TOOLBOX

Table des matières

Dans cette seconde partie du cours, nous allons envisager diverses structures supplémentaires que l'on peut rajouter à nos problèmes de modules. Cela aboutira à la définition des problèmes de modules de type **PEL.**

Première partie 1. Endomorphismes

1. Endomorphismes

Soit $\mathcal{O}$ une $\mathbb{Z}$-algèbre qui est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini. Une action de $\mathcal{O}$ sur un S-schéma abélien A est un morphisme d'anneau $\iota : \mathcal{O} \to \mathrm{End}_S(A)$. On dit aussi que A/S est un $\mathcal{O}$-schéma abélien. La proposition suivante nous permettra d'ajouter de telles structures sur nos problèmes de modules.

Proposition 1. *Soit A/S un schéma abélien. Le foncteur $\mathcal{F} : (\mathbf{Sch}/S)^0 \to \mathbf{Ens}$ qui à un S-schéma T associe $\mathrm{Hom}_{Ann}(\mathcal{O}, \mathrm{End}_T(A_T))$ est représentable.*

Démonstration. Soient $e_1, \cdots, e_r$ une $\mathbb{Z}$-base de $\mathcal{O}$, $e_ie_j = \sum \alpha_{ijk}e_k$ la table de multiplication de $\mathcal{O}$, S_0 le schéma qui représente $T \mapsto \mathrm{End}_T(A_T)$, $S_1 = S_0^r$ le schéma qui représente $T \mapsto \mathrm{Hom}_{Gr}(\mathcal{O}, \mathrm{End}_T(A_T))$, $\iota_u : \mathcal{O} \to \mathrm{End}_{S_1}(A_{S_1})$ le morphisme de groupe universel, $E_{i,j} = \iota_u(e_ie_j)$ et $F_{i,j} = \sum_k \alpha_{ijk}\iota_u(e_k)$. Ce sont des endomorphismes $A_{S_1} \to A_{S_1}$. Soit S_2 le sous-schéma ouvert et fermé de S_1 où $E_{i,j} = F_{i,j}$ pour tout i, j. Alors S_2 représente $T \mapsto \mathrm{Hom}_{Ann}(\mathcal{O}, \mathrm{End}_T(A_T))$. □

Remark 2. Si A/S est un $\mathcal{O}$-schéma abélien projectif, A^t est naturellement muni d'une action de l'anneau opposé $\mathcal{O}^{opp}$. Si $\star$ est une involution de $\mathcal{O}$, on peut donc à nouveau considérer A^t/S comme un $\mathcal{O}$-schéma abélien. Dans ce contexte, on dira d'un morphisme $\lambda : A \to A^t$ qu'il est $(\mathcal{O}, \star)$-linéaire s'il est compatible avec ces structures, i.e. $\lambda(ox) = o^{\star t}\lambda(x)$. Dans les problèmes de modules où apparaissent à la fois des $\mathcal{O}$-structures et des polarisations, on demandera toujours que la polarisation soit ainsi $(\mathcal{O}, \star)$-linéaire.

Deuxième partie 2. Modules de Tate

Si A est une variété abélienne de dimension g sur un corps de caractéristique $\neq p$, son module de Tate $T_pA = \varprojlim A[p^n]$ est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang $2g$ muni d'une action de Gal_k. Cet énoncé n'est pas très précis : il faut fixer d'abord une clotûre séparable k^{sep}/k pour définir $T_p(A, k^{sep}) = \varprojlim A[p^n](k^{sep})$ et l'action de $\mathrm{Gal}(k^{sep}/k)$ sur $T_p(A, k^{sep})$: la classe d'isomorphisme du couple $(T_p(A, k^{sep}), \mathrm{Gal}(k^{sep}/k))$ ne dépend pas du choix de la clotûre algébrique.

Si maintenant A est un schéma abélien sur une base S plus générale, on peut de même choisir un point géométrique s de S et former $T_p(A, s) = \varprojlim A[p^n](s)$: si $p \neq \mathbf{car}(k(s))$, c'est encore un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang $2g$, et l'on peut faire agir dessus le groupe des automorphismes de $k(s)/k(s_0)$, où $s_0 \in S$ est le point base de s. Mais il est évident que ce groupe d'automorphismes dépend fortement du choix de s. Par exemple, supposons que S est le spectre d'un anneau de valuation discrète $\mathcal{O}$ de corps des fractions K et de corps résiduel k (avec $\mathbf{car}k \neq p$). Le groupe d'automorphismes ci-dessus peut alors être Gal_K ou Gal_k, selon que l'on prend $s = K^{sep}$ ou $s = k^{sep}$ au-dessus respectivement du point générique et du point fermé de $S = \mathrm{Spec}\mathcal{O}$. Cependant, on sait dans cette situation que la réduction définit un isomorphisme $T_p(A, K^{sep}) \to T_p(A, k^{sep})$ qui est compatible avec le morphisme de groupe $\mathrm{Gal}(K^{sep}/K) \to \mathrm{Gal}(k^{sep}/k)$ induit par $\mathrm{Gal}(K^{nr}/K) \simeq \mathrm{Gal}(k^{sep}/k)$, où K^{nr} est l'extension maximale non-ramifiée de K dans K^{sep}. Ceci suggère que le bon couple serait plutot $(T_p(A, K^{nr}), \mathrm{Gal}(K^{nr}/K))$.

Et en effet, sur n'importe quelle base S connexe où p est inversible, il existe un groupe fondamental $\pi(S, s)$ qui agit sur $T_p(A, s)$, tel que la classe d'isomorphisme de la paire $(T_p(A,s),\pi(S,s))$ est bien définie. Dans les deux exemples précédents, le groupe $\pi(S,s)$ est exactement celui que l'on veut, à savoir $\mathrm{Gal}(k^{sep}/k)$ si $S=\mathrm{Spec}k$, ou $\mathrm{Gal}(K^{nr}/K)$ si $S=\mathrm{Spec}\mathcal{O}$.

2. Le groupe fondamental

Definition 3. Soit S un schéma connexe, $\mathbf{REt}/S$ la catégorie des revêtements étales de S, s un point géométrique de S, et $\mathcal{F}(s):(\mathbf{REt}/S)\to\mathbf{Ens}$ le foncteur (covariant, pour une fois) qui à E/S associe $E(s)$. Le *groupe fondamental* de S de point base s est le groupe des automorphismes de ce foncteur : $\pi(S,s)=\mathrm{Aut}\mathcal{F}(s)$.

Un élément $\sigma\in\pi(S,s)$ est donc donné par une collection $(\sigma_E)_E$ où pour chaque revêtement étale $E\to S$, σ_E est un automorphisme de l'ensemble fini $E(s)$, ces automorphismes étant compatibles avec les flèches de $\mathbf{REt}/S$. En particulier : pour tout $E\in\mathbf{REt}/S$, l'application $\sigma\mapsto\sigma_E$ munit $E(s)$ d'une structure de $\pi(S,s)$ ensemble. On obtient ainsi une factorisation $\mathcal{F}(s)=\mathcal{O}\circ\mathcal{G}(s)$ où

$$\mathcal{G}(s):(\mathbf{REt}/S)\to\pi(S,s)-\mathbf{EnsFini}$$

et $\mathcal{O}$ est le foncteur d'oubli de la $\pi(S,s)$-structure.

Proposition 4. *Le foncteur $\mathcal{G}(s)$ est équivalence de catégorie.*

Pour construire le foncteur quasi-inverse, nous avons besoin de la notion de revêtement galoisien. Soit donc $\pi:E\to S$ un revêtement étale connexe et $G=\mathrm{Aut}_S(E)$ le groupe des S-automorphismes de E. Montrons tout d'abord que le S-morphisme

$$G\times E\to E\times_S E\qquad (g,e)\mapsto(ge,e)\tag{2.1}$$

est une immersion ouverte et fermée. Puisque $G\times E$ et $E\times_S E$ sont étales sur S, ce morphisme est déjà étale. Il est aussi géométriquement injectif : si $(ge,e)=(g'e',e')$, alors $e=e'$ et $ge=g'e$. Le schéma des coïncidences de (g,g') sur E est donc non vide, puisqu'il contient le point géométrique e. Puisque ce schéma est aussi ouvert et fermé dans E, comme la diagonale dans $E\times_S E$ dont il est le pull-back par (g,g'), cf. [1, IV, 17.4.2], c'est donc E tout entier, puisque E est connexe, donc $g=g'$. On conclut alors de [1, IV, 17.9.1] que notre morphisme (2.1) est une immersion ouverte. Mais alors G est fini, donc $G\times E$ et $E\times_S E$ étant finis sur S, ce morphisme est également fini : c'est donc une immersion ouverte et fermée.

Proposition 5. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *Le morphisme (2.1) est surjectif (resp. est un isomorphisme).*
2. *L'action de G sur $E(s)$ est transitive (resp. est simplement transitive).*
3. $|G|\geq[E:S]$ *(resp.* $|G|=[E:S]$*).*
4. $|G|\geq|E(s)|$ *(resp.* $|G|=|E(s)|$*).*
5. $E/G\simeq S$
6. $\mathcal{O}_S=(\pi_*\mathcal{O}_E)^G$.

Démonstration. Puisque (2.1) est une immersion ouverte et fermée,

$$G=[E\times G:E]\leq[E\times_S E:E]=[E:S]=|E(s)|$$

et les équivalences $(1-4)$ en résultent facilement. D'autre part, les sous-schémas $G\times E$ et $E\times_S E$ de $E\times_S E$ définissent sur E des relations d'équivalences finies et étales (donc plates) dont les quotients sont respectivement $G\backslash E=\mathrm{Spec}(\pi_*\mathcal{O}_E)^G$ et $S=\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_S)$, donc aussi (1) $\Leftrightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (6). □

Definition 6. Un revêtement Galoisien est un revêtement étale connexe E/S qui vérifie les conditions équivalentes de la proposition ci-dessus.

Si $E \to S$ est un revêtement galoisien, deux groupes agissent sur $E(s)$: le groupe $\pi(S,s)$ via $\sigma \mapsto \sigma_E$, et le groupe $\mathrm{Gal}(E/S)$ des automorphismes de E/S, ce dernier agissant simplement transitivement. Par définition même de $\pi(S,s)$, ces deux actions commutent. Le choix d'un point $x \in E(s)$ induit donc un morphisme

$$\pi(S,s) \to \mathrm{Gal}(E/S)^{\mathrm{opp}} : \qquad \sigma \mapsto \tau \quad \text{tel que} \quad \sigma_E x = \tau x.$$

On déduit du lemme suivant qu'il existe une famille filtrante de revêtements galoisiens connexes qui est cofinale dans la catégorie des revêtements étales connexes (cela pose toutefois des problèmes d'univers qu'il faut résoudre [1]). Le choix de points géométriques compatibles dans cette famille fournit alors une identification de $\pi(S,s)$ avec la limite projective des groupes $\mathrm{Gal}(E/S)^{\mathrm{opp}}$.

Lemma 7. *Tout revêtement étale connexe est dominé par un revêtement galoisien.*

Démonstration. Soit $E \to S$ un revêtement étale connexe, $F = E(s)$, et $D = E^F$, donc $D(s) = \mathcal{F}(F,F)$. Soit C la composante connexe de D qui contient $\mathrm{Id}_F \in D(s)$. C'est inclus dans le complémentaire dans D de l'ensemble ouvert et fermé

$$\{(d_f)_{f\in F} | \exists f_1 \neq f_2 \text{ tel que } d_{f_1} = d_{f_2}\}$$

puisque ce complémentaire, ouvert et fermé, est une réunion de composantes connexes et contient Id_F. Tout élément σ de $C(s) \subset \mathcal{F}(F,F)$ induit donc une permutation de $F = E(s)$, qui à son tour induit un automorphisme σ de $D = E^F$, lequel envoie $\mathrm{Id}_F \in C(s) \subset D(s)$ sur $\sigma \in C(s) \subset D(s)$, donc C sur C. On obtient ainsi une application $C(s) \to \mathrm{Aut}_S C$ qui est une section de l'application $\mathrm{Aut}_S C \to C(s)$ qui à σ associe $\sigma \cdot \mathrm{Id}_F$. Puisque cette dernière est toujours injective, on en conclut bien que C/S est Galoisien. Il reste à choisir $f \in F = E(s)$ pour projeter C sur E via la f-ième projection $E^F \to E$. □

Lemma 8. *Si E/S est galoisien de groupe $G = \mathrm{Gal}(E/S)$, les applications*

$$H \mapsto H\backslash E = \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_E^H) \qquad \textit{et} \qquad F \mapsto \mathrm{Gal}(E/F) = \mathrm{Aut}_F(E)$$

sont des bijections réciproques entre l'ensemble des sous-groupes H de G et l'ensemble des classes d'isomorphisme de sous-revêtements connexes $E \to F \to S$.

Démonstration. Soit $E \xrightarrow{\pi} F \to S$ un sous-revêtement, $H = \mathrm{Gal}(E/F)$, $f \in F(s)$, $e \in E(f)$ et $g \in G$. Si $g \in H$, alors $ge \in E(f)$. Si inversement $ge \in E(f)$, alors le schéma des coïncidences de $\pi : E \to F$ et $\pi \circ g : E \to F$ est non-vide, ouvert et fermé dans E, donc égal à E, de sorte que g est un F-morphisme, i.e. $g \in H$. Donc $E(f) = H \cdot e$, d'où l'on tire que $\pi : E \to F$ est un revêtement galoisien et que $H\backslash E = F$ d'après les points (4) et (5) de la proposition 5. Inversement, si l'on part d'un sous-groupe H de G, alors $E \to F = H\backslash E$ est un sous-revêtement de $E \to S$, et $H \subset \mathrm{Gal}(E/F)$ avec $|\mathrm{Gal}(E/F)| \leq [E:F] = H$, donc $H = \mathrm{Gal}(E/F)$. □

Pour construire un foncteur quasi-inverse $\mathcal{F}$ de $\mathcal{G}(s)$, il nous faut associer à tout $\pi(S,s)$-ensemble fini Y un revêtement étale $\mathcal{F}(Y)$ de S. La décomposition de Y en $\pi(S,s)$-orbites correspond à la décomposition de $\mathcal{F}(Y)$ en composantes connexes,

1. Une équipe du CERN y travaille sur le LHC de Genève. Sans attendre ses conclusions, on peut se reporter aux notes de Lenstra sur la théorie de Galois pour les schémas, qui m'a été signalé par M. Romagny.

ce qui nous ramène au cas où l'action de $\pi(S,s)$ sur Y est transitive. Il existe alors un revêtement galoisien E de S et un sous-groupe H de $G = \mathrm{Gal}(E/S)$ tel que $Y \simeq G/H$ comme $\pi(S,s)$-ensemble, et l'on pose $\mathcal{F}(Y) = H\backslash E$. Il reste à vérifier que cette définition est raisonable, et définit bien un foncteur quasi-inverse de $\mathcal{G}$.

