POINTS COMPLEXES & EXEMPLES

Table des matières

Dans cette troisième partie du cours, nous allons étudier les points complexes des différents problèmes de modules que nous avons définis.

Première partie 1. **Exemples**

1. La catégorie des variétés abéliennes sur $\mathbb{C}$

Référence : le cours de M. Hindry, ou celui de Milne, ou [5].

1. Soit A une variété abélienne sur $\mathbb{C}$. Alors T_0A est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et l'exponentielle $\exp : T_0A \to A$ est un morphisme de groupe surjectif dont le noyau est un réseau de T_0A. En particulier, A est un tore complexe V/Λ. On obtient ainsi : la catégorie des variétés abéliennes sur $\mathbb{C}$ est une sous-catégorie pleine de la catégorie des tores complexes.

2. Un tore complexe V/Λ est une variété abélienne si et seulement si il existe sur V une forme hermitienne $H : V \times V \to \mathbb{C}$ qui est (1) définie positive et (2) dont la partie imaginaire prend des valeurs entières sur le réseau Λ.

3. Toute forme sesquilinéaire [1] $H : V \times V \to \mathbb{C}$ se décompose uniquement en

$$H(x, y) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

où ϕ et $\psi : V \times V \to \mathbb{R}$ sont bilinéaires et vérifient pour tout $x, y \in V$,

$$\phi(x, y) = \psi(ix, y), \quad \phi(x, y) = -\psi(x, iy) \quad \text{et} \quad \psi(ix, iy) = \psi(x, y).$$

Inversement, toute forme bilinéaire $\psi : V \times V \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x, y \in V : \quad \psi(ix, iy) = \psi(x, y)$$

définit une forme sesquilinéaire

$$H(x, y) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \quad \text{où} \quad \phi(x, y) = \psi(ix, y).$$

Dans cette correspondance, on vérifie que

(1) H est non-dégénérée [2] si et seulement si ψ l'est,

(2) H est hermitienne [3] si et seulement si ψ est anti-symétrique, et

(3) H est hermitienne définie positive [4] si et seulement si ψ est anti-symétrique et $\psi(ix, y)$ est (symétrique et) définie positive.

4. Pour un tore complexe $X = V/\Lambda$, on pose $X^t = V^{\iota\star}/\Lambda^\star$ où

$$V^{\iota\star} = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V^\iota, \mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \Lambda^\star = \{f \in V^{\iota\star} | \mathrm{im} f(\Lambda) \subset \mathbb{Z}\}.$$

Les morphismes $\lambda : X \to X^t$ s'identifient donc

(1) aux applications $\mathbb{C}$-linéaires $\mathrm{Lie}(\lambda) : V \to V^{\iota\star}$ qui envoient Λ dans $\Lambda^\star$,

(2) aux formes sesquilinéaires $H : V \times V \to \mathbb{C}$ telles que $\mathrm{im}(H(\Lambda, \Lambda)) \subset \mathbb{Z}$,

(3) aux formes bilinéaires $\psi : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z}$ telles que $\psi_{\mathbb{R}}(ix, iy) = \psi_{\mathbb{R}}(x, y)$.

Dans cette correspondance,

$$H(x, y) = \mathrm{Lie}(\lambda)(x)(y) = \psi_{\mathbb{R}}(ix, y) + i\psi_{\mathbb{R}}(x, y)$$

et l'on vérifie facilement que

(1) λ est une isogénie si et seulement si ψ est non-dégénéré,

(2) $\lambda^t = \lambda$ si et seulement si ψ est symplectique,

---

1. Par convention, les formes sesquilinéaires sont linéaires en la première variable.
2. H est non-dégénérée $\Leftrightarrow$ $(\forall x : H(x, -) = 0 \Leftrightarrow x = 0)$ $\Leftrightarrow$ $(\forall x : H(-, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0)$.
3. H est hermitienne $\Leftrightarrow \forall x, y : H(y, x) = \overline{H(x, y)}$.
4. H est hermitienne définie positive $\Leftrightarrow H$ est hermitienne et $\forall x : H(x, x) > 0$.

(3) λ est une polarisation si et seulement ψ est symplectique et

$$\psi_{\mathbb{R},i}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_{\mathbb{R}}(ix,y)$$

est (symétrique et) définie positive.

