}(T)$, i.e. $\mathcal{G} \subset \mathcal{O}_T^m$ et $\mathcal{O}_T^m/\mathcal{G}$ est localement libre de rang r. Soit $T_J \subset T$ le lieu où $\mathcal{G} \in \mathcal{P}_J$: c'est le lieu où $\mathcal{O}_T^J \to \mathcal{O}_T^m/\mathcal{G}$ est un isomorphisme, et c'est donc un ouvert de T d'après le lemme 14. De plus, pour tout point t de T, $t \in T_J$ pour au moins un J. □

Example 17. On note $\mathbf{P}(\mathcal{E}) = \mathbf{Grass}(\mathcal{E}, 1)$ et $\mathbf{P}_S^n = \mathbf{P}(\mathcal{O}_S^{n+1})$. Si $\mathcal{E}$ est localement libre de rang 1, $\mathbf{P}(\mathcal{E}) = S$. En général, il y a sur $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathcal{E})$ un faisceau inversible universel quotient de $\mathcal{E}_P$: on le note $\mathcal{E}_P \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$. Par définition, se donner un morphisme $f : X \to \mathbf{P}$ revient à se donner un quotient $\mathcal{E}_X \twoheadrightarrow \mathcal{L}$, et ce quotient est alors le pull-back de $\mathcal{E}_P \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$. En particulier, $\mathcal{L} = f^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$.

Proposition 18. *Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_S$-module quasi-cohérent. Alors*

$$(\mathbf{Sch}/S)^0 \to \mathbf{Ens} : \qquad T \mapsto \{\textit{quotients inversibles } \mathcal{F}_T \twoheadrightarrow \mathcal{L} \textit{de } \mathcal{F}_T\}$$

est représentable par un S-schéma $\mathbf{P}(\mathcal{F}) = \mathbf{Proj}_S(\mathcal{S}(\mathcal{F}))$.

Démonstration. (sketch) Soit $\mathcal{F}_T \twoheadrightarrow \mathcal{L}$ un quotient avec $\mathcal{L}$ inversible sur T. Il induit un morphisme surjectif de $\mathcal{O}_T$-algèbres graduées $\mathcal{S}(\mathcal{F}_T) \twoheadrightarrow \mathcal{S}(\mathcal{L})$, donc une immersion fermée dans le sens inverse :

$$T \simeq \mathbf{Proj}_T\left(\mathcal{S}(\mathcal{L})\right) \to \mathbf{Proj}_T\left(\mathcal{S}(\mathcal{F}_T)\right) = \mathbf{P}(\mathcal{F})_T.$$

Composant avec $\mathbf{P}(\mathcal{F})_T \to \mathbf{P}(\mathcal{F})$, on obtient le S-morphisme $T \to \mathbf{P}(\mathcal{F})$. □

Deuxième partie 2. Le schéma de Hilbert

3. Les Théorèmes principaux

3.1. Le schéma de Hilbert.

Theorem 19. *Soient S un schéma, $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_S$-module localement libre, et X un sous-schéma fermé de $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ de présentation finie sur S. Le foncteur*

$$(\mathbf{Sch}/S)^0 \to \mathbf{Ens} : \qquad T \mapsto \left\{ Z| \begin{array}{c} Z \textit{ sous-schéma fermé de } X_T \\ \textit{plat de présentation finie sur } T \end{array} \right\}$$

est représentable par un S-schéma que l'on note $\mathbf{Hilb}_{X/S}$.

Corollary 20. *Soient X et Y des S-schémas comme ci-dessus, avec X plat sur S. Le foncteur*

$$(\mathbf{Sch}/S)^0 \to \mathbf{Ens} : \qquad T \mapsto \mathbf{Hom}_T(X_T, Y_T)$$

est représentable par un S-schéma que l'on note $\mathbf{Hom}_S(X, Y)$.

Démonstration. L'application qui à un morphisme associe son graphe induit une bijection entre $\mathbf{Hom}_T(X_T, Y_T)$ et l'ensemble des sous-schémas fermés (car $Y_T \to T$ est séparé) Z de $X_T \times_T Y_T = (X \times_S Y)_T$ tels que la projection $X_T \times_T Y_T \to X_T$ induise un isomorphisme de Z sur X_T. Puisque X_T est plat sur T, de tels sous-schémas le sont également. On obtient ainsi un plongement

$$\mathbf{Hom}_S(X, Y) \hookrightarrow \mathbf{Hilb}_{X \times_S Y/S}.$$

Le lemme 7 montre qu'il est représentable par des immersions ouvertes. □

3.2. Les polynômes de Hilbert. Le schéma $\mathbf{Hilb}_{X/S}$ est typiquement énorme, mais on peut le découper en morceaux plus petits en utilisant des invariants discrets. Le plus fin de ces invariants est le polynôme de Hilbert.

Definition 21. Pour tout faisceau coherent $\mathcal{F}$ sur X et tout point $s \in S$, on pose

$$\chi(\mathcal{F}_s) = \sum_i (-1)^i \dim_{k(s)} H^i(X_s, \mathcal{F}_s)$$

C'est la caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathcal{F}_s$.

Lemma 22. *C'est bien définie et la fonction*

$$n \mapsto \phi(\mathcal{F}_s)(n) = \chi\left(\mathcal{F}_s(n)\right) = \sum_i (-1)^i \dim_{k(s)} H^i\left(X_s, \mathcal{F}_s(n)\right)$$

est polynomiale, de degré majoré par la dimension du support de $\mathcal{F}_s$.

Démonstration. Voir plus bas. □

Lemma 23. *Si $\mathcal{F}$ est S-plat, les fonctions*

$$s \mapsto \chi(\mathcal{F})(s) = \chi(\mathcal{F}_s) \quad \textit{et} \quad s \mapsto \phi(\mathcal{F})(s) = \phi(\mathcal{F}_s)$$

sont localement constantes sur S.

Démonstration. Voir plus bas. □

Pour tout sous-schéma fermé Z de X qui est de présentation finie sur S, le $\mathcal{O}_X$-faisceau $\mathcal{O}_Z$ est cohérent, et plat sur S si et seulement si Z l'est. On pose

$$\phi(Z) = \phi(\mathcal{O}_Z) : S \to \mathbb{Q}[x].$$

Pour tout polynôme $\phi \in \mathbb{Q}[x]$, on définit un sous-foncteur de $\mathbf{Hilb}_{X/S}$ par

$$\mathbf{Hilb}^{\phi}_{X/S}(T) = \left\{ Z \in \mathbf{Hilb}_{X/S}(T) : \phi(Z) \equiv \phi \text{ sur } T \right\}.$$

Il résulte alors immédiatement du lemme précédent que :

Proposition 24. *Les* $\mathbf{Hilb}^{\phi}_{X/S}$ *forment un recouvrement ouvert de* $\mathbf{Hilb}_{X/S}$.

Le théorème 19 résulte donc de sa variante, plus précise, que voici.

Theorem 25. *Pour tout polynôme* $\phi \in \mathbb{Q}[x]$*, le foncteur* $(\mathbf{Sch}/S)^0 \to \mathbf{Ens}$

$$\mathbf{Hilb}^{\phi}_{X/S}(T) = \left\{ Z \middle| \begin{array}{c} Z \textit{ sous-schéma fermé de } X_T, \\ \textit{plat de présentation finie sur } T, \\ \textit{avec } \phi(Z) \textit{ constant égal à } \phi \textit{sur } T \end{array} \right\}$$

est réprésentable par un S*-schéma projectif que l'on note encore* $\mathbf{Hilb}^{\phi}_{X/S}$.

3.3. **Exemples.** Voir [5, p 111].

4. Preuve du Théorème 25

4.1. **Réduction à $X = \mathbf{P}^N_{\mathbb{Z}}$.** Le problème est local sur S, et l'on peut donc supposer que $S = \mathrm{Spec} A$ et $\mathcal{E} \simeq \mathcal{O}_S^{N+1}$, i.e. $\mathbf{P}(\mathcal{E}) \simeq \mathbf{P}^N_A$. Comme X est de présentation finie sur A, tout est déjà défini sur un sous-anneau de A qui est de type fini sur $\mathbb{Z}$, donc noethérien : on remplace A par ce sous-anneau. Le morphisme

$$\mathbf{Hilb}_{X/S} \to \mathbf{Hilb}_{\mathbf{P}^N_S/S} = \mathbf{Hilb}_{\mathbf{P}^N_{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}}|_S$$

est injectif, et relativement représentable par des immersions fermées. En effet, soit T un S-schéma et Z un sous-schéma fermé de $\mathbf{P}^N_T$ qui est plat et de présentation finie sur T. Pour tout $U \to T$, l'immersion $Z_U \hookrightarrow \mathbf{P}^N_U$ se factorise par l'immersion $X_U \hookrightarrow \mathbf{P}^N_U$ si et seulement si le morphisme $\mathcal{I}_{X_U} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}^N_U} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{Z_U}$ est nul. Bien que la formation de $\mathcal{I}_X \subset \mathcal{O}_{\mathbf{P}^N_S}$ ne commute pas au changement de base (en l'abscence d'une hypothèse de platitude sur X/S), il revient au même de demander que

$$\left(\left(\mathcal{I}_X \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^N_S} \right)_T \to \mathcal{O}_Z \right)_U = 0.$$

Les faisceaux $(\mathcal{I}_X)_T$ et $\mathcal{O}_Z$ sont cohérents sur $\mathbf{P}^N_T$, et le second est T-plat. On peut donc utiliser la proposition 12, qui identifie $(\mathcal{I}_X)_T \to \mathcal{O}_Z$ à une section s du T-schéma en groupes $\underline{\mathrm{Hom}}_{X_T/T}((\mathcal{I}_X)_T, \mathcal{O}_Z)$. La condition $Z_U \subset X_U$ est alors équivalente à : $U \to T$ se factorise par le sous-schéma fermé $T(s = 0)$ de T.

4.2. **Caractère borné de $\mathbf{Hilb}^{\phi}_{X/S}$.** On fixe un polynôme de Hilbert $\phi \in \mathbb{Q}[x]$.

Lemma 26. *Il existe $m(\phi) \geq 0$ tel que pour tout $m \geq m(\phi)$, tout S-schéma T et tout $Z \in \mathbf{Hilb}^{\phi}_{X/S}(T)$ correspondant à une suite exacte de $\mathcal{O}_{X_T}$-modules*

$$0 \to \mathcal{I}_Z \to \mathcal{O}_{X_T} \to \mathcal{O}_Z \to 0,$$

les propriétés suivantes sont vérifiées :

(1) *la suite de $\mathcal{O}_T$-modules*
$$0 \to f_*\left(\mathcal{I}_Z(m)\right) \to f_*\left(\mathcal{O}_{X_T}(m)\right) \to f_*\left(\mathcal{O}_Z(m)\right) \to 0$$
est exacte,

(2) *$f_*\left(\mathcal{O}_X(m)\right)$ est localement libre et $f_*\left(\mathcal{O}_{X_T}(m)\right) = \left(f_*\mathcal{O}_X(m)\right)_T$,*

(3) *$f_*\left(\mathcal{O}_Z(m)\right)$ est localement libre de rang $\phi(m)$, et*

(4) *$f^*f_*\left(\mathcal{I}_Z(m)\right) \to \mathcal{I}_Z(m)$ est surjective.*

Démonstration. Voir plus bas. □

4.3. **Plongement dans une Grassmanienne.** Soit $m \geq m(\phi)$ comme ci-dessus et $r = \phi(m)$. Alors $\mathcal{E} = f_*\left(\mathcal{O}_X(m)\right)$ est localement libre. D'après $(1-3)$ ci-dessus, tout $Z \in \mathbf{Hilb}^{\phi}_{X/S}(T)$ définit une suite exacte

$$0 \to f_*\left(\mathcal{I}_Z(m)\right) \to f_*\left(\mathcal{O}_{X_T}(m)\right) \simeq \mathcal{E}_T \to f_*\left(\mathcal{O}_Z(m)\right) \to 0$$

où le quotient $\mathcal{Q}(Z) = f_*\left(\mathcal{O}_Z(m)\right)$ de $\mathcal{E}_T$ est localement libre de rang r. On obtient donc ainsi un point $\mathcal{Q}(Z)$ de $\mathbf{Grass}(\mathcal{E}, r)(T)$. Cette construction est fonctorielle : on en déduit un morphisme

$$\mathbf{Hilb}^{\phi}_{X/S} \to \mathbf{Grass}(\mathcal{E}, r). \tag{4.1}$$

D'après (4), ce morphisme est injectif : la connaissance de $\mathcal{Q}(Z)$ permet d'abord de reconstruire $f_*\left(\mathcal{I}_Z(m)\right) \to f_*\left(\mathcal{O}_{X_T}(m)\right)$, puis donc aussi

$$f^*f_*\left(\mathcal{I}_Z(m)\right) \to f^*f_*\left(\mathcal{O}_{X_T}(m)\right) \to \mathcal{O}_{X_T}(m)$$

et (4) nous dit que l'image de ce morphisme n'est autre que $\mathcal{I}_Z(m)$. Il ne reste plus qu'à tordre par $(-m)$ pour obtenir $\mathcal{I}_Z$, donc le point Z de $\mathbf{Hilb}^{\phi}_{X/S}(T)$. Soit d'autre part $\mathcal{Q}$ un élément quelconque de $\mathbf{Grass}(\mathcal{E}, r)(T)$, correspondant à une suite exacte

$$0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{E}_T = f_*\left(\mathcal{O}_{X_T}(m)\right) \to \mathcal{Q} \to 0.$$

Définissons un idéal cohérent $\mathcal{I}(\mathcal{Q})$ de $\mathcal{O}_{X_T}$ par la formule

$$\mathcal{I}(\mathcal{Q})(m) = \text{image de } f^*f_*\mathcal{K} \to f^*f_*\left(\mathcal{O}_{X_T}(m)\right) \to \mathcal{O}_{X_T}(m).$$

Soit $Z(\mathcal{Q})$ le sous-schéma fermé de X_T défini par cet idéal. Alors $\mathcal{Q}$ appartient à l'image de $\mathbf{Hilb}^{\phi}_{X/S}(T)$ si et seulement si (1) $Z(\mathcal{Q})$ est plat sur T et (2) $\phi(Z(\mathcal{Q})) \equiv \phi$.

Remark 27. La première condition définit un ouvert T_1 de T d'après [1, IV, 11.3.1] et la seconde un ouvert T_2 de T_1 par continuité du polynôme de Hilbert : notre morphisme serait-il donc relativement représentable par des immersions ouvertes ? Non : il y a une subtilité. L'ouvert T_1 ci-dessus est

$$\begin{aligned} T_1 &= T - f\left(Z(\mathcal{Q}) - Z(\mathcal{Q})_1\right), \\ \text{où} \quad Z(\mathcal{Q})_1 &= \left\{z \in Z(\mathcal{Q}) : Z(\mathcal{Q}) \text{ est plat sur } S \text{en } z\right\}. \end{aligned}$$

C'est bien le plus gros ouvert de T au-dessus duquel $Z(\mathcal{Q})$ est plat, mais cet ouvert ne *représente pas* la condition "$Z(\mathcal{Q})$ est plat sur T" : si $t \in T - T_1$, $Z(\mathcal{Q})_t$ est plat sur $t = \mathrm{Spec}k(t)$ puisque tout est plat sur un corps ! Il faut donc travailler simultanément avec les deux conditions ci-dessus.

Lemma 28. *Soit T un schéma noethérien, Z un sous-schéma fermé de $X_T = \mathbf{P}^N_T$. Alors $\Phi(Z) = \{\phi(Z_t) : t \in T\}$ est fini et pour tout $\phi \in \Phi(Z)$, la condition*

$$\text{(1) } Z_U \text{ est plat sur } U \quad \text{et} \quad \text{(2) } \Phi(Z_U) = \{\phi\} \qquad (U \in \mathbf{Sch}/T)$$

est représentable par un sous-schéma T^ϕ de T.

Démonstration. Voir plus bas. □

En appliquant ce lemme au sous-schéma fermé $Z(\mathcal{Q})$ de $\mathbf{P}^N_T$ au-dessus du schéma noetherien $T = \mathbf{Grass}(\mathcal{E}, r)$ où $\mathcal{E}_T \twoheadrightarrow \mathcal{Q}$ est le quotient universel, on en déduit que $\mathbf{Hilb}^\phi_{X/S}$ est représentable par le sous-schéma T^ϕ de $T = \mathbf{Grass}(\mathcal{E}, r)$. On sait donc à ce stade que $\mathbf{Hilb}^\phi_{X/S}$ est représentable par un S-schéma quasi-projectif, en particulier de type fini sur S. Pour conclure, il reste à voir que l'immersion $\mathbf{Hilb}^\phi_{X/S} \to \mathbf{Grass}(\mathcal{E}, r)$ est fermée, ou encore que $\mathbf{Hilb}^\phi_{X/S}$ est propre sur S. Il suffit pour cela de démontrer le critère valuatif de propreté pour $\mathbf{Hilb}^\phi_{X/S}$, qui résulte aisément du lemme suivant.

Lemma 29. *Soit S un schéma de Dedekind irréductible de point générique η. Pour tout S-schéma X, l'application $Z \mapsto Z_\eta$ induit une bijection de l'ensemble des sous-schémas fermés S-plats de X sur l'ensemble des sous-schémas fermés de X_η.*

Démonstration. [1, IV, 2.8.5] On peut supposer que $S = \mathrm{Spec}A$ et $X = \mathrm{Spec}B$, où A est un anneau de Dedekind intègre. Soit K le corps des fractions de A. Il s'agit de vérifier que l'application $I \mapsto J(I) = IB_K$ est une bijection de l'ensemble des idéaux I de B tels que B/I est un A-module plat, c'est-à-dire sans torsion, sur l'ensemble des ideaux J de $B_K = B \otimes_A K$. La bijection inverse envoit tout simplement J sur le noyau $I(J)$ de $B \to B_K \to B_K/J$. □

5. Vérifications Cohomologiques

On se propose ici de vérifier ce que nous avons admis plus haut concernant la cohomologie des schémas propres ou projectifs. On commence par quelques rappels.

5.1. Cohomologie des schémas affines et applications.

Proposition 30. *Soit X un schéma affine et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent. Alors $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $i > 0$.*

Démonstration. Voir [7, III.3] pour $X = \mathrm{Spec}A$ avec A noethérien, et [1, IIII, 1.3.1] dans le cas général. Il suffit de montrer que si I est un A-module injectif, alors $\widetilde{I}$ est acyclique. En effet : si $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, on choisit une résolution injective $0 \to M \to \boldsymbol{I}^\bullet$ du A-module M, alors $0 \to \widetilde{M} \to \widetilde{\boldsymbol{I}^\bullet}$ est une résolution acyclique du faisceau $\widetilde{M}$, donc

$$H^\star(X, \mathcal{F}) = H^\star\Gamma(X, \widetilde{I^\bullet}) = H^\star(I^\bullet) = [M, 0, \cdots].$$

Dans le cas Noethérien, Hartshorne montre que $\widetilde{I}$ est flasque. □

Corollary 31. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme affine et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent. Alors $R^q f_* \mathcal{F} = 0$ pour $q > 0$.*

Démonstration. C'est le faisceau associé au préfaisceau $U \mapsto H^q(f^{-1}(U), \mathcal{F})$, lequel est trivial sur les ouverts affines pour $q > 0$. □

Corollary 32. *Soit $f : X \to Y$ un morphisme affine et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent. Alors $H^q(X, \mathcal{F}) = H^q(Y, f_*\mathcal{F})$ pour tout $q \geq 0$.*

Démonstration. La suite spectrale

$$E_2^{p,q} = H^p(Y, R^q f_*\mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathcal{F})$$

dégénère ! □

Proposition 33. *Soit X un schéma séparé quasi-compact et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent. Alors $H^q(X, \mathcal{F})$ se calcule par la cohomologie de Cech d'un recouvrement ouvert affine fini.*

Démonstration. Le complexe de Cech faisceautisé est une résolution de $\mathcal{F}$ par des faisceaux de la forme $\iota_*(\mathcal{F}|U)$ pour des ouverts $\iota : U \hookrightarrow X$. Ces ouverts sont des intersections finies des ouverts affines du recouvrement, et ils sont donc affines puisque X est séparé. Cette même hypothèse garantit que $\iota : U \hookrightarrow X$ est un morphisme affine, donc $H^j(X, \iota_*\mathcal{F}|U) = H^j(U, \mathcal{F}) = 0$ pour $j > 0$ d'après le corollaire ci-dessus et la proposition. □

5.2. **Cohomologie des schémas projectifs et applications.**

Proposition 34. *Soit A un anneau noethérien et $X = \mathbf{P}_A^N$. Alors*

(1) $H^i(X, \mathcal{O}_X(j)) = 0$ *si* $i \neq 0, N$,
(2) $H^0(X, \mathcal{O}_X(j)) \simeq \{P \in A[s_0, \cdots, s_N] : \deg P = j\}$,
(3) $H^N(X, \mathcal{O}_X(j)) \simeq \{P \in (s_0 \cdots s_N)^{-1} A[s_0^{-1}, \cdots, s_N^{-1}] : \deg P = j\}$.

Démonstration. On calcule la cohomologie du faisceau quasi-cohérent

$$\mathcal{F} = \oplus_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(j)$$

sur X, en utilisant la résolution de Cech du recouvrement ouvert standard de X par les $X(s_i) \simeq \mathrm{Spec} A[\frac{s_0}{s_i}, \cdots, \frac{s_N}{s_i}]$. Ce qui nous ramène à un calcul explicite d'algèbre linéaire, pour lequel on renvoie à [7, III.5] (ou à [1, III, 2.1]). □

Corollary 35. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur un sous-schéma fermé X de $\mathbf{P}_A^N$. Alors $H^i(X, \mathcal{F})$ est un A-module de type fini, $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $i > N$ et $H^i(X, \mathcal{F}(j)) = 0$ pour tout $i > 0$ et $j \gg 0$.*

Démonstration. Puisque $H^i(X, \mathcal{F}) = H^i(\mathbf{P}_A^N, \iota_*\mathcal{F})$ d'après le corollaire 32, on peut supposer que $X = \mathbf{P}_A^N$. En calculant la cohomologie de $H^i(X, \mathcal{F})$ à la Cech comme ci-dessus, on voit que $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ pour tout $i > N$. D'après la lemme suivant, il existe une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-module cohérent

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{O}_X(n)^R \to \mathcal{F} \to 0 \tag{5.1}$$

qui donne pour tout $j \in \mathbb{Z}$ une suite exacte longue

$$\cdots \to H^i(X, \mathcal{O}_X(n+j))^R \to H^i(X, \mathcal{F}(j)) \to H^{i+1}(X, \mathcal{G}(j)) \to \cdots$$

On conclut facilement par récurrence. □

Lemma 36. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $X \subset \mathbf{P}_A^N$. Il existe alors un entier n tel que $\mathcal{F}(n)$ est engendré par ces sections globales.*

Démonstration. C'est un résultat dû à Serre, cf. [7, II, 5.17]. On se ramène immédiatement à $X = \mathbf{P}^N_A$, on recouvre X par les $X(s_i)$, on écrit $\mathcal{F}|X_i = \widetilde{M_i}$ pour un module M_i de type fini sur $A[\frac{s_0}{s_i}, \cdots, \frac{s_N}{s_i}]$, on choisit des générateurs $m_{i,j}$ de M_i. Le point clé est : il existe un entier n tel que la section $s_i^n \otimes m_{i,j}$ de $\mathcal{O}_X(n) \otimes \mathcal{F} = \mathcal{F}(n)$ sur X_i s'étend en une section globale (pour tout i, j). L'ensemble de ces sections globales permet alors de définir un morphisme $\mathcal{O}_X^R \to \mathcal{F}(n)$. La restriction de ce morphisme à $X(s_i)$ est trivialement surjective. □

Corollary 37. *La caractéristique d'Euler-Poincaré $\chi(\mathcal{F})$ est bien définie et additive sur les suites exactes courtes de faisceaux cohérents.*

Dans la suite de ce numéro, on suppose que k est un corps, X un sous-schéma fermé de $\mathbf{P}^N_k$ et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Pour toute fonction $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, on pose $\Delta\phi(n) = \phi(n) - \phi(n-1)$. On a donc $\phi \in \mathbb{Q}[X] \iff \Delta\phi \in \mathbb{Q}[X]$ et alors $\deg \phi = \deg \Delta\phi + 1$, avec la convention $\deg 0 = -1$.

Proposition 38. *La fonction $\phi(\mathcal{F})(j) = \chi(\mathcal{F}(j))$ est polynomiale en j de degré $d(\mathcal{F})$ inférieur ou égal à la dimension $\dim(\mathcal{F})$ du support de $\mathcal{F}$.*

Démonstration. On peut supposer k algébriquement clos, puisque cohomologie et dimension du support commutent aux changements de bases $k \to k^{alg}$. On raisonne alors par récurrence sur la dimension du support de $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{F} = 0$, la proposition est trivialement vraie. Sinon, il existe d'après le lemme suivant une suite exacte $0 \to \mathcal{F}(-1) \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$ avec $\dim \mathcal{G} < \dim \mathcal{F}$. Par récurrence, on sait donc que $\phi(\mathcal{G})$ est un polynôme de degré $d(\mathcal{G}) \leq \dim \mathcal{G}$ (en convenant que $\dim \emptyset = -1$). Mais l'additivité de χ sur les suites exactes courtes de faisceaux cohérents montre par ailleurs que $\Delta(\phi(\mathcal{F})) = \phi(\mathcal{G})$, donc $\phi(\mathcal{F})$ est un polynôme de degré

$$d(\mathcal{F}) = d(\mathcal{G}) + 1 \leq \dim \mathcal{G} + 1 \leq \dim \mathcal{F}.$$

□

Lemma 39. *Soit k un corps algébriquement clos, $X \subset \mathbf{P}^N_k$ et $\mathcal{F} \neq 0$ un faisceau cohérent sur X. Alors il existe une section s de $\mathcal{O}_X(1)$ induisant une suite exacte $0 \to \mathcal{F}(-1) \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$ avec $\dim \mathcal{G} < \dim \mathcal{F}$.*

Démonstration. On peut supposer $X = \mathbf{P}^N_k$. Il suffit de choisir s tel que l'hyperplan $H(s) = X - X(s)$ de $\mathbf{P}^N_k$ ne contienne aucun des points associés de $\mathcal{F}$. Pour chaque point associé x de $\mathcal{F}$, choisissons un point fermé $y(x)$ dans $\overline{x}$, et soit $0 \to W(x) \to k^{N+1} \to Q(x) \to 0$ la suite exacte associée à $y(x)$. La réunion des hyperplans $W(x)$ est distincte de k^{N+1} (car k est infini). Tout élément s de $k^{N+1} = \Gamma(X, \mathcal{O}_X(1))$ qui n'est pas dans la réunion de ces $W(x)$ convient. En effet, $y(x) \notin H(s)$ par construction, donc a fortiori $x \notin H(s)$ pour tout point associé x de $\mathcal{F}$. □

Le polynôme de Hilbert $\phi(\mathcal{F})$ est déterminé par les dimensions de tous les groupes de cohomologie $H^i(X, \mathcal{F}(j))$. A l'inverse, nous verrons que la connaissance de ce polynôme permet au moins de borner ces dimensions. D'ores et déjà, notons que :

Proposition 40. *On a $H^i(X, \mathcal{F}(j)) = 0$ pour tout $i > d(\mathcal{F})$.*

Démonstration. On peut derechef supposer k algébriquement clos. On raisonne par récurrence sur $d(\mathcal{F})$. Si $d(\mathcal{F}) = -1$, i.e $\phi(\mathcal{F}) = 0$, alors $\mathcal{F} = 0$. En effet,

$$\forall j \gg 0 : \qquad \phi(\mathcal{F})(j) = \dim H^0(X, \mathcal{F}(j))$$

d'après le corollaire 35, et pour l'un quelconque de ces $j \gg 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{F}(j+k)$ soit engendré par ses sections globales : ces dernières étant nulles, $\mathcal{F}(j+k) = 0$ donc $\mathcal{F} = 0$. Si $d(\mathcal{F}) \geq 0$, $\mathcal{F} \neq 0$ et l'on peut utiliser le lemme précédent pour obtenir une suite exacte $0 \to \mathcal{F}(-1) \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$ avec $d(\mathcal{G}) = d(\mathcal{F}) - 1$. Cette suite exacte donne une suite exacte

$$\cdots \to H^{i-1}(X, \mathcal{G}(j+1)) \to H^i(X, \mathcal{F}(j)) \to H^i(X, \mathcal{F}(j+1)) \to H^i(X, \mathcal{G}(j+1)) \to \cdots .$$

Pour $i > d(\mathcal{F})$, $i - 1 > d(\mathcal{G})$ et les deux termes extrêmes sont triviaux d'après l'hypothèse de récurrence, donc $H^i(X, \mathcal{F}(j))$ ne dépend pas de j. Mais on a déjà vu que c'est trivial pour $j \gg 0$: c'est donc trivial pour tout j. □

Example 41. Pour $\mathbf{P} = \mathbf{P}_k^N$, la proposition 34 montre que

$$\phi(\mathcal{O}_{\mathbf{P}})(j) = \begin{pmatrix} N+j \\ N \end{pmatrix} = \frac{1}{N!}(j+1)(j+2)\cdots(j+N).$$

Pour $X \subset \mathbf{P} = \mathbf{P}_k^N$ une hypersurface de degré D, la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(-D) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}} \to \mathcal{O}_X \to 0$$

donne alors

$$\phi(\mathcal{O}_X)(j) = \begin{pmatrix} N+j \\ N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N+j-D \\ N \end{pmatrix}.$$

5.3. **Faisceaux m-réguliers et applications.** On dit d'un faisceau $\mathcal{F}$ qu'il est m-régulier si et seulement si $\dim_k H^i(X, \mathcal{F}(j)) = 0$ pour tout $i + j = m$ avec $i > 0$. Tout $\mathcal{F}$ est donc m-régulier pour tout $m \gg 0$. Si $d(\mathcal{F}) = 0$, $\mathcal{F}$ est m-régulier pour tout $m \in \mathbb{Z}$. D'après 34, $\mathcal{O}_X$ est m-régulier pour tout $m \geq 0$ lorsque $X = \mathbf{P}^N$.