Example 9. Pour $S = \mathrm{Spec}k$, les revêtements étales connexes (resp. galoisiens) de S sont les $E = \mathrm{Spec}k'$, pour k' extension séparable (resp. galoisienne) finie de k. On obtient un système cofinal de tels revêtements en se restreignant aux extensions galoisiennes dans une clôture algébrique fixée $\overline{k}$ de k. Prenant $s = \mathrm{Spec}\overline{k}$, on a donc

$$\pi(S,s) = \varprojlim \mathrm{Aut}(E/S)^o = \varprojlim \mathrm{Aut}(k'/k) = \mathrm{Gal}(k^{sep}/k)$$

où k^{sep} est la clôture séparable de k dans $\overline{k}$. De même, pour $S = \mathrm{Spec}\mathcal{O}$ le spectre d'un anneau de valuation discrète, ou même d'un anneau de Dedekind, les revêtements étales de S sont les $E = \mathrm{Spec}\mathcal{O}'$ pour $\mathcal{O}'$ l'anneau des entiers d'une extension partout non-ramifiée K' du corps des fractions $K = \mathrm{Frac}\mathcal{O}$. Prenant $s = \mathrm{Spec}\overline{K}$, on trouve donc encore $\pi(S,s) = \mathrm{Gal}(K^{nr}/K)$, où K^{nr} est l'extension non-ramifiée maximale de K dans $\overline{K}$. En particulier, $\pi(\mathrm{Spec}\mathbb{Z}, s) = \{1\}$!

3. Modules de Tate

3.1. **Définition.** Soit A/S un schéma abélien, s un point géométrique de S.

Lemma 10. *Si N est inversible sur S, la multiplication par N sur A est un morphisme étale, donc $A[N]$ est un S-schéma étale et $A[N](s)$ un $\pi(S,s)$-module.*

Démonstration. On peut le vérifier sur les fibres géométriques, où on sait déjà que la multiplication par N est un morphisme fini et plat de degré N^{2g}. On applique le critère pour formellement étale : il faut voir que pour tout $x \in A(k[\epsilon])$ de réduction $x \in A(k)$ et pour tout $\overline{y} \in A(k)$ tel que $\overline{x} = N\overline{y}$, il existe un unique $y \in A(k[\epsilon])$ de réduction $\overline{y}$ tel que $Ny = x$. Commençons par relever arbitrairement $\overline{y}$ en y (puisque A est lisse), et translatons tout par y : cela nous ramène au cas où $\overline{x} = 0$, $\overline{y} = 0$. Il faut alors voir que : pour tout $x \in \mathbf{Lie}A = \ker(A(k[\epsilon]) \to A(k))$, il existe un unique $y \in \mathbf{Lie}A$ tel que $Ny = x$. Mais $\mathbf{Lie}A$ est un k-espace vectoriel et N est inversible dans k : cqfd. $\square$

Si p est inversible sur S, on pose

$$\begin{aligned} T_p(A,s) &= \lim A[p^n](s) \\ V_p(A,s) &= T_p(A,s) \otimes \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Ce sont donc des $\mathbb{Z}_p$ (resp. $\mathbb{Q}_p$)-modules libres de rang $2g$ munis d'actions continues de $\pi(S,s)$. Si S est un $\mathbb{Q}$-schéma, on pose

$$\begin{aligned} T_f(A,s) &= \lim A[N](s) \\ V_f(A,s) &= T_f(A,s) \otimes \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Ce sont donc des $\widehat{\mathbb{Z}}$ (resp. $\mathbb{A}_f$)-modules libres de rang $2g$ munis d'actions continues de $\pi(S,s)$. Si S est un $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma, on pose

$$\begin{aligned} T_f^p(A,s) &= \lim_{(N,p)=1} A[N](s) \\ V_f^p(A,s) &= T_f^p(A,s) \otimes \mathbb{Q} \end{aligned}$$

Ce sont donc des $\widehat{\mathbb{Z}}^p$ (resp. $\mathbb{A}_f^p$)-modules libres de rang $2g$ munis d'actions continues de $\pi(S,s)$.

3.2. **Dualité.** Pour tout S-schéma en groupes G qui est commutatif, fini et plat sur S, on note

$$\mathbf{D}(G) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathrm{Gr}}(G, \mathbf{G}_m).$$

Proposition 11. *C'est un S-schéma en groupes commutatif, fini et plat sur S, et l'application canonique $G \to \mathbf{D}(\mathbf{D}(G))$ définie par $g \mapsto (f \mapsto f(g))$ est un isomorphisme de S-schémas en groupes. De plus, $G \mapsto \mathbf{D}(G)$ préserve le rang.*

Démonstration. Le problème est local sur S, que l'on peut donc supposer affine, disons $S = \mathrm{Spec} A$, et tel que $G \to S$ soit de rang constant, disons n, et même libre de rang n, donc $G = \mathrm{Spec} B$ pour une A-algèbre B qui est un A-module libre de rang n. La structure de A-algèbre commutative sur B se traduit par l'existence de morphismes de A-modules

$$e : A \to B \quad \text{et} \quad \mu : B \otimes_A B \to B$$

vérifiant diverses propriétés, tandis que la structure de S-schéma en groupes commutatif sur G se traduit par l'existence de morphismes de A-modules

$$e^\star : B \to A \quad \text{et} \quad \mu^\star : B \to B \otimes_A B$$

vérifiant des propriétés "opposées". Soit $B' = \mathrm{Hom}_A(B, A)$ le A-dual du A-module B. Les structures ci-dessus induisent donc des morphismes de A-modules

$$e' : B' \to A \quad \text{et} \quad \mu' : B' \to B' \otimes_A B'$$

ainsi que

$$e^{\star\prime} : A \to B' \quad \text{et} \quad \mu^{\star\prime} : B' \otimes_A B' \to B'$$

le tout vérifiant des propriétés duales. On vérifie que le couple $(e^{\star\prime}, \mu^{\star\prime})$ munit B' d'une structure de A-algèbre commutative, et que (e', μ') munit le S-schéma $\mathbf{D}'(G) = \mathrm{Spec} B'$ d'une structure de S-schéma en groupe. Puisque évidemment $\mathbf{D}' \circ \mathbf{D}'(G) \simeq G$, il reste à voir que $\mathbf{D}' = \mathbf{D}$. Un morphisme de S-schémas en groupes $\alpha : G \to \mathbf{G}_{m,S}$ est un morphisme de S-schémas $\alpha : G \to \mathbf{A}^1_S$ tel que

$$\alpha(e_G) = 1_G \qquad \text{et} \qquad \alpha(g_1 g_2) = \alpha(g_1)\alpha(g_2).$$

Les morphismes de S-schémas $\alpha : G \to \mathbf{A}^1_S$ correspondent aux morphismes de A-algèbres $\alpha^\star : A[T] \to B$, ou encore aux éléments $b = \alpha^\star(T)$ de B, et les conditions ci-dessus se traduisent respectivement par

$$e^\star_G(b) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mu^\star_G(b) = b \otimes b.$$

On veut montrer que $\mathbf{D}(G)(S) = \mathbf{D}'(G)(S)$, c'est-à-dire que

$$\{b \in B : e^\star_G(b) = 1 \text{ et } \mu^\star_G(b) = b \otimes b\} = \mathrm{Hom}_{A-alg}(B', A).$$

Mais $B \simeq \mathrm{Hom}_{A-mod}(B', A)$ par $b \mapsto \delta_b = (f \mapsto f(b))$, et $\delta_b : B' \to A$ est un morphisme de A-algèbres si et seulement si (1) $\delta_b \circ e^{\star\prime}_G = \mathrm{Id} : A \to A$, i.e. $e^\star_G(b) = 1$, et (2) $\delta_b \circ \mu^{\star\prime}_G(f_1 \otimes f_2) = \delta_b(f_1)\delta_b(f_2)$ pour tout $f_1, f_2 \in B'$, i.e.

$$(f_1 \otimes f_2)(\mu^\star_G(b)) = f_1(b) f_2(b)$$

pour tout $f_1, f_2 \in B'$, condition qui est clairement équivalente à $\mu^\star_G(b) = b \otimes b$, comme on voit en choisissant une A-base de B. □

Remark 12. Pour plus d'informations sur cette dualité, on peut consulter l'excellent article de Tate [7] dans le livre sur Fermat.

Proposition 13. *Soit* $\alpha : A \to B$ *une isogénie de* S*-schéma abéliens (projectifs) et* $\alpha^t : B^t \to A^t$ *l'isogénie duale. Il existe un accouplement* $e_\alpha : \ker\alpha \times_S \ker\alpha^t \to \mathbf{G}_{m,S}$ *qui induit des isomorphismes*

$$\ker\alpha^t \simeq \mathbf{D}(\ker\alpha) \quad \text{et} \quad \ker\alpha \simeq \mathbf{D}(\ker\alpha^t).$$

Démonstration. Pour tout S-schéma T,

$$\begin{aligned}(\ker\alpha^t)(T) &= \ker\left(\alpha^* : \mathbf{Pic}^0_{B/S}(T) \to \mathbf{Pic}^0_{A/S}(T)\right)\\ &= \ker\left(\alpha^* : \mathbf{Pic}_{B/S}(T) \to \mathbf{Pic}_{A/S}(T)\right)\\ &\simeq \ker\left(\alpha^* : \mathbf{Pic}(B \times_S T) \to \mathbf{Pic}(A \times_S T)\right)\end{aligned}$$

Cela résulte respectivement des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \to & \mathbf{Pic}^0_{B/S}(T) & \to & \mathbf{Pic}_{B/S}(T) & \to & \mathrm{Hom}_T(B_T, B^t_T)\\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\ 0 & \to & \mathbf{Pic}^0_{A/S}(T) & \to & \mathbf{Pic}_{A/S}(T) & \to & \mathrm{Hom}_T(A_T, A^t_T)\end{array}$$

où la dernière flèche verticale est $f \mapsto \alpha^t \circ f \circ \alpha$ (qui est injective : il suffit par rigidité de le vérifier sur les points géométriques de T, où $\alpha^t \circ f \circ \alpha = 0$ implique $f \circ \alpha = 0$ puisque A est connexe et $\ker\alpha^t$ fini, qui implique à son tour $f = 0$ puisque α est surjective), et

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathbf{Pic}(T) & \to & \mathbf{Pic}(B \times_S T) & \to & \mathbf{Pic}_{B/S}(T) & \to & 0\\ & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathbf{Pic}(T) & \to & \mathbf{Pic}(A \times_S T) & \to & \mathbf{Pic}_{A/S}(T) & \to & 0\end{array}$$

On doit donc déterminer le noyau de $\alpha^* : \mathbf{Pic}(B) \to \mathbf{Pic}(A)$, i.e. l'ensemble des classes d'isomorphismes de faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur B tels que $\alpha^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_A$.

C'est un problème de descente (de $\mathcal{O}_A$ le long de $\alpha : A \to B$), et le noyau cherché est donc en bijection avec l'ensemble des données de descente sur $\mathcal{O}_A$ relativement à $\alpha : A \to B$, lesquelles correspondent à leur tour (puisque $A \times_B A \simeq \ker\alpha \times_S A$) aux "actions linéaires de $\ker\alpha$ sur $\mathcal{O}_A$ au-dessus de l'action par translation de $\ker\alpha$ sur A", i.e. aux actions linéaires

$$\mu_2 : \ker\alpha \times_S (A \times_S \mathbf{A}^1_S) \to (A \times_S \mathbf{A}^1_S)$$

au-dessus de $m : \ker\alpha \times_S A \to A$. Un tel morphisme μ s'écrit donc

$$\mu_2(k, a, x) = (k + a, \mu_1(k, a) \cdot x)$$

pour $k \in \ker\alpha$, $a \in A$ et $x \in \mathbf{A}^1_S$, avec $\mu_1 : \ker\alpha \times_S A \to \mathbf{G}_{m,S}$ qui se factorise nécessairement par $\mu : \ker\alpha \to \mathbf{G}_{m,S}$ puisque $f_{\ker\alpha *}\mathcal{O}_{\ker\alpha \times_S A} = \mathcal{O}_{\ker\alpha}$. Donc

$$(\ker\alpha^t)(S) = \ker(\alpha^* : \mathbf{Pic}B \to \mathbf{Pic}A) = \mathrm{Hom}_{S-Gr}(\ker\alpha, \mathbf{G}_{m,S}) = \mathbf{D}(\ker\alpha)(S)$$

et on conclut en remplaçant S par T. □

Remark 14. On peut expliciter l'isomorphisme ainsi obtenu. Soit $\mathcal{L} \in \mathbf{Pic}(B)$ tel que $\alpha^*\mathcal{L} = 0$ dans $\mathbf{Pic}(A)$. Choisissons un isomorphisme $\theta : \alpha^*\mathcal{L} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{O}_A$. Pour tout S-schéma T et tout $x \in \ker(\alpha)(T)$, l'isomorphisme

$$\mathcal{T}^*_x(\theta_T) \circ \theta_T^{-1} : \mathcal{O}_{A_T} \xrightarrow{\theta_T^{-1}} \alpha^*_T(\mathcal{L}_T) = \mathcal{T}^*_x \alpha^*_T(\mathcal{L}_T) \xrightarrow{\mathcal{T}^*_x\theta_T} \mathcal{T}^*_x \mathcal{O}_{A_T} = \mathcal{O}_{A_T}$$

est la multiplication par une section $\chi(\mathcal{L})(x)$ de $\Gamma(A_T, \mathcal{O}^\times_{A_T}) = \Gamma(T, \mathcal{O}^\times_T) = \mathbf{G}_m(T)$. Pour $x, y \in \ker(\alpha)(T)$, $\chi(\mathcal{L})(x + y) = \chi(\mathcal{L})(x) \cdot \chi(\mathcal{L})(y)$ car

$$\mathcal{T}^*_{x+y}(\theta_T) \circ \theta_T^{-1} = \mathcal{T}^*_x(\mathcal{T}^*_y(\theta_T) \otimes \theta_T^{-1}) \otimes \mathcal{T}^*_x(\theta_T) \otimes \theta_T^{-1}.$$

On obtient ainsi un morphisme de groupe $\chi(\mathcal{L}) : \ker(\alpha) \to \mathbf{G}_{m,S}$, i.e. un élément $\chi(\mathcal{L})$ de $\mathbf{D}(\ker(\alpha))(S)$. On vérifie facilement que cet élement est indépendant du choix de θ, et que l'on obtient ainsi un morphisme de S-schémas en groupes

$$\chi(-) : \ker(\alpha^t) \to \mathbf{D}(\ker(\alpha)).$$

C'est exactement l'isomorphisme recherché.