5. La catégorie des tores complexes est équivalente à la catégorie des paires (Λ, I) où Λ est un réseau (i.e. un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini) et I une structure complexe sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $V = \Lambda \otimes \mathbb{R}$. Le tore complexe associé à une telle paire est $X = V_I/\Lambda$, où V_I est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel V muni de sa structure complexe I.

6. Une polarisation de (Λ, I) est une forme symplectique $\psi : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{R}$ telle que (1) $\psi_{\mathbb{R}}(Ix, Iy) = \psi_{\mathbb{R}}(x,y)$ et (2) la forme symétrique $\psi_{\mathbb{R},I}(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \psi_{\mathbb{R}}(Ix,y)$ est définie positive. La catégorie des variétés abéliennes sur $\mathbb{C}$ est équivalente à la catégorie des paires (Λ, I) qui sont polarisables.

7. La catégorie des variétés abéliennes polarisées est équivalente à la catégorie des triplets (Λ, ψ, I) où Λ est un réseau, $\psi : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z}$ une forme symplectique et I une structure complexe sur $V = \Lambda \otimes \mathbb{R}$ telle que (1) $I \in \mathbf{Sp}(V, \psi_{\mathbb{R}})$ et (2) $\psi_{\mathbb{R},I} > 0$. La variété abélienne associée est $A = V_I/\Lambda$, sa variété abélienne duale est $A^t = V_I^{\star\iota}/\Lambda^\star$, la polarisation $\lambda : A \to A^t$ est le morphisme $v \mapsto H(v, -)$ où $H : V \times V \to \mathbb{C}$ est la forme hermitienne (définie positive) induite par ψ, le module de Tate est

$$T_f A = T_f(A, \mathbb{C}) = \varprojlim n^{-1}\Lambda/\Lambda \simeq \widehat{\Lambda}$$

et l'accouplement de Weil $\langle -, - \rangle_f^\lambda : T_f A \times T_f A \to T_f \mu$ est

$$\forall x, y \in T_f A \simeq \widehat{\Lambda} : \qquad \langle x, y \rangle_f^\lambda = \xi^{\widehat{\psi}(x,y)}$$

où $\xi = \varprojlim \exp(\frac{2i\pi}{n}) \in T_f \mu$.

6. De même : la catégorie des tores complexes à isogénie près est équivalente à la catégorie des paires (V, I) où V est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie et I une structure complexe sur $V_{\mathbb{R}} = V \otimes \mathbb{R}$, une polarisation d'une telle structure est une forme symplectique $\psi : V \times V \to \mathbb{Q}$ telle que (1) $I \in \mathbf{Sp}(V_{\mathbb{R}}, \psi_{\mathbb{R}})$ et (2) $\psi_{\mathbb{R},I} > 0$, et la catégorie des variétés abéliennes sur $\mathbb{C}$ à isogénie près est équivalente à celle des paires (V, I) qui sont polarisables.

2. Exemple n°1 : Courbes Modulaires

On veut ici calculer les $\mathbb{C}$-points du schéma $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{1,n}^1 = Y(n)$. Il nous faut donc classifier les courbes elliptiques E sur $\mathbb{C}$, munies d'une polarisation principale (= de degré 1) et d'une structure de niveau n naïve $\kappa : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2 \simeq E[n]$. Il revient donc au même de classifier les quadruplets $(\Lambda, \psi, I, \kappa)$ où Λ est un réseau de rang 2, ψ une forme symplectique parfaite sur Λ, I une structure complexe sur $(\Lambda_{\mathbb{R}}, \psi_{\mathbb{R}})$ telle que $\psi_{\mathbb{R},I} > 0$, et κ un isomorphisme $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2 \simeq n^{-1}\Lambda/\Lambda$.

Il n'y a qu'une classe d'isomorphisme de $\mathbb{Z}$-module libre de rang 2 : $\Lambda = \mathbb{Z}^2$. Sur $\mathbb{Z}^2$, il y a exactement 2 formes bilinéaires alternées parfaites, données par $\pm \det$, et ces deux formes sont conjuguées par n'importe quel élément de déterminant -1 dans $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z})$. Il n'y a donc qu'une classe d'isomorphisme de couple (Λ, ψ), celle de $(\Lambda, \psi) = (\mathbb{Z}^2, \det)$ (où le déterminant est calculé dans la base canonique de $\mathbb{Z}^2$). Le groupe des automorphismes de (Λ, ψ) est $\Gamma = \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$.