Lemma 42. *Si $\mathcal{F}$ est m-régulier, alors*

(1) *$\mathcal{F}$ est n-régulier pour tout $n \geq m$,*

(2) *$H^0(X, \mathcal{F}(n)) \otimes H^0(X, \mathcal{O}(1)) \to H^0(X, \mathcal{F}(n+1))$ est surjectif, et*

(3) *$\mathcal{F}(n)$ est engendré par ses sections globales.*

Démonstration. Comme ci-dessus, on peut supposer k algébriquement clos et raisonner par récurrence sur $\dim \mathcal{F}$, le cas $\mathcal{F} = 0$ ou $\dim \mathcal{F} = 0$ étant trivial. Si $\mathcal{F} \neq 0$, on fixe une suite exacte $0 \to \mathcal{F}(-1) \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$ comme ci-dessus, avec $\dim \mathcal{G} < \dim \mathcal{F}$. Considérant

$$\cdots \to H^i(X, \mathcal{F}(j)) \to H^i(X, \mathcal{G}(j)) \to H^{i+1}(X, \mathcal{F}(j-1)) \to \cdots$$

on voit que $\mathcal{G}$ est m-régulier, et vérifie donc $(1-3)$ d'après l'hypothèse de récurrence. Considérant alors

$$\cdots \to H^{i-1}(X, \mathcal{G}(j+1)) \to H^i(X, \mathcal{F}(j)) \to H^i(X, \mathcal{F}(j+1)) \to H^i(X, \mathcal{G}(j+1)) \to \cdots$$

on voit par récurrence sur n que $\mathcal{F}$ est bien n-régulier pour tout $n \geq m$, i.e. (1). Pour (2), on utilise le diagramme commutatif suivant, avec toujours $n \geq m$:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & H^0(X,\mathcal{F}(n)) \otimes H^0(X,\mathcal{O}(1)) & \to & H^0(X,\mathcal{G}(n)) \otimes H^0(X,\mathcal{O}(1)) \\ & & & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \to & H^0(X,\mathcal{F}(n)) & \to & H^0(X,\mathcal{F}(n+1)) & \to & H^0(X,\mathcal{G}(n+1)) \end{array}$$

Dans le carré, la première flèche horizontale est surjective car $H^1(X, \mathcal{F}(n-1)) = 0$, la deuxième flèche verticale est surjective par l'hypothèse de récurrence, et il en résulte facilement que la première flèche verticale est également surjective, i.e. (2). Enfin pour (3), il s'agit de vérifier que $H^0(X, \mathcal{F}(n)) \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}(n)$ est surjective, ou encore en tensorisant par $\mathcal{O}_X(1)$, que la dernière flèche verticale du diagramme suivant est surjective :

$$\begin{array}{ccc} H^0(X,\mathcal{F}(n))\otimes H^0(X,\mathcal{O}_X(1))\otimes\mathcal{O}_X & \to & H^0(X,\mathcal{F}(n))\otimes\mathcal{O}_X(1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(X,\mathcal{F}(n+1))\otimes\mathcal{O}_X & \to & \mathcal{F}(n+1) \end{array}$$

Mais la première flèche verticale l'est d'après (2), donc $(3)_{n+1} \Rightarrow (3)_n$ lorsque $n \geq m$. Or on sait qu'existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{F}(n)(k) = \mathcal{F}(n+k)$ est engendré par ses sections globales, et on conclut par une récurrence descendante de $n+k$ à n. $\square$

5.4. **Bornes.** Le but de cette sous-section est de montrer le résultat suivant :

Lemma 43. *Il existe une fonction $(\phi_1,\phi_2) \mapsto m(\phi_1,\phi_2)$ telle que pour tout corps k, pour tout N et tout couple de sous-schémas fermés $Z \subset X \subset \mathbf{P}^N_k$, les trois faisceaux de la suite exacte $0 \to \mathcal{I}_Z \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Z \to 0$ sont m-réguliers pour tout $m \geq m(\phi(Z),\phi(X))$ où $\phi(Z) = \phi(\mathcal{O}_Z)$ et $\phi(X) = \phi(\mathcal{O}_X)$.*

Démonstration. Puisque $\mathcal{O}_\mathbf{P}$ est 0-régulier d'après 34, le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathcal{I}^0_X & \to & \mathcal{O}_\mathbf{P} & \to & \mathcal{O}_X & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \| & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathcal{I}^0_Z & \to & \mathcal{O}_\mathbf{P} & \to & \mathcal{O}_Z & \to & 0 \end{array}$$

(qui donne $\mathcal{I}_Z \simeq \mathcal{I}^0_Z/\mathcal{I}^0_X$) montre qu'il suffit de prouver le lemme suivant. $\square$

Lemma 44. *Il existe une fonction $\phi \mapsto m(\phi)$ telle que pour tout corps k, pour tout N et tout sous-schéma fermé X de $\mathbf{P} = \mathbf{P}^N_k$, le faisceau $\mathcal{I}_X \subset \mathcal{O}_\mathbf{P}$ est m-régulier pour tout $m \geq m(\phi(X))$.*

Démonstration. On peut supposer k-algébriquement clos, $X \neq \emptyset$, et raisonner par récurrence sur $d(X) = \deg\phi(X)$. Soit donc X avec $\Phi = \phi(X)$ non constant. Appliquant le lemme 39 au $\mathcal{O}_P$-faisceau cohérent $\mathcal{O}_X$, on obtient une section s de $\Gamma(\mathbf{P},\mathcal{O}_\mathbf{P}(1))$ qui donne un diagramme à ligne et colonne exacte

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{I}(-1) & \to & \mathcal{O}_\mathbf{P}(-1) & \to & \mathcal{O}_X(-1) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{I} & \to & \mathcal{O}_\mathbf{P} & \to & \mathcal{O}_X \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{I}' & \to & \mathcal{O}_{\mathbf{P}'} & \to & \mathcal{O}_{X'} \end{array}$$

où $\mathbf{P}' \simeq \mathbf{P}^{N-1}_k$, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_X$ et $\mathcal{I}' = \mathcal{I}_{X'}$. D'après ce diagramme, $\phi(X') = \Delta\Phi$, et on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence à X'. Soit $m \geq \max(m(\Delta\Phi),1)$. Puisque $\mathcal{I}'$ est m-régulier, l'exactitude de la première colonne donne immédiatement $H^i(\mathbf{P},\mathcal{I}(j)) = H^i(\mathbf{P},\mathcal{I}(j+1)) = \cdots = 0$ pour $i+j \geq m$ et $i \geq 2$, ainsi que

$$0 \to H^0(\mathbf{P},\mathcal{I}(j-1)) \to H^0(\mathbf{P},\mathcal{I}(j)) \xrightarrow{\alpha(j)} H^0(\mathbf{P},\mathcal{I}'(j)) \to H^1(\mathbf{P},\mathcal{I}(j-1)) \to H^1(\mathbf{P},\mathcal{I}(j)) \to 0$$

pour $1+j \geq m$. Or d'après 42, la flèche $\beta(j)$ du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^0(\mathbf{P},\mathcal{I}(j))\otimes H^0(\mathbf{P},\mathcal{O}_\mathbf{P}(1)) & \xrightarrow{\alpha(j)\otimes Id} & H^0(\mathbf{P},\mathcal{I}'(j))\otimes H^0(\mathbf{P},\mathcal{O}_X(1)) \\ \downarrow & & \downarrow \beta(j) \\ H^0(\mathbf{P},\mathcal{I}(j+1)) & \xrightarrow{\alpha(j+1)} & H^0(\mathbf{P},\mathcal{I}'(j+1)) \end{array}$$

est alors surjective, d'où l'on tire que $\alpha(j)$ surjective implique $\alpha(j+1)$ surjective. Par conséquent, la dimension de $H^1(\mathbf{P},\mathcal{I}(j-1))$ est, pour $j+1 \geq m$, strictement décroissante puis stationnaire égale à 0. En particulier, $H^1(\mathbf{P}, \mathcal{I}(j-1)) = 0$ dès que $j \geq m + \dim_k H^1(\mathbf{P}, \mathcal{I}(m-1))$. Comme $H^i(\mathbf{P}, \mathcal{F}(m-1)) = 0$ pour $i \geq 2$,

$$\phi(\mathcal{I})(m-1) = \dim_k H^0(\mathbf{P}, \mathcal{I}(m-1)) - \dim_k H^1(\mathbf{P}, \mathcal{I}(m-1))$$

avec $H^0(\mathbf{P}, \mathcal{I}(m-1)) \subset H^0(\mathbf{P}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(m-1))$ de dimension $\leq \phi(\mathcal{O}_{\mathbf{P}})(m-1)$, donc

$$\dim_k H^1(\mathbf{P}, \mathcal{F}(m-1)) \leq \phi(\mathcal{O}_{\mathbf{P}})(m-1) - \phi(\mathcal{I})(m-1) = \Phi(m-1).$$

Finalement, $\mathcal{I}$ est $m+k$-régulier pour tout $k \geq \Phi(m-1)$. On peut donc prendre

$$m(\Phi) = m(\Delta\Phi) + \phi(m(\Delta\Phi) - 1)$$

en initialisant par $m(\mathrm{cst}) = 1$. □

5.5. **Cohomologie et changement de base.** D'après Mumford [10, §5], qui résume merveilleusement bien les résultats les plus utiles de [1, III, 2].

Lemma 45. *Soit A un anneau noethérien, $S = \mathrm{Spec} A$ et X un S-schéma propre. Pour tout $\mathcal{O}_X$-faisceau cohérent $\mathcal{F}$ plat sur S, il existe un complexe fini de A-modules localement libres de rang fini*

$$C^0 \to C^1 \to \cdots \to C^r$$

tel que pour toute A-algèbre B,

$$H^\bullet(X, \mathcal{F} \otimes B) = H^\bullet(C^\bullet \otimes B).$$

Démonstration. On part du complexe de Cech de $\mathcal{F}$ lié à un recouvrement de X par des ouverts affines. C'est un complexe fini et plat $\mathcal{C}^0 \to \mathcal{C}^1 \to \cdots \to \mathcal{C}^r$, et par construction, $H^\bullet(\mathcal{C}^\bullet \otimes B) = H^\bullet(X, \mathcal{F} \otimes B)$ pour toute A-algèbre B. Il s'agit de trouver un complexe homotopes $C^\bullet \to \mathcal{C}^\bullet$ vérifiant les conditions de l'énoncé. C'est là un résultat de pure algèbre homologique, pour lequel on renvoie à la preuve de Mumford, cf [10, §5]. □

Corollary 46. *Soit S un schéma, X un S-schéma propre et de présentation finie, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$-module cohérent et plat sur S. Alors*

$$s \mapsto \chi(\mathcal{F}_s) = \sum (-1)^i \dim_{k(s)} H^i(X_s, \mathcal{F}_s)$$

est localement constante sur S.

Démonstration. C'est local sur S et ça descend au cas noethérien, i.e. on peut supposer que $S = \mathrm{Spec} A$ est noethérien, appliquer le lemme précédent pour obtenir un complexe fini $C^\bullet$ de A-modules localement libres de rangs finis calculant la cohomologie de $\mathcal{F}$, et alors $\chi(\mathcal{F}_s) = \sum (-1)^i \mathrm{rang} C^\bullet_s$, qui est localement constant parce que chacun des termes l'est. □

Corollary 47. *Soit S un schéma, X un S-schéma propre et de présentation finie, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module cohérent et plat sur S. Soit $i \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $s \in S$,*

$$\forall j > i : \qquad H^j(X_s, \mathcal{F}_s) = 0.$$

Alors $R^j f_* \mathcal{F} = 0$ pour tout $j > i$ et $R^j f_* \mathcal{F}$ est de formation compatible au changement de base pour tout $j \geq i$. Si de plus $i = 0$, alors $f_* \mathcal{F}$ est localement libre.

Démonstration. Le problème est local sur S et descend au cas noethérien, donc on peut supposer que $S = \mathrm{Spec}A$ avec A noethérien. On applique alors le lemme, qui fournit un complexe fini $C^\bullet$ de A-modules localement libres de rangs finis (que l'on peut si l'on veut supposer libres en passant à un S plus petit), calculant la cohomologie de $\mathcal{F} \otimes B$ sur $X \otimes B$ pour toute A-algèbre B. On choisit ce complexe de longueur minimale, disons r. L'hypothèse de la proposition devient : pour tout $s \in S$ et tout $j > i$, $H^j(C^\bullet \otimes k(s)) = 0$. Si $r > i$, cette hypothèse implique que $C^{r-1} \to C^r$ est surjectif (d'après Nakayama). On peut donc en choisir un scindage, $C^{r-1} = D^{r-1} \oplus C^r$, et le complexe $C^0 \to C^1 \to \cdots \to C^{r-2} \to D^{r-1}$ est alors homotope à $C^\bullet$: cela contredit la minimalité de r, donc $r \leq i$.

Soit T un S-schéma. Alors $R^j f_{T,*}\mathcal{F}_T$ est le faisceau associé au préfaisceau

$$U \mapsto H^j(f_T^{-1}(U), \mathcal{F}_T).$$

Pour $U = \mathrm{Spec}B$, on a $H^j(f_T^{-1}(U), \mathcal{F}_T) = H^j(X_B, \mathcal{F}_B) = H^j(C^\bullet \otimes B)$, qui est nul si $j > i$. Si $j = i$,

$$H^i(C^\bullet \otimes B) = \mathrm{coker}\left(C^{i-1} \otimes B \to C^i \otimes B\right) = \mathrm{coker}\left(C^{i-1} \to C^i\right) \otimes B = H^i(C^\bullet) \otimes B$$

d'où l'on déduit aisément que $R^i f_{T,*}\mathcal{F}_T = R^i f_* \mathcal{F}_T = \widetilde{H^i(C^\bullet)}_T$. Si $i = 0$, $C^\bullet = C^0$ est libre de rang fini et $f_*\mathcal{F}$ est le $\mathcal{O}_S$-module libre associé a C^0. □

Corollary 48. *Soit S un schéma, X un S-schéma propre et de présentation finie, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$ -module cohérent et plat sur S. Alors il existe un faisceau cohérent $\mathcal{Q}$ sur S tel que $f_*\mathcal{F} = \mathcal{Q}^\vee$ sur $\mathbf{Sch}/S$.*

Démonstration. C'est local sur S, et l'on suppose derechef que $S = \mathrm{Spec}A$ avec A noethérien. On applique le lemme 45, qui nous donne un complexe fini $C^\bullet$ de A-modules localement libres de rangs finis (et même libres si l'on restreint encore S) calculant la cohomologie de $\mathcal{F}$. En particulier pour toute A-algèbre B,

$$(f_B)_*\mathcal{F}_B = \left(\ker(C^0 \otimes B \to C^1 \otimes B)\right)^\sim.$$

Définissons $Q = \mathrm{coker}\left(\mathrm{Hom}_A(C^1, A) \to \mathrm{Hom}_A(C^0, A)\right)$. Donc

$$\mathrm{Hom}_A(C^1, A) \otimes B \to \mathrm{Hom}_A(C^0, A) \otimes B \to Q \otimes_A B \to 0.$$

Mais $\mathrm{Hom}_A(C^\star, A) \otimes B = \mathrm{Hom}_B(C^\star \otimes B, B)$ puisque $C^\star$ est libre de rang fini, donc

$$\mathrm{Hom}_B(C^1 \otimes B, B) \to \mathrm{Hom}_B(C^0 \otimes B, B) \to Q \otimes_A B \to 0.$$

En appliquant encore $\mathrm{Hom}_B(-, B)$, on trouve donc

$$0 \to \mathrm{Hom}_B(Q \otimes_A B, B) \to C^0 \otimes B \to C^1 \otimes B.$$

On en déduit que

$$(f_B)_*\mathcal{F}_B = (\mathrm{Hom}_B(Q \otimes_A B, B))^\sim = \Gamma(\mathrm{Spec}B, \mathcal{Q}^\vee)$$

où l'on note $\mathcal{Q} = \widetilde{Q}$ le faisceau cohérent associé à Q sur $S = \mathrm{Spec}A$. □

5.6. **Preuve du lemme 26.** Soit $S = \mathrm{Spec}A$ avec A noethérien et X un sous-schéma fermé et S-plat de $\mathbf{P}^N_S$.

Lemma 49. *Il existe $m(\phi) \geq 0$ tel que pour tout $m \geq m(\phi)$, tout S-schéma T et tout $Z \in \mathbf{Hilb}^\phi_{X/S}(T)$ correspondant à une suite exacte de $\mathcal{O}_{X_T}$-modules*

$$0 \to \mathcal{I}_Z \to \mathcal{O}_{X_T} \to \mathcal{O}_Z \to 0,$$

les propriétés suivantes sont vérifiées :

(1) *la suite de $\mathcal{O}_T$-modules*

$$0 \to f_* \mathcal{I}_Z(m) \to f_* \mathcal{O}_{X_T}(m) \to f_* \mathcal{O}_Z(m) \to 0$$

est exacte,

(2) $f_* \mathcal{O}_X(m)$ *est localement libre et* $f_* \mathcal{O}_{X_T}(m) = f_* \mathcal{O}_X(m)_T$,

(3) $f_* \mathcal{O}_Z(m)$ *est localement libre de rang* $\phi(m)$, *et*

(4) $f^* f_* \mathcal{I}_Z(m) \to \mathcal{I}_Z(m)$ *est surjective.*

Démonstration. D'après le lemme 43, il existe une constante $m(\phi)$ ne dépendant que du polynôme ϕ tel que dans la situation de l'énoncé, pour tout $i > 0$, tout $\mathcal{G} \in \{\mathcal{I}_Z, \mathcal{O}_X, \mathcal{O}_Z\}$, tout $m \geq m(\phi)$ et tout $t \in T$, $\mathcal{G}_t$ est m-régulier, et en particulier $H^i(X_s, \mathcal{G}_s(m)) = 0$. Alors $R^i f_* \mathcal{G}(m) = 0$ pour tout $i > 0$, et chacun des $f_* \mathcal{G}(m)$ est localement libre sur T, de formation compatible au changement de base. De plus,

$$\phi(m) = \chi(\mathcal{O}_Z(m)_t) = \dim_{k(t)} H^0(Z_t, \mathcal{O}_{Z_t}(m)) = \mathrm{rang} f_* \mathcal{O}_Z(m).$$

Enfin, (4) peut se vérifier localement sur T, où cela résulte par Nakayama de l'énoncé analogue du lemme 42. □

5.7. **Preuve du lemme 28.** Rappelons son énoncé.

Lemma. *Soit S un schéma noethérien, Z un sous-schéma fermé de $X = \mathbf{P}^N_S$. Alors $\Phi(Z) = \{\phi(Z_s) : s \in S\}$ est fini et pour tout $\phi \in \Phi(Z)$, la condition*

$$\text{(1) } Z_T \text{ est plat sur } T \quad \text{et} \quad \text{(2) } \Phi(Z_T) = \{\phi\} \qquad (T \in \mathbf{Sch}/S)$$

est représentable par un sous-schéma S^ϕ de S.

Commençons par choisir une stratification finie de S par des sous-schémas localement fermés réduits S_i de S tels que la restriction $Z_i = Z|S_i$ de Z à chacun des S_i, un sous-schéma fermé de $X_i = \mathbf{P}^N_{S_i}$, soit plat sur S_i. L'existence d'une telle filtration n'a rien à voir avec la projectivité de X, c'est une conséquence facile du théorème de platitude générique [1, IV, 6.9.3]. Ayant fixé cette stratification, posons $S' = \coprod S_i$, de sorte que le sous-schéma fermé $Z' = Z_{S'}$ de $X' = \mathbf{P}^N_{S'}$ est maintenant plat sur S'. Puisque $S' \to S$ est une bijection ensembliste, $\Phi(Z') = \Phi(Z)$, et $\Phi(Z')$ est fini puisque $s \mapsto \phi(Z'_s)$ est localement constante sur S', ce qui prouve déjà la première assertion du lemme.

Puisque $\Phi = \Phi(Z)$ est fini, il existe d'après le lemme 43 une constante $m(\Phi)$ tel que pour tout $m \geq m(\Phi)$ et tout $s \in S$, le faisceau cohérent $\mathcal{O}_{Z_s}$ sur $X_s = \mathbf{P}^N_s$ est m-régulier, et en particulier $H^i(X_s, \mathcal{O}_{Z_s}(m)) = 0$ pour tout $i \geq 1$, tandis que $\dim_{k(s)} H^0(X_s, \mathcal{O}_{Z_s}(m)) = \phi(Z_s)(m)$. Comme précédemment, on en déduit que $R^i f'_*(\mathcal{O}_{Z'}(m)) = 0$ pour tout $i \geq 1$, tandis que $f'_* \mathcal{O}_Z(m)$ est localement libre de rang $\phi(Z_s)(m)$, et de formation compatible au changement de base (au-dessus de S').

Mais d'autre part, il existe une constante m' telle que pour tout $m \geq m'$, $f_*(\mathcal{O}_Z(m))_{S'} = f'_*(\mathcal{O}_{Z'}(m))$, cf. [5, p. 118]. Donc pour tout $s \in S$ et tout $m \geq M = \max(m(\Phi), m')$,

$$\left(f_*(\mathcal{O}_Z(m))\right)_s = \left(f'_*(\mathcal{O}_{Z'}(m))\right)_s = (f_s)_*(\mathcal{O}_{Z_s}(m)) = H^0(X_s, \mathcal{O}_{Z_s}(m)).$$

Posons $\mathcal{E}_j = f_* \left(\mathcal{O}_Z(M + j)\right)$ pour $j \geq 0$. Soit S^ϕ_k le sous-schéma de S où $\mathcal{E}_j$ est localement libre de rang $\phi(M + j)$ pour $j = 0, \cdots, k$, de sorte que S^ϕ_k est une suite décroissante de sous-schémas de S. Pour tout $s \in S_N^\phi$ et $0 \le j \le N$, on a

$$\begin{aligned}\phi(Z_s)(M+j) &= \dim_{k(s)} H^0(X_s, \mathcal{O}_{Z_s}(M+j)) \\ &= \dim_{k(s)} \left(f_*(\mathcal{O}_Z(M+j))\right)_s \\ &= \dim_{k(s)} \mathcal{E}_{j,s} = \phi(M+j)\end{aligned}$$

donc $\phi(Z_s) = \phi$ puisque les degrés des polynômes $\phi(Z_s)$ et ϕ sont majorés par N. On en déduit que les espaces sous-jacents aux S_j^ϕ sont tous égaux dès que $j \ge N$, et la suite est donc stationnaire. Notons S^ϕ sa limite et Z^ϕ la restriction de Z à $X^\phi = \mathbf{P}^N_{S^\phi}$. Il existe une constante m'' tel que pour tout $m \ge m''$,

$$f_*(\mathcal{O}_Z(m))_{S^\phi} = f_*^\phi(\mathcal{O}_{Z^\phi}(m)).$$

En particulier $f_*^\phi(\mathcal{O}_{Z^\phi}(M+j)) = \mathcal{E}_j|S^\phi$ est localement libre pour $j \gg 0$, donc $\mathcal{O}_{Z^\phi}$ est plat sur S^ϕ, et $\phi(Z_s^\phi) = \phi$ pour tout $s \in S^\phi$. Si maintenant T est un S-schéma qui vérifie les conditions (1) et (2) de l'énoncé, alors $f_{T,*}(\mathcal{O}_{Z_T}(m))$ est localement libre de rang $\phi(m)$ pour tout $m \ge m(\Phi)$, donc $T \to S$ se factorise par S^ϕ : CQFD.

Troisième partie 3. Le schéma de Picard

6. Le foncteur $\mathbf{Pic}_{X/S}$

Pour tout schéma X, on note $\mathrm{Pic}(X)$ le groupe des classes d'isomorphismes de faisceaux inversibles $\mathcal{L}$ sur X. Pour X/S, on définit un foncteur contravariant

$$P_{X/S} : (\mathbf{Sch}/S)^0 \to \mathbf{Ens} \qquad P_{X/S}(T) = \mathrm{Pic}(X \times_S T).$$

Ce foncteur n'a aucune chance d'être représentable : ce n'est pas un faisceau (pour la topologie de Zariski sur $\mathbf{Sch}/S$). Par exemple, un faisceau inversible de la forme $f^*\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ pour $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(S)$ n'est pas nécessairement trivial, mais il le devient après passage à un recouvrement ouvert suffisamment fin de S. Cela nous condurait à étudier plutôt

$$\mathrm{Pic}^?_{X/S} : (\mathbf{Sch}/S)^0 \to \mathbf{Ens} \qquad \mathrm{Pic}^?_{X/S}(T) = \mathrm{Pic}(X \times_S T)/f_T^*\mathrm{Pic}(T),$$

mais est-ce vraiment le bon choix ? La réponse est oui, sous certaines hypothèses.