Exercise 15. Soit $S = \operatorname{Spec} k$ le spectre d'un corps. Soit $y = \mathcal{O}_B(D) \in \ker(\alpha^t)$ et $x \in \ker(\alpha)$. Puisque $\alpha^t(y) = 0$, il existe $g \in K(A)$ tel que $\mathbf{div}(g) = \alpha^* D$. Puisque $\alpha \circ \mathcal{T}_x = \alpha$, on a aussi $\mathbf{div}(\mathcal{T}_x^* g) = \mathcal{T}_x^* \alpha^* D = \alpha^* D$, donc $\mathbf{div}(\mathcal{T}_x^* g/g) = 0$, i.e. $\mathcal{T}_x^* g/g \in \Gamma(A, \mathbf{G}_m) = k^\times$. Vérifier qu'alors $\chi(y)(x) = \mathcal{T}_x^* g/g$.

Remark 16. On peut aussi démontrer que $A^t = \mathbf{Ext}^1(A, \mathbf{G}_{m,S})$ dans une catégorie de faisceaux abéliens convenable, où la suite $0 \to \ker\alpha \to A \to B \to 0$ est encore exacte. Appliquant $\mathbf{RHom}(-, \mathbf{G}_m)$ à cette suite, on trouve

$$0 \to \mathbf{Hom}(B, \mathbf{G}_m) \to \mathbf{Hom}(A, \mathbf{G}_m) \to \mathbf{Hom}(\ker\alpha, \mathbf{G}_m) \to \mathbf{Ext}^1(B, \mathbf{G}_m) \to \mathbf{Ext}^1(A, \mathbf{G}_m)$$

Les deux premiers termes sont triviaux, et le reste donne immédiatement

$$0 \to \mathbf{D}(\ker\alpha) \to B^t \to A^t$$

i.e. $\mathbf{D}(\ker\alpha) = \ker\alpha^t$.

En appliquant ceci à l'isogénie $[n] : A \to A$, dont l'isogénie duale $[n]^t$ est encore $[n] : A^t \to A^t$ (il suffit de le vérifier sur les points géométriques par rigidité, où l'on utilise $[n]^*\mathcal{L} \simeq \mathcal{L}^{\otimes n}$ pour $\mathcal{L} \in \mathbf{Pic}^0_{A/S}$), on trouve l'accouplement de Weil

$$e_n^A : A[n] \times_S A^t[n] \to \mu_{n,S}.$$

Ces accouplements sont compatibles lorsque n varie. Si n est inversible dans S, les schémas ci-dessus sont des revêtement étales de S, et l'on obtient donc pour tout point géométrique s de S un accouplement parfait et $\pi(S,s)$-équivariant

$$e_n^A(s) : A[n](s) \times A^t[n](s) \to \mu_n(s).$$

Prenant $n = p^k$ avec p inversible dans S et faisant varier k, on obtient donc finalement un accouplement parfait de $\mathbb{Z}_p[\pi(S,s)]$-modules

$$\langle -, - \rangle_p^A : T_p(A,s) \times T_p(A^t,s) \to T_p(\mu,s).$$

Il résulte assez facilement des définitions que pour tout morphisme de S-schémas abéliens $\alpha : A \to B$, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{rccccccc} \langle -,- \rangle_p^A : & T_p(A,s) & \times & T_p(A^t,s) & \to & T_p(\mu,s) \\ & \alpha \downarrow & & \alpha^t \uparrow & & \| \\ \langle -,- \rangle_p^B : & T_p(B,s) & \times & T_p(B^t,s) & \to & T_p(\mu,s) \end{array} \tag{3.1}$$

Pour tout $\lambda : A \to A^t$, on obtient aussi un accouplement de $\mathbb{Z}_p[\pi(S,s)]$-modules

$$\langle -,- \rangle_p^\lambda : T_p(A,s) \times T_p(A,s) \to T_p(\mu,s) \qquad \langle x,y \rangle_p^\lambda = \langle x, T_p(\lambda,s)(y) \rangle_p^A$$

qui est encore parfait si λ est une isogénie et $p \nmid \deg\lambda$. Le cas intéressant est celui où on prend $\lambda = \Lambda(\mathcal{L})$ pour un faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur A. On note alors

$$\langle -,- \rangle_p^{\mathcal{L}} = \langle -,- \rangle_p^{\Lambda(\mathcal{L})}.$$

Si $\alpha : A \to B$ est un morphisme de S-schémas abéliens et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur B, le diagramme suivant est commutatif :

$$
\begin{array}{rccccc}
\langle -,- \rangle_p^{\alpha^*\mathcal{L}} : & T_p(A,s) & \times & T_p(A,s) & \to & T_p(\mu,s) \\
(3.2) \qquad & \alpha \downarrow & & \alpha \downarrow & & \| \\
\langle -,- \rangle_p^{\mathcal{L}} : & T_p(B,s) & \times & T_p(B,s) & \to & T_p(\mu,s)
\end{array}
$$

En effet, nous avons déjà vu que $\Lambda(\alpha^*\mathcal{L}) : A \to A^t$ est égal à $\alpha^t \circ \Lambda(\mathcal{L}) \circ \alpha$, donc

$$\langle \alpha(x), \alpha(y) \rangle_p^{\mathcal{L}} = \langle \alpha(x), \Lambda(\mathcal{L}) \circ \alpha(y) \rangle_p^B = \left\langle x, \alpha^t \circ \Lambda(\mathcal{L}) \circ \alpha(y) \right\rangle_p^A = \langle x, y \rangle_p^{\alpha^*\mathcal{L}}.$$

Proposition 17. *Pour tout faisceau inversible $\mathcal{L}$ sur A, l'accouplement*

$$\langle -,- \rangle_p^{\mathcal{L}} : T_p(A,s) \times T_p(A,s) \to T_p(\mu,s)$$

est anti-symétrique.

Démonstration. On peut supposer $S = s$, et il suffit de montrer que

$$e_n^A(x, \Lambda(\mathcal{L})(x)) = 1$$

pour tout n et tout $x \in A[n]$. Si $\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}(D)$ pour un diviseur D sur A,

$$
\begin{array}{rcl}
\Lambda(\mathcal{L})(x) & = & \mathcal{T}_x^*\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}^{-1} \simeq \mathcal{O}_A(\mathcal{T}_x^*D - D) \\
\text{et} \quad [n]^*\Lambda(\mathcal{L})(x) & = & \mathcal{O}_A\left([n]^*\mathcal{T}_x^*D - [n]^*D\right) \simeq \mathcal{O}_A
\end{array}
$$

Choisissons $g \in K(A)$ tel que $\mathbf{div}(g) = [n]^*\mathcal{T}_x^*D - [n]^*D$. Alors

$$e_n^A\left(x, \Lambda(\mathcal{L})(x)\right) = \mathcal{T}_x^*g/g$$

et il faut montrer que $T_x^*g = g$. Posons $E = [n]^*D$ et choisissons y dans A tel que $ny = x$, de sorte que $\mathcal{T}_x \circ [n] = [n] \circ \mathcal{T}_y$ et

$$\mathbf{div}(g) = [n]^*\mathcal{T}_x^*D - [n]^*D = \mathcal{T}_y^*[n]^*D - [n]^*D = \mathcal{T}_y^*E - E$$

Puisque $nx = 0$, $[n] \circ \mathcal{T}_x = [n]$ donc $\mathcal{T}_x^*E = \mathcal{T}_x^* \circ [n]^*D = [n]^*D = E$ et

$$\mathbf{div}\left(\prod_{i=0}^{n-1} \mathcal{T}_{iy}^*g\right) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathcal{T}_{(i+1)y}^*E - \mathcal{T}_{iy}^*E = \mathcal{T}_x^*E - E = 0$$

donc $h = \prod_{i=0}^{n-1} \mathcal{T}_{iy}^*g$ est constant, et en particulier $1 = \mathcal{T}_y^*h/h = \mathcal{T}_x^*g/g$. $\square$

Corollary 18. *Pour toute polarisation $\lambda : A \to A^t$, l'accouplement*

$$\langle -,- \rangle_p^{\lambda} : T_p(A,s) \times T_p(A,s) \to T_p(\mu,s)$$

est anti-symétrique.

Le lemme suivant montre que l'on peut imposer la $(\mathcal{O},\star)$-linéarité d'un morphisme $\lambda : A \to A^t$ par une condition au niveau des modules de Tate.

Lemma 19. *Soit $(\mathcal{O},\star)$ une algèbre à involution, $\mathcal{O} \to \mathrm{End}_S(A)$ une action de $\mathcal{O}$ sur A/S et $\lambda : A \to A^t$ un morphisme. Alors λ est $(\mathcal{O},\star)$-linéaire si et seulement si $\langle ox, y \rangle_p^{\lambda} = \langle x, o^\star y \rangle_p^{\lambda}$ pour tout $o \in \mathcal{O}$ et $x, y \in T_p(A,s)$.*

Démonstration. On a

$$\langle ox, y\rangle_p^\lambda - \langle x, o^\star y\rangle_p^\lambda = \langle ox, \lambda y\rangle_p^A - \langle x, \lambda o^\star y\rangle_p^A = \left\langle x, (o^t\lambda - \lambda o^\star)y\right\rangle_p^\lambda$$

donc

$$\begin{aligned} \forall x, y \in T_p(A,s): \quad \langle ox, y\rangle_p^\lambda = \langle x, o^\star y\rangle_p^\lambda \quad &\iff \quad o^t\lambda = \lambda o^\star \text{ sur } T_p(A,s) \\ &\iff \quad o^t\lambda = \lambda o^\star \text{ dans } \mathrm{Hom}(A, A^t) \end{aligned}$$

par fidélité de $T_p(-,s)$. □

3.3. **Compléments.** Calculons l'accouplement $\langle -,-\rangle_p^{\mathcal{P}}$ sur $A \times_S A^t$, où $\mathcal{P}$ est le faisceau de Poincaré. Tout d'abord, appliquant (3.2) à $\alpha : A \to A \times_S A^t$ ou à $\alpha : A^t \to A \times_S A^t$, on trouve

$$\left\langle (x,0),(y,0)\right\rangle_p^{\mathcal{P}} = 0 = \left\langle (0,x^t),(0,y^t)\right\rangle_p^{\mathcal{P}}$$

pour tout $x, y \in T_p(A,s)$ et $x^t, y^t \in T_p(A^t,s)$, puisque $\alpha^*\mathcal{P}$ est trivial dans les deux cas. D'autre part,

$$\Lambda(\mathcal{P}) : A \times_S A^t \to (A \times_S A^t)^t = A^t \times_S A$$

est l'isomorphisme $(a, a^t) \mapsto (a^t, a)$. Donc pour $x, y \in T_p(A,s)$ et $x^t, y^t \in T_p(A^t,s)$,

$$\begin{aligned} \left\langle (x,x^t),(y,y^t)\right\rangle_p^{\mathcal{P}} &= \left\langle (x,0),(0,y^t)\right\rangle_p^{\mathcal{P}} - \left\langle (y,0),(0,x^t)\right\rangle_p^{\mathcal{P}} \\ &= \left\langle (x,0),(y^t,0)\right\rangle_p^{A\times_S A^t} - \left\langle (y,0),(x^t,0)\right\rangle_p^{A\times_S A^t} \\ &= \left\langle x, y^t\right\rangle_p^A - \left\langle y, x^t\right\rangle_p^A \end{aligned}$$

où la dernière égalité résulte de (3.1). Appliquons alors (3.2) à la transposition $\tau(a^t, a) = (a, a^t)$, en notant que $\tau^*\mathcal{P}$ est le fibré de Poincaré sur $A^t \times_S A$:

$$\left\langle (x,x^t),(y,y^t)\right\rangle_p^{\mathcal{P}} = \left\langle (x^t,x),(y^t,y)\right\rangle_p^{\tau^*\mathcal{P}} = \left\langle x^t, y\right\rangle_p^{A^t} - \left\langle y^t, x\right\rangle_p^{A^t},$$

d'où l'on déduit en prenant $y = 0$ et $x^t = 0$ que

$$\left\langle x, y^t\right\rangle_p^A + \left\langle y^t, x\right\rangle_p^{A^t} = 0.$$

Si $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur A, $\lambda = \Lambda(\mathcal{L}) : A \to A^t$ et $x, y \in T_p(A,s)$,

$$\left\langle \lambda^t x, y\right\rangle_p^{A^t} = \langle x, \lambda y\rangle_p^A = \langle x, y\rangle_p^{\mathcal{L}} = -\langle y, x\rangle_p^{\mathcal{L}} = -\langle y, \lambda x\rangle_p^A = \langle \lambda x, y\rangle_p^{A^t}.$$

Puisque $\langle -,-\rangle_p^{A^t}$ est parfait, $\lambda^t = \lambda$ sur $T_p(A,s)$ donc $\lambda^t = \lambda$ sur A_s, et $\lambda^t = \lambda$ sur A par rigidité. On a ainsi démontré que le morphisme $\Lambda : \mathbf{NS}_{A/S} \to \underline{\mathbf{Hom}}_{Gr}(A, A^t)$ atterrit dans la partie symétrique pour l'involution $\lambda \mapsto \lambda^t$.