Il est bien connu que l'application $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}) \to \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ est surjective. Les Γ-orbites de structures de niveau κ sont donc indexées par le quotient

$$\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times.$$

Le stabilisateur commun des κ est le sous-groupe de congruence $\Gamma(n)$ de $\Gamma(1) = \Gamma$ formé des matrices $g \in \mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ telles que $g \equiv \mathrm{Id} \bmod n$.

Enfin, toutes les structures complexes I sur $\Lambda \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ induisent sur ce $\mathbb{R}$-espace vectoriel une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 1 : toutes ces structures sont donc conjuguées par un élément de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$. Il y a en revanche exactement deux $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$-orbites, qui correspondent à l'orientation de (x, Ix). Les formes $\psi_{\mathbf{R},I}$ sont donc définies positives sur l'une de ces deux orbites, et définies négatives sur l'autre. Pour $I = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$,

$$\psi_{\mathbb{R},I}\left(\left(\begin{array}{c} x_1 \\ y_1 \end{array}\right), \left(\begin{array}{c} x_2 \\ y_2 \end{array}\right)\right) = \det\left(\begin{array}{cc} x_1 & -y_2 \\ y_1 & x_2 \end{array}\right) = x_1x_2 + y_1y_2$$

est définie positive, et le stabilisateur K_I de I dans $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})$ est $K_I = \mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$. On trouve donc :

$$\mathbf{M}(\mathbb{C}) = \coprod_{(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} \Gamma(n)\backslash\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})/\mathbf{SO}_2(\mathbb{R}).$$

Identifiant $\mathbf{SL}_2(\mathbb{R})/\mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$ au demi-plan supérieur $\mathcal{H} = \{\tau \in \mathbb{C} : \mathrm{im}\tau > 0\}$ par $g \mapsto g \cdot i$ (pour l'action usuelle de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}$), on voit donc que $\mathbf{M}(\mathbb{C})$ est la réunion disjointe indexée par $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ de copies de $Y(n) = \Gamma(n)\backslash\mathcal{H}$:

$$\mathbf{M}(\mathbb{C}) = \coprod_{\alpha \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times} Y(n)(\alpha)$$

On peut interpréter l'ensemble $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ des composantes connexes directement sur le problème de module. Pour tout schéma S et toute courbe elliptique E/S, l'accouplement de Weil $e_n : E[n] \times_S E^t[n] \to \mu_{n,S}$ est une forme bilinéaire alternée parfaite. Le choix d'une base x_1, x_2 de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$, permet donc d'associer à tout élément (E, λ, κ) de $\mathbf{M}(S)$ l'élément $e(x_1, \lambda(x_2))$ de $\mu_n(S)$. On atterrit en fait dans $\mu_n^\star(S)$, où $\mu_n^\star$ est le sous-foncteur des générateurs de μ_n, à savoir $\mu_n^\star = \mathrm{Spec}\mathbb{Z}[X]/\Phi_n(X)$ où Φ_n est le n-ième polynôme cyclotomique. On obtient un morphisme $\mathbf{M} \to \mu_n^\star$ qui donne en passant aux points complexes l'application recherchée

$$\mathbf{M}(\mathbb{C}) \twoheadrightarrow \mu_n^\star(\mathbb{C}) = \left\{\exp(\tfrac{2i\pi\alpha}{n}), \alpha \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\right\}.$$

Lorsque $n \geq 3$, on sait qu'il existe au-dessus de $\mathbf{M}(\mathbb{C})$ une courbe elliptique avec structure de niveau n qui est universelle. On peut décrire la restriction de ces objets à la composante connexe $Y(n)(\alpha)$ de $\mathbf{M}(\mathbb{C})$ qui est au-dessus de $\exp(\frac{2i\pi\alpha}{n})$. On considère pour cela l'action de $\mathbf{GL}_2(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{H} \times \mathbb{C}$ donnée par

$$g \cdot (\tau, z) = (g\tau, \delta(g, \tau)^{-1}z) \quad \text{où} \quad \delta\left(\left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}\right), \tau\right) = c\tau + d.$$

Cette action est compatible avec la relation d'équivalence définie par

$$(\tau, z) \sim (\tau, z') \iff z' - z \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$$

puisque $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau = \delta(g, \tau) \cdot (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}g\tau)$, et l'on peut donc former le quotient

$$\pi : E = \Gamma(n)\backslash (\mathcal{H} \times \mathbb{C}/\sim) \to Y(n) = \Gamma(n)\backslash\mathcal{H}.$$