En fait, le bon choix serait bien sûr, et en toute circonstance, de considérer le *faisceau associé au préfaisceau* $P_{X/S}$, un faisceau que l'on notera $\mathrm{Pic}_{X/S}$. De l'isomorphisme (classique) $\mathrm{Pic}(X \times_S T) \simeq H^1(X \times_S T, \mathbf{G}_m)$, on déduit une formule aussi compacte que difficile à exploiter, à savoir

$$\mathrm{Pic}_{X/S}(T) = H^0(T, R^1(f_T)_*\mathbf{G}_m).$$

Pour aller plus loin, on considère la suite spectrale de Leray

$$H^i(T, R^j f_*\mathbf{G}_m) \Rightarrow H^{i+j}(X \times_S T, \mathbf{G}_m)$$

qui marche si X/S est quasi-compact et quasi-séparé, et donne

$$\begin{aligned}0 \to H^1(T, f_*\mathbf{G}_m) \to H^1(X \times_S T, \mathbf{G}_m) \simeq \mathrm{Pic}(X \times_S T) \to \\ \to \mathrm{Pic}_{X/S}(T) \to H^2(T, f_*\mathbf{G}_m) \to H^2(X \times_S T, \mathbf{G}_m).\end{aligned}$$

Le groupe $H^1(T, f_*\mathbf{G}_m)$ est en général plus gros que $f^*\mathrm{Pic}(T) \simeq f^*H^1(T, \mathbf{G}_m)$. La suite exacte ci-dessus montre donc que le morphisme $\mathrm{Pic}^?_{X/S}(T) \to \mathrm{Pic}_{X/S}(T)$ n'est en général ni injectif ni surjectif, mais nous permet de donner des critères pour qu'il le soit : si $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$ universellement (i.e. $(f_T)_*\mathcal{O}_{X\times_S T} = \mathcal{O}_T$) cette suite exacte se raccourcit en

$$0 \to \mathrm{Pic}^?_{X/S}(T) \to \mathrm{Pic}_{X/S}(T) \to H^2(T, \mathbf{G}_m) \to H^2(X \times_S T, \mathbf{G}_m).$$

Si de plus $f : X \to S$ a une section $e : S \to X$, la dernière flèche est un isomorphisme donc $\mathrm{Pic}^?_{X/S} = \mathrm{Pic}_{X/S}$. En ce qui concerne la première propriété : elle est vraie pour $X = \mathbf{P}^N_S$, et plus généralement dans le cadre suivant.

Lemma 50. *Si $f : X \to S$ est surjectif, propre, plat, de présentation finie, à fibre géométriquement intègres, alors $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$ universellement.*

Démonstration. Les hypothèses étant stables par changement de base, il suffit de voir que le morphisme d'adjonction $\mathcal{O}_S \to f_*f^*\mathcal{O}_S = f_*\mathcal{O}_X$ qui définit la structure de $\mathcal{O}_S$-algèbre de $f_*\mathcal{O}_X$ est un isomorphisme. Il suffit pour cela de vérifier que $f_*\mathcal{O}_X$ est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang 1. On peut donc supposer que S est affine, et même local. On sait d'autre part d'après le corollaire 48 du lemme 45 que $f_*\mathcal{O}_X \simeq \mathcal{Q}^\vee$ sur $\mathbf{Sch}/S$, pour un $\mathcal{O}_S$-module cohérent $\mathcal{Q}$: il suffit donc de vérifier que $\mathcal{Q}$ est localement libre de rang 1, et même libre de rang 1 puisque $S = \mathrm{Spec} A$ avec A local. Soit $s = \mathrm{Spec}(k)$ le point fermé de S et $Q = \Gamma(S, \mathcal{Q})$. On a donc

$$\begin{array}{ccc} H^0(S,\mathcal{O}_S) & \to & H^0(X,\mathcal{O}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^0(s,\mathcal{O}_s) & \to & H^0(X_s,\mathcal{O}_{X_s}) \end{array} \equiv \begin{array}{ccc} A & \to & \mathrm{Hom}_A(Q,A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ k & \to & \mathrm{Hom}_k(Q_k,k) \end{array}$$

Soit $\overline{s} = \mathrm{Spec}(\overline{k})$ un point géométrique au-dessus de s. Puisque $X_{\overline{s}}$ est non-vide, propre et intègre sur $\overline{s}$, la $\overline{k}$-algèbre $H^0(X_{\overline{s}}, \mathcal{O}_{X_{\overline{s}}})$ est de dimension finie, et intègre, donc égale à $\overline{k}$. Puisque $\overline{s} \to s$ est plat, $H^0(X_{\overline{s}}, \mathcal{O}_{X_{\overline{s}}}) = H^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) \otimes_k \overline{k}$, donc $H^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s}) = k = \mathrm{Hom}_k(Q_k, k)$. En particulier, (1) $\dim_k Q_k = 1$ et (2) l'application $\mathrm{Hom}_A(Q, A) \to \mathrm{Hom}_k(Q_k, k)$ est surjective. Mais (1) implique que $Q \simeq A/I$ pour un idéal I de A d'après le lemme de Nakayama, et (2) implique alors que $I = 0$, donc $Q \simeq A$, CQFD. □

Nous allons montrer :

Theorem 51. *Soit S un schéma, $X \subset \mathbf{P}(\mathcal{E})$ un sous-schéma fermé qui est plat, de présentation finie, à fibre géométriquement intègre sur S, et qui admet une section $e : S \hookrightarrow X$. Alors le foncteur*

$$\mathrm{Pic}_{X/S} : (\mathbf{Sch}/S)^0 \to \mathbf{Ab} : \qquad T \mapsto \mathrm{Pic}(X \times_S T)/f^*\mathrm{Pic}(T)$$

est représentable par un S-schéma que l'on note encore $\mathrm{Pic}_{X/S}$.

7. Le foncteur $\mathbf{Div}_{X/S}$

7.1. **Définition.** Soit X un S-schéma. Un *diviseur de Cartier effectif relatif* (dCer) sur X/S est un sous-schéma fermé D de X qui est plat sur S et dont l'idéal $\mathcal{I}_D \subset \mathcal{O}_X$ est un $\mathcal{O}_X$-faisceau inversible. On note

$$\mathbf{Div}_{X/S} : (\mathbf{Sch}/S)^0 \to \mathbf{Ens}$$

le foncteur qui à T associe l'ensemble des dCer sur $X \times_S T/T$. Il n'est d'ailleurs pas tout à fait clair que c'est un foncteur : il faut pour cela utiliser la platitude de $\mathcal{O}_D$ sur S, qui implique que la formation de $\mathcal{I}_D$ commute au changement de base. L'intérêt pour nous de ce foncteur est qu'il est muni de deux morphismes

$$\mathbf{Pic}_{X/S} \leftarrow \mathbf{Div}_{X/S} \hookrightarrow \mathbf{Hilb}_{X/S}$$

qui à tout D sur X_T/T associent respectivement l'image de $\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{I}_D^{-1}$ dans $\mathbf{Pic}_{X/S}(T)$ et le sous-schéma fermé $D \subset X$ dans $\mathbf{Hilb}_{X/S}(T)$. Ce dernier est en effet plat sur T par définition, et de présentation finie puisque $\mathcal{I}_D$ est inversible (et donc localement sur X engendré par un élément).

Si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur X, on dit d'une section $s \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ qu'elle est régulière lorsque le morphisme $\mathcal{O}_X \to \mathcal{L}$ qu'elle définit est injectif (c'est par exemple automatiquement le cas dès lors que $s \neq 0$ si X est intègre). On dit de la section s qu'elle est S-régulière lorsque $s_T \in \Gamma(X_T, \mathcal{L}_T)$ est une section régulière de $\mathcal{L}_T$ pour tout S-schéma T, i.e. lorsque le morphisme $\mathcal{O}_X \to \mathcal{L}$ reste injectif après tout changement de base $T \to S$. Si D est un dCer sur X/S, alors X est plat sur S en tous les points de D (ce n'est pas évident), et l'injection de conoyau S-plat $\mathcal{I}_D \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ induit une injection de conoyau S-plat $\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{O}_X(D)$ (par tensorisation avec $\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{I}_D^{-1}$), donc une section S-réguliere $s_D \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X(D))$.

7.2. Le morphisme $\mathbf{Div}_{X/S} \hookrightarrow \mathbf{Hilb}_{X/S}$.

Proposition 52. *Pour X propre, de présentation finie et plat sur S, le morphisme $\mathbf{Div}_{X/S} \to \mathbf{Hilb}_{X/S}$ est relativement représentable par des immersions ouvertes.*

Démonstration. Soit $Z \subset X$ plat et de présentation finie sur S, $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_X$ l'idéal de Z, $\phi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{I}, \mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{I} \to \mathcal{O}_X$ le morphisme canonique et Y la réunion des supports du noyau et conoyau de ϕ. Alors Y est fermé dans X, donc $U = S - f(Y)$ est ouvert dans S puisque $f : X \to S$ est propre. Sur U, ϕ est un isomorphisme donc $\mathcal{I}$ est inversible, et H est un diviseur de Cartier effectif relatif. Si maintenant $T \to S$ est un morphisme quelconque tel que $H_T \subset X_T$ est effectif relatif sur T, alors $H_t \subset X_t$ est effectif pour tout $t \in T$, donc $\mathcal{I}_t \subset \mathcal{O}_{X_t}$ est inversible, donc ϕ_t est un isomorphisme, $Y_t = \emptyset$ (ce n'est pas évident), et $T \to S$ se factorise par U. $\square$

Corollary 53. *Soit S un schéma, $X \subset \mathbf{P}(\mathcal{E})$ un sous-schéma fermé et plat de présentation finie sur S. Alors $\mathbf{Div}_{X/S}$ est représentable par un S-schéma.*

7.3. Le morphisme $\mathbf{Div}_{X/S} \to \mathbf{Pic}_{X/S}$.

On reprend les hypothèses et notations du théorème. Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur S et $D_{\mathcal{L}} \subset \mathbf{Div}_{X/S}$ le sous-foncteur de $\mathbf{Div}_{X/S}$ qui à T/S associe l'ensemble des diviseurs de Cartier effectifs relatifs D de $X \times_S T/T$ tels que $\mathcal{O}_X(D) = \mathcal{L}_T$ dans $\mathbf{Pic}_{X/S}(T)$, i.e. $\mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{L}_T \otimes f_T^* \mathcal{M}$ sur $X \times_S T$ pour un faisceau inversible $\mathcal{M}$ sur T. Soit $\mathcal{Q}$ le faisceau cohérent sur S tel que $f_* \mathcal{L} = \mathcal{Q}^\vee$ sur $\mathbf{Sch}/S$ (corollaire 48 du lemme de Mumford).

Proposition 54. *Le foncteur $D_{\mathcal{L}} : (\mathbf{Sch}/S)^0 \to \mathbf{Ens}$ est représentable par le S-schéma projectif $\mathbf{P}(\mathcal{Q})$.*

Corollary 55. *Le morphisme $\mathbf{Div}_{X/S} \to \mathbf{Pic}_{X/S}$ est relativement représentable par des morphismes projectifs.*

Remark 56. Si $S = \mathrm{Spec}(k)$ est le spectre d'un corps k, alors $\mathcal{Q} = \widetilde{Q}$ où Q est le k-espace vectoriel dual de $\Gamma(X, \mathcal{L})$ et $D_{\mathcal{L}}(k)$ est le "système linéaire complet" des diviseurs (effectifs, de Cartier) $D \subset X$ tels que $\mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{L}$. Si D est un tel divisieur et si $\phi : \mathcal{O}_X(D) \simeq \mathcal{L}$ est un isomorphisme, on obtient une section $\phi(s_D) \in \Gamma(X, \mathcal{L})$ qui est régulière (c'est-à-dire non nulle – puisque X est intègre par hypothèse), et qui comme ϕ, est bien définie à multiplication près par un élément de

$$\mathrm{Aut}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(D)) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X^\times) = k^\times.$$

On obtient ainsi la bijection classique de $D_{\mathcal{L}}(k)$ dans l'ensemble $\Gamma(X,\mathcal{L})-\{0\}/k^\times$. C'est l'ensemble des k-droites de $\Gamma(X,\mathcal{L})$, qui s'identifie bien à l'ensemble $\mathbf{P}(\mathcal{Q})(k)$ des quotients de k-dimension 1 du dual Q de $\Gamma(X,\mathcal{L})$.

Démonstration. (de la proposition) Soient T un S-schéma et $\mathcal{M}$ un faisceau quasi-cohérent sur T. L'adjoint du morphisme

$$f_T^*\left(f_{T,*}\mathcal{L}_T\otimes\mathcal{M}\right)=f_T^*f_{T,*}\mathcal{L}_T\otimes f_T^*\mathcal{M}\to\mathcal{L}_T\otimes f_T^*\mathcal{M}$$

que l'on obtient en tensorisant $f_T^*f_{T,*}\mathcal{L}_T\to f_{T,*}\mathcal{L}_T$ par $f_T^*\mathcal{M}$ est un morphisme

$$f_{T,*}\mathcal{L}_T\otimes\mathcal{M}\to f_{T,*}(\mathcal{L}_T\otimes f_T^*\mathcal{M})$$

qui est l'identité lorsque $\mathcal{M}=\mathcal{O}_T$, et qui est donc plus généralement un isomorphisme lorsque $\mathcal{M}$ est localement libre sur T. Si donc $\mathcal{M}$ est inversible (ou même seulement localement libre de rang fini), on obtient finalement un isomorphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_T}\left(\mathcal{Q}_T,\mathcal{M}\right)\simeq\mathcal{Q}_T^\vee\otimes\mathcal{M}\simeq f_{T,*}\mathcal{L}_T\otimes\mathcal{M}\simeq f_{T,*}(\mathcal{L}_T\otimes f_T^*\mathcal{M}).$$

Cela étant, fixons $D\in D_{\mathcal{L}}(T)$ et choisissons un faisceau inversible $\mathcal{M}$ sur T et un isomorphisme $\phi:\mathcal{O}_{X_T}(D)\simeq\mathcal{L}_T\otimes f_T^*\mathcal{M}$. La section T-régulière s_D de $\mathcal{O}_{X_T}(D)$ induit une section T-régulière $\phi(s_D)$ de $\mathcal{L}_T\otimes f_T^*\mathcal{M}$, et donc un morphisme $\mathcal{Q}_T\to\mathcal{M}$, dont la formation est évidemment compatible au changement de base sur T. Pour tout point t de T, la restriction de s_D à X_t est non-nulle, le morphisme $\mathcal{Q}_t\to\mathcal{M}_t$ l'est donc également, et il est ainsi surjectif puisque $\mathcal{M}_t\simeq k(t)^\sim$ sur $\mathrm{Spec}(k(t))$. Le lemme de Nakayama implique alors que $\mathcal{Q}_T\to\mathcal{M}$ est surjectif. Le quotient inversible de $\mathcal{Q}_T$ ainsi définit ne dépend pas du choix de $\mathcal{M}$ ou ϕ (exercice !). Inversement, un tel quotient induit une section T-régulière de $\mathcal{L}_T\otimes f_T^*\mathcal{M}$, qui fournit à son tour un dCer $D\in D_{\mathcal{L}}(T)$, donc $D_{\mathcal{L}}(T)=\mathbf{P}(\mathcal{Q})(T)$, CQFD. □

8. Fin de la Preuve du Théorème 51

8.1. **Analyse.** On ne sait toujours pas que $\mathbf{Pic}_{X/S}$ est représentable, mais on sait maintenant que les trois autres foncteurs du diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{Div}_{X/S}\times_{\mathbf{Pic}_{X/S}}\mathbf{Div}_{X/S} & \to & \mathbf{Div}_{X/S}\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathbf{Div}_{X/S} & \to & \mathbf{Pic}_{X/S}\end{array}$$

le sont. Peut-on reconstruire $\mathbf{Pic}_{X/S}$ à partir des trois autres termes ?

Example 57. Considérons une situation analogue dans la catégorie des ensembles. On se donne donc une application $f:D\to P$ et on forme le produit fibré

$$\begin{array}{ccc}D\times_P D & \to & D\\ \downarrow & & \downarrow\\ D & \to & P\end{array}$$

Le sous-ensemble $R=D\times_P D$ de $D\times D$ définit sur D une relation d'équivalence, l'application $f:D\to P$ se factorise en une injection $D/R\hookrightarrow P$ et le diagramme

$$\begin{array}{ccc}R & \to & D\\ \downarrow & & \downarrow\\ D & \to & D/R\end{array}$$

est cartésien et cocartésien. Le diagramme d'origine est donc co-cartésien si et seulement si $f:D\to P$ est surjective.

8.2. **Surjectivité.** On voudrait donc que $\mathbf{Div}_{X/S} \to \mathbf{Pic}_{X/S}$ soit surjectif dans un certain sens. Il y a d'abord une obstruction élémentaire à cette surjectivité. Si l'on prend par exemple $X = \mathbf{P}^1_S$ sur $S = \mathrm{Spec} k$, le faisceau inversible $\mathcal{O}_X(-1)$ est de degré -1, et il n'est donc linéairement équivalent à aucun diviseur *effectif*. Plus généralement, les faisceaux $\mathcal{O}_X(D)$ ont au moins une section globale, ce qui n'est pas le cas de tous les faisceaux inversibles $\mathcal{L}$ sur X. Avec les notations de la section précédente, il se peut tout simplement que $f_*\mathcal{L} = 0$, donc $\mathcal{Q} = 0$ et $D_{\mathcal{L}} = \mathbf{P}(\mathcal{Q}) = \emptyset$!

On remédie à cette obstruction en utilisant la structure de groupe sur $\mathbf{Pic}_{X/S}$. Soit $\xi \in \mathbf{Pic}_{X/S}$ l'élément qui correspond au faisceau inversible $\mathcal{O}_X(1)$ provenant du plongement $X \subset \mathbf{P}(\mathcal{E})$. Découpons $\mathbf{Pic}_{X/S}$ en fonction du polynôme de Hilbert $\phi = \phi(\mathcal{L})$, calculé relativement au plongement $X \hookrightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E})$ (ce polynôme ne change pas si l'on remplace $\mathcal{L}$ par $f^*\mathcal{M}$, puisqu'il se calcule de toute façon sur les fibres). On obtient comme précédemment pour le schéma de Hilbert un recouvrement ouvert et fermé $\mathbf{Pic}_{X/S} = \coprod \mathbf{Pic}^{\phi}_{X/S}$: pour notre problème de départ, il suffit maintenant de vérifier que chacun des $\mathbf{Pic}^{\phi}_{X/S}$ est représentable. Or

$$\mathbf{Pic}^{\phi}_{X/S} + m \cdot \xi = \mathbf{Pic}^{\phi[m]}_{X/S} \quad \text{où} \quad \phi[m](x) = \phi(m+x)$$

et il suffit donc de montrer que $\mathbf{Pic}^{\phi[n]}_{X/S}$ est représentable pour $n \gg 0$. Mais, pour un polynome de Hilbert ϕ fixé, on montre comme dans la section 5.6 le lemme suivant.

Lemma 58. *Il existe un entier $m(\phi)$ tel que pour tout $m \geq m(\phi)$, les faisceaux inversibles $\mathcal{L}$ qui apparaissent dans (les points géométriques de) $\mathbf{Pic}^{\phi}_{X/S}$ sont tous m-réguliers.*

Démonstration. Cf [2, 6, Exp. XIII, Lemma 2.11]. Si l'on survole la preuve que l'on a donnée pour le schéma de Hilbert, on voit qu'il y a été fait usage - en plus des techniques applicables à tous les faisceaux cohérents - de deux hypothèses : les polynômes de Hilbert étaient fixés, et les faisceaux cohérents concernés étaient des *sous-faisceaux* d'un faisceau fixé (à savoir $\mathcal{O}_X$). Ici, on relâche la seconde hypothèse, mais on restreint notre attention aux faisceaux cohérents qui sont inversibles. Des techniques de dualité sont alors applicables, qui permettent de mieux contrôler les polynômes de Hilbert qui apparaissent dans les récurrences ! □

Remark 59. Dans l'article de [5] où Kleiman revisite [3], le lemme ci-dessus est remplacé dans la preuve de l'existence du schéma de Picard par un autre argument plus simple mais moins précis. Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on note $\mathbf{Pic}^{\phi,m}_{X/S}$ le sous-foncteur de $\mathbf{Pic}^{\phi}_{X/S}$ qui correspond aux faisceaux inversibles dont toutes les fibres géométriques sont m-régulières. On montre que ces sous-foncteurs sont relativement représentables par des immersions ouvertes, et qu'ils forment un recouvrement ouvert croissant de $\mathbf{Pic}^{\phi}_{X/S}$. Pour continuer dans la démonstration, il suffit alors de montrer que chacun de ces sous-foncteurs est représentable : il est donc inutile de savoir que $\mathbf{Pic}^{\phi,m}_{X/S} = \mathbf{Pic}^{\phi}_{X/S}$ pour tout $m \geq m(\phi)$.

Remplaçant ϕ par $\phi[m]$ avec $m \gg m(\phi)$, on peut donc supposer que tous les faisceaux inversibles $\mathcal{L}$ qui apparaissent dans les $\mathbf{Pic}^{\phi}_{X/S}(T)$ vérifient : $R^i f_*\mathcal{L} = 0$ pour $i > 0$ et $f_*\mathcal{L}$ est localement libre sur T de rang $\phi(0) > 0$, et de formation compatible au changement de base. Le faisceau $\mathcal{Q}$ de la section précédente est alors le dual $\mathcal{Q} = (f_*\mathcal{L})^\vee$ de $f_*\mathcal{L}$, et la fibre $D_{\mathcal{L}} \simeq \mathbf{P}(\mathcal{Q}) \neq \emptyset$ est projective lisse sur T.

Soit $D(\phi) \subset \mathbf{Div}_{X/S}$ l'image inverse de $\mathbf{Pic}^{\phi}_{X/S} \subset \mathbf{Pic}_{X/S}$. Le morphisme

$$\ell : D(\phi) \to \mathbf{Pic}^{\phi}_{X/S}$$

est surjectif dans le sens habituel pour les faisceaux (pour la topologie de Zariski), à savoir : pour tout T sur S et $\mathcal{L} \in \mathbf{Pic}^{\phi}_{X/S}(T)$, il existe un recouvrement ouvert T_i de T tel que $\mathcal{L}|T_i \in \mathbf{Pic}^{\phi}_{X/S}(T_i)$ se relève dans $D(\phi)(T_i)$: il suffit avec les notations précédentes de choisir un recouvrement ouvert T_i qui trivialise le faisceau localement libre $\mathcal{Q}$ sur T, puis de choisir une section de $\mathbf{P}(\mathcal{Q})|T_i \simeq \mathbf{P}^{\phi(0)-1}_{T_i}$ au-dessus de T_i. On en déduit aisément que le diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} D(\phi) \times_{\mathbf{Pic}^{\phi}_{X/S}} D(\phi) & \to & D(\phi) \\ \downarrow & & \downarrow \\ D(\phi) & \to & \mathbf{Pic}^{\phi}_{X/S} \end{array}$$

est maintenant aussi co-cartésien dans la catégorie des faisceaux (pour la topologie de Zariski) sur $\mathbf{Sch}/S$. Le faisceau $\mathbf{Pic}^{\phi}_{X/S}$ y est donc maintenant uniquement déterminé par les deux autres, ce qui est de bon augure pour sa représentabilité.

8.3. **Quotients.**

Theorem 60. *Soit S un schéma noethérien, X un S-schéma quasi-projectif, et $R \subset X \times_S X$ une relation d'équivalence dans X tel que $p_1 : R \to X$ soit propre et plat. Alors* (1) *le S-schéma quotient X/R existe et il est quasi-projectif sur S,* (2) *$f : X \to X/R$ est surjectif, propre et plat, et* (3) *$R = X \times_{X/R} X$.*

C'est un théorème de Grothendieck [6, III, Théorème 6.1], dont voici la preuve in extenso : *on se ramène au cas fini par des quasi-sections convenables de X pour R, la démonstration étant analogue à la construction des groupes algébriques dans le Séminaire Chevalley.* Le cas fini est effectivement assez élémentaire, puisqu'alors tout est affine : les constructions de conoyaux pour des morphismes affines sont équivalentes à des constructions de noyaux pour des morphismes d'anneaux ! Mais l'explication de Grothendieck est bien courte... Heureusement, il y a une autre preuve, décrite dans [4, §8, Théorème 12] qui provient de [3, Theorem 2.9]. L'idée sous-jacente est expliquée par la remarque suivante :

Remark 61. Soit X un ensemble, $H = \mathcal{P}(X)$ l'ensemble des sous-ensembles de X, et $Z \subset X \times H$ le sous-ensemble universel de X, c'est-à-dire $Z = \cup_{P \in H} P \times \{P\}$: pour tout ensemble T, pour tout sous-ensemble Q de $X \times T$, il existe une unique application $f : T \to H$ tel que $Q = (Id, f)^{-1}(Z)$, à savoir $f(t) = \{x : (x,t) \in \mathcal{Q}\}$. Soit maintenant $R \subset X \times X$ une relation d'équivalence sur X et $f : X \to H$ l'unique morphisme tel que $R = (Id, f)^{-1}(Z)$. Alors $X/R = f(X) \subset H$ et l'image inverse de $f(X) \subset H$ par $X \times H \to H$ est le graphe $\Gamma_f \subset Z$ de f.

Ceci suggère la construction suivante. Soit $H = \mathbf{Hilb}_{X/S}$, soit Z le sous-schéma universel fermé de $X \times_S H$ (Z est propre et plat sur H), et soit $f : X \to H$ l'unique morphisme tel que $(Id, f)^{-1}(H) = R \subset X \times_S X$, qui est bien un sous-schéma fermé de $X \times_S X$ qui est propre et plat sur X. Le graphe de f est un sous-schéma fermé de $X \times_S H$, et même de Z, et on voudrait construire le quotient X/R comme l'image de f dans H, ou encore comme un sous-schéma fermé $X/R \subset H$ dont l'image inverse via $Z \to H$ serait ce graphe de f, ce qui nous ramène à un problème de descente déjà plus abordable. Mais de toute façon : il faut pour mener à bien ce programme déjà connaître l'existence d'une variante de $\mathbf{Hilb}_{X/S}$ dans le cas où X/S est seulement *quasi*-projectif, ce que font Altman et Kleinman dans [3].

8.4. **Conclusion.** En appliquant le théorème ci-dessus à la relation d'équivalence $R = D(\phi) \times_{\mathrm{Pic}^{\phi}_{X/S}} D(\phi)$ sur le S-schéma quasi-projectif $D(\phi)$, on obtient un schéma quasi-projectif P' sur S et un S-morphisme propre, surjectif et plat $\ell' : D(\phi) \to P'$ qui fait de P' le conoyau de la double flèche $R \rightrightarrows D(\phi)$ dans la catégorie des schémas sur S. Or nous avons vu que $\ell : D(\phi) \to P$ faisait de même de $P = \mathrm{Pic}^{\phi}_{X/S}$ le conoyau de cette même double flèche, mais dans la catégorie beaucoup plus grosse $\mathbf{Fais}/S_{Zar}$ des faisceaux sur $\mathbf{Sch}/S$ pour la topologie de Zariski. Dans cette catégorie, on a donc un morphisme $P \to P'$, mais on ignore encore s'il s'agit d'un isomorphisme.