4. Structures de niveaux

On souhaite ici remplacer les structures de niveaux naïves, qui sont de nature géométrique, par des structures de niveaux plus souples, et dont l'étude nous rapprocherait de l'algèbre linéaire. L'équivalence de catégorie de la proposition 4 est le dictionnaire qui permet une telle transposition, du moins lorsque la base S est connexe. Sur une base qui n'est plus nécessairement connexe, mais dont les composantes connexes sont ouvertes, on peut encore obtenir une théorie satisfaisante en travaillant séparément sur chacune de ces composantes. Mais sur une base S

trop pathologique, j'ignore s'il est possible d'obtenir encore une théorie intéressante. C'est pourquoi, dans tout ce qui suit, on se restreint le plus souvent à la sous-catégorie pleine **SchLn** de **Sch** formée des schémas qui sont localement noethériens : ces schémas sont localement connexes, et leurs composantes connexes sont donc ouvertes (et fermées).

4.1. **Définition.** Soit $\mathcal{O}$ une $\mathbb{Z}$-algèbre, $\star$ une involution de $\mathcal{O}$, p un nombre premier inversible dans S, Λ_p un $\mathcal{O}_p = \mathcal{O} \otimes \mathbb{Z}_p$-module qui est un $\mathbb{Z}_p$-module libre de rang $2g$, $\psi_p : \Lambda_p \times \Lambda_p \to \mathbb{Z}_p$ une forme symplectique non-dégénérée telle que

$$\forall o \in \mathcal{O}_p \text{ et } x, y \in \Lambda_b : \qquad \psi_p(ox, y) = \psi_p(x, o^\star y).$$

Soit enfin K un sous-groupe du groupe des similitudes $\mathcal{O}_p$-linéaires de (Λ_p, ψ_p).

Definition 20. Soit S un schéma connexe où p est inversible et (A, λ, ι) un S-schéma abélien (projectif) polarisé muni d'une action de $(\mathcal{O}, \star)$. Une *structure de niveau* K sur (A, λ, ι) est la donnée, pour un point géométrique s de S, d'une K-orbite $[\kappa] = \kappa K$ d'isomorphismes de $\mathcal{O}_p$-modules $\kappa : \Lambda_p \xrightarrow{\simeq} T_p(A, s)$ tels que

- **(I):** il existe un isomorphisme $T_p(\mu, s) \simeq \mathbb{Z}_p$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccc} \psi_p : & & \Lambda_p & \times & \Lambda_p & \to & \mathbb{Z}_p \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \langle -, - \rangle_p^\lambda : & & T_p(A, s) & \times & T_p(A, s) & \to & T_p(\mu, s) \end{array}$$

- **(II):** pour tout $\sigma \in \pi(S, s)$, il existe $k(\sigma) \in K$ tel que $\sigma \circ \kappa = \kappa \circ k(\sigma)$.

Remark 21. Si la propriété (I) (resp. (II)) est vérifiée pour un isomorphisme κ, elle l'est aussi pour tout $\kappa \circ k$ avec $k \in K$. Dans (II), l'élément $k(\sigma) = \kappa^{-1} \circ \sigma \circ \kappa$ est unique, et l'application $\sigma \to k(\sigma)$ est un morphisme de groupes $\pi(S, s) \to K$. Modulo les automorphismes intérieurs de K, ce morphisme de groupes ne dépend que de $[\kappa] = \kappa K$.

Remark 22. Soit s' un autre point géométrique de S. On sait alors qu'il existe des isomorphismes $\theta : \pi(S, s) \to \pi(S, s')$ et $\Theta : T_p(A, s) \to T_p(A, s')$ tels que

$$\Theta(\sigma t) = \theta(\sigma)\Theta(t) \quad \text{et} \quad \langle \Theta(t_1), \Theta(t_2) \rangle_p^\lambda = \langle t_1, t_2 \rangle_p^\lambda$$

pour tout $\sigma \in \pi(S, s)$ et $t, t_1, t_2 \in T_p(A, s)$. Soit $[\kappa] = \kappa K$ une structure de niveau K sur $T_p(A, s)$. Alors $[\Theta \circ \kappa] = \Theta \kappa K$ est une structure de niveau K sur $T_p(A, s')$. La paire d'isomorphismes (θ, Θ) n'est cependant bien définie que modulo l'action de $\pi(S, s)$ donnée par $\sigma \cdot (\theta, \Theta) = (\theta \circ \mathrm{Ad}(\sigma), \Theta \circ \sigma)$: puisque $\Theta \sigma \kappa K = \Theta \kappa K$, cela n'affecte nullement la construction de $[\Theta \circ \kappa]$. Une structure de niveau K donnée en un point géométrique s de S détermine donc uniquement une structure de niveau K en tout point géométrique s de S.

Remark 23. Si l'on ne suppose plus S connexe, une structure de niveau K sur A/S est une collection $([\kappa_{S'}])_{S'}$ de structures de niveau K sur $A_{S'}/S'$ pour $S' \in \pi_0(S)$.

Remark 24. Dans tous les cas, l'existence d'une structure de niveau K implique la $(\mathcal{O}, \star)$-linéarité de la polarisation $\lambda : A \to A^t$.

Donnons deux cas particuliers de structure de niveau :

Lemma 25. *On suppose S connexe. On note $K(n)$ le groupe des similitudes symplectiques $\mathcal{O}_p$-linéaires de (Λ_p, ψ_p) qui agissent trivialement sur $\Lambda_p / p^n \Lambda_p$.*

(1) *Pour $n = 0$, il existe au plus une structure de niveau $K(0)$ sur A/S : c'est l'ensemble de tous les isomorphismes $\mathcal{O}_p$-linéaires $\kappa : \Lambda_p \xrightarrow{\simeq} T_p(A, s)$ qui vérifient la condition (I).*

(2) *Pour $n > 0$, la donnée d'une structure de niveau $K(n)$ sur A/S équivaut à celle d'un isomorphisme $\mathcal{O}_p$-linéaire $\overline{\kappa} : (\Lambda_p/p^n\Lambda_p)_S \xrightarrow{\simeq} A[p^n]$ telle que pour un (resp. tout) point géométrique s de S, il existe un isomorphisme $\mathcal{O}_p$-linéaire $\kappa : \Lambda_p \xrightarrow{\simeq} T_p(A, s)$ vérifiant la condition (I) qui relève $\overline{\kappa}(s)$:*

$$\overline{\kappa}(s) = \kappa \bmod p^n : \quad \Lambda_p/p^n\Lambda_p \xrightarrow{\simeq} A[p^n](s) = T_p(A, s)/p^nT_p(A, s).$$

Démonstration. (1) C'est évident. (2) Soit $[\kappa]$ une structure de niveau $K(n)$ sur A/S. Alors $[\kappa]$ induit un isomorphisme $\mathcal{O}_p$-linéaire de $\pi(S, s)$-modules

$$\kappa \bmod p^n : \Lambda_p/p^n\Lambda_p \to A[p^n](s)$$

qui induit à son tour un isomorphisme $\mathcal{O}_p$-linéaire de S-schémas (en groupes) étales

$$\overline{\kappa} : (\Lambda_p/p^n\Lambda_p)_S \to A[p^n]$$

qui vérifie évidemment les conditions requises. Inversement, soit $\overline{\kappa}$ un tel isomorphisme. Soit X l'ensemble des relèvements de $\overline{\kappa}(s)$ en un isomorphisme $\mathcal{O}_p$-linéaires $\kappa : \Lambda_p \xrightarrow{\simeq} T_p(A, s)$ vérifiant la condition (I). Alors X est non-vide par hypothèse, c'est une $K(n)$-orbite par définition de $K(n)$, et c'est stable sous $\pi(S, s)$ par construction : c'est donc une structure de niveau $K(n)$ sur A/S. □

4.2. **Représentabilité.**

Proposition 26. *Soit K un sous-groupe ouvert (compact) du groupe des similitudes symplectiques $\mathcal{O}_p$-linéaires $K(0)$ de (Λ_p, ψ_p). Soit S un schéma localement noethérien. Pour tout S-schéma abélien (projectif) polarisé (A, ι, λ) muni d'une action de $\mathcal{O}$, le foncteur $\mathcal{F}_K : (\mathbf{SchLn}/S)^0 \to \mathbf{Ens}$ qui à T/S associe l'ensemble des structures de niveau K sur (A, ι, λ) est représentable par un revêtement étale d'un ouvert de S.*

Démonstration. Pour $K = K(0)$, $\mathcal{F}_K$ est représentable par la réunion des composantes connexes de S sur lesquelles pour un (ou pour tout) point géométrique s, il existe un isomorphisme $\mathcal{O}_p$ -linéaire $\Lambda_p \simeq T_p(A, s)$ vérifiant la condition (I).

Pour $K = K(n)$, fixons une $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$-base $(e_1, \cdots, e_{2g})$ de $\Lambda_p/p^n\Lambda_p$. Soient S_1 le produit de $2g$ copies de $A[p^n]$, $\sigma_i : S_1 \to A_{S_1}[p^n] = A[p^n] \times_S S_1$ la i-ème section et $\overline{\kappa}_1 : (\Lambda_p/p^n)_{S_1} \to A_{S_1}[p^n]$ le morphisme qui envoie e_i sur σ_i. C'est un morphisme de groupes entre deux revêtements étales (de même rang constant $(p^n)^{2g}$) de S_1, qui est lui-même un revêtement étale de S (de rang constant $(p^n)^{4g^2}$). Soit S_2 la réunion des composantes connexes de S_1 dans lesquelles pour un (ou tout) point géométrique s les deux conditions suivantes sont vérifiées : (a) $\overline{\kappa}_1(s)$ est un isomorphisme et (b) cet isomorphisme se relève en un isomorphisme $\mathcal{O}_p$-linéaire $\kappa : \Lambda_p \to T_p(A, s)$ vérifiant la condition (I). Alors la restriction $\overline{\kappa}_2$ de $\overline{\kappa}_1$ à S_2 est un isomorphisme $\mathcal{O}_p$-linéaire qui définit, d'après le lemme précédent, une structure de niveau $K(n)$ sur A_{S_2}. Le foncteur $\mathcal{F}_K$ est alors représentable par S_2, qui est bien un revêtement étale d'un ouvert fermé de S.

Traitons enfin le cas général. Puisque les $K(n)$ forment une base de voisinages ouverts de $1 \in K(0)$, il existe $n \geq 1$ tel que $K(n) \subset K$. Soit $S(n)$ le S-schéma qui représente $\mathcal{F}_{K(n)}$ et $[\kappa] \in \mathcal{F}_{K(n)}(S(n))$ la structure universelle de niveau $K(n)$ sur $A_{S(n)}$. Le groupe K agit à droite sur $\mathcal{F}_{K(n)}$ par précomposition sur les structures de niveaux, et cette action se factorise en une action du groupe fini $\overline{K} = K/K(n)$ sur $\mathcal{F}_{K(n)}$, donc en une action à droite de $\overline{K}$ sur le S-schéma $S(n)$ qui représente $\mathcal{F}_{K(n)}$. On note $\overline{S}$ le quotient de $S(n)$ par cette action et $[\overline{\kappa}] \in \mathcal{F}_K(\overline{S})$ la structure de niveau K induite par κ sur $A_{\overline{S}}$, définit de la manière suivante.

Soit $\overline{C}$ une composante connexe de $\overline{S}$, C une composante connexe de $S(n)$ au-dessus de $\overline{C}$, s un point géométrique de C, et $\overline{s}$ son image dans $\overline{C}$. Le morphisme $C \to \overline{C}$ est alors un revêtement galoisien de groupe $\overline{K}_C^{\mathrm{opp}}$, où $\overline{K}_C = K_C/K(n)$ est le stabilisateur de C dans $\overline{K}$. En particulier, on obtient une suite exacte

$$0 \to \pi(C, s) \to \pi(\overline{C}, \overline{s}) \to \overline{K}_C \to 0.$$

La structure $[\kappa]_{/C}$ détermine une $K(n)$-orbite d'isomorphismes $\mathcal{O}_p$-linéaires

$$\kappa_C : \Lambda_p \to T_p(A, s) = T_p(A, \overline{s})$$

vérifiant (I) et (II) : cette $K(n)$-orbite est $\pi(C, s)$-stable. Par définition,

$$\sigma \cdot \kappa_C K(n) = \kappa_C K(n) \cdot k(\sigma)$$

pour tout $\sigma \in \pi(\overline{C}, \overline{s})$ d'image $K(n) \cdot k(\sigma) = k(\sigma) \cdot K(n)$ dans $\overline{K}_C = K_C/K(n)$. La K_C-orbite engendrée par cette $K(n)$-orbite est donc $\pi(\overline{C}, \overline{s})$-stable. Pour un élément plus général k de K, l'isomorphisme $C \to Ck$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \pi(C, s) & \to & \pi(\overline{C}, \overline{s}) & \to & \overline{K}_C & \to & 0 \\ & & \downarrow\simeq & & \downarrow \mathrm{Id} & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \pi(Ck, sk) & \to & \pi(\overline{C}, \overline{s}) & \to & \overline{K}_{Ck} & \to & 0 \end{array}$$

où la dernière flèche verticale est $g \mapsto k^{-1}gk$, et la $K(n)$-orbite déterminée par la structure $[\kappa]_{/Ck}$ est la $K(n)$-orbite de $\kappa_{Ck} = \kappa_C k$. La K-orbite engendrée par la $K(n)$-orbite de κ_C est donc indépendante du choix de la composante C de $S(n)$ au-dessus de $\overline{C}$, et elle est $\pi(\overline{C}, s)$-stable comme l'est déjà la K_C-orbite de κ_C. En faisant varier la composante $\overline{C}$ de $\overline{S}$, on obtient ainsi notre structure $[\overline{\kappa}] \in \mathcal{F}_K(\overline{S})$.