La fibre de π au dessus de $\Gamma(n) \cdot \tau$ est

$$\Gamma(n)\backslash (\Gamma(n)\tau \times \mathbb{C}/\sim) \simeq \Gamma(n)_\tau\backslash\mathbb{C}/\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\tau$$

où $\Gamma(n)_\tau$ est le stabilisateur de τ dans $\Gamma(n)$. Puisque $n \geq 3$, $\Gamma(n)_\tau = \{1\}$ et

$$\pi^{-1}\left(\Gamma(n)\cdot\tau\right) \simeq E_\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$$

est une courbe elliptique. On peut donc voir $\pi : E \to Y(n)$ comme une courbe elliptique relative : c'est la courbe elliptique universelle. Pour $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, la section

$$\tau \in \mathcal{H} \mapsto (\tau, \tfrac{x}{n} + \tfrac{\alpha y}{n}\tau) \in \mathcal{H} \times \mathbb{C}/\sim$$

ne dépend que de l'image de (x, y) dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2$, et commute à l'action de $\Gamma(n)$. La structure de niveau n naïve ainsi obtenue,

$$\kappa_\alpha : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^2_{Y(n)} \hookrightarrow E$$

est la structure universelle au-dessus de $Y(n)(\alpha)$.

Remark 1. Le morphisme $Y(n) \to \mu_n^\star$ est la restriction à $Y(n)$ de la factorisation de Stein du morphisme structural $X(n) \to \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, où $X(n)$ est la compactification classique de $Y(n)$, construite en rajoutant des pointes à l'infini. Cf. [2].

3. Exemple n°2 : La variété de Siegel $\mathbf{M}^g_{1,n}$

Il s'agit maintenant de classifier les variétés abéliennes sur $\mathbb{C}$ de dimension g munies d'une polarisation principale et d'une structure de niveau n, ou, ce qui revient au même, les quadruplets $(\Lambda, \psi, I, \kappa)$ où Λ est un $\mathbb{Z}$-réseau de dimension $2g$, $\psi : \Lambda \times \Lambda \to \mathbb{Z}$ une forme symplectique parfaite, I une structure complexe sur $(\Lambda \otimes \mathbb{R}, \psi_\mathbb{R})$ telle que $\psi_{\mathbb{R},I} > 0$ et $\kappa : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \xrightarrow{\simeq} n^{-1}\Lambda/\Lambda$.

Tout espace symplectique (Λ, ψ) admet une base de Witt, et il n'y a donc qu'une classe d'isomorphisme, celle de

$$(\Lambda, \psi) = \left(\mathbb{Z}^{2g}, \begin{pmatrix} & -\mathrm{Id}_g \\ \mathrm{Id}_g & \end{pmatrix}\right)$$

Soit $G = \mathbf{Sp}(\Lambda, \psi)$ le $\mathbb{Z}$-groupe algébrique (lisse) des automorphismes de (Λ, ψ), donc $\operatorname{Aut}(\Lambda, \psi) = G(\mathbb{Z})$. Puisque G est lisse, le morphisme

$$G(\mathbb{Z}) \to G(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

est surjectif. Les classes d'isomorphismes de triplets (Λ, ψ, κ) sont indexées par

$$\mathcal{S} = \mathbf{GL}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})/\mathbf{Sp}_{2g}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

et leur groupe d'automorphisme commun est

$$\operatorname{Aut}(\Lambda, \psi, \kappa) = \Gamma(n) = \ker\left(G(\mathbb{Z}) \to G(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\right).$$

Toutes les structures complexes I sur $(\Lambda \otimes \mathbb{R}, \psi_\mathbb{R})$ telles que $\psi_{\mathbb{R},I} > 0$ sont conjuguées sous $G(\mathbb{R})$. En effet, si I_1 et I_2 sont deux telles structures, elles définissent avec $\psi_\mathbb{R}$ deux espaces hermitiens $(\Lambda \otimes \mathbb{R}, I_j, H_j)$ avec $H_j > 0$. Ces deux espaces hermitiens sont alors isomorphes, ce qui signifie qu'il existe un isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire $g : \Lambda \otimes \mathbb{R} \to \Lambda \otimes \mathbb{R}$ tel que $H_2(gx, gy) = H_1(x, y)$ et $gI_1 = I_2 g$. Puisque $\mathrm{im} H_j = \psi_\mathbb{R}$, $g \in G(\mathbb{R})$ et $I_2 = gI_1g^{-1}$. Finalement,

$$\mathbf{M}(\mathbb{C}) = \coprod_{\mathcal{S}} \Gamma(n)\backslash\mathcal{X} = \coprod_{\mathcal{S}} \Gamma(n)\backslash G(\mathbb{R})/K_I$$

où $\mathcal{X} = G(\mathbb{R}) \cdot I$ et K_I est le stabilisateur de I.