Pour conclure, il faut travailler dans une catégorie intermédiaire :

$$\mathbf{Sch}/S \subset \mathbf{Fais}/S_{fppf} \subset \mathbf{Fais}/S_{Zar}$$

C'est la catégorie des faisceaux fppf, i.e. les faisceaux $\mathcal{F}$ (pour la topologie de Zariski) qui vérifient en outre la propriété suivante : pour tout morphisme $T' \to T$ qui est **f**idèlement **p**lat et de **p**résentation **f**inie, $\mathcal{F}(T)$ est le noyau de la double flèche $\mathcal{F}(T') \rightrightarrows \mathcal{F}(T' \times_T T')$. C'est une sous-catégorie pleine de $\mathbf{Fais}/S_{Zar}$. Il n'est ni trivial, ni trop difficile de démontrer que tous les foncteurs représentables sont effectivement des faisceaux fppf.

On montre alors que (1) P est un faisceau fppf, et (2) tout morphisme fppf (dans $\mathbf{Sch}/S$) est un épimorphisme (dans $\mathbf{Fais}/S_{fppf}$). On en déduit que $\ell : D(\phi) \to P$ et $\ell' : D(\phi) \to P'$ sont des épimorphismes dans $\mathbf{Fais}/S_{fppf}$, puis que ℓ et ℓ' sont toutes deux égales au conoyau de la double flèche $R \rightrightarrows D(\phi)$. En particulier, $P = P'$ est représentable.

9. Propriétés du schémas de Picard

Proposition 62. *Si $X \to S$ est propre,* lisse, *à fibres géométriquement connexes (et admet une section), alors $\mathbf{Pic}_{X/S}$ vérifie les critères valuatifs de* séparation *et de* propreté.

Démonstration. Il s'agit de voir que si S est le spectre d'un anneau de valuation discrète R de corps des fractions K, alors $\mathbf{Pic}_{X/S}(R) \to \mathbf{Pic}_{X/S}(K)$ est bijective, ou encore puisque $\mathbf{Pic}(R) = \mathbf{Pic}(K) = 0$, de voir que $\mathbf{Pic}(X) \to \mathbf{Pic}(X_K)$ est bijective. Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X tel que $\mathcal{L}|X_K$ est trivial. Il existe donc dans $H^0(X_K, \mathcal{L}|X_K) = H^0(X, \mathcal{L}) \otimes_R K$ une section s qui engendre $\mathcal{L}|X_K$ en tous les points de X_K, et on peut supposer que cette section est dans le R-module $H^0(X, \mathcal{L})$. Soit η le point générique de la fibre spéciale (laquelle est lisse et connexe, donc bien irréductible) ; l'anneau local $\mathcal{O}_{X,\eta}$ est un anneau de valuation discrète, une extension non-ramifiée $R \hookrightarrow \mathcal{O}_{X,\eta}$ de R, et $\mathcal{L}_\eta$ est un $\mathcal{O}_{X,\eta}$-module libre de rang 1, et $\mathcal{L}_\eta \otimes_R K$ est engendré par s_η sur $\mathcal{O}_{X,\eta} \otimes_R K$: on peut donc aussi supposer que s engendre $\mathcal{L}$ en η : elle engendre alors $\mathcal{L}$ en *tous les points de codimension* 1 dans X, ce qui est suffisant pour vérifier qu'elle engendre $\mathcal{L}$ partout. Donc $\mathcal{O}_X \to \mathcal{L}$ est surjective, puis bijective, et $\mathcal{L}$ est trivial. Dans l'autre sens : les groupes $\mathbf{Pic}(X)$ et $\mathbf{Pic}(X_K)$ sont tous les deux engendrés par les diviseurs de Weil, et tout diviseur de Weil sur X_K s'étend bien sûr en un diviseur de Weil sur X, donc $\mathbf{Pic}(X) \to \mathbf{Pic}(X_K)$ est également surjective. □

Lemma 63. *Avec les mêmes hypothèses,* $\mathbf{Lie}(\mathbf{Pic}_{X/S}) \simeq R^1 f_* \mathcal{O}_X$.

Démonstration. Par définition,

$$\mathbf{Lie}(\mathbf{Pic}_{X/S})(T) = \ker\left(\mathbf{Pic}_{X/S}(T[\epsilon]) \to \mathbf{Pic}_{X/S}(T)\right)$$

où $T[\epsilon]$ est le T-schéma $\mathrm{Spec}\mathcal{O}_T[\epsilon]$ et $\mathcal{O}_T[\epsilon] = \mathcal{O}_T \oplus \mathcal{O}_T\epsilon$ avec $\epsilon^2 = 0$. Donc

$$\mathbf{Lie}(\mathbf{Pic}_{X/S}) = \ker\left(R^1 f_*(\mathcal{O}_X[\epsilon]^\times) \to R^1 f_*(\mathcal{O}_X^\times)\right).$$

Mais on a une suite exacte $0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X[\epsilon]^\times \to \mathcal{O}_X^\times \to 1$, qui donne

$$0 \to f_*\mathcal{O}_X \to f_*\mathcal{O}_X[\epsilon]^\times \to f_*\mathcal{O}_X^\times \to R^1 f_*\mathcal{O}_X \to \mathbf{Lie}(\mathbf{Pic}_{X/S}) \to 0$$

Les trois premiers termes sont

$$0 \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_S[\epsilon]^\times \to \mathcal{O}_S^\times \to 0$$

puisque $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$, cqfd. □

Quatrième partie 4. Schémas abéliens

10. Schémas Abéliens

Definition 64. Un schéma abélien sur S est un schéma en groupes A/S qui est propre, de présentation finie, lisse, à fibres géométriquement connexes.

10.1. Rigidité et applications.

Proposition 65. *Soient S un schéma connexe noethérien et $\alpha : X \to Y$ un morphisme de S-schéma. On suppose que (1) $\pi_X : X \to S$ est propre, plat, vérifie $\pi_{X,*}\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_S$ universellement, et admet une section $e_X : S \to X$, et que (2) $\pi_Y : Y \to S$ est séparé. On note $e_Y = \alpha \circ e_X$, une section de π_Y. Alors : si α est constant sur une fibre, i.e. $\alpha(X_s) = \{e_Y(s)\}$ pour un point s de S, alors α est constant sur S, i.e. $\alpha = e_Y \circ \pi_X$.*

Démonstration. Soit $Z \subset X$ le schéma des coïncidences de α et $\beta = e_Y \circ \pi_X$. C'est un sous-schéma fermé de X, puisque Y est séparé sur S. Soit s un point du complémentaire de $\pi_X(X - Z)$ dans S, c'est-à-dire un point s de S tel que $X_s \subset Z$ ensemblistement, ou encore tel que $\alpha(X_s) = \beta(X_s) = \{e_Y(s)\}$. Soit $n \geq 1$ un entier, $S(n) = \mathrm{Spec}\,(\mathcal{O}_{S,s}/m_s^n)$ le n-ième voisinage infinitésimale de s dans S, et $X(n)$, $Y(n)$, $\alpha(n)$, $\beta(n)$, $e_{X(n)}$ et $e_{Y(n)}$ les objets obtenus à partir des objets homonymes par le changement de base $S(n) \hookrightarrow S$. Par hypothèse, $\alpha(n)$ et $\beta(n)$ induisent la même application (constante) sur l'espace topologique sous-jacent à $X(n)$. On note $\gamma(n)$ cette application commune. Les morphismes $\alpha(n)$ et $\beta(n)$ sont alors uniquement caractérisés par les morphismes de faisceaux sur $Y(n)$

$$\alpha(n)^\# \text{ et } \beta(n)^\# : \mathcal{O}_{Y(n)} \to \gamma(n)_*(\mathcal{O}_{X(n)}).$$

Ces deux morphismes sont compatibles avec les filtrations scindées

$$\begin{array}{cccccccccc} & 0 & \to & \mathcal{I}_{Y(n)} & \to & \mathcal{O}_{Y(n)} & \to & e_{Y(n),*}\mathcal{O}_{S(n)} & \to & 0 \\ \text{et} & 0 & \to & \mathcal{I}_{X(n)} & \to & \mathcal{O}_{X(n)} & \to & e_{X(n),*}\mathcal{O}_{S(n)} & \to & 0 \end{array}$$

induites par les sections $e_{X(n)}$ et $e_{Y(n)}$. Puisque $\pi_{X(n),*}\mathcal{O}_{X(n)} = \mathcal{O}_{S(n)}$,

$$\gamma(n)_*(\mathcal{O}_{X(n)}) = \beta(n)_*(\mathcal{O}_{X(n)}) = e_{Y(n),*}(\mathcal{O}_{S(n)})$$

donc $\gamma(n)_*(\mathcal{I}_{X(n)}) = 0$, et

$$\alpha(n)^\# = \beta(n)^\# = e_{Y(n)}^\# : \mathcal{O}_{Y(n)} \twoheadrightarrow e_{Y(n),*}(\mathcal{O}_{S(n)}).$$

Le morphisme de schémas $X(n) \hookrightarrow X$ se factorise donc par l'immersion fermée $Z \hookrightarrow X$. Pour tout point x de X_s, on a alors

$$\mathcal{I}_{Z,x} \subset m_s^n \mathcal{O}_{X,x} \subset m_x^n$$

où m_s et m_x sont les idéaux maximaux de $\mathcal{O}_{S,s}$ et $\mathcal{O}_{X,x}$, tandis que $\mathcal{I}_Z \subset \mathcal{O}_Z$ est l'idéal de Z. Donc $\mathcal{I}_{Z,x} \subset \cap_n m_x^n = 0$ d'après Nakayama, et $\mathcal{I}_Z = 0$ sur tout un voisinage de x dans X. Ainsi Z contient un voisinage ouvert (dans X) de chacun des points x de X_s, donc X contient tout un voisinage tubulaire de la fibre X_s dans X, puisque π_X est propre donc fermé. En particulier, $S - \pi_X(X - Z)$ est un ouvert de S. Mais puisque π_X est fidèlement plat, donc ouvert, $S - \pi_X(X - Z)$ est également fermé, et non vide par hypothèse. Puisque S est connexe, $\pi_X(X - Z) = \emptyset$, donc $Z = X$ ensemblistement, puis enfin $Z = X$ schématiquement car Z contient un voisinage ouvert de chacune des fibres de $\pi_X : X \to S$. □

Corollary 66. *Soient S un schéma, A/S un schéma abélien, G/S un schéma en groupes séparé et de présentation finie, $f : A \to G$ un S-morphisme qui envoie le neutre de A sur celui de G. Alors f est un morphisme de S-schémas en groupes.*

Démonstration. La question est locale sur S, que l'on peut supposer affine, connexe et noethérien. Alors A est aussi connexe, puisque $\pi_* \mathcal{O}_A = \mathcal{O}_S$. On considère le morphisme de A-schémas $\alpha : A \times_S A \to G \times_S A$ défini par

$$(x, y) \mapsto \left(f(xy)f(y)^{-1}f(x)^{-1}, y\right).$$

Ce morphisme est constant égal à (e_G, e_A) sur la fibre $A \times \{e_A\}$. On applique la proposition à ce A-morphisme, avec la section $A \to A \times_S A$ défini par $y \mapsto (e_A, y)$: on obtient $\alpha(x, y) = (e_G, y)$, donc $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tout x, y. □

Corollary 67. *Tout schéma abélien A/S est commutatif.*

Démonstration. On applique le corollaire précédent à $f : A \to A$, $f(x) = x^{-1}$. □

Corollary 68. *La structure de groupe sur A/S est uniquement déterminée par sa section neutre $e_A : S \to A$.*

Démonstration. S'il existe deux structures de groupes m et m' ayant e_A pour élément neutre, on applique le corollaire à l'identité $\mathrm{Id} : (A, m) \to (A, m')$: c'est un morphisme de groupe, donc $m = m'$. □

Proposition 69. *Soient A et B deux S-schémas abéliens projectifs. Le foncteur*

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{Gr}(A, B) : (\mathbf{Sch}/S)^0 \to \mathbf{Ens} \qquad T \mapsto \mathrm{Hom}_{T-gr}(A_T, B_T)$$

est représentable par un S-schéma en groupes commutatifs discret sans torsion que l'on note $\underline{\mathrm{Hom}}_{Gr}(A, B)$.

Démonstration. Pour la représentabilité, il suffit de montrer que le morphisme

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{Gr}(A, B) \to \underline{\mathrm{Hom}}(A, B)$$

est relativement représentable, d'après la proposition 1 et le corollaire 20. Soit donc $f : A \to B$ un morphisme de S-schéma. Pour tout T/S, $f_T : A_T \to B_T$ est un morphisme de T-schéma en groupe si et seulement si $f_T(e_A) = e_B$, d'après le corollaire 66, i.e. si et seulement si $T \to S$ se factorise à travers le sous-schéma (fermé) des coincidences de $f \circ e_A$ et $e_B : S \to B$. Donc $\underline{\mathrm{Hom}}_{Gr}(A, B)$ est un S-schéma en groupes (commutatifs), notons le H et soit $F : A_H \to B_H$ le morphisme universel. Montrons que H/S est discret, i.e. la section triviale $e_H : S \to H$ est une immersion ouverte et fermée. Pour tout point s de $e_H(S)$, $F_s : A_s \to B_s$ est trivial, donc $F : A_H \to B_H$ est trivial au-dessus de toute la composante connexe de s dans H, laquelle est donc contenue dans $e_H(s)$, qui est donc bien une réunion de composantes connexes de H. Montrons enfin que $\underline{\mathrm{Hom}}_{Gr}(A, B)(T)$ est sans torsion : il s'agit de montrer que si $f : A_T \to B_T$ est un T-morphisme (de T-schémas en groupes) tel que $[n]f = 0$ pour un entier $n \geq 1$, alors $f = 0$. Or sur un point géométrique quelconque s de S, $[n]f_s = 0$, donc $f_s(A_s) \subset B_s[n]$ qui est fini, donc $f_s(A_s) = 0$ car A_s est connexe, donc $f_s = 0$. Alors $f = 0$ sur toute la composante connexe de s, et finalement $f = 0$. D'ailleurs, on peut faire encore plus simple : si $[n] \circ f = 0$, alors $f \circ [n] = 0$, donc $f = 0$ car $[n] : A \to A$ est fidèlement plat et de présentation finie, donc un épimorphisme dans la catégorie des schémas. □

10.2. **Le morphisme Λ.** Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur A, et

$$\mathcal{M} = m^*(\mathcal{L}) \otimes p_1^*(\mathcal{L})^{-1} \otimes p_2^*(\mathcal{L})^{-1} \quad \text{sur } A \times_S A$$

où $m, p_1, p_2 : A \times_S A \to A$ sont la multiplication, la première et la seconde projections. Notant $[0] = e \circ f : A \to A$, on a donc sur A

$$(e_A, \mathrm{Id})^*\mathcal{M} = \mathcal{M}|e_A(S) \times_S A \simeq [0]^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{M}|A \times_S e_A(S) = (\mathrm{Id}, e_A)^*\mathcal{M}$$

Posons, pour y voir plus clair, $T = A$ et considérons

$$A \times_S A = A \times_S T = A_T$$

comme un T-schéma abélien, en particulier comme un T-schéma, sur lequel on a donc un faisceau inversible $\mathcal{M}$ qui donne un élément de $\mathbf{Pic}_{A/S}(T)$. Soit P le S-schéma qui représente $\mathbf{Pic}_{A/S}$ – on suppose qu'il existe – et $\mathcal{P} \in \mathbf{Pic}_{A/S}(P)$ l'élément universel. Il existe alors un unique S-morphisme $\Lambda(\mathcal{L}) : T \to P$ tel que $\Lambda(\mathcal{L})^*(\mathcal{P}) = \mathcal{M}$ dans $\mathbf{Pic}_{A/S}(T)$. Revenant à nos notations $T = A$ et $P = \mathbf{Pic}_{A/S}$, on a ainsi obtenu un S-morphisme

$$\Lambda(\mathcal{L}) : A \to \mathbf{Pic}_{A/S}.$$

Vérifions que c'est un morphisme de S-schémas en groupes : puisque $\mathbf{Pic}_{A/S}$ est séparé d'après la proposition 62, il suffit de vérifier que $\Lambda(\mathcal{L})$ envoie la section neutre $e_A : S \to A$ sur la section neutre de $\mathbf{Pic}_{A/S}$, ce qui résulte de

$$(\mathrm{Id}, e_A)^*\mathcal{M} = [0]^*\mathcal{L} = 0 \text{ dans } \mathbf{Pic}_{A/S}(S).$$

Plus généralement, l'image d'un point $s \in A(S)$ par $\Lambda(\mathcal{L})$ est le pull-back de $\mathcal{P}$ par

$$(\mathrm{Id}, \Lambda(\mathcal{L})) \circ (\mathrm{Id}, s) : A = A \times_S S \to A \times_S A \to A \times_S H$$

ou encore le pull-back de $\mathcal{M}$ par $(\mathrm{Id}, s) : A \to A \times_S A$. Puisque

$$\left\{\begin{array}{l} m \circ (\mathrm{Id}, s) : A \to A \\ p_1 \circ (\mathrm{Id}, s) : A \to A \\ p_2 \circ (\mathrm{Id}, s) : A \to A \end{array}\right. \quad \text{est} \quad \left\{\begin{array}{l} \text{la translation par } s,\ \mathcal{T}_s(x) = x + s, \\ \text{l'identité de } A, \\ \text{le morphisme constant } s \circ f, \end{array}\right.$$

on trouve donc $\Lambda(\mathcal{L})(s) = \mathcal{T}_s^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1}$ dans $\mathbf{Pic}_{A/S}(S)$. Plus généralement, pour tout T/S et $t \in A(T)$, on obtient :

$$\Lambda(\mathcal{L})(t) = \mathcal{T}_t^*(\mathcal{L}_T) \otimes \mathcal{L}_T^{-1} \quad \text{dans} \quad \mathbf{Pic}_{A/S}(T).$$

On déduit immédiatement de cette formule d'une part que pour tout $x, y \in A(T)$,

$$\mathcal{T}_{x+y}^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} = \mathcal{T}_x^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{T}_y^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \quad \text{dans} \quad \mathbf{Pic}_{A/S}(T)$$

(c'est le théorème du carré), et d'autre part que l'application qui à $\mathcal{L}$ associe $\Lambda(\mathcal{L})$ est un morphisme de groupes,

$$\Lambda : \mathbf{Pic}(A) \to \mathrm{Hom}_{S-Gr}\left(A, \mathbf{Pic}_{A/S}\right).$$

En faisceautisant ce dernier, on obtient finalement un morphisme

$$\Lambda : \mathbf{Pic}_{A/S} \to \underline{\mathrm{Hom}}_{Gr}\left(A, \mathbf{Pic}_{A/S}\right).$$

Vérifions que $\Lambda \circ \Lambda = 0$: il s'agit de voir que pour tout T/S, $\mathcal{L} \in \mathbf{Pic}_{A/S}(T)$, U/T, $x \in A(U)$, V/U et $y \in A(V)$, $\Lambda\left(\Lambda(\mathcal{L})(x)\right)(y) = 0$ dans $\mathbf{Pic}_{A/S}(V)$. Et en effet,

$$\begin{array}{rcl} \Lambda\left(\Lambda(\mathcal{L})(x)\right)(y) & = & \mathcal{T}_y^*(\mathcal{T}_x^*\mathcal{L}_U \otimes \mathcal{L}_U^{-1})_V \otimes (\mathcal{T}_x^*\mathcal{L}_U \otimes \mathcal{L}_U^{-1})_V^{-1} \\ & = & \mathcal{T}_y^*\mathcal{T}_{x_V}^*\mathcal{L}_V \otimes \mathcal{T}_y^*\mathcal{L}_V^{-1} \otimes \mathcal{T}_{x_V}^*\mathcal{L}_V^{-1} \otimes \mathcal{L}_V \\ & = & \mathcal{T}_{x_V+y}^*\mathcal{L}_V \otimes \mathcal{T}_y^*\mathcal{L}_V^{-1} \otimes \mathcal{T}_{x_V}^*\mathcal{L}_V^{-1} \otimes \mathcal{L}_V \\ & = & 0 \quad \text{dans } \mathbf{Pic}_{A/S}(V) \end{array}$$

d'après le théorème du carré. Vérifions enfin que si $f : A \to B$ est un morphisme de S-schémas abéliens, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Pic}_{B/S} & \xrightarrow{\Lambda} & \underline{\mathrm{Hom}}_{Gr}\left(B, \mathbf{Pic}_{B/S}\right) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \circ - \circ f \\ \mathbf{Pic}_{A/S} & \xrightarrow{\Lambda} & \underline{\mathrm{Hom}}_{Gr}\left(A, \mathbf{Pic}_{A/S}\right) \end{array}$$

En effet, pour tout $\mathcal{L}$ sur B et $x \in A$,

$$\begin{array}{rcl} \Lambda(f^*\mathcal{L})(x) & = & \mathcal{T}_x^* f^*\mathcal{L} \otimes f^*\mathcal{L}^{-1} \\ & = & f^*\mathcal{T}_{f(x)}^*\mathcal{L} \otimes f^*\mathcal{L}^{-1} \\ & = & f^*\left(\mathcal{T}_{f(x)}^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1}\right) \\ & = & \left(f^* \circ \Lambda(\mathcal{L}) \circ f\right)(x) \end{array}$$

donc $\Lambda \circ f^*(-) = f^* \circ \Lambda(-) \circ f$.

10.3. **Le théorème du cube.** Pour $J \subset \{1,2,3\}$, on note $p_J : A^3 \to A^J$ la projection évidente et $s_J : A^3 \to A$ la somme des J-èmes composantes. Soit également $T = A \times_S A$ et $q_1, q_2 : T \to A$ les deux projections, de sorte que $q_1 + q_2 = m$ est l'addition dans A. Pour tout $\mathcal{Q}$ dans $\mathbf{Pic}(A_T)$,

$$\mathcal{T}_{q_1}^*\mathcal{Q} \otimes T_{q_2}^*\mathcal{Q} = T_m^*\mathcal{Q} \otimes \mathcal{Q} \quad \text{dans } \mathbf{Pic}_{A/S}(T).$$

Pour $\mathcal{Q} = p_1^*\mathcal{L} = s_1^*\mathcal{L}$ sur $A_T = A \times_S A \times_S A$, on trouve :

$$s_{1,2}^*\mathcal{L} \otimes s_{1,3}^*\mathcal{L} = s_{1,2,3}^*\mathcal{L} \otimes s_1^*\mathcal{L} \otimes p_{2,3}^*\mathcal{M} \quad \text{dans } \mathbf{Pic}(A^3)$$

pour $\mathcal{M}$ sur $T = A \times_S A$. Tirant en arrière par $(b,c) \mapsto (0,b,c)$, il vient

$$q_1^*\mathcal{L} \otimes q_2^*\mathcal{L} = m^*\mathcal{L} \otimes 0^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{M} \quad \text{dans } \mathbf{Pic}(A^2)$$

d'où l'on déduit que

$$s_{1,2,3}^*\mathcal{L} \otimes s_1^*\mathcal{L} \otimes s_2^*\mathcal{L} \otimes s_3^*\mathcal{L} = s_{1,2}^*\mathcal{L} \otimes s_{1,3}^*\mathcal{L} \otimes s_{2,3}^*\mathcal{L} \otimes s_\emptyset^*\mathcal{L} \quad \text{dans } \mathbf{Pic}(A^3).$$

Pour tout S-schéma T et toutes sections $x, y, z : T \to A$,

$$(x+y+z)^*\mathcal{L} \otimes x^*\mathcal{L} \otimes y^*\mathcal{L} \otimes z^*\mathcal{L} = (x+y)^*\mathcal{L} \otimes (x+z)^*\mathcal{L} \otimes (y+z)^*\mathcal{L} \otimes 0_T^*\mathcal{L}$$

dans $\mathbf{Pic}(T)$. Appliquant ceci à $x = [n]$, $y = [1]$ et $z = [-1]$, on obtient

$$[n]^*\mathcal{L}^2 \otimes [-1]^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} = [n+1]^*\mathcal{L} \otimes [n-1]^*\mathcal{L} \otimes 0_A^*\mathcal{L}^2 \quad \text{dans } \mathbf{Pic}(A).$$

On en déduit par récurrence sur n que

$$[n]^*\mathcal{L}\otimes[0]^*\mathcal{L}^{n^2-1}=\mathcal{L}^{\frac{n^2+n}{2}}\otimes[-1]^*\mathcal{L}^{\frac{n^2-n}{2}}\quad \text{dans } \mathbf{Pic}(A). \tag{10.1}$$

En particulier,

$$[n]^*\mathcal{L}\otimes[0]^*\mathcal{L}^{n^2-1}=\begin{cases}\mathcal{L}^{n^2} & \text{si } [-1]^*\mathcal{L}\simeq\mathcal{L}\\ \mathcal{L}^{n} & \text{si } [-1]^*\mathcal{L}\simeq\mathcal{L}^{-1}\end{cases}$$

10.4. **Le noyau de Λ.**

Lemma 70. *Le noyau de Λ est ouvert et fermé dans $\mathbf{Pic}_{A/S}$.*

Démonstration. Il s'agit de voir que pour tout S-schéma T (que l'on peut supposer noethérien) et tout morphisme $T\to\mathbf{Pic}_{A/S}$, c'est-à-dire pour tout $\mathcal{L}\in\mathbf{Pic}_{A/S}(T)$, l'image inverse de $\ker\Lambda$ dans T, c'est-à-dire l'ensemble des point t de T tels que $\Lambda(\mathcal{L})_t=0$, est ouvert et fermé dans T. Cela résulte du théorème de rigidité, d'après lequel cet ensemble est une réunion de composantes connexes de T. $\square$

Lemma 71. *Pour $\mathcal{L}\in\mathbf{Pic}(A)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\Lambda(\mathcal{L})=0$.

(2) $m^*\mathcal{L}=p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*\mathcal{L}$ *dans* $\mathbf{Pic}_{A/S}(A)$.

(3) $m^*\mathcal{L}=p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*\mathcal{L}\otimes p_2^*[0]^*\mathcal{L}^{-1}$ *dans* $\mathbf{Pic}(A\times_S A)$.

(4) *Pour tout* $n\in\mathbb{Z}$, $[n]^*\mathcal{L}=\mathcal{L}^n\otimes[0]^*\mathcal{L}^{1-n}$ *dans* $\mathbf{Pic}(A)$.

(5) $[-1]^*\mathcal{L}=\mathcal{L}^{-1}\otimes[0]^*\mathcal{L}^{\otimes 2}$ *dans* $\mathbf{Pic}(A)$.

(6) $[-1]^*\mathcal{L}=\mathcal{L}^{-1}$ *dans* $\mathbf{Pic}_{A/S}(S)$.

(7) *Pour tout* T/S *et tout* $x\in A(T)$, $\mathcal{T}_x^*\mathcal{L}_T\otimes\mathcal{L}_T^{-1}=0$ *dans* $\mathbf{Pic}_{A/S}(T)$.