Si deux morphismes $f, g : T \to \overline{S}$ induisent le même élément $f^*[\overline{\kappa}] = g^*[\overline{\kappa}]$ dans $\mathcal{F}_K(T)$, ils sont égaux : si ces deux morphismes se factorisent par $S(n) \to \overline{S}$, les morphismes relevés $f', g' : T \to S(n)$ induisent deux éléments de $\mathcal{F}_{K(n)}(T)$ qui ont la même image dans $\mathcal{F}_K(T)$ par hypothèse, donc (localement sur T) $f' = kg'$ pour un $k \in \overline{K}$, puis $f = g$; sinon, il existe un revêtement étale T' de T tel que les deux morphismes $f', g' : T' \to T \to S$ se factorisent par $S(n) \to \overline{S}$ (et induisent le même élément de $\mathcal{F}_K(T')$), donc $f' = g'$ et à nouveau $f = g$, puisque $T' \to T$ est un épimorphisme.

Soit enfin T un S-schéma (que l'on peut supposer connexe), $[\kappa] \in \mathcal{F}_K(T)$ une structure de niveau K sur A_T et $\kappa : \Lambda_p \to T_p(A, t)$ un élément de la K-orbite déterminée par $[\kappa]$ en un point géométrique t de T. L'action de $\pi(T, t)$ sur l'ensemble des $K(n)$-orbites dans κK se factorise par un quotient $\pi(T, t)/\pi(T', t)$ pour un revêtement étale galoisien T' de T, et $[\kappa]|T'$ est alors dans l'image de l'application évidente $\mathcal{F}_{K(n)}(T') \to \mathcal{F}_K(T')$. Il existe donc un morphisme $f' : T' \to S(n) \to \overline{S}$ tel que $[\kappa]|T' = f'^*[\overline{\kappa}]$. Les deux morphismes $T' \times_T T' \rightrightarrows T' \to \overline{S}$ induisent par pull-back le même élément de $\mathcal{F}_K(T' \times_T T')$: ils sont donc égaux d'après ce qui précède. Par descente des morphismes le long de $T' \to T$ (qui est un revêtement étale et à fortiori plat et quasi-compact), $f' : T' \to \overline{S}$ se factorise en $f : T \to \overline{S}$, avec $f^*[\overline{\kappa}] = [\kappa]$: le couple $(\overline{S}, \overline{\kappa})$ représente donc $\mathcal{F}_K$. □

4.3. **Variantes.** On peut aussi fixer directement un $\mathcal{O}$-module Λ qui est libre de rang $2g$ sur $\mathbb{Z}$, une forme symplectique non-dégénérée $\psi : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z}$ induisant $\star$ sur $\mathcal{O}$, et travailler simultanément avec tous les modules de Tate (i.e. avec $T_f(A, s)$ ou $V_f(A, s)$). Soit G le $\mathbb{Z}$-schéma en groupes des similitudes symplectiques $\mathcal{O}$-linéaires de (Λ, ψ). Pour un sous-groupe K de $G(\widehat{\mathbb{Z}})$, une structure de niveau K est alors une K-orbite d'isomorphismes $\widehat{\mathcal{O}}$-linéaires $\kappa : \widehat{\Lambda} \xrightarrow{\simeq} T_f(A, s)$ qui vérifie l'analogue de (I) (compatibilité des accouplements à un facteur près) et (II) (stabilité sous $\pi(S, s)$). On a bien sûr posé $\widehat{\mathcal{O}} = \mathcal{O} \otimes \widehat{\mathbb{Z}}$ et $\widehat{\Lambda} = \Lambda \otimes \widehat{\mathbb{Z}}$. Cependant, il faut alors travailler avec des schémas abéliens sur des bases S où tous les nombres premiers sont inversibles, i.e. avec des $\mathbb{Q}$-schémas. Lorsqu'on veut faire de la réduction modulo p, c'est-à-dire travailler avec des $\mathbb{Z}_{(p)}$-schémas, on doit donc plutôt travailler avec des sous-groupes K de $G(\widehat{\mathbb{Z}}^p)$, et des K -orbites d'isomorphismes $\widehat{\mathcal{O}}^p$-linéaires $\kappa : \widehat{\Lambda}^p \xrightarrow{\simeq} T_f^p(A, s)$.

Dans tous les cas sus-mentionnés, on montre comme ci-dessus que les foncteurs $\mathcal{F}_K$ que l'on obtient sont relativement représentables lorsque K est un sous-groupe ouvert et compact du groupe de similitudes où il vit.

5. Schémas Abéliens à Isogénie Près

5.1. **Définition.**

Definition 27. Soit S un schéma. La catégorie $\mathbf{Ab}_S$ des S-schémas abéliens est la sous-catégorie pleine de la catégorie des S-schémas en groupes dont les objets sont les S-schémas abéliens. Si S est localement connexe, la catégorie $\mathbf{Ab}_S^0$ des S-schémas abéliens *à isogénie près* est la catégorie dont les objets sont les S-schémas abéliens, mais où l'on modifie les groupes d'homomorphismes comme suit

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}_S^0}(A, B) = \prod_{C \in \pi_0(S)} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}_C}(A_C, B_C) \otimes \mathbb{Q}.$$

Si S n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, c'est donc plus simplement

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}_S^0}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}_S}(A, B) \otimes \mathbb{Q}.$$

On note en général

$$\mathrm{Hom}_S(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}_S}(A, B) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Hom}_S^0(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}_S^0}(A, B).$$

Remark 28. Si l'on ne suppose pas que S est localement connexe, il faut prendre pour $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}_S^0}(A, B)$ les sections globales du faisceau (pour la topologie de Zariski sur S) associé au préfaisceau qui à un ouvert U de S associe $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}_U}(A_U, B_U) \otimes \mathbb{Q}$.

Le nom "à isogénie près" provient du lemme suivant :

Lemma 29. *Un morphisme $\alpha : A \to B$ dans $\mathbf{Ab}_S^0$ est un isomorphisme si et seulement si, localement sur S, il existe un multiple entier $n\alpha$ de α qui est une isogénie dans $\mathbf{Ab}_S$.*

Démonstration. On peut supposer que S est connexe. Si α est un isomorphisme dans $\mathbf{Ab}_S^0$, il existe un entier n tel que $n\alpha$ est dans $\mathbf{Ab}_S$. C'est encore un isomorphisme dans $\mathbf{Ab}_S^0$, donc $V_f(n\alpha, s) : V_f(A, s) \to V_f(B, s)$ est un isomorphisme pour tout point géométrique s de S. En particulier, le noyau de $(n\alpha)_s$ est fini, donc $(n\alpha)_s$ est une isogénie et $n\alpha : A \to B$ est une isogénie. Inversement, montrons que toute isogénie $\alpha : A \to B$ est un isomorphisme dans $\mathbf{Ab}_S^0$. Puisque S est connexe, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $\ker \alpha \subset A[n]$. Alors $[n]_A$ se factorise par α, i.e. il existe un morphisme $\beta : B \to A$ tel que $[n]_A = \beta \circ \alpha$, et β est encore une isogénie. Il existe donc aussi $m > 0$ et $\gamma : A \to B$ tel que $[m]_B = \gamma \circ \beta$. Mais

$$[n]_A \circ \gamma = \gamma \circ [n]_A = \gamma \circ \beta \circ \alpha = [m]_B \circ \alpha$$

donc $\gamma = \frac{m}{n}\alpha$ dans $\mathrm{Hom}^0_S(A, B)$. Alors $(\frac{1}{n}\beta) \cdot \alpha = \mathbf{1}_A$ dans $\mathrm{End}^0_S(A)$ et

$$\alpha \cdot (\tfrac{1}{n}\beta) = (\tfrac{m}{n}\alpha) \cdot (\tfrac{1}{m}\beta) = \tfrac{1}{m}\gamma\beta = \mathbf{1}_B$$

dans $\mathrm{End}^0_S(B)$, donc α est inversible dans $\mathbf{Ab}^0_S$. □

5.2. **Sur un corps parfait.** L'intérêt de cette catégorie apparaît lorsqu'on travaille sur le spectre d'un corps parfait k, par exemple un corps de caractéristique 0, ou bien un corps fini, ou bien un corps algébriquement clos. On a alors :

Theorem 30. *La catégorie $\mathbf{Ab}^0_k$ est abélienne et semi-simple.*

Une variété abélienne A sur k est dite *simple* si elle ne contient pas de sous-variété abélienne $B \neq 0, A$. Si A est simple et $\alpha : A \to B$ est un morphisme non nul, alors $\ker(\alpha)^0_{red}$ est une sous-variété abélienne propre de A, donc $\ker(\alpha)^0_{red} = 0$ et α est fini. Si de plus B est simple, $A/\ker\alpha$ est une sous-variété abélienne non nulle de B, donc $A/\ker\alpha = B$ et α est une isogénie, donc un isomorphisme dans $\mathbf{Ab}^0_k$. On en déduit que pour A et B simples, tout élément non nul de $\mathrm{Hom}^0_k(A, B)$ est un isomorphisme dans $\mathbf{Ab}^0_k$. En particulier, $\mathrm{End}^0_k(A)$ est un corps.

Lemma 31. *Toute variété abélienne A sur k est isogène à une somme directe de sous-variétés abéliennes simples.*

Démonstration. Soit $i : B \hookrightarrow A$ une inclusion de variété abélienne (projective!) sur k, $i^t : A^t \to B^t$ le morphisme dual, $\mathcal{L}$ un faisceau inversible ample sur A, et $j : C \hookrightarrow A$ la composante connexe réduite du noyau de $i^t \circ \Lambda(\mathcal{L}) : A \to B^t$. C'est une sous-variété abélienne de A et $\dim B + \dim C = \dim B^t + \dim C = \dim A$. De plus, $x \in B \cap C$ implique $x \in B$ et $i^t \circ \Lambda(\mathcal{L}) \circ i(x) = \Lambda(i^*\mathcal{L})(x) = 0$, i.e. $i(x)$ appartient au noyau de $\Lambda(i^*\mathcal{L}) : B \to B^t$, qui est fini puisque $i^*\mathcal{L}$ est ample sur B. Donc $B \cap C$ est fini et $B \times C \to A$ est une isogénie. On conclut par récurrence. □

Le théorème résulte formellement de ce qui précède. Soient $\mathcal{C} = \mathbf{Ab}^0_k$ et $\mathcal{X}$ l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets simples de $\mathcal{C}$. Pour tout $[X] \in \mathcal{X}$, on note $\mathcal{C}(X)$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ formée des objets isomorphes à une somme directe finie de copies de X. Le foncteur évident $\oplus_{[X]\in\mathcal{X}}\mathcal{C}(X) \to \mathcal{C}$ est essentiellement surjectif d'après le lemme précédent, fidèle par construction, et plein puisque $\mathrm{Hom}^0_k(X, Y) = 0$ si $[X] \neq [Y]$ dans $\mathcal{X}$. C'est donc une équivalence de catégorie, et il suffit de montrer que $\mathcal{C}(X)$ est abélienne semi-simple pour tout $[X] \in \mathcal{X}$. Soit $D_X = \mathrm{End}^0_k X$, qui est un corps gauche d'après la discussion qui précède. Alors $A \mapsto \mathrm{Hom}^0(X, A)$ est un foncteur de $\mathcal{C}(X)$ dans la catégorie $\mathbf{Mod}^{df}_{D_X}$ des D_X-modules à droite de D_X-dimension finie, dont on montre facilement que c'est encore une équivalence de catégorie. En particulier, $\mathcal{C}(X)$ est abélienne semi-simple puisque $\mathbf{Mod}^{df}_{D_X}$ l'est.

5.3. **Variantes.** Pour diverses raisons, on voudrait aussi considérer une catégorie de variétés abéliennes où l'on n'inverse que les isogénies de degré premier à p, pour un nombre premier p fixé. C'est la catégorie $\mathbf{Ab}_S^p$ dont les objets sont encore les S-schémas abéliens, mais où l'on modifie maintenant les homomorphismes en posant

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Ab}_S^p}(A,B) = \mathrm{Hom}_S^p(A,B) = \prod_{C\in\pi_0(S)} \mathrm{Hom}_C(A_C,B_C)\otimes\mathbb{Z}_{(p)}.$$

Si S n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, alors plus simplement

$$\mathrm{Hom}_S^p(A,B) = \mathrm{Hom}_S(A,B)\otimes\mathbb{Z}_{(p)}.$$

Un morphisme $\alpha : A\to B$ de $\mathbf{Ab}_S^p$ est un isomorphisme si et seulement si, localement sur S, il existe un entier $n\geq 1$ premier à p tel que $n\alpha : A\to B$ soit une isogénie dans $\mathbf{Ab}_S$.

6. Problemes de type PEL, I

On définit ici ce qui sera le prototype de problèmes de modules que l'on sera amené à considérer dans la suite.

6.1. **Le problème de module sur $\mathbb{Q}$.** Soit B une $\mathbb{Q}$-algèbre semi-simple, $\star$ une involution de B, V un B-module de $\mathbb{Q}$-dimension $2g$, $\psi : V\times V\to\mathbb{Q}$ une forme symplectique telle que $\psi(bv,w)=\psi(v,b^\star w)$ pour tout $v,w\in V$ et $b\in B$. On note G le $\mathbb{Q}$-schéma en groupes des similitudes symplectiques B-linéaires de (V,ψ) et K un sous-groupe ouvert et compact de $G(\mathbb{A}_f)$. On considère le foncteur

$$\mathbf{M} : (\mathbf{SchLn}/\mathbb{Q})^0\to\mathbf{Ens}$$

définit de la manière suivante. Si S est un $\mathbb{Q}$-schéma localement noethérien,

$$\mathbf{M}(S) = \prod_{C\in\pi_0(S)}\mathbf{M}(C).$$

Et si S est de plus connexe, alors $\mathbf{M}(S)$ est l'ensemble des classes d'équivalences de quadruplets $(A,\iota,[\lambda],[\kappa])$ où

(1) A/S est un S-schéma abélien,
(2) $\iota : B\to\mathrm{End}_S^0(A)$ est un morphisme de $\mathbb{Q}$-algèbre,
(3) $[\lambda]=\mathbb{Q}\lambda\subset\mathrm{Hom}_S^0(A,A^t)$ pour une polarisation $\lambda : A\to A^t$,
(4) $[\kappa]$ est une structure de niveau K sur A.