Exercise 2. Montrer que

$$\begin{aligned} G(\mathbb{R})/K_I &\simeq GL_n(\mathbb{C})\backslash\left\{\phi : \Lambda \hookrightarrow \mathbb{C}^g \text{ tel que } \psi_{\mathbb{R},\phi^{-1}\circ i\circ\phi} > 0\right\} \\ &\simeq \left\{\mathbb{Z}^g + \tau\mathbb{Z}^g : \tau \in M^g(\mathbb{C}) \quad \tau^t = \tau \quad \text{et} \quad \mathrm{im}(\tau) > 0\right\} \end{aligned}$$

En déduire que $\dim \mathbf{M} = \frac{1}{2}g(g+1)$.

4. Exemple n°3 : Endomorphismes

On se donne une $\mathbb{Q}$-algèbre semi-simple B avec une involution $\star$, un ordre $\mathcal{O}_B$ dans B stable sous $\star$, et on veut classifier les variétés abéliennes sur $\mathbb{C}$ de dimension g, munies d'une action de $\mathcal{O}_B$, d'une polarisation $(\mathcal{O}_B,\star)$-linéaire de degré d^2, et d'une structure de niveau n naïve. Il revient au même de classifier les quadruplets (Λ,ψ,κ,I) où Λ est un $\mathcal{O}_B$-module qui est libre de rang $2g$ sur $\mathbb{Z}$, $\psi : \Lambda\times\Lambda \to \mathbb{Z}$ une $(\mathcal{O}_B,\star)$-forme symplectique avec $\left|\Lambda^\perp/\Lambda\right| = d^2$, $\kappa : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \simeq n^{-1}\Lambda/\Lambda$ est un isomorphisme, et I une structure complexe $B\otimes\mathbb{R}$-linéaire sur $(V_\mathbb{R},\psi_\mathbb{R})$ telle que $\psi_{\mathbb{R},I} > 0$ (où $V = \Lambda\otimes\mathbb{Q}$).

4.1. Décomposition naïve.

Regroupant ces quadruplets en fonction de la classe d'isomorphisme des trois premières composantes, on trouve

$$\mathbf{M}(\mathbb{C}) = \coprod_{(\Lambda,\psi,\kappa)/\sim} \mathbf{M}(\Lambda,\psi,\kappa)$$

où pour chaque (Λ,ψ,κ) vérifiant les trois premières conditions ci-dessus, $\mathbf{M}(\Lambda,\psi,\kappa)$ est l'ensemble des structures complexes I vérifiant la dernière condition, modulo les automorphismes du triplet (Λ,ψ,κ). Soit $G = \mathbf{Aut}(\Lambda,\psi)$ le $\mathbb{Z}$-schéma en groupes des automorphismes ($\mathcal{O}_B$-linéaires) de (Λ,ψ). C'est un schéma en groupes de type fini sur $\mathbb{Z}$, et le groupe des automorphismes de (Λ,ψ) est le sous-groupe discret $\Gamma = G(\mathbb{Z})$ de $G(\mathbb{Q}) \subset G(\mathbb{R})$. Le stabilisateur de κ dans Γ est le groupe de congruence

$$\Gamma(n) = \ker\left(G(\mathbb{Z}) \to G(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})\right)$$

de $\Gamma = \Gamma(1)$. Les structures complexes I recherchées sont les éléments de $G(\mathbb{R})$ (i.e. les automorphismes $B\otimes\mathbb{R}$-linéaires de $(\Lambda_\mathbb{R},\psi_\mathbb{R})$) tels que $I^2 = -1$ et $\psi_{\mathbb{R},I} > 0$. Le groupe $G(\mathbb{R})$ agit sur cet ensemble par conjugaison. Regroupant ces structures complexes en fonction de leur classe de $G(\mathbb{R})$-conjugaison, on trouve donc