Démonstration. Les équivalences (7) $\Leftrightarrow$ (1) $\Leftrightarrow$ (2) sont tautologiques, et (2) est équivalent à l'existence d'un $\mathcal{M}\in\mathbf{Pic}(A)$ tel que

$$m^*\mathcal{L}=p_1^*\mathcal{L}\otimes p_2^*\mathcal{L}\otimes p_2^*\mathcal{M}\quad \text{dans } \mathbf{Pic}(A\times_S A).$$

On vérifie qu'alors $\mathcal{M}=[0]^*\mathcal{L}^{-1}$ dans $\mathbf{Pic}(A)$ en tirant en arrière par $a\mapsto(0,a)$. Donc (2) $\Leftrightarrow$ (3). En tirant en arrière (3) par $a\mapsto(na,a)$, on obtient

$$[n+1]^*\mathcal{L}=[n]^*\mathcal{L}\otimes\mathcal{L}\otimes[0]^*\mathcal{L}^{-1}\quad \text{dans } \mathbf{Pic}(A)$$

d'où l'on déduit facilement (4) par récurrence sur n. L'équivalence (4) $\Leftrightarrow$ (5) résulte de (10.1), et bien sûr (5) $\Rightarrow$ (6). Montrons enfin que (6) $\Rightarrow$ (1). On sait que

$$\Lambda([-1]^*\mathcal{L})=[-1]^*\circ\Lambda(\mathcal{L})\circ[-1].$$

On sait aussi que pour tout T/S et $x\in A(T)$, $\Lambda(\mathcal{L})(x)\in\mathbf{Pic}_{A/S}(T)$ est dans le noyau de Λ, donc d'après l'implication (1) $\Rightarrow$ (6) déjà démontrée,

$$[-1]^*\left(\Lambda(\mathcal{L})(x)\right)=\left(\Lambda(\mathcal{L})(x)\right)^{-1}=\Lambda(\mathcal{L})(-x)\quad \text{dans } \mathbf{Pic}_{A/S}(T)$$

i.e. $[-1]^*\circ\Lambda(\mathcal{L})=\Lambda(\mathcal{L})\circ[-1]$, donc finalement

$$\Lambda([-1]^*\mathcal{L})=\Lambda(\mathcal{L}).$$

En particulier, (6) implique que $\Lambda(\mathcal{L})=-\Lambda(\mathcal{L})$, donc $\Lambda(\mathcal{L})\circ[2]=0$ et $\Lambda(\mathcal{L})=0$ puisque $[2]:A\to A$ est une isogénie, donc un épimorphisme. $\square$

10.5. **La composante neutre.** Soit G un S-schéma en groupes qui est localement de présentation finie. Pour tout $s \in S$, on obtient donc un $k(s)$-schéma en groupes G_s qui est localement de type fini, et en particulier localement noethérien : ces composantes connexes sont donc ouvertes (et fermées), i.e. des sous-schémas ouverts et fermés de G_s. L'élément neutre $1_s \in G_s(k(s))$ est un point $k(s)$-rationnel, donc fermé. On note G_s^0 la composante neutre de G_s : c'est un sous-schéma en groupe ouvert et fermé de G_s, connexe et même géométriquement connexe puisqu'il contient un point $k(s)$-rationnel. On note enfin $G^0 = \cup_s G_s^0$, qui n'est à priori... qu'une partie de l'ensemble sous-jacent au schéma G.

Soit maintenant A un S-schéma abélien projectif. La discussion ci-dessus s'applique au S-schéma en groupes $G = \mathbf{Pic}_{A/S}$: on a construit ce dernier en le recouvrant par des ouverts fermés $\mathbf{Pic}_{A/S}^{\phi}$ qui sont quasi-projectifs et de présentation finie, et même projectifs puisque $\mathbf{Pic}_{A/S}$ vérifie le critère valuatif de propreté. On obtient ainsi un sous-ensemble $\mathbf{Pic}_{A/S}^0$ de $\mathbf{Pic}_{A/S}$. On peut d'ailleurs être plus précis. L'application qui à $s \in S$ associe le polynôme de Hilbert $\phi(A_s)$ (calculé relativement à un S-plongement $A \hookrightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E})$) est localement constante. Donc sur chaque composante connexe C de S, il existe un polynôme ϕ_C tel que $\phi(A_s) \equiv \phi_C$ pour tout $s \in C$, et le même argument de continuité montre alors qu'au dessus de cette composante, $\mathbf{Pic}_{A/S}^0 \subset \mathbf{Pic}_{A_S/S}^{\phi_C}$.

L'ensemble $\mathbf{Pic}_{A/S}^0$ est coincé entre le noyau de Λ (qui est ouvert et fermé, donc contient la composante neutre de chaque fibre), et l'image de $\Lambda(\mathcal{L}) : A \to \mathbf{Pic}_{A/S}$, pour tout $\mathcal{L} \in \mathbf{Pic}_{A/S}$ (puisque les fibres de A sont connexes) :

$$\Lambda(\mathcal{L}) \subset \mathbf{Pic}_{A/S}^0 \subset \ker \Lambda \subset \mathbf{Pic}_{A/S}.$$

10.6. **Les théorèmes.** Nous allons montrer simultanément les résultats suivants.

Theorem 72. (1) $\mathbf{Pic}_{A/S}^0 = \ker \Lambda$, (2) $\mathbf{Pic}_{A/S}^0$ *est un S-schéma abélien.*

Le S-schéma abélien dual de A est $A^t = \mathbf{Pic}_{A/S}^0$. Le S-schéma en groupes de Néron-Séveri est $\mathbf{NS}_{A/S} = \mathbf{Pic}_{A/S}/\mathbf{Pic}_{A/S}^0$. On a donc une factorisation

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Pic}_{A/S} & \overset{\Lambda}{\to} & \underline{\mathrm{Hom}}_{Gr}\left(A, \mathbf{Pic}_{A/S}\right) \\ \downarrow & & \uparrow \\ \mathbf{NS}_{A/S} & \overset{\Lambda}{\hookrightarrow} & \underline{\mathrm{Hom}}_{Gr}\left(A, A^t\right) \end{array}$$

La preuve du théorème ci-dessus repose en définitive sur la construction de certains éléments non-triviaux de $\mathbf{NS}_{A/S}$, les polarisations, qui joueront un rôle essentiel dans la suite. Ces éléments sont fournis par la théorie des faisceaux inversibles S-amples sur A, via le troisième point du théorème suivant.

Theorem 73. *Si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible S-ample sur A,*

(1) $R^i f_* \mathcal{L} = 0$ *pour tout* $i > 0$,

(2) $f_* \mathcal{L}$ *est localement libre de formation compatible au changement de base, et*

(3) $\Lambda(\mathcal{L}) : A \to A^t$ *est une isogénie de degré* $(\mathrm{rang}(f_* \mathcal{L}))^2$.

(4) *Pour tout* $n \geq 3$, $f^* f_* \mathcal{L}^{\otimes n} \to \mathcal{L}^{\otimes n}$ *est surjectif et induit une immersion fermée* $\iota(\mathcal{L}^{\otimes n}) : A \hookrightarrow \mathbf{P}(f_* \mathcal{L}^{\otimes n})$ *(i.e.* $\mathcal{L}^{\otimes n}$ *est très ample relativement à S).*

Identifions $\mathbf{Pic}_{A/S}(T) = \mathbf{Pic}(A\times_S T)/p_2^*\mathbf{Pic}(T)$ au sous-groupe de $\mathbf{Pic}(A\times_S T)$ formé des faisceaux inversibles $\mathcal{L}$ sur $A\times_S T$ qui sont normalisés par la condition

$$(e_A, \mathrm{Id})^*\mathcal{L} = \mathcal{L}|e_A(S)\times_S T \simeq \mathcal{O}_T.$$

Soit $\mathcal{P}$ le faisceau inversible ainsi rigidifié sur $A\times_S A^t$ qui correspond à l'inclusion $A^t \hookrightarrow \mathbf{Pic}_{A/S}$. Puisque cette dernière est un morphisme de S-schémas en groupes,

$$(\mathrm{Id}, e_{A^t})^*\mathcal{P} = \mathcal{P}|A\times_S e_{A^t}(S) \in f^*\mathbf{Pic}(S).$$

On en déduit alors facilement que, compte-tenu de notre rigidification,

$$(e_A, \mathrm{Id})^*\mathcal{P} = \mathcal{P}|e_A(S)\times_S A^t \simeq \mathcal{O}_{A^t} \quad \text{et} \quad (\mathrm{Id}, e_{A^t})^*\mathcal{P} = \mathcal{P}|A\times_S e_{A^t}(S) \simeq \mathcal{O}_A.$$

Ce faisceau inversible s'appelle le faisceau de Poincaré. On peut le voir aussi comme un faisceau inversible... sur le A-schéma abélien $A\times_S A^t$, ce qui nous donne un morphisme de S-schémas $A \to \mathbf{Pic}_{A^t/S}$. Ce dernier est compatible avec les sections neutres par construction, et c'est donc un morphisme de S-schémas en groupes. Il se factorise nécessairement à travers le sous-schéma en groupes ouvert $A^{tt} = \mathbf{Pic}^0_{A^t/S}$: on obtient donc ainsi un morphisme canonique $\delta : A \to A^{tt}$.

Theorem 74. *C'est un isomorphisme $\delta : A \to A^{tt}$.*

10.7. **Le cas d'un corps algébriquement clos.** On suppose ici que $S = \mathrm{Spec} k$ où k est algébriquement clos. Soit A/k une variété abélienne de dimension g.

10.7.1. *Cohomologie de $0 \neq \mathcal{M} \in \ker\Lambda$ et applications.*

Lemma 75. *Si $0 \neq \mathcal{M} \in \ker\Lambda$, alors $H^i(A, \mathcal{M}) = 0$ pour tout $i \geq 0$.*

Démonstration. On le montre par récurrence sur i. Si $H^0(A, \mathcal{M}) \neq 0$, alors aussi $H^0(A, \mathcal{M}^{-1}) \neq 0$ puisque $\mathcal{M}^{-1} = [-1]^*\mathcal{M}$, donc $\mathcal{M} = 0$ [1], une contradiction. Supposons ensuite que $H^j(X, \mathcal{M}) = 0$ pour tout $j < i \neq 0$. Puisque

$$m^*\mathcal{M} \simeq p_1^*\mathcal{M} \otimes p_2^*\mathcal{M} \quad \text{dans } \mathbf{Pic}(A\times A),$$

la formule de Kunneth donne

$$H^i(A\times A, m^*\mathcal{M}) = \oplus_{j_1+j_2=i} H^{j_1}(A, \mathcal{M}) \otimes H^{j_2}(A, \mathcal{M}) = 0.$$

Mais l'identité de A se factorise en $A \hookrightarrow A\times A \twoheadrightarrow A$ donnée par $a \mapsto (a, 0)$ et $(a, b) \mapsto a + b$, et cette factorisation induit

$$H^i(A, \mathcal{M}) \to H^i(A\times A, m^*\mathcal{M}) \to H^i(A, \mathcal{M})$$

donc $H^i(A, \mathcal{M}) = 0$. □

Corollary 76. *Si $\mathcal{L}$ est un faisceau ample sur A, alors*

(1) *Le noyau de $\Lambda(\mathcal{L}) : A \to \mathbf{Pic}_{A/S}$ est fini.*

(2) *L'image de $\Lambda(\mathcal{L})$ est le noyau de $\Lambda : \mathbf{Pic}_{A/S} \to \underline{\mathrm{Hom}}_{Gr}(A, \mathbf{Pic}_{A/S})$.*

---

1. Soit (U_i) un recouvrement ouvert de A trivialisant $\mathcal{M}$, $f_i \in K(A)$ tel que $\mathcal{M}|U_i = \mathcal{O}_{U_i} f_i$, donc aussi $\mathcal{M}^{-1}|U_i = \mathcal{O}_{U_i} f_i^{-1}$. Si x et y sont des sections non-nulles de $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^{-1}$, il existe $x_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ et $y_i \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ tels que $x = x_i f_i$ et $y = y_i f_i^{-1}$, donc $xy = x_i y_i$ est dans $K(A)^\times \cap \Gamma(A, \mathcal{O}_A) = k^\times$. Mais alors x_i et y_i sont dans $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_{U_i}^\times)$ et $\mathcal{M}|U_i = \mathcal{O}_{U_i} f$ pour tout i, donc $\mathcal{M} \simeq \mathcal{O}_A$.

Démonstration. (1) Soit $B = \ker \Lambda(\mathcal{L})^0_{red}$ la composante connexe réduite de $\ker \Lambda(\mathcal{L})$. C'est un sous-schéma en groupes de A qui est fermé donc propre sur k, connexe, et réduit donc génériquement lisse donc lisse : bref, c'est une sous-variété abélienne de A. Pour tout $b \in B$, $\mathcal{T}_b^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}$ sur A, donc à fortiori $\mathcal{T}_b^*(\mathcal{L}|B) \simeq \mathcal{L}|B$ sur B, i.e. $\mathcal{L}|B$ est dans le noyau de Λ, ainsi que $(\mathcal{L}|B)^{\otimes n}$ pour tout $n \geq 0$. Puisque $\mathcal{L}$ est ample, $\mathcal{L}|B$ l'est encore et $H^0(B, (\mathcal{L}|B)^{\otimes n}) \neq 0$ pour $n \gg 0$ d'après le lemme 42, donc $(\mathcal{L}|B)^{\otimes n}$ est trivial pour $n \gg 0$ d'après le lemme précédent. Donc $\mathcal{O}_B$ est un faisceau ample, ce qui implique que $B = 0$ [2], donc $\ker \Lambda(\mathcal{L})$ est fini.

(2) Soit $\mathcal{M} \in \mathbf{Pic}(A)$ tel que $\Lambda(\mathcal{M}) = 0$. On considère sur $A \times A$ le faisceau inversible $\mathcal{K} = m^*\mathcal{L} \otimes p_1^*\mathcal{L}^{-1} \otimes p_2^*(\mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{M}^{-1})$. On a donc

$$\mathcal{K}|\{a\} \times A = \mathcal{T}_a\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \otimes \mathcal{M}^{-1} \quad \text{et} \quad \mathcal{K}|A \times \{a\} = \mathcal{T}_a\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1}$$

qui sont encore dans le noyau de Λ, puisque A étant connexe

$$\Lambda(\mathcal{L})(a) = \mathcal{T}_a\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \in \mathbf{Pic}^0_{A/S} \subset \ker \Lambda$$

Supposons que pour tout $a \in A$, $\mathcal{K}|\{a\} \times A \neq \mathcal{O}_A$. D'après le lemme précédent et le yoga du changement de base (corollaire 47), on a donc $R^ip_{1*}\mathcal{K} = 0$ pour tout $i \geq 0$. La suite spectrale de Leray

$$H^i(A, R^jp_{1*}\mathcal{K}) \Rightarrow H^{i+j}(A \times A, \mathcal{K})$$

nous donne alors $H^i(A \times A, \mathcal{K}) = 0$ pour tout $i \geq 0$. D'autre part, nous avons vu que le noyau de $\Lambda(\mathcal{L})$ est fini. En dehors de ce noyau, $\mathcal{K}|A \times \{a\} = \Lambda(\mathcal{L})(a)$ est non-trivial, de sorte que par le même raisonnement, $R^ip_{2*}\mathcal{K}|A - K(\mathcal{L}) = 0$ pour tout $i \geq 0$: le faisceau cohérent $R^ip_{2*}\mathcal{K}$ est concentré sur le schéma fini $K(\mathcal{L})$. La deuxième suite spectrale de Leray

$$H^i(A, R^jp_{2*}\mathcal{K}) \Rightarrow H^{i+j}(A \times A, \mathcal{K})$$

dégénère donc en

$$H^0(A, R^jp_{2*}\mathcal{K}) = H^j(A \times A, \mathcal{K})$$

d'où l'on tire enfin que $R^ip_{2*}\mathcal{K} = 0$ pour tout i. Le yoga du changement de base nous donne à nouveau que $H^i(A \times \{a\}, \mathcal{K}|A \times \{a\}) = 0$ pour tout i et tout a. On obtient finalement une contradiction en prenant $i = 0$ et $a = 0$. □

Corollary 77. $\mathbf{Pic}^0_{A/S} = \ker \Lambda$.

Démonstration. On admet que A est projective : il existe un faisceau inversible ample $\mathcal{L}$ sur A (voir [9, Theorem 5.4]). Les extrémités de

$$\Lambda(\mathcal{L})(A) \subset \mathbf{Pic}^0_{A/S} \subset \ker \Lambda$$

coïncident d'après le corollaire précédent, donc $\mathbf{Pic}^0_{A/S} = \ker \Lambda$. □

On note $A^t = \mathbf{Pic}^0_{A/S} = \ker \Lambda$. C'est un sous-schéma en groupes (ouvert et fermé) de $\mathbf{Pic}_{A/S}$, qui est géométriquement connexe, et propre sur k. Il ne lui manque donc plus que la lissité pour être une variété abélienne. Or, on sait que

$$\mathbf{Lie}(A^t) \simeq H^1(A, \mathcal{O}_A) \quad \text{et} \quad \dim A^t = \dim A.$$

La première assertion vient de 63, et la seconde résulte du corollaire ci-dessus. La lissité de A^t résultera donc du calcul de la cohomologie de $\mathcal{O}_A$, l'élément trivial du noyau de Λ : il nous faut voir que $\dim_k H^1(A, \mathcal{O}_A) = g$.

2. Si $\mathcal{O}_B$ est ample, l'ouvert de B où $1 \in \Gamma(B, \mathcal{O}_B)$ est inversible, c'est-à-dire B, est un schéma quasi-affine, c'est-à-dire un sous-schéma ouvert de $\mathrm{Spec}\Gamma(B, \mathcal{O}_B) = \mathrm{Spec}k$.

10.7.2. *Cohomologie de* $\mathcal{O}_A = 0 \in \ker \Lambda$ *et applications.*

Lemma 78. *Pour tout* $i \geq 0$, $\dim_k H^i(A, \mathcal{O}_A) = C_g^i$.

Remark 79. La caractéristique d'Euler-Poincaré varie continuement sur $\mathbf{Pic}_{A/S}$, elle est donc constante sur $\mathbf{Pic}^0_{A/S}$, et nulle en dehors de 0 d'après le lemme 75, donc nulle aussi en 0. Et en effet, $\sum_{i=0}^g (-1)^i C_g^i = 0$. Lorsque $g = 1$, cet argument démontre le lemme : $\dim_k H^1(A, \mathcal{O}_A) = \dim_k H^0(A, \mathcal{O}_A) = 1$.

Démonstration. Soit $\mathcal{P}$ le faisceau de Poincaré sur $A \times A^t$. C'est donc le faisceau inversible normalisé sur $A \times A^t$ qui correspond à l'inclusion $A^t = \mathbf{Pic}^0_{A/S} \to \mathbf{Pic}_{A/S}$. Il vérifie $\mathcal{P}|\{0\} \times A^t = 0$ (par normalisation) et $\mathcal{P}|A \times \{a\} = \mathcal{P}_a$ où $a \mapsto \mathcal{P}_a$ est exactement l'identification $A^t = \mathbf{Pic}^0_{A/S}$.

Puisque $p_2 : A \times A^t \to A^t$ est propre, lisse et surjectif, ce faisceau inversible (donc cohérent) $\mathcal{P}$ de $A \times A^t$ est plat sur A^t, de sorte que l'on peut appliquer à cette situation le yoga du changement de base propre. Le lemme 75 montre que

$$\forall a \in A^t - \{0\}, \forall i \geq 0, \qquad H^i(A \times \{a\}, \mathcal{P}|A \times \{a\}) = 0$$

donc $R^i p_{2*}\mathcal{P}|A^t - \{0\} = 0$, i.e. tous les faisceaux cohérents $R^i p_{2*}\mathcal{P}$ sur A^t sont concentrés en $0 \in A^t$, et la suite spectrale de Leray

$$H^i(A^t, R^j p_{2*}\mathcal{P}) \Rightarrow H^{i+j}(A \times A^t, \mathcal{P})$$

dégénère en

$$H^i(A \times A^t, \mathcal{P}) = H^0(A^t, R^i p_{2*}\mathcal{P}) = H^i(A \times \mathrm{Spec} R, \mathcal{P}|A \times \mathrm{Spec} R)$$

où $R = \mathcal{O}_{A^t,0}$ est l'anneau local de A^t en 0, un anneau local noethérien de dimension g et de corps résiduel k. Soit $C^0 \to C^1 \to \cdots \to C^g$ le complexe de R-modules localement libres (donc libres) de rang fini qui calcule la cohomologie de $\mathcal{P}|A \times \mathrm{Spec} R$ universellement sur R, comme dans le lemme 45. On a donc

$$\begin{array}{llcl} (10.2) & H^i(A \times A^t, \mathcal{P}) & = & H^i(A \times \mathrm{Spec} R, \mathcal{P}|A \times \mathrm{Spec} R) = H^i(C^\bullet), \\ (10.3) \quad \text{et} & H^i(A, \mathcal{O}_A) & = & H^i(A \times \{0\}, \mathcal{P}|A \times \{0\}) = H^i(C^\bullet \otimes_R k). \end{array}$$

La première formule nous dit notamment que les $H^i(C^\bullet)$ sont déjà des k-espaces vectoriels, et en particulier, des R-modules artiniens (=de longueur finie). Or :

Lemma 80. *Soit* R *un anneau local régulier de dimension* g *et* $C^\bullet$ *un complexe de* R*-modules libres de rang fini tel que* $H^i(C^\bullet)$ *est artinien. Alors*

$$0 \to C^0 \to C^1 \to \cdots \to C^g \to H^g(C^\bullet) \to 0$$

est exacte.

Démonstration. [10, Page 127] Si $g = 0$, il n'y a rien à démontrer, mais le cas $g = 1$ (trivial) est déjà plus éclairant. Lorsque $g > 0$, on choisit un élément $x \in m_R$ tel que $R/Rx = \overline{R}$ soit régulier de dimension $g-1$ (il suffit de prendre $x \neq 0 \bmod m_R^2$), et on suppose le résultat démontré pour $\overline{R}$. La suite exacte de complexes

$$0 \to C^\bullet \xrightarrow{x} C^\bullet \to \overline{C}^\bullet \to 0$$

donne alors une suite exacte longue

$$\cdots \to H^{i-1}(\overline{C}^\bullet) \to H^i(C^\bullet) \xrightarrow{x} H^i(C^\bullet) \to H^i(\overline{C}^\bullet) \to H^{i+1}(C^\bullet) \to \cdots$$

d'où l'on déduit d'abord que $H^i(\overline{C}^\bullet)$ est artinien pour tout i, donc $H^i(\overline{C}^\bullet) = 0$ pour tout $i < g-1$ d'après l'hypothèse de récurrence, puis également $H^i(C^\bullet) = 0$ pour tout $i < g-1$ d'après Nakayama, et même $H^{g-1}(C^\bullet) = 0$ puisque la multiplication par x est injective sur ce R-module artinien. C'est fini ! $\square$

On ne peut malheureusement pas appliquer directement ce lemme, parce que l'on ne sait pas encore que notre anneau R est régulier : c'est même presque exactement ce que l'on veut démontrer, à savoir, la lissité de A^t. En revanche, l'anneau réduit R_{red} est régulier : c'est en effet l'anneau local en 0 de A^t_{red}, qui est un groupe algébrique réduit, donc (génériquement lisse donc) lisse. D'ailleurs, en remplaçant partout dans l'argument ci-dessus A^t par A^t_{red}, on trouve de même que

$$H^i(A \times A^t_{red}, \mathcal{P}) = H^i(A \times \mathrm{Spec} R_{red}, \mathcal{P}|A \times \mathrm{Spec} R_{red}) = H^i(C^\bullet \otimes R_{red}).$$

Les groupes de cohomologies du complexe $C^\bullet_{red} = C^\bullet \otimes R_{red}$ sont donc des k-espaces vectoriels de dimension finie, et on vérifie facilement qu'il en est de même pour le complexe dual $C^{\bullet\vee}_{red} = \mathrm{Hom}_{R_{red}}(C^\bullet_{red}, R_{red})$. Le lemme nous dit alors que ce complexe est une résolution libre du R-module artinien $H^g(C^{\bullet\vee}_{red})$. Mais

$$\begin{aligned} H^g(C^{\bullet\vee}_{red}) \otimes k &= \mathrm{coker}\left(\mathrm{Hom}_{R_{red}}\left(C^1_{red}, R_{red}\right) \to \mathrm{Hom}_{R_{red}}\left(C^0_{red}, R_{red}\right)\right) \otimes k \\ &= \mathrm{coker}\left(\mathrm{Hom}_k\left(C^1 \otimes k, k\right) \to \mathrm{Hom}_k\left(C^0 \otimes k, k\right)\right) \\ &= \mathrm{Hom}_k\left(\ker\left(C^0 \otimes k \to C^1 \otimes k\right), k\right) \end{aligned}$$

est le k-dual de $H^0(C^\bullet \otimes k) = H^0(A, \mathcal{O}_A) = k$, donc $C^{\bullet\vee}_{red}$ est une résolution libre de k. Ce complexe est donc homotope à la résolution de Koszul $K^\bullet(s_1, \cdots, s_g)$ définie par une suite régulière de paramètres de R_{red} (des éléments $s_i \in m_{R_{red}}$ dont les images dans $m_{R_{red}}/m^2_{R_{red}}$ forment une k-base de ce k-espace vectoriel). Cette résolution de Koszul est auto-duale, et donnée par les formules

$$\begin{aligned} K^i(s_1, \cdots, s_g) &= \Lambda^i\left(R_{red} \cdot e_1 \oplus \cdots \oplus R_{red} \cdot e_g\right), \\ d(e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}) &= \sum_{k=1}^{i} (-1)^k s_k e_{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{e}_{j_k} \wedge \cdots \wedge e_{j_i}. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que

$$H^i(A, \mathcal{O}_A) = H^i(C^\bullet \otimes k) = H^i(K^\bullet(s_1, \cdots, s_g) \otimes k) = K^i(s_1, \cdots, s_g) \otimes k$$

donc $\dim_k H^i(A, \mathcal{O}_A) = C^i_g$ pour tout $i \geq 0$, ce qu'il fallait démontrer. $\square$

Remark 81. En particulier, A^t est lisse puisque

$$\dim_k \mathrm{Lie} A^t(k) = \dim_k H^1(A, \mathcal{O}_A) = g = \dim A^t$$

donc $R_{red} = R$ dans tout l'argument ci-dessus.

Lemma 82. *La cohomologie de $\mathcal{P}$ sur $A \times A^t$ est donnée par*

$$H^i(A \times A^t, \mathcal{P}) = \begin{cases} 0 & si\ i \neq g, \\ k & si\ i = g. \end{cases}$$

Démonstration. Cela résulte de la formule (10.2). $\square$

Corollary 83. *Le morphisme de bidualité $\delta : A \to A^{tt}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Par définition de ce morphisme δ, le faisceau de Poincaré $\mathcal{P}$ sur $A \times A^t$ est le pull-back par (δ, Id) de son analogue $\mathcal{Q}$ sur $A^{tt} \times A^t$. Si δ n'est pas une isogénie, son noyau contient des sous-schémas en groupes finis F de A de degré $d(F)$ arbitrairement grand. Mais alors $\mathcal{P}$ est le pull-back d'un faisceau inversible par le morphisme fini plat $A \times A^t \to A/F \times A^t$ de rang $d(F)$, donc $d(F)$ divise $\chi(P) = (-1)^g$, une contradiction. Le même argument montre que l'isogénie δ est de degré 1, c'est-à-dire un isomorphisme. $\square$

10.7.3. *Cohomologie des faisceaux amples.* Pour tout $\mathcal{L} \in \mathbf{Pic}(A)$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$[n]^*\mathcal{L} = \mathcal{L}^{\frac{n^2+n}{2}} \otimes [-1]^*\mathcal{L}^{\frac{n^2-n}{2}} = \mathcal{L}^{n^2} \quad \text{dans } \mathbf{NS}_{A/S}$$

d'après le théorème du cube, puisque aussi $[-1]^*\mathcal{L} = \mathcal{L}$ dans $\mathbf{NS}_{A/S}$. Si de plus $\Lambda(\mathcal{L}) : A \to A^t$ est surjective, par exemple si $\mathcal{L}$ est ample, alors $\Lambda(\mathcal{L}^{n^2})$ l'est également, et il existe donc un élément $x_n \in A$ tel que

$$\Lambda(\mathcal{L}^{n^2})(x_n) = [n]^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-n^2} \quad \text{dans } \mathbf{Pic}(A),$$

c'est-à-dire tel que $\mathcal{T}_{x_n}^*\mathcal{L}^{n^2} \simeq [n]^*\mathcal{L}$ dans $\mathbf{Pic}(A)$.