On rappelle que ce dernier élément consiste en la donnée, pour un point géométrique s dans chaque composante connexe de S, d'une K-orbite stable sous $\pi(S,s)$ d'isomorphismes $\widehat{B}$-linéaires $\kappa : \widehat{V}\to V_f(A,s)$ pour lesquels il existe un isomorphisme $\mathbb{A}_f\xrightarrow{\simeq} V_f(\mu,s)$ qui fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
\widehat{\psi}: & & \widehat{V} & \times & \widehat{V} & \to & \mathbb{A}_f\\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\langle -,-\rangle_f^\lambda : & & V_f(A,s) & \times & V_f(A,s) & \to & V_f(\mu,s)
\end{array}$$

On dit que deux quadruplets $(A,\iota,[\lambda],[\kappa])$ et $(A',\iota',[\lambda'],[\kappa'])$ sont équivalents si et seulement si il existe une isogénie $\phi : A\to A'$ qui est compatible avec toutes les autres données, c'est-à-dire telle que

(1) $\phi\circ\iota(b)=\iota'(b)\circ\phi$ pour tout $b\in B$,
(2) $\phi^*[\lambda']=[\lambda]$ où $\phi^*[\lambda']=\mathbb{Q}\phi^*\lambda'$ avec $\phi^*(\lambda')=\phi^t\circ\lambda'\circ\phi$, et
(3) $\phi[\kappa]=[\kappa']$ où $\phi[\kappa]=[\phi\circ\kappa]$.

On peut aussi voir ces classes d'équivalence comme des classes d'isomorphisme, à condition de considérer la première donnée A comme un objet de $\mathbf{Ab}^0_S$, c'est-à-dire comme un S-schéma abélien à isogénie près. C'est la convention que l'on rencontre le plus souvent dans la littérature. On peut aussi définir $\mathbf{M}(S)$ pour une base S qui n'est pas connexe comme l'ensemble des classes d'équivalence (ou d'isomorphisme) de quadruplets $(A, \iota, [\lambda], [\kappa])$ exactement comme ci-dessus, avec notamment $[\lambda] = \mathbb{Q}\lambda$ pour une polarisation $\lambda : A \to A^t$ au-dessus de S tout entier, mais ce point de vue masque un peu le caractère local de cette troisième donnée.

Theorem 32. *Si K est assez petit, ce foncteur est représentable par un $\mathbb{Q}$-schéma de type fini et même quasi-projectif sur $\mathbb{Q}$.*

On fixe dans V un réseau Λ tel que $\widehat{\Lambda}$ est stable par K et $\psi(\Lambda, \Lambda) \subset \mathbb{Z}$. On note d^2 le cardinal de $\widehat{\Lambda}/\Lambda$. On choisit un ordre $\mathcal{O}$ dans B tel que $\mathcal{O} \cdot \Lambda \subset \Lambda$. Et on note

$$\mathbf{M}' : (\mathbf{SchLn}/\mathbb{Q})^0 \to \mathbf{Ens}$$

le foncteur qui à un $\mathbb{Q}$-schéma localement noethérien S associe l'ensemble des classes d'isomorphisme de quadruplets $(A, \iota, \lambda, [\kappa])$ où

(1) A/S est un S-schéma abélien,
(2) $\iota : \mathcal{O} \to \mathrm{End}_S(A)$ est un morphisme de $\mathbb{Z}$-algèbre,
(3) $\lambda : A \to A^t$ est une polarisation,
(4) $[\kappa]$ est une structure de niveau K,

où cette dernière structure est maintenant la donnée, pour un point géométrique s dans chacune des composantes connexes de S, d'une K-orbite stable sous $\pi(S, s)$ d'isomorphismes $\kappa : \widehat{\Lambda} \to T_f(A, s)$ tels qu'il existe un isomorphisme $\widehat{\mathbb{Z}} \to T_f(\mu, s)$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{cccccc} \widehat{\psi}: & \widehat{\Lambda} & \times & \widehat{\Lambda} & \to & \widehat{\mathbb{Z}} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \langle -, - \rangle_f^\lambda : & T_f(A, s) & \times & T_f(A, s) & \to & T_f(\mu, s) \end{array}$$

Cette structure de niveau garantit donc que λ est de degré d^2 et A/S de dimension relative g. Si K est assez petit, disons inclus dans le groupe $K(n)$ des similitudes symplectiques $\mathcal{O}$-linéaires de (Λ, ψ) qui sont l'identité modulo $n \geq 3$, cette structure de niveau K induit une structure de niveau $K(n)$, donc un isomorphisme

$$\overline{\kappa}(s) : \widehat{\Lambda}/n\widehat{\Lambda} = \Lambda/n\Lambda \simeq T_f(\mu, s)/nT_f(\mu, s) = A[n](s).$$

Choisissant une $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-base de $(\Lambda/n\Lambda)$, on obtient finalement une structure de niveau n naïve sur A/S, c'est-à-dire un point de $\mathbf{M}^g_{d,n}(S)$. On dispose donc d'un morphisme de foncteur $\mathbf{M}' \to \mathbf{M}^g_{d,n}$. Ce morphisme est relativement représentable. Cela résulte des deux lemmes suivants : le premier nous dit que les fibres de ce morphisme s'identifient aux foncteurs considérés dans le second.

Lemma 33. *Pour tout schéma abélien polarisé (A, λ) sur S et tout $n \geq 3$, tout automorphisme de (A, λ) qui agit trivialement sur $A[n]$ est trivial.*

Démonstration. Soit α un automorphisme de (A, λ). On a donc

$$\alpha^*\lambda = \lambda \iff \alpha^t\lambda\alpha = \lambda \iff \lambda^{-1}\alpha^t\lambda = \alpha^{-1} \iff \alpha^\star\alpha = \mathrm{Id}_A$$

où $\alpha \mapsto \alpha^\star$ est l'involution de Rosati associée à λ. Soit s un point géométrique de S. On sait que l'application $\alpha \mapsto \mathrm{tr}_{E_s/\mathbb{Q}}(\alpha^\star\alpha)$ est une forme quadratique définie positive sur $E_s = \mathrm{End}_s^0(A_s)$. En particulier, l'intersection de la sphère de rayon $[E_s:\mathbb{Q}]$ avec le réseau $\mathrm{End}_s(A_s)$ est un ensemble fini. Puisque cet ensemble contient tous les automorphismes de (A_s, λ_s), on en déduit que α_s est d'ordre fini. La $\mathbb{Q}$-algèbre engendré par α_s dans E_s est donc un produit de corps cyclotomiques, et l'image de α_s dans chacun de ces corps est une racine de l'unité. Si de plus α agit trivialement sur $A[n]$, chacune de ces racines est congruente à 1 modulo n, donc triviale puisque $n \geq 3$ – par un argument classique de Serre, cf. [6]. Mais alors $\alpha_s = \mathrm{Id} \in \mathrm{Aut}(A_s)$ pour tout point géométrique s de S, donc $\alpha = \mathrm{Id} \in \mathrm{Aut}(A)$. □

Lemma 34. *Pour tout $[A, \lambda, \overline{\kappa}] \in \mathbf{M}^g_{d,n}(S)$, le foncteur qui à $T \in$ **SchLn** associe l'ensemble des structures $(\iota, [\kappa])$ comme ci-dessus sur (A_T, λ_T) telles que $[\kappa]$ relève $\overline{\kappa}_T$ est représentable.*

Démonstration. Soit S_1 le S-schéma qui représente $T \mapsto \mathrm{Hom}_{Ann}(\mathcal{O}, \mathrm{End}_T(A_T))$ (Proposition 1) et $\iota_1 : \mathcal{O} \to \mathrm{End}_{S_1}(A_{S_1})$ la structure universelle. Soit S_2 le S_1-schéma qui représente le foncteur qui à T associe l'ensemble des structures de niveau K sur $(A_T, \iota_{1,T}, \lambda_T)$ (sans la condition de relèvement, Proposition 26) et $[\kappa_2]$ la structure de niveau K universelle sur $(A_{S_2}, \iota_{1,S_2}, \lambda_{S_2})$. Sur A_{S_2}, on dispose maintenant de deux structures de niveau n naïve, $\overline{\kappa}_1$ et $\overline{\kappa}_2 : (\Lambda/n\Lambda)_{S_2} \to A[n]_{S_2}$, où $\overline{\kappa}_1$ provient de $\overline{\kappa}$ et $\overline{\kappa}_2$ de $[\kappa_2]$. Soit S_3 l'ouvert fermé de S_2 où ces deux structures de niveau coïncident. Alors S_3 représente le foncteur considéré. □

Il en résulte que le foncteur $\mathbf{M}' : (\mathbf{SchLn}/\mathbb{Q})^0 \to \mathbf{Ens}$ est représentable. Considérons maintenant le morphisme évident $\mathbf{M}' \to \mathbf{M}$ qui correspond à l'inclusion des catégories $\mathbf{Ab}_S \to \mathbf{Ab}_S^0$. Nous allons montrer que c'est un *isomorphisme*, ce qui achèvera la preuve du théorème.

Lemma 35. *L'application $\mathbf{M}'(S) \hookrightarrow \mathbf{M}(S)$ est injective.*

Démonstration. On peut supposer S connexe. Soit $[A_i, \iota_i, \lambda_i, [\kappa_i]]$ deux éléments de $\mathbf{M}'(S)$ ayant la même image dans $\mathbf{M}(S)$. Cela signifie qu'il existe un isomorphisme $\alpha : A_1 \xrightarrow{\simeq} A_2$ dans la catégorie $\mathbf{Ab}_S^0$ des S-schémas abéliens à isogénie près qui est B-linéaire, vérifie $\mathbb{Q} \cdot \lambda_2 \circ \alpha = \mathbb{Q} \cdot \alpha \circ \lambda_1$ dans $\mathrm{Hom}_S^0(A_1, A_2^t)$, et

$$\kappa_2 K = V_f(\alpha) \circ \kappa_1 K \quad \text{dans } \mathrm{Hom}_{\widehat{B}}\left(\widehat{V}, V_f(A_2, s)\right).$$

En particulier, puisque $K \cdot \widehat{\Lambda} = \widehat{\Lambda}$,

$$V_f(\alpha)(T_f(A_1, s)) = V_f(\alpha) \circ \kappa_1(\widehat{\Lambda}) = \kappa_2(\widehat{\Lambda}) = T_f(A_2, s).$$

Choisissons $m \geq 1$ tel que $m\alpha$ soit une isogénie $\beta : A_1 \to A_2$. Alors

$$T_f(\beta)(T_f(A_1, s)) = mT_f(A_2, s))$$

donc $\beta | A_1[m] = 0$ et $\beta = \alpha' \circ [m]$ pour une isogénie $\alpha' : A_1 \to A_2$. On a

$$T_f(\alpha')(T_f(A_1, s)) = T_f(A_2, s)$$

donc α' est un isomorphisme dans $\mathbf{Ab}_S$. En d'autres termes, l'isomorphisme α (de $\mathbf{Ab}_S^0$) est déjà dans $\mathbf{Ab}_S$ et y est encore un isomorphisme. C'est bien sûr un isomorphisme $\mathcal{O}$-linéaire (par fidélité de $A \to T_f(A, s)$) qui envoie $[\kappa_1]$ sur $[\kappa_2]$ et λ_1 sur... $x\lambda_2 \in \mathrm{Hom}_S(A_2, A_2^t) \cap \mathbb{Q} \cdot \lambda_2$ pour un $x \in \mathbb{Q}$, disons $x = \frac{N}{D}$ avec $N, D \in \mathbb{Z}$, $D \geq 1$. Alors $Dx\lambda_2 = N\lambda_2$ et $D\lambda_2$ sont des polarisations de même degré $D^{2g}d^2$ sur A_2, donc $N > 0$ et $N = D$, i.e. $x = 1$. Donc

$$[A_1, \iota_1, \lambda_1, [\kappa_1]] = [A_2, \iota_2, \lambda_2, [\kappa_2]]$$

dans $\mathbf{M}'(S)$, ce qu'il fallait démontrer. □

Lemma 36. *L'application* $\mathbf{M}'(S) \to \mathbf{M}(S)$ *est surjective.*

Démonstration. On peut supposer S connexe. Soit $[A, \iota, [\lambda], [\kappa]] \in \mathbf{M}(S)$. Pour tout point géométrique s de S,

$$T(s) = \kappa \cdot \widehat{\Lambda} \subset V_f(A, s)$$

est un réseau de $V_f(A, s)$ stable sous $\widehat{\mathcal{O}}$ (puisque $\widehat{\Lambda}$ l'est et κ est $\widehat{B}$-linéaire), qui ne dépend pas du choix de $\kappa \in [\kappa]$, et qui est donc aussi stable sous l'action de $\pi(S, s)$ sur $V_f(A, s)$. En jonglant un peu avec les définitions de $\mathbf{Ab}_S^0$ et $V_f(A, s)$, on montre qu'il existe un isomorphisme $\alpha : B \to A$ dans $\mathbf{Ab}_S^0$ qui envoie $T_f(B, s)$ sur $T(s)$. En transportant toutes les structures sur A à B via cet isomorphisme, on peut donc supposer que $B = A$, i.e. $T(s) = T_f(A, s)$. Si $b \in \mathcal{O} \subset B$ et $m \geq 1$ est un entier tel que $m\iota(b) \in \mathrm{End}_S(A)$, alors

$$T_f(m\iota(b), s)(T_f(A, s)) = mT_f(\iota(b), s)(T_f(A, s)) \subset mT_f(A, s)$$

donc $m\iota(b) = 0$ sur $A[m]$ et $m\iota(b) = mb'$ pour un $b' \in \mathrm{End}_S(A)$, i.e. $\iota(b) \in \mathrm{End}_S(A)$. Donc $\iota : \mathcal{O} \to \mathrm{End}_S(A)$ est une $\mathcal{O}$-structure sur A. Sur A, on dispose aussi de la droite $\mathbb{Q}\lambda$ où $\lambda : A \to A^t$ est une polarisation. On sait d'autre part qu'il existe un isomorphisme $\mathbb{A}_f \to V_f(\mu, s)$ qui fait commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} \widehat{\psi}: & \widehat{\Lambda} & \times & \widehat{\Lambda} & \to & \widehat{\mathbb{Z}} & \subset & \mathbb{A}_f \\ & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow \\ \langle -, - \rangle_f^\lambda : & T_f(A, s) & \times & T_f(A, s) & \to & T_f(\mu, s) & \subset & V_f(\mu, s) \end{array}$$