$$\mathbf{M}(\Lambda,\psi,\kappa) = \coprod_{I/\sim} \Gamma(n)\backslash\mathcal{X}(I) \quad \text{où } \mathcal{X}(I) = \mathrm{Ad}(G(\mathbb{R}))\cdot I = G(\mathbb{R})/K_I$$

où K_I est le commutant de I dans $G(\mathbb{R})$: c'est un sous-groupe fermé de $G(\mathbb{R})$ qui est contenu dans le groupe spécial orthogonal $SO(\Lambda_\mathbb{R},\psi_{\mathbb{R},I})$, et qui est donc compact puisque $\psi_{\mathbb{R},I} > 0$. On a ainsi obtenu une décomposition

$$\mathbf{M}(\mathbb{C}) = \coprod_{(\Lambda,\psi,\kappa)/\sim}\ \coprod_{I/\sim} \Gamma(n)\backslash\mathcal{X}(I).$$

Remark 3. Cette décomposition est un homéomorphisme si l'on munit chacun des

$$\Gamma(n)\backslash\mathcal{X}(I) = \Gamma(n)\backslash G(\mathbb{R})/K_I$$

de la topologie quotient de celle de $G(\mathbb{R})$. Puisque $\mathbf{M}$ est de type fini sur $\mathbb{Z}$, $\mathbf{M}(\mathbb{C})$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. On en déduit que l'ensemble des classes d'isomorphismes qui indexe cette décomposition de $\mathbf{M}(\mathbb{C})$ est fini.

4.2. **Décomposition un peu moins naïve.** On regroupe cette fois-ci nos quadruplets en fonction de la classe d'isomorphisme du couple (V, ψ), ce qui nous donne une décomposition

$$\mathbf{M}(\mathbb{C}) = \coprod_{[V,\psi]} \mathbf{M}([V, \psi]).$$

Fixons $[V, \psi]$. Soit $G = \mathbf{Sp}_B(V, \psi)$, c'est un $\mathbb{Q}$-groupe algébrique et $\mathrm{Aut}_B[V, \psi] = G(\mathbb{Q})$. On ajoute ensuite (Λ, κ) et I. Le groupe $G(\mathbb{A}_f)$ agit sur l'ensemble des (Λ, κ) par $g(\Lambda, \kappa) = (g\Lambda, g\kappa)$ où $g\Lambda = g \cdot \widehat{\Lambda} \cap V$ et

$$g\kappa : (g \bmod n) \circ \kappa : (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{2g} \to n^{-1}\Lambda/\Lambda = n^{-1}\widehat{\Lambda}/\widehat{\Lambda} \to n^{-1}g \cdot \widehat{\Lambda}/g \cdot \widehat{\Lambda} = n^{-1}g\Lambda/\Lambda.$$

Le groupe $G(\mathbb{R})$ agit sur l'ensemble des I par conjugaison. On regroupe ces structures en fonction de leur $G(\mathbb{A}_f) \times G(\mathbb{R}) = G(\mathbb{A})$-orbites, ce qui nous donne

$$\mathbf{M}([V, \psi]) = \coprod_{\mathcal{X}_f, \mathcal{X}_\infty} G(\mathbb{Q})\backslash(\mathcal{X}_f \times \mathcal{X}_\infty) \quad \text{où} \begin{cases} \mathcal{X}_f = G(\mathbb{A}_f) \cdot (\Lambda, \kappa) & = G(\mathbb{A}_f)/K_f \\ \mathcal{X}_\infty = G(\mathbb{R}) \cdot I & = G(\mathbb{R})/K_I \end{cases}$$

où K_f est le stabilisateur (ouvert et compact) de (Λ, κ) dans $G(\mathbb{A}_f)$ et K_I le stabilisateur (compact, puisque contenu dans $\mathbf{SO}(\psi_{\mathbb{R},I})$) de I dans $G(\mathbb{R})$. On a donc décomposé $\mathbf{M}(\mathbb{C})$ en un produit de

$$G(\mathbb{Q})\backslash\left(G(\mathbb{A}_f)/K_f \times \mathcal{X}_\infty\right) = G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K_f K_I.$$