Lemma 84. *Si $\mathcal{L}$ est inversible ample sur A, alors $H^i(A, \mathcal{L}) = 0$ si $i > 0$.*

Démonstration. Puisque $\mathcal{L}$ est ample,

$$H^i(A, [n]^*\mathcal{L}) \simeq H^i(A, \mathcal{T}_x^*\mathcal{L}^{n^2}) \simeq H^i(A, \mathcal{L}^{n^2}) = 0$$

pour tout $n \gg 0$ et $i > 0$ d'après le corollaire 35. Puisque $[n] : A \to A$ est fini,

$$H^i(A, [n]^*\mathcal{L}) \simeq H^i(A, [n]_*[n]^*\mathcal{L}) = 0$$

pour tout $n \gg 0$ et $i > 0$. Mais si n est premier à la caractéristique de k, alors $\mathcal{L}$ est un facteur direct de $[n]_*[n]^*\mathcal{L}$, donc $H^i(A, \mathcal{L}) = 0$ si $i > 0$. $\square$

Le calcul du degré de $\Lambda(\mathcal{L})$ pour $\mathcal{L}$ ample résulte alors immédiatement du lemme suivant, valable plus généralement pour tout $\mathcal{L}$ non-dégénéré, i.e. tel que le morphisme $\Lambda(\mathcal{L}) : A \to A^t$ soit une isogénie.

Lemma 85. *Si $\mathcal{L}$ est non-dégénéré,* $\deg \Lambda(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{L})^2$.

Démonstration. Posons $\alpha = (\mathrm{Id}, \Lambda(\mathcal{L})) : A \times A \to A \times A^\perp$. On a donc

$$\alpha^*\mathcal{P} = m^*\mathcal{L} \otimes p_1^*\mathcal{L}^{-1} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{-1}$$

par définition de $\Lambda(\mathcal{L})$, donc puisque α est fini et plat,

$$\chi(\alpha^*\mathcal{P}) = \deg \alpha \cdot \chi(\mathcal{P}) = \chi(m^*\mathcal{L} \otimes p_1^*\mathcal{L}^{-1} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{-1}).$$

On voit comme plus haut que tous les

$$R^i p_{1,*}(m^*\mathcal{L} \otimes p_1^*\mathcal{L}^{-1} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{-1}) = R^i p_{1,*}(m^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{-1}) \otimes \mathcal{L}^{-1}$$

sont à support dans $\ker \Lambda(\mathcal{L})$ qui est fini, donc $R^i p_{1,*}(m^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{-1})$ aussi, et

$$H^i(A \times A, m^*\mathcal{L} \otimes p_1^*\mathcal{L}^{-1} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{-1}) \simeq H^0(A, \bullet) \simeq H^i(A \times A, m^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{-1}).$$

Mais l'isomorphisme $\theta : A \times A \to A \times A$ donné par $\theta(a, b) = (a + b, b)$ vérifie

$$\theta^*\left(p_1^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{-1}\right) = m^*\mathcal{L} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{-1}$$

d'où l'on tire en utilisant la formule de Künneth que

$$H^i(A \times A, m^*\mathcal{L} \otimes p_1^*\mathcal{L}^{-1} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{-1}) \simeq \oplus_{j+j'=i} H^j(A, \mathcal{L}) \otimes H^{j'}(A, \mathcal{L}^{-1}).$$

Il en résulte que $\chi(m^*\mathcal{L} \otimes p_1^*\mathcal{L}^{-1} \otimes p_2^*\mathcal{L}^{-1}) = \chi(\mathcal{L}) \cdot \chi(\mathcal{L}^{-1})$. On a donc :

$$\chi(\mathcal{L}) \cdot \chi(\mathcal{L}^{-1}) = \chi(\mathcal{P}) \cdot \deg \Lambda(\mathcal{L}) = (-1)^g \cdot \deg \Lambda(\mathcal{L}).$$

En appliquant ceci à $\mathcal{L}^{\otimes n}$, $n > 0$, on trouve

$$\chi(\mathcal{L}^{\otimes n}) \cdot \chi(\mathcal{L}^{-\otimes n}) = (-1)^g n^{2g} \cdot \deg \Lambda(\mathcal{L}).$$

Pour $\mathcal{L}$ ample, nous avons vu que $n \mapsto \chi(\mathcal{L}^{\otimes n})$ est un polynôme, et la formule ci-dessus montre qu'il est homogène de degré g. En particulier $\chi(\mathcal{L}^{-1}) = (-1)^g \chi(\mathcal{L})$, donc $\deg \Lambda(\mathcal{L}) = \chi(\mathcal{L})^2$. Pour le cas général, il faut encore savoir que $n \mapsto \chi(\mathcal{L}^{\otimes n})$ est un polynôme : c'est ce que l'on appelle le lemme de Krasner. □

Remark 86. On a vu dans la preuve ci-dessus que pour $\mathcal{L}$ ample et $n > 0$,

$$\chi(\mathcal{L}^{\otimes n}) = \dim_k H^0(A, \mathcal{L}^{\otimes n}) = n^g \chi(\mathcal{L}).$$

10.7.4. *Rappels.* Soit X/k une variété propre et lisse, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X et $E = H^0(X, \mathcal{L})$. Le support du conoyau du morphisme $E \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{L}$ est un fermé de X. On note $X(\mathcal{L})$ l'ouvert complémentaire. Par construction, le morphisme canonique $E \otimes \mathcal{O}_{X(\mathcal{L})} \to \mathcal{L}|X(\mathcal{L})$ est surjectif : on obtient donc un morphisme $\iota(\mathcal{L}) : X(\mathcal{L}) \to \mathbf{P}(E)$ tel que $\mathcal{L} \simeq \iota(\mathcal{L})^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(1)$. D'autre part, nous avons vu que l'ensemble $|\mathcal{L}|$ des diviseurs effectifs D qui sont linéairement équivalents à $\mathcal{L}$ (i.e. tels que $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_X(D)$) est en bijection avec l'ensemble (l'espace projectif) des *droites* de E, via l'application qui à $s \in E$ associe le diviseur $D(s)$ de s, à savoir le lieu (fermé) de X où le morphisme $\mathcal{O}_X \to \mathcal{L}$ n'est pas surjectif. Cette bijection permet de décrire diverses propriétés de $\iota(\mathcal{L})$. On dit que $|\mathcal{L}|$ est (1) sans point base, (2) sépare les points, (3) sépare les vecteurs tangents ssi (1) pour tout $x \in X$, il existe $D \in |\mathcal{L}|$ tel que $x \notin D$, (2) pour tout $x, y \in X$ avec $x \neq y$, il existe $D \in |\mathcal{L}|$ tel que $x \in D$ mais $y \notin D$ ou l'inverse, et (3) pour tout $x \in X$ et $t \in T_x X$ avec $t \neq 0$, il existe $D \in |\mathcal{L}|$ tel que $x \in D$ mais $t \notin T_x D$. Alors (1) $\iff X(\mathcal{L}) = X$, $(1+2) \iff X(\mathcal{L}) = X$ et $\iota(\mathcal{L})$ est injective, et $(1+2+3) \iff X(\mathcal{L}) = X$ et $\iota(\mathcal{L})$ est une immersion fermée. Cf. [7, Chap III, Prop. 7.3].

10.7.5. *Application.* On revient au cas qui nous intéresse : $X/k = A/k$ est une variété abélienne. Pour appliquer les résultats ci-dessus, il faut savoir construire des éléments dans $|\mathcal{L}|$: on utilise pour cela le lemme suivant.

Lemma 87. *Soit $D \in |\mathcal{L}|$ et $x_1, \cdots, x_r \in A$. Alors*

$$\sum_{i=1}^r x_i = 0 \textit{ dans } A \quad \Longrightarrow \quad \sum_{i=1}^r T_{x_i}^* D \in |\mathcal{L}^{\otimes r}|.$$

Démonstration. Cela résulte de $\Lambda(\mathcal{L})(x_1 + \cdots + x_r) = 0$, puisque

$$\Lambda(\mathcal{L})(x) \simeq \mathcal{T}_x^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \simeq T_x^* \mathcal{O}(D) \otimes \mathcal{O}(D)^{-1} = \mathcal{O}(\mathcal{T}_x^* D) \otimes \mathcal{O}(D)^{-1}$$

donc $\sum_{i=1}^r \mathcal{T}_{x_i}^* D \simeq rD \in |\mathcal{L}^{\otimes r}|$. □

Proposition 88. *Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible. Les conditions suivantes sont équivalentes :* (1) *$\mathcal{L}$ est ample,* (2) *$\Lambda(\mathcal{L})$ est une isogénie et $H^0(A, \mathcal{L}) \neq 0$,* (3) *$|\mathcal{L}^{\otimes 2}|$ est sans point base et $\iota(\mathcal{L}^{\otimes 2}) : A \to \mathbf{P}(H^0(A, \mathcal{L}^{\otimes 2}))$ est un morphisme fini.*

Démonstration. (3) $\Rightarrow$ (1) est un résultat général de géométrie algébrique, cf. [1, III 2.6.1 ou 4.4.2]. Pour (1) $\Rightarrow$ (2), supposons que $\mathcal{L}$ est ample. On sait alors que $\Lambda(\mathcal{L})$ est une isogénie (corollaire 76), que $\chi(\mathcal{L}^{\otimes n}) = n^g \chi(\mathcal{L}) = \dim_k H^0(A, \mathcal{L}^{\otimes n})$ (remarque 86), et que $\chi(\mathcal{L}^{\otimes n}) > 0$ pour $n \gg 0$ (lemme 36), donc $\dim_k H^0(A, \mathcal{L}) \neq 0$. Pour (2) $\Rightarrow$ (3), on choisit $D \in |\mathcal{L}|$, qui existe d'après (2). Alors pour tout $x \in A$, $\mathcal{T}_x^* D + \mathcal{T}_{-x}^* D \in |\mathcal{L}^{\otimes 2}|$ d'après le lemme précédent. Soit alors $y \in A$. En comparant simplement les dimensions, on voit que le support de $[\pm 1](D-y)$ est distinct de A. Si $x \in A$ n'est pas dans ce support, alors y n'est pas dans celui de $\mathcal{T}_x^* D + \mathcal{T}_{-x}^* D$, donc $|\mathcal{L}^{\otimes 2}|$ est sans point base. Soit ensuite $H = H^0(A, \mathcal{L}^{\otimes 2})$, $\iota : A \to \mathbf{P}(H)$ le morphisme $\iota(\mathcal{L}^{\otimes 2})$. Pour tout $x \in A$, notons $C(x)$ la composante connexe de x dans $\iota^{-1}\iota(x)$. Le lemme de rigidité appliqué au A-morphisme $C(x) \times A \to \mathbf{P} \times A$ défini par $(y, a) \mapsto (\iota(y+a), a))$ montre que $\iota(y+a) = \iota(x+a)$ pour tout $a \in A$ et $y \in C(x)$. Donc ι est invariant par $\mathcal{T}_{x-y}$, donc $\mathcal{L}^{\otimes 2}$ aussi, et $x - y \in \ker \Lambda(\mathcal{L}^{\otimes 2})$ pour tout $x \in A, y \in C(x)$. En particulier, tous les $C(x)$ sont finis (donc $C(x) = \{x\}$) puisque $\ker \Lambda(\mathcal{L}^{\otimes 2})$ l'est. Donc $\iota(\mathcal{L}^2)$ est quasi-fini (et propre) donc fini. □

Proposition 89. *Pour tout $\mathcal{L}$ ample sur A et tout $n \geq 3$, $|\mathcal{L}^{\otimes n}|$ sépare les points et les vecteurs tangents, de sorte que*

$$\iota(\mathcal{L}^{\otimes n}) : A \hookrightarrow \mathbf{P}(H^0(A, \mathcal{L}^{\otimes n}))$$

est une immersion fermée.

Démonstration. On commence par choisir $D \in |\mathcal{L}|$ (qui existe d'après le point (2) de la proposition précédente). Soient x et y deux points de A, avec $x \neq y$. Choisissons $x_1 \in D - x$ tel que $x_1 \notin D - y$. Le complémentaire U de $D - y$ dans A est un ouvert non vide et donc dense dans A. Choisissons arbitrairement $x_2, \ldots, x_{n-2}$ dans U, puis un point

$$-x_n = (x_1 + \cdots + x_{n-2}) + x_{n-1} \quad \text{dans} \quad -U \cap (x_1 + \cdots + x_{n-2} + U)$$

avec donc x_{n-1} et x_n dans U. Alors $\sum \mathcal{T}_{x_i}^* D \in |\mathcal{L}^{\otimes n}|$ avec

$$x \in \mathcal{T}_{x_1}^* D = D - x_1 \qquad \text{et} \qquad \forall i : \quad y \notin \mathcal{T}_{x_i}^* D = D - x_i.$$

Le système linéaire $|\mathcal{L}^{\otimes n}|$ est donc sans point base et sépare les points. Pour montrer qu'il sépare les vecteurs tangents, il suffit par translation de montrer que pour tout vecteur tangent $t \neq 0$ en $0 \in A$, il existe $\mathcal{D} \in |\mathcal{L}^{\otimes n}|$ tel que $0 \in \mathcal{D}$ mais $t \notin T_0\mathcal{D}$. On suppose donc qu'il existe un vecteur $t \neq 0$ tel que $t \in T_0\mathcal{D}$ pour tout $\mathcal{D}$. Alors pour tout $x = x_1 \in D \in |\mathcal{L}|$, pour $x_2, \cdots, x_{n-2}$ choisis arbitrairement dans $U = A - D$ et pour tout x_{n-1} et x_n dans U choisis comme ci-dessus, on obtient $\sum \mathcal{T}_{x_i}^* D \in |\mathcal{L}^{\otimes n}|$ avec $0 = x_1 - x_1 \in \mathcal{T}_{x_1}^* D$ et $0 \notin \mathcal{T}_{x_i}^* D$ pour $i \geq 2$, donc $t \in T_0(\mathcal{T}_x^* D)$, i.e. $\mathcal{T}_x t \in T_x D$ pour tout $x \in D \in |\mathcal{L}|$. On en déduit que

$$t \in \mathbf{Lie}\,(\ker(\Lambda(\mathcal{L}))) = \ker\left(\mathbf{Lie}(\Lambda(\mathcal{L})) : \mathbf{Lie}(A) \to \mathbf{Lie}(A^t)\right)$$

On obtient ainsi directement une contradiction si $\mathbf{Lie}\,(\ker(\Lambda(\mathcal{L}))) = 0$, par exemple si $\ker(\Lambda(\mathcal{L})) = 0$ ou $\mathrm{car}(k) = 0$. Le cas général est plus difficile, voir [10, §17]. □

Remark 90. Les mêmes techniques permettent de démontrer que toute variété abélienne est projective : on construit d'abord une famille finie de diviseurs irréductibles $D_i \subset A$ telles que (1) $\cap D_i = \{0\}$ et (2) $\cap T_0(D_i) = 0$. On prend alors $\mathcal{L} = \mathcal{O}_A(\sum D_i)$, et on montre que $\mathcal{L}^{\otimes 3}$ vérifie (1), (2) et (3).

Example 91. Montrons comment tout cela marche lorsque $A = E$ est une courbe elliptique. On sait que $|2 \cdot 0|$ contient $D_x = (x) + (-x)$ pour tout $x \in E$. Donc si $x, y \in E$ avec $x \neq \pm y$, $x \in D_{\pm x}$ et $y \notin D_{\pm x}$: on en déduit que $|2 \cdot 0|$ est sans point base, et

$$\iota(2 \cdot 0) : E \to \mathbf{P}\left(H^0\left(E, \mathcal{O}_E(2 \cdot 0)\right)\right)$$

est un morphisme fini qui a pour fibres les couples $(x, -x)$, donc $\mathcal{L} = \mathcal{O}(0)$ est ample. Puisque $\dim_k H^0(E, \mathcal{L}) = 1$, l'isogénie $\Lambda(\mathcal{L}) : E \to E^t$ est un isomorphisme : E est auto-duale. On sait que $|3\cdot 0|$ contient $D_{x,y} = (x)+(y)+(-x-y)$. Donc si $x, y \in A$ avec $x \neq y$, on peut choisir $z \neq x, y, -x-y$. Alors $x \in D_{x,z}$ mais $y \notin D_{x,z}$, donc $|3\cdot 0|$ sépare les points. On montre de même que $|3\cdot 0|$ sépare les vecteurs tangents, donc $\iota(3\cdot 0)$ est un plongement projectif. Mais on peut faire mieux : on sait que $\dim_k H^0(E, \mathcal{L}^n) = n$ pour $n > 0$, et 1 pour $n = 0$ (d'après la remarque 86 et le calcul évident de $\mathcal{X}(\mathcal{L}) = 1$), et ces espaces vectoriels forment une suite croissante. Choisissons donc

$$\begin{array}{rrcl} & X & \in & H^0(E, \mathcal{O}_E(2\cdot 0)) - H^0(E, \mathcal{O}_E(1\cdot 0)), \\ \text{et} & Y & \in & H^0(E, \mathcal{O}_E(3\cdot 0)) - H^0(E, \mathcal{O}_E(2\cdot 0)). \end{array}$$

En considérant l'ordre du pole en 0, on voit que

$$\begin{array}{rcl} H^0(E, \mathcal{O}_E(1\cdot 0)) & = & k\cdot 1 \\ H^0(E, \mathcal{O}_E(2\cdot 0)) & = & k\cdot 1 \oplus k\cdot X \\ H^0(E, \mathcal{O}_E(3\cdot 0)) & = & k\cdot 1 \oplus k\cdot X \oplus k\cdot Y \\ H^0(E, \mathcal{O}_E(4\cdot 0)) & = & k\cdot 1 \oplus k\cdot X \oplus k\cdot Y \oplus k\cdot X^2 \\ H^0(E, \mathcal{O}_E(5\cdot 0)) & = & k\cdot 1 \oplus k\cdot X \oplus k\cdot Y \oplus k\cdot X^2 \oplus k\cdot XY \\ H^0(E, \mathcal{O}_E(6\cdot 0)) & = & k\cdot 1 \oplus k\cdot X \oplus k\cdot Y \oplus k\cdot X^2 \oplus k\cdot XY \oplus k\cdot \begin{cases} X^3 & \text{ou} \\ Y^2 \end{cases} \end{array}$$

d'où l'on déduit que $Y^2 = aX^3 + bXY + cX + dY + e$ avec $a, b, c, d, e \in k$, $a \neq 0$. Utilisant la base $(X, Y, 1)$ de $H^0(E, \mathcal{O}_E(3\cdot 0)) = H$ pour identifier $\mathbf{P}(H) \simeq \mathbf{P}^2$, on voit que l'image du plongement $\iota(3\cdot 0) : E \hookrightarrow \mathbf{P}(H) \simeq \mathbf{P}^2$ est la courbe elliptique (plongée) définie par cette équation de Weierstrass.

10.8. **Preuves sur S quelconque.** Soit A un schéma abélien sur S. Tous les énoncés sont locaux sur S, que l'on peut donc supposer affine, et même noethérien, et tel que A se plonge dans un $\mathbf{P}^N_S$. Le théorème 73 résulte immédiatement des résultats ci-dessus, d'après le yoga du changement de base. De même, $\mathbf{Pic}^0_{A/S} = \ker\Lambda$: c'est donc un sous-schéma ouvert et fermé de $\mathbf{Pic}_{A/S}$. Pour tout $s \in S$,

$$(\mathbf{Pic}^0_{A/S})_s = \mathbf{Pic}^0_{A_s/s}$$

est connexe, donc contenu dans un unique sous-schéma ouvert et fermé $\mathbf{Pic}^\phi_{A_s/s}$ de $\mathbf{Pic}_{A_s/s}$, à savoir celui pour lequel $\phi = \phi(A_s)$. Puisque $s \mapsto \phi(A_s)$ est localement constant sur S qui est quasi-compact, $\mathbf{Pic}^0_{A/S}$ est donc entièrement contenu dans la réunion (disjointe) d'un nombre fini de certains $\mathbf{Pic}^\phi_{A/S}$. Ces derniers étant de type fini sur S, il en est de même de $\mathbf{Pic}^0_{A/S}$. Puisque $\mathbf{Pic}^0_{A/S}$ est fermé dans $\mathbf{Pic}_{A/S}$, $\mathbf{Pic}^0_{A/S}$ vérifie le critère valuatif de propreté local : c'est donc un S-schéma en groupes propre sur S, dont on sait déjà que les fibres sont lisses et géométriquement connexes. Choisissons un faisceau inversible et S-ample sur A, par exemple celui qui est induit par le plongement $A \hookrightarrow \mathbf{P}^N_S$. Alors $\Lambda(\mathcal{L}) : A \to \mathbf{Pic}_{A/S}$ induit un morphisme surjectif $\Lambda(\mathcal{L}) : A \to \mathbf{Pic}^0_{A/S}$ qui est une isogénie fibre à fibre, et en particulier plat par fibres. Il résulte alors de [1, IV, 11.3.11] que $\mathbf{Pic}^0_{A/S}$ est plat sur S, donc aussi lisse d'après [1, IV, 17.5.1] : c'est donc bien un S-schéma abélien.

Cinquième partie 5. Le schéma de Siegel/Mumford

11. Le théorème de Mumford

Soit A/S un schéma abélien. Une *structure de niveau* n sur A est un isomorphisme κ du S-schéma en groupes constant $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})_S^{2g}$ sur le S-schéma en groupes $A[n]$. Une *polarisation* de degré d^2 est une isogénie $\lambda : A \to A^t$ de degré d^2 (il faut donc que A^t/S existe) telle que pour tout point géométrique s de S, λ_s est de la forme $\Lambda(\mathcal{L}_s)$ pour un faisceau inversible ample sur $\mathcal{L}_s$.

Theorem 92. *Soit $g, d, N > 0$ des entiers. On considère le foncteur $\mathbf{M}_{d,n}^g$*

$$(\mathbf{Sch}/\mathbb{Z})^0 \to \mathbf{Ens} : \quad S \mapsto \left\{ (A,\kappa,\lambda) \;\middle|\; \begin{array}{c} A/S \text{ schéma abélien de dim } g \\ \kappa : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})_S^{2g} \simeq A[n] \text{ struct. niv. } n \\ \lambda : A \to A^t \text{ polarisation de deg } d^2 \end{array} \right\} / \sim$$

Si $n \geq 3$, ce foncteur est représentable par un $\mathbb{Z}$-schéma que l'on note $\mathbf{M}_{d,n}^g$.

Remark 93. Ce schéma n'a pas de points en caractéristique $p \mid n$: le schéma ainsi obtenu est donc en fait un $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$-schéma !