L'image de $\widehat{\mathbb{Z}}$ par cet isomorphisme est de la forme $\nu^{-1}T_f(\mu, s)$ pour un $\nu \in \mathbb{A}_f^\times = \widehat{\mathbb{Q}}^\times = \mathbb{Q}_>^\times \cdot \widehat{\mathbb{Z}}^\times$, que l'on peut donc supposer dans $\mathbb{Q}_>^\times$. Alors $\nu\lambda$ est un morphisme $A \to A^t$ dans $\mathbf{Ab}_S^0$ et

$$\langle x, V_f(\nu\lambda, s)y \rangle_f^A = \nu \langle x, V_f(\lambda)y \rangle_f^A = \nu \langle x, y \rangle_f^\lambda \in T_f(\mu, s)$$

pour tout $x, y \in T_f(A, s)$, donc $V_f(\nu\lambda, s)$ envoie $T_f(A, s)$ dans $T_f(A^t, s)$. On en déduit comme précédemment que $\nu\lambda$ est un morphisme $A \to A^t$, et puisqu'un multiple entier positif de $\nu\lambda$ est une polarisation, $\nu\lambda$ est encore une polarisation [ce n'est pas évident]. On peut donc supposer que $\nu\lambda = \lambda$, i.e. $\nu = 1$ et l'on a alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} \widehat{\psi}: & \widehat{\Lambda} & \times & \widehat{\Lambda} & \to & \widehat{\mathbb{Z}} \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \langle -, - \rangle_f^\lambda : & T_f(A, s) & \times & T_f(A, s) & \to & T_f(\mu, s) \end{array}$$

Alors $[A, \iota, \lambda, [\kappa]] \in \mathbf{M}'(S)$ est un relèvement de $[A, \iota, [\lambda], [\kappa]] \in \mathbf{M}(S)$. □

6.2. **Le problème de module sur $\mathbb{Z}_{(p)}$.** L'approche précédente nous contraint à travailler sur $\mathbb{Q}$. Si l'on veut faire de la réduction en p, il nous faut donc “étendre” ce problème de module à $\mathbb{Z}_{(p)}$, donc travailler avec la variante $V_f^p(A, s)$ des modules de Tate, et les catégories $\mathbf{Ab}_S^p$ des “schémas abéliens à isogénie première à p près”.

Conservant les notations de la section précédente, on suppose que $K = K^pK_p$ pour des sous-groupes ouverts compacts K^p de $G(\mathbb{A}_f^p)$ et K_p de $G(\mathbb{Q}_p)$. On fixe en outre un $\mathbb{Z}_{(p)}$-ordre $\mathcal{O}_{(p)}$ dans B et un entier $d_p \in \mathbb{N}$ vérifiant l'hypothèse technique suivante : il existe dans V un $\mathcal{O}_{(p)}$-réseau $\Lambda_{(p)}$ tel que $\psi(\Lambda_{(p)}, \Lambda_{(p)}) \subset \mathbb{Z}_{(p)}$ et $\Lambda_{(p)}^{\perp}/\Lambda_{(p)}$ est de cardinal p^{2d_p}. On considère le foncteur

$$\mathbf{M}^p : (\mathbf{SchLn}/\mathbb{Z}_{(p)})^0 \to \mathbf{Ens}$$

qui à un $\mathbb{Z}_{(p)}$-schéma localement noethérien S connexe associe l'ensemble des classes d'isomorphismes de quadruplets $(A, \iota, [\lambda], [\kappa])$ où

(1) A/S est un objet de $\mathbf{Ab}_S^p$ (un schéma abélien à "isogénie première à p près"),
(2) $\iota : \mathcal{O}_{(p)} \to \mathrm{End}_S^p(A)$ est un morphisme d'anneau,
(3) $[\lambda] = \mathbb{Z}_{(p)}\lambda \subset \mathrm{Hom}_S^p(A, A^t)$ est une $\mathbb{Z}_{(p)}$-droite engendrée par une polarisation $\lambda : A \to A^t$ de degré $p^{2d_p}x$ avec $(x, p) = 1$,
(4) $[\kappa]$ est une structure de niveau K^p sur $(A, \iota, [\lambda])$

où cette dernière structure est maintenant la donnée, pour un point géométrique s de S, d'une K^p-orbite stable sous $\pi(S, s)$ d'isomorphismes $\widehat{B}^p = B \otimes \mathbb{A}_f^p$-linéaires $\kappa : \widehat{V}^p \xrightarrow{\simeq} V_f^p(A, s)$ tels qu'il existe un isomorphisme $\mathbb{A}_f^p \to V_f^p(\mu, s)$ qui rende commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
\widehat{\psi}^{(p)} : & \widehat{V}^p & \times & \widehat{V}^p & \to & \mathbb{A}_f^p \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\langle -, - \rangle_f^{p,\lambda} : & V_f^p(A, s) & \times & V_f^p(A, s) & \to & T_f^p(\mu, s)
\end{array}$$

Theorem 37. *Si K^p est assez petit, ce foncteur est représentable par schéma de type fini, et même quasi-projectif sur $\mathbb{Z}_{(p)}$.*

La preuve est identique à celle du théorème précédent. On choisit dans V un $\mathbb{Z}$-réseau Λ qui étend $\Lambda_{(p)}$, dans B un $\mathbb{Z}$-ordre $\mathcal{O}$ qui étend $\mathcal{O}_{(p)}$, et on montre que $\mathbf{M}^p = \mathbf{M}'^p$ pour un foncteur $\mathbf{M}'^p$ qui classifie les quadruplets $(A, \iota, \lambda, [\kappa])$ où A est un (vrai) S-schéma abélien, ι une action de $\mathcal{O}$ sur A/S, λ une polarisation de degré égal au cardinal de $\Lambda^{\perp}/\Lambda$, et $[\kappa]$ une structure de niveau K^p sur $T_f^p(A, s)$.

6.3. **Comparaison des deux problèmes de module sur $\mathbb{Q}$.** Il reste à répondre à la question suivante : dans quelle mesure le foncteur

$$\mathbf{M}^p : (\mathbf{SchLn}/\mathbb{Z}_{(p)})^0 \to \mathbf{Ens}$$

est-il une extension de

$$\mathbf{M} : (\mathbf{SchLn}/\mathbb{Q})^0 \to \mathbf{Ens}.$$

On ne peut pas directement comparer les foncteurs $\mathbf{M}^p|\mathbb{Q}$ et $\mathbf{M}$. Pour le faire, il faut introduire encore des variantes, par exemple un foncteur $\widetilde{\mathbf{M}}$ qui classifierait les schémas abéliens à isogénie près munis de polarisation, d'endomorphisme, et de structure de niveau K^p, qui nous donnerait des morphismes $\mathbf{M}^p \to \widetilde{\mathbf{M}}$ (correspondant à $\mathbf{Ab}_S^p \hookrightarrow \mathbf{Ab}_S^0$) et $\mathbf{M}|\mathbb{Q} \to \widetilde{\mathbf{M}}|\mathbb{Q}$ (oubli de la K_p-structure). On peut aussi utiliser ce qui à déjà été fait, et comparer directement les variantes $\mathbf{M}'$ et $\mathbf{M}'^p$ de $\mathbf{M}$ et $\mathbf{M}^p$. Si l'on définit $\mathbf{M}'$ via le choix de $(\Lambda, \mathcal{O}) \subset (V, B)$ et $\mathbf{M}'^p$ par $(\Lambda_{(p)}, \mathcal{O}_{(p)})$, on a alors directement un morphisme $\mathbf{M}' \to \mathbf{M}'^p|\mathbb{Q}$ qui correspond à l'oubli de la K_p-structure $[\kappa_p]$ pour $\kappa_p : \Lambda_p \to T_p(A, s)$. Si K^p est assez petit (donc $\mathrm{Aut}_S(A, \lambda, [\kappa^p]) = \{1\}$), les fibres de ce morphisme s'identifient exactement aux foncteurs $\mathcal{F}_{K_p}$ de la proposition 26. En particulier :

Lemma 38. *Si K_p est le groupe des similitudes symplectiques de (Λ_p, ψ_p), alors $\mathbf{M}' \to \mathbf{M}'^p|\mathbb{Q}$ est relativement représentable par des immersions ouvertes et fermées, donc $\mathbf{M}/\mathrm{Spec}\mathbb{Q}$ est un sous-schéma ouvert et fermé de la fibre générique de $\mathbf{M}^p/\mathrm{Spec}\mathbb{Z}_{(p)}$.*

Troisième partie 3. Structures de niveaux en p

7. Normes [To be Added]

8. Full Set of Sections [To be Added]

Quatrième partie 4. Algèbres de Lie

9. Algèbres de Lie

9.1. **Rappels.** Soit G un S-schéma en groupe. Pour tout S-schéma T, on note

$$\mathrm{Lie}G(T) = \ker\left(G(T[\epsilon]) \to G(T)\right).$$

On obtient ainsi un foncteur en groupe sur la catégorie des S-schémas. C'est en fait réprésentable par un S-schéma en groupes commutatifs, et même en $\mathcal{O}_S$-algèbre de Lie. Pour le voir, on étudie ce qu'est $\alpha \in \mathrm{Lie}G(S)$. Par définition, c'est un morphisme

$$\alpha : S[\epsilon] \to G \quad \text{tel que } \alpha \circ \mathrm{aug} : S \to S[\epsilon] \to G = e : S \to G.$$

Puisque $S \xrightarrow{\mathrm{aug}} S[\epsilon] \xrightarrow{\mathrm{struct}} S$ induisent des homéomorphismes sur les espaces sous-jacents, la composante topologique α_{top} de α n'est pas très mystérieuse : c'est juste e_{top}. Tout est donc dans le morphisme de $f^{-1}\mathcal{O}_S$-algèbre

$$\alpha^\# : \mathcal{O}_G \to e_*\mathcal{O}_{S[\epsilon]} = e_*\mathcal{O}_S \oplus e_*\mathcal{O}_S[\epsilon]$$

On a $\alpha^\# = e^\# + D \cdot \epsilon$ où $e^\# : \mathcal{O}_G \to e_*\mathcal{O}_S$ est le morphisme de faisceaux de $f^{-1}\mathcal{O}_S$-algèbres associé à $e : S \to G$ et où $D : \mathcal{O}_G \to e_*\mathcal{O}_S$ est un morphisme de $f^{-1}\mathcal{O}_S$-modules tel que

$$\forall a, b \in \mathcal{O}_G : \qquad D(ab) = e^\#(a)D(b) + e^\#(b)D(a)$$

On dit d'un tel morphisme que c'est une $f^{-1}\mathcal{O}_S$-dérivation. Si $\mathcal{I}$ est le noyau de $e^\#$, on a $e^\# : \mathcal{O}_G \to e_*\mathcal{O}_S \simeq \mathcal{O}_G/\mathcal{I}$. Donc $D(\mathcal{I}^2 + f^{-1}\mathcal{O}_S \cdot \mathcal{I}) = 0$ et on peut voir D comme un morphisme de $f^{-1}\mathcal{O}_S$-modules

$$D : \mathcal{O}_G/\mathcal{I}^2 + f^{-1}\mathcal{O}_S \cdot \mathcal{I} \to e_*\mathcal{O}_S.$$

Un tel morphisme est uniquement déterminé par sa restriction à

$$\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 + f^{-1}\mathcal{O}_S \cdot \mathcal{I} \to e_*\mathcal{O}_S$$

laquelle est équivalente à celle du morphisme de $e^{-1}f^{-1}\mathcal{O}_S = \mathcal{O}_S$-module

$$e^{-1}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 + f^{-1}\mathcal{O}_S \cdot \mathcal{I}) \to \mathcal{O}_S.$$

En considérant e comme le pull-back de $\Delta : G \to G \times_S G$ par (Id, e), on voit que

$$e^{-1}(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2 + f^{-1}\mathcal{O}_S \cdot \mathcal{I}) = e^*(\Delta^{-1}(\mathcal{J}/\mathcal{J}^2)) = e^*(\Omega^1_{G/S}) = \omega^1_{G/S}$$

où $\mathcal{J}$ est l'idéal de $\mathcal{O}_{G\times_S G}$ correspondant à la diagonale. On a obtenu :

$$\mathrm{Lie}G(S) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_S}(\omega^1_{G/S}, \mathcal{O}_S)$$

et plus généralement, $\mathrm{Lie}G = (\omega^1_{G/S})^\vee$. On peut vérifier que la structure de $\mathcal{O}_S$-module ainsi obtenue est donnée par $\gamma \mapsto (\epsilon \mapsto \gamma\epsilon)$, et que la structure de groupe sous-jacente à cette structure de $\mathcal{O}_S$-module coïncide avec celle provenant de la définition initiale de Lie$G$ comme noyau d'un morphisme de groupe. Si G/S est lisse de dimension relative g, $\Omega^1_{G/S}$ est un $\mathcal{O}_G$-module localement libre de rang g, donc $\omega^1_{G/S}$ itou et $\mathrm{Lie}G = \mathbf{V}(\omega^1_{G/S})$.