4.3. **Conclusion.** On voudrait découper dans $\mathbf{M}$ des sous-foncteurs ouverts et fermés, dont les $\mathbb{C}$-points seraient une réunion d'un petit nombre de composantes connexes de $\mathbf{M}(\mathbb{C})$. Il nous faut pour cela savoir attacher à tout quadruplet $(A, \iota, \lambda, \kappa)$ de $\mathbf{M}(S)$ (sur une base S beaucoup plus générale que $\mathrm{Spec}\mathbb{C}$) des invariants qui, spécialisés à $S = \mathrm{Spec}\mathbb{C}$, déterminent au mieux la classe d'isomorphisme des triplets (Λ, ψ, κ) (auxquels il faut si possible adjoindre la classe de $G(\mathbb{R})$-conjugaison de I, où $G = \mathrm{Aut}(\Lambda, \psi)$ n'est à priori défini que lorsqu'on a déjà fixé Λ et ψ).

Le point de départ est $\Lambda = H_1(A, \mathbb{Z})$: la théorie cohomologique correspondant à ce H_1 est la cohomologie de Betti (de la variété topologique sous-jacente à $A(\mathbb{C})$), qui n'a donc aucun sens à priori sur une base S quelconque. Sur une base générale, on dispose cependant de deux théories cohomologiques qui permettent de palier partiellement à l'absence de Betti : la cohomologie étale - qui apparaîtra plus bas sous le déguisement des modules de Tate T_pA, et la cohomologie de de Rham, qui sera de même avantageusement remplacée par l'algèbre $\mathrm{Lie}A$.

5. Exemple n°4 : Variétés de type PEL

Soit B une $\mathbb{Q}$-algèbre semi-simple avec une involution $\star$, V un B-module de type fini, $\psi : V \times V \to \mathbb{Q}$ une forme symplectique induisant $\star$ sur B, $G = \mathbf{GSp}(V, \psi)$ le groupe des similitudes symplectiques B-linéaire de (V, ψ), K un sous-groupe ouvert compact de $G(\mathbb{A}_f)$, et $\mathcal{X}$ une $G(\mathbb{R})$-orbite de structures complexes I sur $(V_\mathbb{R}, \psi_\mathbb{R})$ telle que $\pm\psi_{\mathbb{R},I} > 0$ [5]. On veut classifier les variétés abéliennes A sur $\mathbb{C}$ à isogénie près, munies d'une action $\iota : B \to \mathrm{End}^0_\mathbb{C}(A)$, d'une droite $\mathbb{Q}\lambda \subset \mathrm{Hom}^0(A, A^t)$ où $\lambda : A \to A^t$ est une polarisation qui est $(B, \star)$-linéaire, et d'une structure de niveau K, i.e. d'une K-orbite d'isomorphismes B-linéaires $\kappa : \widehat{V} \to V_f A = V_f(A, \mathbb{C})$ qui est compatible modulo le choix d'un isomorphisme $\mathbb{A}_f \simeq V_f\mu$ avec les accouplements

$$\widehat{\psi} : \widehat{V} \times \widehat{V} \to \mathbb{A}_f \quad \text{et} \quad \langle -, - \rangle_f^\lambda : V_f A \times V_f A \to V_f\mu.$$

5. La condition $\psi_{\mathbf{R},I} > 0$ est stable par $\mathbf{Sp}(V, \psi)$, mais pas par $\mathbf{GSp}(V, \psi)$.

On demande en plus que $\mathrm{Lie}(A) \simeq (V_{\mathbb{R}}, I)$ comme $B \otimes \mathbb{C}$-module.

Il revient au même de classifier les quadruplets $(W, J, \mathbb{Q}\phi, \kappa K)$ où W est un B-module de type fini, J une structure complexe sur le $B_{\mathbb{R}}$-module $W_{\mathbb{R}}$ telle que $(V_{\mathbb{R}}, I) \simeq (W_{\mathbb{R}}, J)$ comme $B \otimes \mathbb{C}$-modules, $\phi : W \times W \to \mathbb{Q}$ une polarisation de (W, J), c'est-à-dire une forme symplectique induisant $\star$ sur B telle que

$$(1) : \phi_{\mathbb{R}}(Jx, Jy) = \phi_{\mathbb{R}}(x, y) \quad \text{et} \quad (2) : \phi_{\mathbb{R},I} > 0,$$

et où $\kappa : \widehat{V} \to \widehat{W}$ est enfin un isomorphisme E-linéaire qui envoie $\mathbb{A}_f^\times \widehat{\psi}$ sur $\mathbb{A}_f^\times \widehat{\phi}$.