12. Rigidification

12.1. **Analyse.** Soit S un schéma, A/S un schéma abélien projectif et $\lambda : A \to A^t$ un morphisme de schémas en groupes. Le composé du morphisme $\lambda : A \to A^t$ avec l'inclusion $A^t = \mathbf{Pic}^0_{A/S} \hookrightarrow \mathbf{Pic}_{A/S}$ est un A-point du S-schéma $\mathbf{Pic}_{A/S}$, et correspond donc à un faisceau inversible normalisé $\mathcal{P}(\lambda)$ sur $A = A \times_S A$ (normalisé par $\mathcal{P}(\lambda)|e_A(S) \times_S A \simeq \mathcal{O}_A$). C'est le pull-back du faisceau de Poincaré $\mathcal{P}$ par

$$(Id, \lambda) : A \times_S A \to A \times_S A^t.$$

L'image inverse de $\mathcal{P}(\lambda)$ par la diagonale $\Delta : A \to A \times_S A$ est un faisceau inversible $L(\lambda) = \Delta^* \mathcal{P}(\lambda)$ sur A vérifiant $e_A^* L(\lambda) \simeq \mathcal{O}_S$. Ce faisceau inversible définit donc un morphisme $\Lambda(L(\lambda)) : A \to A^t$ de S-schéma en groupes. En faisceautisant cette construction, on obtient un diagramme :

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{Gr}(A, A^t) \xrightarrow{L} \mathbf{Pic}_{A/S} \xrightarrow{\Lambda} \underline{\mathrm{Hom}}_{Gr}(A, A^t).$$

Proposition 94. *On a $2\Lambda = \Lambda \circ L \circ \Lambda$.*

Démonstration. Il faut montrer que $2\Lambda(x) = \Lambda \circ L \circ \Lambda(x)$ pour tout S-schéma T et tout $x \in \mathbf{Pic}_{A/S}(T)$. Par changement de base, on se ramène au cas où $S = T$, et on peut supposer que x est représenté par un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur A, normalisé par $e_A^* \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_A$. Soit $\lambda = \Lambda(\mathcal{L})$. Alors $\mathcal{P}(\lambda) = m^* \mathcal{L} \otimes p_1^* \mathcal{L}^{-1} \otimes p_2^* \mathcal{L}^{-1}$, donc

$$L(\lambda) = [2]^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-2}.$$

Mais $\Lambda([2]^* \mathcal{L}) = 4\Lambda(\mathcal{L}) = 4\lambda$ et $\Lambda(\mathcal{L}^2) = 2\Lambda(\mathcal{L}) = 2\lambda$, donc $\Lambda(L(\lambda)) = 2\lambda$. □

Corollary 95. *Si $\lambda : A \to A^t$ est une polarisation de degré d^2, alors* (0) $\Lambda(L(\lambda)) = 2\lambda$, (1) *$L(\lambda)$ est S-ample,* (2) *le $\mathcal{O}_S$-module $\mathcal{E}(\lambda) = f_*(L(\lambda)^{\otimes 3})$ est localement libre de rang $6^g d$, et* (3) *le morphisme canonique $f^*\mathcal{E}(\lambda) \to L(\lambda)^{\otimes 3}$ est surjectif et il induit une immersion fermée $\iota(\lambda) : A \hookrightarrow \mathbf{P}(\mathcal{E}(\lambda))$.*

Démonstration. Pour (0), il suffit (par rigidité) de le vérifier en un point géométrique s de chaque composante connexe de S, ou cela résulte du fait que par hypothèse, $\lambda_s = \Lambda(\mathcal{L}_s)$ pour un faisceau inversible ample $\mathcal{L}_s$ sur A. Donc

$$2\lambda_s = 2\Lambda(\mathcal{L}_s) = \Lambda \circ L \circ \Lambda(\mathcal{L}_s) = \Lambda(L(\lambda_s)).$$

Pour (1) : En utilisant [1, IV, 9.6.4] (qui dit que l'amplitude peut se vérifier sur les fibres), et [1, IV, 2.7.2] (qui dit que l'amplitude descend par les morphismes fidèlement plats), on est à nouveau ramené au cas des points géométriques s de S comme ci-dessus, où $\lambda_s = \Lambda(\mathcal{L}_s)$, donc $L(\lambda_s) = [2]^*\mathcal{L}_s \otimes \mathcal{L}_s^{-2}$, avec $[2]^*\mathcal{L}_s \sim \mathcal{L}_s^4$. Or on sait aussi que $\Lambda(\mathcal{L}_s^2)$ est surjective, de sorte qu'il existe $x \in A_s$ (ou plutôt $A(s)$) tel que $\mathcal{T}_x^*\mathcal{L}_s^2 \otimes \mathcal{L}_s^{-2} \simeq [2]^*\mathcal{L}_s \otimes \mathcal{L}_s^{-4}$, donc $L(\lambda_s) \simeq \mathcal{T}_x^*\mathcal{L}_s^2$, qui est bien ample. Donc $L(\lambda)^{\otimes n}$ est ample pour tout $n \geq 1$, $R^i f_*(L(\lambda)^{\otimes n}) = 0$ pour tout $i, n \geq 1$, et $f_*(L(\lambda)^{\otimes n})$ est localement libre de formation compatible avec le changement de base. Soit d_n son degré. Alors $\Lambda(L(\lambda)^{\otimes n}) = n\Lambda(L(\lambda)) = 2n\lambda$ est de degré $(2n)^{2g}d^2 = d_n^2$, donc $d_n = (2n)^g d$. De plus, $L(\lambda)^{\otimes n}$ est très ample si $n \geq 3$, i.e. est engendré par ses sections globales et induit une immersion fermée

$$\iota(L(\lambda)^{\otimes n}) : A \hookrightarrow \mathbf{P}(f_*(L(\lambda))^{\otimes n}).$$

On conclut avec $n = 3$. $\square$

Definition 96. Une rigidification de (A, λ) est un S-isomorphisme

$$\theta : \mathbf{P}(\mathcal{E}(\lambda)) \simeq \mathbf{P}_S^N$$

où $N = 6^g d - 1$. On note $\iota(\lambda, \theta) = \theta \circ \iota(\lambda)$ le plongement correspondant :

$$\iota(\lambda, \theta) : A \hookrightarrow \mathbf{P}_S^N.$$

On obtient ainsi un sous-schéma fermé de $\mathbf{P}_S^N$ qui est plat sur S, i.e. un S-point $\iota(A, \lambda, \phi)$ du S-schéma de Hilbert $\mathbf{Hilb}_{\mathbf{P}_S^N/S}$. Son polynome de Hilbert est

$$\phi(s, r) = \sum_{i=0}^{g} (-1)^i \dim H^i \left(A_s, \iota(\lambda, \theta)^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_s^N}(r)\right).$$

Notons que sur $\mathbf{P}(\mathcal{E}(\lambda))$, on a maintenant deux quotients remarquables :

$$f^*\mathcal{E}(\lambda) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E}(\lambda))}(1) \quad \text{et} \quad \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E}(\lambda))}^{N+1} \twoheadrightarrow \theta^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_S^N}(1)).$$

On sait d'autre part que : si S est connexe, tous les faisceaux inversibles sur $\mathbf{P}_S^N$ sont de la forme $\mathcal{O}_{\mathbf{P}_S^N}(r) \otimes f^*\mathcal{L}$ pour un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur S, cf. [11, Lecture 13]. Cet énoncé est d'ailleurs équivalent à $\mathbf{Pic}_{\mathbf{P}_S^N/S} \simeq \mathbf{Z}_S$, et on peut déjà noter avec les techniques dont on dispose qu'effectivement

$$\mathbf{Lie}\left(\mathbf{Pic}_{\mathbf{P}_S^N/S}\right) = R^1 f_* \mathcal{O}_S = 0$$

d'après 63 et 34. On en déduit facilement que $\theta^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_S^N}(1)) \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(1) \otimes f^*\mathcal{L}$ pour un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur S. Le pull-back par $\iota(\lambda) : A \to \mathbf{P}(\mathcal{E})$ donne

$$\iota(\lambda, \theta)^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_S^N}(1)) \simeq L(\lambda)^{\otimes 3} \otimes f^*\mathcal{L} \quad \text{dans } \mathbf{Pic}(A)$$

et en prenant le pull-back par la section $e_A : S \to A$, on trouve finalement

$$e(\lambda, \theta)^*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}_S^N}(1)) \simeq \mathcal{L} \quad \text{dans } \mathbf{Pic}(S)$$

où $e(\lambda,\theta) = \iota(\lambda,\theta)\circ e_A$. Dans tous les cas, on a donc (pour $r \geq 1$)

$$\phi(s,r) = \sum_{i=0}^{g} (-1)^i \dim_{k(s)} H^i\left(A_s, L(\lambda_s)^{\otimes 3r}\right) = \dim_{k(s)} H^0\left(A_s, L(\lambda_s)^{\otimes 3r}\right)$$

Mais $(\dim_{k(s)} H^0(A_s, L(\lambda_s)^{\otimes 3r}))^2 = \deg \Lambda(L(\lambda_s)^{\otimes 3r}) = \deg 6r\lambda = (6r)^{2g}d^2$, donc

$$\phi(s,r) \equiv \phi(r) \quad \text{où} \quad \phi(X) = 6^g d \cdot X^g.$$

Donc $\iota(A,\lambda,\theta) \in \mathbf{Hilb}^{\phi}_{\mathbf{P}^N_S/S}(S)$.

12.2. **Le foncteur de Mumford rigidifié.** Les considérations précédentes permettent de définir, pour tout $g,d,n \geq 1$, un foncteur de Mumford *rigidifié*,

$$\mathbf{RM}^g_{d,n} : \mathbf{Sch}^0 \to \mathbf{Ens} : \quad S \mapsto \left\{ (A,\kappa,\lambda,\theta) \;\middle|\; \begin{array}{c} A/S \text{ schéma abélien de dim } g \\ \kappa : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g}_S \simeq A[n] \text{ struct. niv. } n \\ \lambda : A \to A^t \text{ polarisation de deg } d^2 \\ \theta : \mathbf{P}(\mathcal{E}(\lambda)) \simeq \mathbf{P}^N_S \text{ rigidification} \end{array} \right\} / \sim$$

avec $N = 6^g d - 1$. Posant $\phi(X) = 6^g d \cdot X^g$, on dispose alors de morphismes

$$\mathbf{M}^g_{d,n} \longleftarrow \mathbf{RM}^g_{d,n} \longrightarrow \mathbf{RM}^g_{d,1} = \mathbf{RM}^g_d \xrightarrow{\iota} \mathbf{Hilb}^{\phi}_{\mathbf{P}^N}$$

où les flèches sont respectivement l'oubli de la rigidification θ, l'oubli de la structure de niveau κ, et la dernière $(A,\lambda,\theta) \mapsto \iota(A,\lambda,\theta) = \iota(\lambda,\theta)(A) \subset \mathbf{P}^N_S$.

Lemma 97. $\mathbf{RM}^g_d \to \mathbf{Hilb}^{\phi}_{\mathbf{P}^N}$ *est relativement représentable.*

Corollary 98. $\mathbf{RM}^g_d$ *est représentable.*

Démonstration. (du lemme) Il est utile de décomposer ce morphisme en deux, en introduisant d'une part

$$\mathbf{Hilb}^{\phi,1}_{\mathbf{P}^N} : \mathbf{Sch}^0 \to \mathbf{Ens} \qquad S \mapsto \left\{(Z,e) : Z \in \mathbf{Hilb}^{\phi}_{\mathbf{P}^N}(S) \text{ et } e : S \to Z \text{ section}\right\}$$

et les morphisme $\iota'(A,\lambda,\theta) = \iota(\lambda,\theta)(A,e_A)$, $(Z,e) \mapsto Z$, de sorte que

$$\left(\mathbf{RM}^g_d \xrightarrow{\iota} \mathbf{Hilb}^{\phi}_{\mathbf{P}^N}\right) = \left(\mathbf{RM}^g_d \xrightarrow{\iota'} \mathbf{Hilb}^{\phi,1}_{\mathbf{P}^N} \to \mathbf{Hilb}^{\phi}_{\mathbf{P}^N}\right)$$

Le morphisme $\mathbf{Hilb}^{\phi,1}_{\mathbf{P}^N} \to \mathbf{Hilb}^{\phi}_{\mathbf{P}^N}$ est relativement représentable : c'est une tautologie. Plus précisément, $\mathbf{Hilb}^{\phi,1}_{\mathbf{P}^N}$ est représentable par le sous-schéma fermé plat universel de $\mathbf{P}^N \times \mathbf{Hilb}^{\phi}_{\mathbf{P}^N}$. Pour ce qui concerne $\iota' : \mathbf{RM}^g_d \to \mathbf{Hilb}^{\phi,1}_{\mathbf{P}^N}$, j'affirme tout d'abord que c'est un monomorphisme. En effet, (pour tout schéma S), si l'on connaît (1) le plongement $\iota : A \hookrightarrow \mathbf{P}^N_S$ et (2) la section neutre $e_A : S \to A$, on peut successivement reconstruire : (a) la structure de S-schéma en groupes sur A, puisqu'elle est déterminée uniquement par e_A, (b) le faisceau inversible

$$L(\lambda)^{\otimes 3} = \iota^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N_S}(1) \otimes f^*\mathcal{L} \qquad \mathcal{L} = e^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N_S}(-1)$$

donc aussi (c) le morphisme $6\lambda = \Lambda(L(\lambda)^{\otimes 3})$ et la polarisation $\lambda : A \to A^t$, puisque $\mathrm{Hom}_{S-Gr}(A,A^t)$ est sans torsion et (d) le faisceau inversible $\mathcal{E}(\lambda) = f_*(L(\lambda)^{\otimes 3})$ sur S. Mais on a aussi : (e) l'épimorphisme $\mathcal{O}_A^{N+1} \twoheadrightarrow \iota^*\mathcal{O}_{\mathbf{P}^N_S}(1)$, que l'on peut tordre par $f^*\mathcal{L}$ pour obtenir $f^*\mathcal{L}^{N+1} \twoheadrightarrow L(\lambda)^{\otimes 3}$, puis pousser sur S pour obtenir

$$\mathcal{L}^{N+1} \to f_*f^*\mathcal{L}^{N+1} \to \mathcal{E}(\lambda) = f_*\left(L(\lambda)^{\otimes 3}\right),$$

un morphisme auquel on peut enfin (f) appliquer $\mathbf{P}$ pour retrouver notre

$$\theta : \mathbf{P}(\mathcal{E}(\lambda)) \to \mathbf{P}(\mathcal{L}^{N+1}) \simeq \mathbf{P}^N.$$

On va maintenant définir des sous-foncteurs intermédiaires

$$\mathbf{RM}_d^g = \mathbf{H}_5 \hookrightarrow \mathbf{H}_4 \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathbf{H}_1 \hookrightarrow \mathbf{H}_0 = \mathbf{Hilb}_{\mathbf{P}^N}^{\phi,1}$$

et montrer que chaque étape est relativement représentable.

1: $\mathbf{H}_1(S) = \{(X,e) \in \mathbf{H}_0(S) | f : X \to S$ est propre et **lisse**$\}$.

Soit $(X,e) \in \mathbf{H}_0(S)$ et $S' = S - f(X - U)$ où U est l'ouvert de X des points où f est lisse. Alors S' est ouvert dans S car f est propre donc fermé et f est lisse sur S'. Si $T \to S$ et $f_T : X_T \to T$ est lisse, alors pour tout point t de T sur s de S, $f_t : X_t \to t$ est lisse, donc $f_s : X_s \to s$ est lisse (d'après [1, IV, 17.7.1] pour faire court), donc $f : X \to S$ est lisse aux points de X_s (d'après [1, IV, 17.5.1]), donc $X_s \subset U$, $s \in S'$ et $T \to S$ se factorise par S'. Le morphisme $\mathbf{H}_1 \hookrightarrow \mathbf{H}_0$ est donc représentable par des immersions ouvertes.

2: $\mathbf{H}_2(S) = \{(X,e) \in \mathbf{H}_1(S) | f : X \to S$ est propre, lisse et **géo. connexe**$\}$.

Soit $(X,e) \in \mathbf{H}_1(S)$. La fonction $s \mapsto c(s) = \dim_{k(s)} H^0(X_s, \mathcal{O}_{X_s})$ est semi-continue du bon côté d'après le yoga du changement de base, donc $S' = c^{-1}(1)$ est ouvert dans S. Les fibres de f sont connexes (et lisses) donc géométriquement connexes au-dessus de S'. Si $T \to S$ et $f_T : X_T \to T$ est à fibres géométriquement connexes, alors $c(t) = 1$ pour tout t de T, donc $c(s) = 1$ pour tout s dans l'image de $T \to S$, i.e. $T \to S$ se factorise par S'. Le morphisme $\mathbf{H}_2 \hookrightarrow \mathbf{H}_1$ est donc représentable par des immersions ouvertes.

3: $\mathbf{H}_3(S) = \{(X,e) \in \mathbf{H}_2(S) | X/S$ est un **schéma abélien** de neutre $e\}$.

Soit $(X,e) \in \mathbf{H}_2(S)$. Soit H le S-schéma universel pour l'existence de morphismes $m : X \times_S X \to X$ et $i : X \to X$ et $m_H : X_H \times_H X_H \to X_H$, $i_H : X_H \to X_H$ les morphismes universels. Les conditions qui expriment le fait que m_H est une loi de groupe sur X_H de neutre e_H et d'inverse i_H s'expriment par la commutativité de certains diagrammes de morphismes de S-schémas propres et plats construits à partir de m_H, i_H et e_H, et sont donc représentables par des sous-schémas de coincidences de sections des H-schémas qui représentent ces types de morphismes. Considérons par exemple le H-schéma H' qui est universel pour l'existence de morphismes $X_H \to X_H$. Les deux morphismes $x \mapsto m(x, i(x))$ et $x \mapsto e$ définissent des sections $H \to H'$, et le sous-schéma des coincidences de ces deux sections représente la condition "i est un inverse à droite pour m". Le morphisme $\mathbf{H}_3 \to \mathbf{H}_2$ est donc relativement représentable.

Pour $(\iota : A \hookrightarrow \mathbf{P}_S^N) \in \mathbf{H}_3(S)$, on pose $\mathcal{M} = \iota^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_S^N}(1)$ et $\mathcal{L} = e^* \mathcal{O}_{\mathbf{P}_S^N}(-1)$.

4: $\mathbf{H}_4(S) = \{(A, \lambda : A \to A^t) | A \in \mathbf{H}_3(S)$ et $L(\lambda)^{\otimes 3} \simeq \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}\}$.

Soit $A \in \mathbf{H}_3(S)$. Soit H le schéma universel pour les morphismes $\lambda : A \to A^t$. Sur A_H, on a maintenant deux faisceaux inversibles normalisés, à savoir $L(\lambda)^{\otimes 3}$ et $\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}$. Ils donnent deux sections $H \to \mathbf{Pic}_{A/S}$. Le sous-schéma des coincidences de ces deux sections représente la fibre de $\mathbf{H}_4 \to \mathbf{H}_3$ sur A.

5: $\mathbf{H}_5(S) = \{(A, \lambda, \theta) | (A, \lambda) \in \mathbf{H}_4(S),\ \theta : \mathbf{P}(\mathcal{E}(\lambda)) \simeq \mathbf{P}_S^N$ t.q. $\iota(\lambda, \theta) = \iota\}$

Soit $(A, \lambda) \in \mathbf{H}_4(S)$. Soit H le S-schéma universel pour l'existence de

$$\theta : \mathbf{P}(\mathcal{E}(\lambda)) \to \mathbf{P}_S^N \quad \text{et} \quad \theta' : \mathbf{P}_S^N \to \mathbf{P}(\mathcal{E}(\lambda)).$$

Soit H' le sous-schéma de H où $\theta \circ \theta' = Id$ et $\theta' \circ \theta = Id$ (c'est un schéma de coincidence). Soit H'' le sous-schéma de H' où $\theta \circ \iota(\lambda) : A \to \mathbf{P}^N_{H'}$ est le plongement de départ (c'est encore un schéma de coincidence). Alors H'' représente la fibre de $\mathbf{H}_5 \to \mathbf{H}_4$ sur (A, λ). CQFD. □

Lemma 99. *Le morphisme* $\mathbf{RM}^g_{d,n} \to \mathbf{RM}^g_d$ *est relativement représentable.*

Corollary 100. $\mathbf{RM}^g_{d,n}$ *est représentable.*

Démonstration. (du lemme) Soit $(A, \lambda, \theta) \in \mathbf{RM}^g_d(S)$, H le schéma universel pour les morphismes $\kappa : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \to A_H[n]$ et κ' dans l'autre sens, H' le sous-schéma de H où $\theta\theta' = Id$ et $\theta'\theta = Id$. Alors H' représente la fibre de $\mathbf{RM}^g_{d,n} \to \mathbf{RM}^g_d$ sur (A, λ, θ). On peut aussi partir de $H = A[n]^{2g}$ et découper dedans l'ouvert $A[n]^{2g\times}$ des $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-générateurs. □

13. Le morphisme $\mathbf{RM}^g_{d,n} \to \mathbf{M}^g_{d,n}$

C'est la partie la plus difficile de la construction : on sait que $\mathbf{RM}^g_{d,n}$ est représentable (pour tout n), et il faut maintenant descendre cette représentabilité à $\mathbf{M}^g_{d,n}$ (pour $n \geq 3$). Il faut donc se débarrasser du choix de l'isomorphisme $\theta : \mathbf{P}(\mathcal{E}(\lambda)) \to \mathbf{P}^N_S$: on le fait en divisant par le groupe des automorphismes $\mathbf{PGL}_{N+1,S}$ de $\mathbf{P}^N_S$. Les notes ci-dessus donnent quelques informations rudimentaires sur cette construction de Mumford, qui lui valut la médaille Fields. Pour plus de détails, il faut lire [12] !

13.1. **Fibrés principaux.** Soit S un schéma que l'on supposera noethérien, G un S-schéma en groupe plat et de type fini sur S, X un S-schéma sur lequel G agit par $\rho : G \times_S X \to X$. On dit que X est un G-fibré principal de base $\overline{X}$ si et seulement si $p : X \to \overline{X}$ est un S-morphisme fidèlement plat et quasi-compact tel que $(g, x) \mapsto (g \cdot x, x)$ induit un S-isomorphisme $G \times_S X \simeq X \times_{\overline{X}} X$.

Prenons pour G le groupe des automorphismes $G = PGL(V)$ des automorphismes de $\mathbf{P}(V)$ où V est un $\mathcal{O}_S$-module libre de rang $N+1$ (donc $\mathbf{P}(V) \simeq \mathbf{P}^{N+1}_S$ et $G = PGL_{N+1,S}$), et faisons agir G diagonalement sur $X = (\mathbf{P}(V))^r$. Si r est trop petit, tous les points de X ont un stabilisateur non-trivial dans G, donc X n'est pas un G-fibré principal. Si r est suffisamment grand, en revanche, il y a un ouvert X_{reg} de X qui est essentiellement défini par la condition suivante : $(D_1, \cdots, D_r) \in X_{reg}(T)$ si et seulement si pour toute décomposition $V_1 \oplus V_2 = V_T$ telle que pour tout i, $D_i \subset V_1$ ou $D_i \subset V_2$, alors $V_1 = 0$ ou $V_2 = 0$. Les points géométriques de X_{reg} sont les points dont le stabilisateur dans G est trivial, ce qui signifie que X_{reg} est le plus gros sous-espace de X qui a quelque chance d'être un G-fibré principal. En utilisant la définition ci-dessus, Mumford parvient à recouvrir X_{reg} par des ouverts affines stables sous G dont il montre que ce sont bien des G-fibrés principaux (de base affine). On en déduit par recollement que X_{reg} est bien un G-fibré principal, mais la base $\overline{X}_{reg}$ de ce fibré n'est pas séparée ! Mumford définit alors un ouvert X_{st} de X_{reg}, dont il montre qu'il est G-stable, et un G-fibré principal *de base quasi-projective sur* S [12, Chapter 3]. La définition de la *condition de stabilité* qui définit cet ouvert stable est l'un des apports essentiels de Mumford.

13.2. **La technique de Mumford.** La technique de Mumford pour démontrer la représentabilité de $\mathbf{RM}^g_{d,n}$ lorsque $n \gg 0$ repose sur les deux propositions suivantes.

Proposition 101. *S'il existe un morphisme de schémas $\pi : \mathbf{RM}^g_{d,n} \to X$ qui fait de $\mathbf{RM}^g_{d,n}$ un $\mathbf{PGL}_{N+1}$-fibré principal, avec X quasi-projectif sur* $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$. *Alors*

(1) *les données universelles $(RA_u, R\lambda_u, R\kappa_u)$ sur $\mathbf{RM}^g_{d,n}$ descendent à X et*

(2) *les données descendues $(A_u, \lambda_u, \kappa_u)$ font de X un schéma qui représente $\mathbf{M}^g_{d,n}$.*

Démonstration. Admettons (1), qui relève des techniques de descente : on veut descendre les données universelles $(RA_u, R\lambda_u, R\kappa_u)$ le long du morphisme fidèlement plat et quasi-compact $\mathbf{RM}^g_{d,n} \to X$. Les données de recollement proviennent de l'action de $G = \mathbf{PGL}_{N+1}$ sur $\mathbf{RM}^g_{d,n}$, RA_u etc, cf. [12, Proposition 7.6]... Montrons (2). On commence par :

(2a) Si $(A, \lambda, \kappa, \theta) \in \mathbf{RM}^g_{d,n}(S)$, alors $\mathbf{Aut}_S(A, \lambda, \kappa, \theta) = \{1\}$. En effet, de tels automorphismes sont dans le groupe $\mathbf{Aut}_S(A)$ et doivent préserver le plongement $\iota(\lambda, \theta) : A \hookrightarrow \mathbf{P}^N_S$ (ainsi d'ailleurs que toutes les sections de κ).

(2b) Si $(A, \lambda, \kappa, \theta) \in \mathbf{RM}^g_{d,n}(S)$, alors $\mathbf{Aut}_S(A, \lambda, \kappa) = \{1\}$. En effet, soit γ un tel automorphisme. Alors $\gamma(A, \lambda, \kappa, \theta) = (A, \lambda, \kappa, g\theta)$ pour un automorphisme $g \in \mathbf{PGL}_{N+1}(S)$ de $\mathbf{P}^N_S$. Donc $(A, \lambda, \kappa, g\theta) \simeq (A, \lambda, \kappa, \theta)$ dans $\mathbf{RM}^g_{d,n}(S)$, i.e. $g \cdot (A, \lambda, \kappa, \theta) = (A, \lambda, \kappa, \theta)$ pour l'action de $\mathbf{PGL}_{N+1}(S)$ sur $\mathbf{RM}^g_{d,n}(S)$. Mais alors $g = 1$ (puisque l'action est libre par hypothèse) donc $g\theta = \theta$ et $\gamma \in \mathbf{Aut}_S(A, \lambda, \kappa, \theta)$, donc $\gamma = 1$.

(2c) Si $(A, \lambda, \kappa) \in \mathbf{M}^g_{d,n}(S)$, il existe au plus un morphisme $f : S \to X$ et au plus un isomorphisme $F : (A, \lambda, \kappa) \to f^*(A_u, \lambda_u, \kappa_u)$. En effet, soit (f_1, F_1) et (f_2, F_2) deux telles paires. Supposons d'abord que les f_i se factorisent par $g_i : S \to \mathbf{RM}^g_{d,n}$. Alors les deux $g_i^*(RA_u, R\lambda_u, R\kappa_u, R\theta_u)$ sont isomorphes au θ-près, i.e. les deux g_i sont conjugués par un élément de $\mathbf{PGL}_{N+1}(S)$, donc les deux $f_i = \pi \circ g_i$ sont égaux, disons à f, et $F_1 = F_2 : (A, \lambda, \kappa) \to f^*(A_u, \lambda_u, \kappa_u)$ par 2c. Dans le cas général, on note que $\pi : \mathbf{RM}^g_{d,n} \to X$ admet des sections après un changement de base fidèlement plat et quasi-compact, par exemple par π lui-même. Donc $(f_1, F_1) = (f_2, F_2)$ après un tel changement de base, et $(f_1, F_1) = (f_2, F_2)$ par descente.

(2d) Si $(A, \lambda, \kappa) \in \mathbf{M}^g_{d,n}(S)$, il existe un unique morphisme $f : S \to X$ et un unique isomorphisme $F : (A, \lambda, \kappa) \to f^*(A_u, \lambda_u, \kappa_u)$. En effet, on montre l'existence localement en recouvrant S par des ouverts S_i qui trivialisent $\mathcal{E}(\lambda)$, et le choix sur chaque S_i d'une telle trivialisation $\mathcal{E}(\lambda)|S_i \simeq \mathcal{O}^{N+1}_{S_i}$ fournit un relèvement local $(A|S_i, \lambda|S_i, \kappa|S_i, \theta_i) \in \mathbf{RM}^g_{d,n}(S_i)$, donc un g_i, F_i puis un $(f_i = \pi \circ g_i, F_i)$ comme ci-dessus. L'unicité de (2c) permet de tout recoller.

A fortiori : si $(A, \lambda, \kappa) \in \mathbf{M}^g_{d,n}(S)$, il existe un unique morphisme $f : S \to X$ tel que $(A, \lambda, \kappa) \simeq f^*(A_u, \lambda_u, \kappa_u)$, i.e. X représente $\mathbf{M}^g_{d,n}$. □

Proposition 102. *Soient S un schéma noethérien, X, Y des S-schémas de type fini muni d'une action d'un même S-schéma en groupe G, plat et de type fini sur S, $\phi : X \to Y$ un G-morphisme de S-schémas. On suppose que :* (1) *Y est un G-fibré principal de base $\overline{Y}$ quasi-projective sur S,* (2) *X admet un faisceau inversible $\mathcal{L} \in \mathbf{Pic}^G X$ qui est ample sur Y. Alors X est un G-fibré principal de base $\overline{X}$ quasi-projective sur S.*

Démonstration. [12, Proposition 7.1] On veut descendre le Y schéma X en un $\overline{Y}$-schéma $\overline{X}$, i.e. on veut faire de la descente relativement au morphisme fpqc $Y \to \overline{Y}$. Il nous faut pour cela une donnée de recollement sur ce Y-schéma X, c'est-à-dire un isomorphisme entre $p_1^\star X$ et $p_2^\star X$, où $p_i : Y \times_{\overline{Y}} Y \to Y$ sont les deux projections. Or le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} G\times_S X & \rightrightarrows & X & \cdots & ?\overline{X}? \\ \downarrow & & \downarrow & & \vdots \\ G\times_S Y & \rightrightarrows & Y & \to & \overline{Y} \end{array}$$

où les flèches $\Rightarrow$ sont l'action et la seconde projection *est* une telle donnée de recollement, puisque $G\times_S Y \simeq Y\times_{\overline{Y}} Y$ et que les deux carrés donnés par les flèches doubles sont cartésiens. On vérifie que cette donnée de recollement est une donnée de descente. L'hypothèse (2) permet alors de descendre simultanément la paire $(X,\mathcal{L})$ en une paire $(\overline{X},\overline{\mathcal{L}})$ qui vérifie toutes les propriétés requises. □

On veut appliquer cette proposition à $G = \mathbf{PGL}_{N+1} = \mathbf{Aut}(\mathbf{P}^N)$ agissant sur $X = \mathbf{RM}^g_{d,n}$. On prend d'abord $Y = (\mathbf{P}^N)^{n^{2g}}$ avec l'action diagonale de G, et pour ϕ le morphisme défini par les n^{2g}-sections de la structure de niveau :

$$(A,\lambda,\kappa,\theta)\in \mathbf{RM}^g_{d,n}(S) \longmapsto \textstyle\prod_{x\in(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^{2g}} \iota(\lambda,\theta)(\kappa(x)) \in Y_1(S) = (\mathbf{P}^N)^{n^{2g}}(S).$$

Ce morphisme est évidemment G-linéaire. Mumford montre que *pour* $n \gg 0$ ce morphisme atterrit dans l'ouvert $Y_{st}\subset Y_{reg}$ de Y [12, Proposition 7.7], qui vérifie bien les hypothèses de l'énoncé (il faut encore dire ce que l'on prend pour faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur $\mathbf{RM}^g_{d,n}$, et comment on définit dessus des données de recollement, cf. [12, Proposition 7.4]).