La structure de $\mathcal{O}_S$-algèbre de Lie provient de l'interprétation en termes de dérivation : si D_1 et D_2 sont deux dérivations, le produit $D_1D_2 - D_2D_1$ en est une également. Nous n'aurons pas besoin du crochet, mais il faut mentionner que si G est abélien, ce crochet est nul. Cette même interprétation montre que si $S = \mathrm{Spec}\mathbb{C}$, $\mathrm{Lie}G(\mathbb{C}) = T_0G$ est l'espace tangent de G en 0.

9.2. **Modules sur les algèbres d'Azumaya.** Soient $\mathcal{A}$ une $\mathcal{O}_S$-algèbre (pas nécessairement commutative) et $\mathcal{L}$ un $\mathcal{A}$-module. On suppose que $\mathcal{A}$ et $\mathcal{L}$ sont des $\mathcal{O}_S$-modules localement libres de rang fini. Alors l'application

$$a \in \Gamma(T, \mathcal{A}) \mapsto \det(a|\mathcal{L}_T) \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$$

induit un morphisme

$$\det(-|\mathcal{L}) : \Gamma(\mathcal{A}) \to \Gamma(\mathcal{O}_S) = \mathbf{A}^1_S$$

où $\Gamma(\mathcal{B})$ est le S-schéma (affine, lisse, en groupes commutatifs) qui représente le foncteur $T \mapsto \Gamma(T, \mathcal{B})$. Ce morphisme commute au changement de base : pour tout S-schéma T,

$$\det(-|\mathcal{L})_T = \det(-|\mathcal{L}_T) : \Gamma(\mathcal{A}_T) = \Gamma(\mathcal{A})_T \to \mathbf{A}^1_T.$$

Si $d : \Gamma(\mathcal{A}) \to \Gamma(\mathcal{O}_S)$ est un S-morphisme fixé, on peut définir un sous-foncteur

$$\mathcal{C}(d, \mathcal{L}) : (\mathbf{Sch}/S)^0 \to \mathbf{Ens}$$

du foncteur constant ponctuel S (qui à T/S associe le singleton $\mathrm{Hom}_S(T, S)$!) défini par la condition $\mathcal{C}(d, \mathcal{L})(T) \neq \emptyset$ si et seulement si $d_T = \det(-|\mathcal{L})_T$. Si le morphisme d lui-même est de la forme $\det(-|\mathcal{L}')$ pour un $\mathcal{A}$-module $\mathcal{L}'$ qui est localement libre sur S, on note $\mathcal{C}(\mathcal{L}', \mathcal{L})$ ce sous-foncteur, qui est donc défini par la condition

$$\mathcal{C}(\mathcal{L}', \mathcal{L})(T) \neq \emptyset \iff \det(-|\mathcal{L}')_T = \det(-|\mathcal{L})_T.$$

En général, j'ignore si ces foncteurs sont représentables, et je ne pense pas que ce soit le cas.

Definition 39. On dit que $\mathcal{A}$ est une $\mathcal{O}_S$-algèbre d'Azumaya si et seulement si $\mathcal{A}$ est, localement pour la topologie étale sur S, isomorphe à un produit d'algèbre $M_n(\mathcal{O}_S)$.

Proposition 40. *Soient $\mathcal{A}$ une $\mathcal{O}_S$-algèbre d'Azumaya et $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ deux $\mathcal{A}$-modules qui sont des $\mathcal{O}_S$-modules localement libres. Alors pour tout S-schéma T, on a $\mathcal{C}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)(T) \neq \emptyset$ si et seulement si localement pour la topologie étale sur T, $\mathcal{L}_{1,T} \simeq \mathcal{L}_{2,T}$ comme $\mathcal{A}_T$-modules. De plus, $\mathcal{C}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ est alors représentable par un ouvert de S.*

Démonstration. Soit $S' \to S$ un revêtement étale tel que $\mathcal{A}_{S'} \simeq \prod_j M_{n_j}(\mathcal{O}_{S'})$. Pour tout T/S, on note $T' = T \times_S S'$: c'est un revêtement étale de T. Supposons que $\mathcal{C}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)(T) \neq \emptyset$, donc $\mathcal{C}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)(T') \neq \emptyset$. Soit $U = \mathrm{Spec}R$ un ouvert affine de T', donc $\mathcal{A}_U = \widetilde{A}$ avec $A = \prod_j M_{n_j}(R)$ et $\mathcal{L}_i = \widetilde{L_i}$ pour un A-module L_i qui est un R-module localement libre de rang fini, donc de la forme $L_i = \prod L_{i,j}$ où $L_{i,j}$ est un $M_{n_j}(R)$-module qui est un R-module localement libre de rang fini, donc - d'après l'équivalence de Morita - de la forme $R^{n_j} \otimes_R (L^0_{i,j})$ pour un R-module localement libre $L^0_{i,j}$. Quitte à restreindre encore U, on peut supposer que tous ces $L_{i,j}$ sont libres sur R, disons de rang $r_{i,j}$. Puisque $\mathcal{C}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)(U) \neq 0$, $\det(a|L_1) = \det(a|L_2)$ pour tout $a \in A$, d'où l'on déduit facilement que $r_{1,j} = r_{2,j}$ pour tout j, donc $L_1 \simeq L_2$, donc $\mathcal{L}_{1,T'} \simeq \mathcal{L}_{2,T'}$ localement pour la topologie de Zariski sur T', donc $\mathcal{L}_{1,T} \simeq \mathcal{L}_{2,T}$ localement pour la topologie étale sur T. L'inverse est immédiat : si $\mathcal{L}_{1,T} \simeq \mathcal{L}_{2,T}$ après un changement de base fidèlement plat et quasi-compact $T' \to T$, alors $\det(\mathcal{L}_1)_{T'} = \det(\mathcal{L}_2)_{T'}$ donc $\det(\mathcal{L}_1)_T = \det(\mathcal{L}_2)_T$. Enfin, soit $\mathcal{L}_{i,S'} = \prod \mathcal{L}_{i,j}$ la décomposition de $\mathcal{L}_{i,S'}$ correspondant à $\mathcal{A}_{S'} = \prod_j M_{n_j}(\mathcal{O}_{S'})$, et soit $r_{i,j}$ le rang de $\mathcal{L}_{i,j}$. C'est une application continue de $S' \to \mathbb{N}$, donc

$$S'_0 = \{s' \in S' | \forall j : \quad r_{1,j}(s') = r_{2,j}(s')\}$$

est un ouvert de S', puis $S_0 = S - \pi(S' - S'_0)$ est un ouvert de S car $\pi : S' \to S$ est fini donc fermé, et cet ouvert représente $\mathcal{C}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ d'après la discussion précédente. □

Proposition 41. *Soient $\mathcal{A}$ une $\mathcal{O}_S$-algèbre d'Azumaya, $\mathcal{L}$ un $\mathcal{A}$-module qui est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre et $d : \Gamma(\mathcal{A}) \to \mathbf{A}^1_S$ un S-morphisme qui est de la forme* $\det(\mathcal{L}')$ *localement pour la topologie fpqc. Alors $\mathcal{C}(d, \mathcal{L})$ est représentable par un ouvert de S.*

Démonstration. Exercice. □

9.3. **Rigidification des algèbres de Lie.** On reprend les notations des problèmes de type PEL. On se donne donc une $\mathbb{Q}$-algèbre semi-simple B et un $\mathbb{Z}$-ordre R de B, et on considère des S-schémas abéliens A munis d'une action $\iota : R \to \mathrm{End}(A)$ (il n'y a pas besoin de polarisations dans cette section). Soit $\mathcal{L} = \mathrm{Lie}(A)$: c'est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre muni d'une action de la $\mathcal{O}_S$-algèbre localement libre (et même libre) $\mathcal{A} = R \otimes \mathcal{O}_S$. On voudrait rigidifier ce $\mathcal{A}$-module par une condition de déterminant.

Décomposons B en produit d'algèbre simple B_i de centre F_i et soit U l'ouvert de $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ au-dessus duquel (1) R est maximal et (2) les F_i sont non-ramifiés. On fixe un premier $p \in U$, et on choisit pour chaque i une extension L_i de F_i qui décompose B_i et est non-ramifiée au-dessus de p (il en existe...). Soit L le produit de ces extensions et $\mathcal{O}$ l'anneau des p-entiers dans L. C'est donc une extension finie et *non-ramifiée* de $\mathbb{Z}_{(p)}$. Par construction, $R \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}$ est un R-ordre maximal dans $B \otimes_{\mathbb{Q}} L \simeq \prod M_{n_i}(L)$, donc de la forme $\prod M_{n_i}(\mathcal{O})$. Ceci démontre que pour tout $p \in U$, $R \otimes \mathbb{Z}_{(p)}$ est une $\mathbb{Z}_{(p)}$-algèbre d'Azumaya. En travaillant un peu, on en déduit que $R \otimes \mathcal{O}_U$ est une $\mathcal{O}_U$-algèbre d'Azumaya mais nous n'en aurons pas vraiment besoin.

La proposition ci-dessus permet donc - si besoin est - d'affiner encore nos problèmes de modules, en se restreignant aux schémas abéliens A/S (munis d'une action de R) pour lesquels la structure de $\mathcal{A} = R \otimes \mathcal{O}_S$-module sur $\mathrm{Lie}A$ est essentiellement fixée par avance - mais il faut alors tout de même restreindre les-dits problèmes aux schémas S qui sont au-dessus de l'ouvert $U = U(R)$ de $\mathrm{Spec}\mathbb{Z}$ défini ci-dessus. En outre, il faut bien sûr être capable de *spécifier* le $\mathcal{A}$-module qui servira de modèle pour les algèbres de Lie, ou au moins son déterminant. C'est ce que nous allons faire dans la section suivante.

9.4. **Corps réflexe.** Soit V un B-module de $\mathbb{Q}$-dimension $2g$, G le $\mathbb{Q}$-groupe algébrique des automorphismes B-linéaires de V et $\mathcal{X} = G(\mathbb{R}) \cdot I$ une $G(\mathbb{R})$-orbite de structures complexes I sur $V_{\mathbb{R}}$ (i.e. $I \in G(\mathbb{R})$ et $I^2 = -1$). Pour tout $I \in \mathcal{X}$, on note $V_{\mathbb{R},I}$ le $B \otimes \mathbb{C}$-module défini par $(V_{\mathbb{R}}, I)$. La classe d'isomorphisme de ce module ne dépend pas du choix de I dans $\mathcal{X}$, puisque tout élément $g \in G(\mathbb{R})$ induit un isomorphisme de $B \otimes \mathbb{C}$-module $V_{\mathbb{R},I} \to V_{\mathbb{R},gI}$.

Fixons un ordre $R \subset B$, soit $\mathcal{A} = R \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{Z}}$ et $d(\mathcal{X}) : \Gamma(\mathcal{A})_{\mathbb{C}} \to \mathbf{A}^1_{\mathbb{C}}$ le déterminant du $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}$-module $V_{\mathbb{R},I}$ (pour n'importe quel $I \in \mathcal{X}$). Soit $L \subset \mathbb{C}$ un corps de nombre tel que $B \otimes L \simeq \prod M_{n_i}(L)$. Alors $B \otimes \mathbb{C} \simeq \prod M_{n_i}(\mathbb{C})$ donc $V_{\mathbb{R},I} \simeq \prod (\mathbb{C}^{n_i})^{r_i}$ et $V_{\mathbb{R},I} \simeq W \otimes_L \mathbf{C}$ pour $W = \prod (L^{n_i})^{r_i}$: le morphisme $d(\mathcal{X})$ est donc défini sur L.

Definition 42. Le corps réflexe $E = E(\mathcal{X})$ est le corps de définition de $d(\mathcal{X})$.

C'est donc un corps de nombre plongé dans $\mathbb{C}$, contenu dans tous les corps de nombres $L \subset \mathbb{C}$ qui décomposent B, mais qui est typiquement plus petit que leur intersection. Concrètement, c'est le sous-corps de $\mathbb{C}$ défini par

$$E(\mathcal{X}) = \mathbb{Q}\left(\det_{\mathbb{C}}\left(a|V_{\mathbb{R},I}\right) : a \in R\right) \subset \mathbb{C}$$

Avec les notations ci-dessus, on peut choisir dans le $B \otimes L$-module W un $\mathcal{O}_L$-réseau stable sous R, ce qui montre que $a \mapsto d(\mathcal{X})(a)$ atterrit en fait dans l'anneau des entiers $\mathcal{O}_E$ de E, i.e.

$$d(\chi) : \Lambda(\mathcal{A})_{\mathrm{Spec}\mathcal{O}_E} \to \mathbf{A}^1_{\mathrm{Spec}\mathcal{O}_E}.$$

Proposition 43. *Soit $p \in U(R)$, $\mathcal{O}$ l'anneau des p entiers dans $E(\mathcal{X})$, S un $\mathcal{O}$-schéma et A un S-schéma abélien muni d'une action de R. Alors*

$$\forall a \in R : \qquad \det(a|\mathrm{Lie}(A)) = d(\mathcal{X})(a)$$

est représentable par un ouvert de S.

En résumé, on peut spécifier le déterminant sur les algèbres de Lie, à condition de ne travailler qu'avec des schémas sur $U(R) \times \mathrm{Spec}\mathcal{O}_{E(\mathcal{X})}$: sur $U(R)$ pour que $\mathcal{A} = R \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{Z}}$ soit d'Azumaya, sur $\mathcal{O}_{E(\mathcal{X})}$ pour que le "modèle du déterminant" soit bien défini.

Références

[1] J. Dieudonné, A. Grothendieck, *Eléments de Géométrie algébriques*, Publications de L'IHES.

[2] Kottwitz, *Zeta functions of some simple Shimura Varieties*

[3] D. Mumford, *Abelian Varieties.*

[4] Mumford, *Geometric Invariant Theory.*

[5] Séminaire de Géométrie Algébrique.

[6] Serre, Appendice du Séminaire Cartan n°17, année 60/61.

[7] J. Tate, *Finite Flat Group Schemes.*