13.3. **Conclusion.** Au final, les techniques ci-dessus permettent de montrer que $\mathbf{M}^g_{d,n}$ est représentable pour $n\gg 0$, plus précisément pour $n > 6^g d\sqrt{g!}$, cf. [12, Theorem 7.9]. Pour conclure, il faut choisir des entiers k auxiliaires et travailler avec le morphisme $\mathbf{M}^g_{d,nk}\to \mathbf{M}^g_{d,n}$ au-dessus de $\mathbb{Z}[\frac{1}{nk}]$. Pour $k\gg 0$, $\mathbf{M}^g_{d,nk}$ est représentable, et la représentabilité de $\mathbf{M}^g_{d,n}$ s'en déduit en quotient par l'action du groupe fini, constant

$$\ker\left(\mathbf{GL}(2g,\mathbb{Z}/nk\mathbb{Z})\to \mathbf{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\right).$$

(Ce passage au quotient n'est pas trop difficile à analyser). On obtient ainsi la représentabilité de $\mathbf{M}^g_{d,n}$ pour $n\geq 3$, mais seulement au dessus de $\mathbb{Z}[\frac{1}{nk}]$. Il reste à recoller ces modèles en choisissant $k_1,k_2\gg 0$ avec $(k_1,k_2)=1$!

Sixième partie 6. Compléments

14. Algèbres de Lie

Soit $f : X\to S$ un S-schéma. Si $\mathcal{M}$ est un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent, on note $\mathrm{Der}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X,\mathcal{M})$ le groupe des $\mathcal{O}_S$-dérivations $d:\mathcal{O}_X\to\mathcal{M}$. Ce sont les morphismes de $f^{-1}\mathcal{O}_S$-modules $d:\mathcal{O}_X\to\mathcal{M}$ tels que $d(ab) = a\cdot d(b) + b\cdot d(a)$ pour tout $ab\in \Gamma(U,\mathcal{O}_X)$. Le foncteur $\mathcal{M}\mapsto \mathrm{Der}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X,\mathcal{M})$ est représentable par un $\mathcal{O}_X$-module quasi-cohérent que l'on note $\Omega^1_{X/S}$: c'est le faisceau des 1-formes différentielles sur X relativement à S, qui vérifie donc

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/S},\mathcal{M}) \simeq \mathrm{Der}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X,\mathcal{M}).$$

On a : $\Omega^1_{X/S} = \Delta^{-1}(\mathcal{I}_\Delta/\mathcal{I}_\Delta^2)$, où $\mathcal{I}_\Delta$ est l'idéal qui définit $\Delta : X \to X \times_S X$. En effet, si $S = \mathrm{Spec} A$, $X = \mathrm{Spec} B$, et $\mathcal{M} = \widetilde{M}$, alors

$$\mathrm{Der}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X, \mathcal{M}) = \mathrm{Der}_A(B, M) \subset \mathrm{Hom}_A(B, M) = \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A B, M)$$

via $d \mapsto D$ où $D(b_1 \otimes b_2) = b_1 d(b_2)$. Mais $B \otimes_A B = B \otimes_A A \oplus I$ où I est le noyau de la multiplication, et D est nulle sur le premier facteur (car $D(b_1 \otimes 1) = b_1 d(1) = 0$), et nulle sur I^2 car I est engendré par $x \otimes 1 - 1 \otimes x$ et

$$\begin{aligned} D((x \otimes 1 - 1 \otimes x) \cdot (y \otimes 1 - 1 \otimes y)) &= D(xy \otimes 1 - y \otimes x - x \otimes y + 1 \otimes xy) \\ &= d(xy) - yd(x) - xd(y) = 0. \end{aligned}$$

La même formule montre en fait que

$$\mathrm{Der}_A(B, M) = \mathrm{Hom}_B\left(I/I^2, M\right).$$

Supposons maintenant que T est un S-schéma quasi-séparé et quasi-compact, et $\mathcal{N}$ un $\mathcal{O}_T$-module quasi-cohérent. On note $T[\mathcal{N}] = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_T[\mathcal{N}])$ où $\mathcal{N}^2 = 0$. C'est donc un T-schéma avec une section, et

$$X(T[\mathcal{N}]) = \{(x, \delta) : x \in X(T),\ \delta \in \mathrm{Der}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X, x_*\mathcal{N})\}$$

est muni de $X(T) \to X(T[\mathcal{N}]) \to X(T)$. Supposons enfin que $X = G$ est un S-schéma en groupes. On a alors une suite exacte scindée

$$0 \to H(T, \mathcal{N}) \to G(T[\mathcal{N}]) \to G(T) \to 0$$

où l'on vérifie que, si $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_G$ est l'idéal d'augmentation et $\pi : T \to S$,

$$H(T, \mathcal{N}) = \mathrm{Der}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_G, e_*\pi_*\mathcal{N}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}\left(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \pi_*\mathcal{N}\right).$$

Bien sûr, pour tout $x \in G(T)$, on a aussi

$$H(T, \mathcal{N}) \simeq H(T, \mathcal{N})x \simeq \mathrm{Der}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_G, x_*\mathcal{N}).$$

En particulier, pour $T = G$ et $x = \mathrm{Id}$, on trouve

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}\left(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, f_*\mathcal{N}\right) = \mathrm{Der}_{\mathcal{O}_S}(\mathcal{O}_X, \mathcal{N}) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_G}\left(\Omega^1_{G/S}, \mathcal{N}\right)$$

et donc par adjonction, $\Omega^1_{G/S} \simeq f^*(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2)$, puis $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 = e^*(\Omega^1_{G/S})$. Pour $T = S$ et $\mathcal{N} = \mathcal{O}_S$,

$$\mathbf{Lie}(G)(S) = \ker(G(S[\mathcal{O}_S]) \to G(S)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}\left(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2, \mathcal{O}_S\right).$$

15. Faisceaux amples

Soit X un S-schéma quasi-séparé et quasi-compact. Un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur X est S-ample si et seulement si il existe un recouvrement ouvert affine de S au-dessus duquel X est ample. Si S est affine, X est un schéma quasi-séparé et quasi-compact (on dit aussi : concentré). Sur un tel schéma, un faisceau inversible est ample si et seulement si il vérifie les équivalentes conditions suivantes : (1) les ouverts X_f pour $f \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$, $n > 0$ forment une base de la topologie de X, (2) il y a des sections $f \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ telles que les X_f forment une base de la topologie de X, et sont affines, (3) il y a des sections $f \in \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ telles que les X_f sont affines et recouvrent X, (4) pour tout faisceau quasi-cohérent de type fini $\mathcal{F}$ sur X, le faisceau $\mathcal{F}(n)$ est engendré par ses sections globales pour tout $n \gg 0$.

Vérifions ces équivalences. Pour (1) $\Rightarrow$ (2), on choisit pour tout $x \in X$ un voisinage ouvert affine U de x, puis un f tel que $x \in X_f \subset U$. Puisque $X_f \hookrightarrow X$ est affine, X_f est affine. Pour (2) $\Rightarrow$ (3), c'est trivial. Pour (3) $\Rightarrow$ (4), on commence par choisir k et $f_1, \cdots, f_r$ des sections globales de $\mathcal{L}^{\otimes k}$ tels que $\cup X_{f_i} = X$, avec X_{f_i} affine, puis des sections globales $g_{i,j}$ de $\mathcal{F}|X_{f_i}$ qui engendrent $\mathcal{F}|X_{f_i}$, puis un entier m tel que $g_{i,j} \otimes f_i^m$ se relève en une section globale $h_{i,j}$ de $\mathcal{F}(mk)$, lesquels engendrent alors $\mathcal{F}(mk)$ presque par construction, et de même $g_{i,j} \otimes f_i^M$ engendre $\mathcal{F}(Mk)$ pour tout $M \geq m$. En appliquant le même processus à $\mathcal{F}, \mathcal{F}(1), \ldots, \mathcal{F}(k-1)$, on voit que $\mathcal{F}(Mk+j)$ est engendré par ces sections globales pour tout $M \geq m$ et tout $0 \leq j < k$, d'où (4). Pour (4) $\Rightarrow$ (1), soit $x \in X$, U un voisinage de x dans X, $\mathcal{I}$ un idéal définissant $X-U$, $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ un sous-idéal de type fini tel que $\mathcal{J}_x = \mathcal{I}_x = \mathcal{O}_{X,x}$, n un entier tel que $\mathcal{J}(n)$ soit engendré par ses sections globales, $f \in \mathcal{J}(n)$ tel que $f(x) \neq 0$. Alors $x \in X(f)$ et $f(z) = 0$ pour tout $z \in V(f) \supset V(\mathcal{J}) \supset V(\mathcal{I}) = X-U$, donc $X_f \subset U$.

Supposons toujours $f : X \to S$ quasi-compact et quasi-séparé. Soit $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X. Alors $f_*(\mathcal{L}^{\otimes n})$ est quasi-cohérent pour tout n et $\mathcal{S} = \oplus f_*(\mathcal{L}^{\otimes n})$ est une $\mathcal{O}_S$-algèbre graduée, ce qui nous donne donc un S-schéma $\mathbf{P} = \mathbf{Proj}(\mathcal{S})$. D'autre part, les adjonctions donnent un morphisme de $\mathcal{O}_X$-algèbre graduées quasi-cohérentes $f^*\mathcal{S} \to \oplus \mathcal{L}^{\otimes n}$, ce qui nous donne un S-morphisme $\phi : U(\mathcal{L}) \to \mathbf{P}$,

$$X = \mathbf{Proj}(\oplus \mathcal{L}^{\otimes n}) \supset U(\mathcal{L}) \to \mathbf{Proj}(f^*\mathcal{M}) = \mathbf{P} \times_S X \to \mathbf{P}$$

où $U(\mathcal{L})$ est la réunion des ouverts de X où $f^*f_*(\mathcal{L}^{\otimes n}) \to \mathcal{L}^{\otimes n}$ est surjective. Supposons d'abord que S est affine. Pour toute section f de $\mathcal{L}^{\otimes n}$ sur X, vu comme une section de $\mathcal{O}_{\mathbf{P}}(n)$ sur $\mathbf{P}$, on a $\phi^{-1}(\mathbf{P}_f) = X_f$ et

$$\Gamma(X_f, \mathcal{O}_X) = \left(\oplus \Gamma(X, \mathcal{L}^{\otimes n})\right)_f^{\deg=0} = \Gamma(\mathbf{P}_f, \mathcal{O}_{\mathbf{P}})$$

d'après [1, I,9.3.2]. La restriction de ϕ à $X_f \subset U(\mathcal{L})$ y est donnée par

$$X_f \to \operatorname{Spec}\Gamma(X_f, \mathcal{O}_X) = \operatorname{Spec}\Gamma(\mathbf{P}_f, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}) = \mathbf{P}_f \hookrightarrow \mathbf{P}.$$

Si $\mathcal{L}$ est ample, on peut choisir des sections f telles que les X_f forment un recouvrement ouvert affine de X, donc $U(\mathcal{L}) = X$, $X_f = \mathbf{P}_f$, et $X \hookrightarrow \mathbf{P}$ est une immersion. Revenant au cas général, on voit de même que $X \hookrightarrow \mathbf{P}$ est une immersion si $\mathcal{L}$ est S-ample, et on vérifie sans trop de difficulté que c'est là une nouvelle caractérisation des faisceaux amples.

16. Descente

Une bonne référence : [4, Chapter 6]. Pour un formalisme plus avancé (catégories fibrés, gerbes et champs/stacks), il faut SGA !

16.1. **Abstract nonsense.** Etant donné un morphisme $f : S' \to S$, il y a de nombreux contextes dans lesquels on a une notion de changement de base : à un objet X sur S, on peut associer un objet $X' = f^*X$ sur S'. Par exemple, X pourrait être un faisceau sur S, un morphisme de faisceaux sur S, un schéma sur S, un morphisme de schémas sur S, ou même une structure beaucoup plus complexe, tel que : une classe d'isomorphismes de variétés abéliennes polarisées munies d'endomorphismes et/ou de structures de niveau... Il y a une première gamme de questions récurrentes pour le changement de base : si X/S a une propriété P, est-ce que X'/S' a aussi cette même propriété ? Est-ce que telle ou telle construction commute à ce changement de base ? La descente envisage typiquement les questions inverses, par exemple : si X'/S' à une propriété P, est-ce que X/S a aussi cette même propriété ? Et pour commencer : si l'on dispose seulement de l'objet X'/S', existe-t-il un objet

X/S tel que $X' \simeq f^*X$. Autrement dit : quelle est l'image essentielle du foncteur $X \mapsto f^*X$?

On voit tout de suite que cette question est mal posée. Soit en effet $S" = S' \times_S S'$ et $p_i : S" \to S'$ les deux projections. Alors pour tout objet $X' = f^\star X$ sur S', les deux objets p_1^*X' et p_2^*X' sur $S"$ sont canoniquement isomorphes. On introduit alors la catégorie des objets X' sur S' qui sont munis d'une *donnée de recollement*, i.e. d'un isomorphisme $\phi : p_1^*X' \simeq p_2^*X'$. Notre question devient : quelle est l'image essentielle de $X \mapsto f^*X$ dans cette nouvelle catégorie ?

On voit aussi tout de suite qu'il y a une condition nécessaire pour que (X', ϕ) appartienne à cette image. En effet pour X' sur S' et $\phi : p_1^*X' \simeq p_2^*X'$ une donnée de recollement, on peut encore faire le pull-back de ϕ par les trois projections $p_{12}, p_{13}, p_{23} : S''' \to S"$, où $S''' = S' \times_S S' \times_S S'$. On obtient des isomorphismes $p_{12}^*\phi : q_1^*X' \to q_2^*X'$, $p_{13}^*\phi : q_1^*X' \to q_3^*X'$ et $p_{23}^*\phi : q_2^*\phi \to q_3^*\phi$ où $q_1, q_2, q_3 : S''' \to S'$ sont les trois projections. Lorsque $X' = f^*X$ et ϕ est la donnée de recollement canonique, la *condition de cocycle* $p_{13}^*\phi = p_{23}^*\phi \circ p_{12}^*\phi : q_1^*\phi \to q_3^*\phi$ est vérifiée. En général, on dit que ϕ est une *donnée de descente* si et seulement si cette condition de cocycle est vérifiée. La catégorie qui nous intéresse sera donc plutôt la catégorie des objets sur X' munie d'une donnée de descente (c'est une sous-catégorie pleine de la précédente). Notre question devient : quelle est l'image essentielle de $X \mapsto f^*X$ dans cette nouvelle catégorie ? On dit que la descente est effective si $X \to f^*X$ est essentiellement surjectif. Dans tous les cas intéressants, ce sera même une équivalence de catégorie (je ne connais pas de terminologie adaptée à ce cas).

Example 103. Soit S un espace topologique, S_i un recouvrement ouvert de S, $S' = \coprod S_i$, $f : S' \to S$ et pour objets : les faisceaux d'ensembles. Un faisceau $\mathcal{F}'$ sur S' est une famille de faisceaux $(\mathcal{F}_i')$, où $\mathcal{F}_i'$ est un faisceau sur S_i. Le foncteur $\mathcal{F} \mapsto f^*\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ associe à $\mathcal{F}$ la famille de ces restrictions $\mathcal{F}_i' = \mathcal{F}|S_i$. On a $S" = \coprod S_{i,j}$, où $S_{i,j} = S_i \cap S_j$, et les deux projections sont $p_1 : S_{i,j} \hookrightarrow S_i$ et $p_2 : S_{i,h} \hookrightarrow S_j$. Une donnée de recollement sur $\mathcal{F}' = (\mathcal{F}_i')$ est donc une collection d'isomorphismes $\phi_{i,j} : \mathcal{F}_i'|S_{i,j} \simeq \mathcal{F}_j'|S_{i,j}$, et la condition de cocycle est $\phi_{j,k}|S_{i,j,k} \circ \phi_{i,j}|S_{i,j,k} = \phi_{i,k}|S_{i,j,k}$, où $S_{i,j,k} = S_i \cap S_j \cap S_k$. Si $\mathcal{F}' = f^\star\mathcal{F}$, la donnée de descente canonique est l'identité $\mathcal{F}|S_{i,j} = \mathcal{F}|S_{i,j}$. Dans ce cas, il est bien connu que $\mathcal{F} \mapsto f^*\mathcal{F}$ est une équivalence de catégorie : la descente des faisceaux pour $S' \to S$ est effective.

16.2. **Descente fpqc.**

Theorem 104. *Soit $f : S' \to S$ un morphisme* fidèlement plat *et* quasi-compact. *Alors*

(1) *Pour les faisceaux quasi-cohérents : $\mathcal{F} \mapsto f^*\mathcal{F}$ est une équivalence de catégorie.*
(2) *Pour les schémas relativement affines : $X \mapsto f^*X$ est une équivalence de catégorie.*
(3) *Pour les schémas relativement quasi-affines : $X \mapsto f^*X$ est une équivalence de catégorie.*
(4) *Pour les schémas généraux : $X \mapsto f^*X$ est pleinement fidèle.*
(5) *(Pour S' et S affines) Une donnée de descente $\phi : p_1^*X' \simeq p_2^*X'$ est effective si et seulement si X' admet un recouvrement par des ouverts affines stabilisés par ϕ.*

(6) *(Pour S' et S affines) Une donnée de descente $\phi : p_1^* X' \simeq p_2^* X'$ est effective si et seulement si X' admet un recouvrement par des ouverts quasi-affines stabilisés par ϕ.*

Démonstration. On se borne ici à considérer le cas où S' et S sont affines : le cas général s'en déduit *grosso modo* en considérant un recouvrement ouvert affine S_i de S et pour chaque i un recouvrement ouvert affine fini $S'_{i,j}$ du quasi-compact $f^{-1}(S_i)$; les techniques élémentaires de recollement sur des recouvrements ouverts (comme dans l'exemple ci-dessus) permettent de passer de S à $\coprod S_i$, de S' à $\coprod S'_{i,j}$, et le cas affine s'applique à $\coprod S'_{i,j} \to S_i$ (c'est là que l'on se sert de l'hypothèse de quasi-compactité : pour que $\coprod S'_{i,j}$ soit affine). Soit donc $S = \mathrm{Spec} A$ et $S' = \mathrm{Spec} B$. Les hypothèses sont alors : B est une A-algèbre fidèlement plate.

Montrons que $\mathcal{F} \mapsto f^*\mathcal{F}$ est pleinement fidèle. Il faut donc voir que pour $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ quasi-cohérent sur S, si $\phi' : f^*\mathcal{F} \to f^*\mathcal{G}$ est un morphisme compatible avec les données canoniques de recollement, alors $\phi' = f^*\phi$ pour un unique morphisme $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, ce qui se traduit par l'exactitude de

$$\mathrm{Hom}_S(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \to \mathrm{Hom}_{S'}(f^*\mathcal{F}, f^*\mathcal{G}) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{S"}(g^*\mathcal{F}, g^*\mathcal{G})$$

où $S" = S' \times_S S' = \mathrm{Spec} B \otimes_A B$ et $g : S" \to S$ est le morphisme structural. Posant $\mathcal{F} = \widetilde{M}$, $\mathcal{G} = \widetilde{N}$, il faut donc montrer l'exactitude de

$$\mathrm{Hom}_A(N, M) \to \mathrm{Hom}_B(N \otimes_A B, M \otimes_A B) \rightrightarrows \mathrm{Hom}_{B \otimes_A B}(N \otimes_A B \otimes_A B, M \otimes_A B \otimes_A B)$$

Il suffit pour cela de montrer l'exactitude, pour tout A-module M, de

$$M \to M \otimes_A B \rightrightarrows M \otimes_A B \otimes_A B.$$

Puisque $A \to B$ est fidèlement plat, il suffit de vérifier l'exactitude de

$$(M \otimes_A B) \to (M \otimes_A B) \otimes_A B \rightrightarrows (M \otimes_A B \otimes_A B) \otimes_A B.$$

Posons $\mathcal{A} = B$, $\mathcal{B} = B \otimes_A B$ vu comme $\mathcal{A}$-algèbre par $b \mapsto 1 \otimes b$, et $\mathcal{M} = M \otimes_A B$ vu comme $\mathcal{A}$-module par $b \cdot m = m \otimes b$. Le diagramme ci-dessus est alors

$$\mathcal{M} \to \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \rightrightarrows \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{B}$$

qui est donc du même type que précédemment. On a pourtant avancé, puisqu'on sait maintenant que $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ admet une *section*, à savoir le produit $\mathcal{B} = B \otimes_A B \to B = \mathcal{A}$ (qui correspond bien sur à la diagonale $\Delta : S' \to S' \times_S S'$ du diagramme de départ). Notant $\mathcal{I}$ le noyau de cette section, notre diagramme est maintenant

$$\mathcal{M} \to \mathcal{M} \oplus \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{I} \rightrightarrows \mathcal{M} \oplus \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{I} \oplus \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{I} \oplus \mathcal{M} \otimes_{\mathcal{A}} \mathcal{I}^{\otimes 2}$$

où les flèches sont $m \mapsto (m, 0)$ et $(m_1, m_2 \otimes i) \mapsto (m_1, m_2 \otimes i, 0, 0)$ ou $(m_1, 0, m_2 \otimes i, 0)$: c'est trivialement exact.

Exercise 105. Formaliser l'argument final ci-dessus en montrant que si $f : S' \to S$ admet une section $e : S \to S'$, alors $X' \mapsto e^*X'$ est un quasi-inverse de $X \mapsto f^*X$, qui est donc une équivalence de catégorie (entre "objets sur X" et "objets sur X' munis d'une donnée de descente relative à $S' \to S$")!

Montrons ensuite que $\mathcal{F} \mapsto f^*\mathcal{F}$ est essentiellement surjectif. Il faut donc voir que si M est un B-module muni d'une donnée de descente $\phi : M \otimes_{B,p_1} (B \otimes_A B) \simeq M \otimes_{B,p_2} (B \otimes_A B)$, i.e. d'un isomorphisme $B \otimes_A B$-linéaire ϕ entre $M \otimes_A B$ et

$B \otimes_A M$ qui vérifie une certaine condition de cocycle, alors $M \simeq N \otimes_A B$ pour un A-module N. Vu le calcul précédent, il est clair qu'il faut poser

$$N = \ker\left((\phi \circ \iota_1, \iota_2) : M \rightrightarrows B \otimes_A M\right)$$

où $\iota_1 : M \to M \otimes_A B$ et $\iota_2 : M \to B \otimes_A M$ sont les morphismes évidents. Il faut vérifier que l'application canonique $N \otimes_A B \to M$ est un isomorphisme de B-modules (ce morphisme étant compatible avec les données de descente par construction même de N) . Il suffit à nouveau de le vérifier après le changement de base fidèlement plat $A \to B$, i.e. on peut supposer que $A \to B$ admet une section. Toute donnée de descente étant alors effective, on peut donc aussi supposer que M est déjà de la forme $M = N' \otimes_A B$, et que ϕ est l'identité de $N' \otimes_A B \otimes_A B$. Alors

$$N = \ker\left((\iota_1, \iota_2) : N' \otimes_A B \rightrightarrows N' \otimes_A B \otimes_A B\right) = N'$$

donc $M = N \otimes_A B$!

On a donc montré le (1) de la proposition. On en déduit le (2) en utilisant (l'anti)-équivalence de catégorie $\mathcal{A} \to \mathrm{Spec}\mathcal{A}$ entre les faisceaux quasi-cohérents de $\mathcal{O}_S$-algèbres et les S-schémas affines (et bien sûr, idem sur S'). Le (4) et le (5) en résultent assez facilement. Pour le (3), on note que X' est quasi-affine sur S' ssi $X' \to X'_{aff} = \mathrm{Spec} f_* \mathcal{O}_{X'}$ est une immersion ouverte quasi-compacte : une donnée de descente sur X' induit une donnée de descente sur X'_{aff}, qui descend donc en un schéma affine X_{aff} sur S d'après (2). Le morphisme $q : X'_{aff} \to X_{aff}$ vérifie $q^{-1}q(X') = X'$ (cela résulte formellement de la compatibilité des données de recollement sur X' et X'_{aff}), et $q(X')$ est ouvert puisque $q : X'_{aff} \to X_{aff}$ est fidèlement plat. Le (6) résulte de (3) comme le (5) de (2). $\square$

Remark 106. La forme la plus utilisée du (6) est la suivante : supposons toujours que $S' \to S$ est fidèlement plat et quasi-compact. On considère les paires $(X, \mathcal{L})$ formées d'un S-schéma quasi-compact et d'un faisceau inversible S-ample $\mathcal{L}$ sur X. Alors $(X, \mathcal{L}) \mapsto (f^*X, f^*\mathcal{L})$ est une équivalence de catégorie. Partant d'une paire $(X', \mathcal{L}')$ munie d'une donnée de descente, l'idée est *grosso modo* d'utiliser la donnée de descente sur $\mathcal{L}'$ pour découper dans X' des ouverts quasi-affines stables par la donnée de descente sur X'.

Références

[1] A. Grothendieck et J. Dieudonné, *Eléments de géométrie algébrique*. Publications Mathématiques de l'IHES n°**4**, **8**, **11**, **17**, **20**, **24**, **28** et **32**.

[2] A. Grothendieck et Coll. Séminaires de géométrie algébrique.

[3] A. Altman et S. Kleiman, *Compactifying the Picard Scheme*. Adv. Math **35** (1980).

[4] S. Bosh, W. Lutkebohmert, M. Raynaud, *Néron Models*. Ergebenisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, **3**. Folge, Band **21**.

[5] B. Fantechi...

[6] A. Grothendieck, *Techniques de descentes et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. I, II, III, IV, V et VI*. (Séminaire Bourbaki).

[7] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*. GTM **52**.

[8] Haruzo Hida, *p-adic Automorphic Forms on Shimura Varieties*. Springer Monographs in Mathematics.

[9] Milne, *Abelian Varieties*.

[10] D. Mumford, *Abelian Varieties*.

[11] D. Mumford, *Lectures on curves on an algebraic surface*. Annals of Math. Studies **59** (1966)

[12] D. Mumford, *Geometric Invariant Theory*. Ergebnisse der Mathematik **34** (1965)