La structure de niveau détermine la classe de $\mathbb{Q}_p$-similitude des B_p-modules symplectiques : $(V_p, \mathbb{Q}_p^\times \psi_p) \simeq (W_p, \mathbb{Q}_p^\times \phi_p)$ pour tout nombre premier p. De même, nous verrons plus bas que l'isomorphisme de $B \otimes \mathbb{C}$-module $(V_{\mathbb{R}}, I) \simeq (W_{\mathbb{R}}, J)$ et les conditions $\pm\psi_{\mathbb{R},I} > 0$, $\phi_{\mathbb{R},J} > 0$ déterminent la classe d'isomorphisme des triplets $(V_{\mathbb{R}}, I, \pm\psi_{\mathbb{R},I}) \simeq (W_{\mathbb{R}}, J, \phi_{\mathbb{R},J})$, donc aussi la classe d'isomorphisme des triplets $(V_{\mathbb{R}}, \pm\psi_{\mathbb{R}}, I) \simeq (W_{\mathbb{R}}, \phi_{\mathbb{R}}, J)$, et a fortiori la classe de $\mathbb{R}$-similitude des $B_{\mathbb{R}}$-modules symplectiques : $(V_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^\times \psi_{\mathbb{R}}) \simeq (W_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^\times \phi_{\mathbb{R}})$.

Si les $\mathbb{Q}$-similitudes de B-modules symplectiques vérifient le principe de Hasse, les données ci-dessus déterminent donc uniquement la classe d'isomorphisme de $(V, \mathbb{Q}^\times \psi) \simeq (W, \mathbb{Q}^\times \phi)$. Il nous reste alors à classifier, modulo $\mathrm{Aut}(V, \mathbb{Q}^\times \psi) = G(\mathbb{Q})$, les données $(\kappa K, J)$ où κ est maintenant un isomorphisme de $(\widehat{V}, \mathbb{A}_f^\times \widehat{\psi})$ (i.e. un élément de $G(\mathbb{A}_f)$) et J une structure complexe sur le $B_{\mathbb{R}}$-module symplectique $(V_{\mathbb{R}}, \psi_{\mathbb{R}})$ telle que $\pm\psi_{\mathbb{R},J} > 0$ et $(V_{\mathbb{R}}, I) \simeq (V_{\mathbb{R}}, J)$ comme $B \otimes \mathbb{C}$-module. Mais alors à nouveau $(V_{\mathbb{R}}, I, \pm\psi_{\mathbb{R},I}) \simeq (V_{\mathbb{R}}, J, \pm\psi_{\mathbb{R},J})$, donc aussi $(V_{\mathbb{R}}, I, \pm\psi_{\mathbb{R}}) \simeq (V_{\mathbb{R}}, J, \pm\psi_{\mathbb{R}})$, ce qui signifie qu'existe un automorphisme de $(V_{\mathbb{R}}, \mathbb{R}^\times \psi_{\mathbb{R}})$ (i.e. un élément de $G(\mathbb{R})$!) qui conjugue I et J, donc $J \in \mathcal{X}$. Finalement :

$$\mathbf{M}(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q}) \backslash \left(G(\mathbb{A}_f)/K \times \mathcal{X} \right).$$

Si le principe de Hasse est en défaut, on obtient une réunion finie de telles composantes, correspondant à des espaces $(W, \mathbb{Q}^\times \phi)$ qui sont partout localement isomorphes à $(V, \mathbb{Q}^\times \psi)$.

Deuxième partie 2. Classification(s)

On se propose ici de décrire, pour $F = \mathbb{Q}$, les ensembles suivants :

$\mathcal{A}(F)$ les classes d'isomorphismes de F-algèbres semi-simples A.

Pour tout $[A] \in \mathcal{A}(F)$,

$\mathcal{I}(A)$ les classes d'isomorphismes d'involution $\star$ sur A.

$\mathcal{P}(A)$ les classes d'isomorphismes de A-modules V de F-dimension finie.

Pour tout $[\star] \in \mathcal{I}(A)$, $[V] \in \mathcal{P}(A)$ et u dans

$$U = \{u \in Z(A) | u^\star u = 1\}$$

où l'on note $Z(A)$ le centre de A,

$\mathcal{H}(A, \star, u)(V)$ les classes d'isomorphismes de formes u-hermitiennes ψ sur V.

On en déduira une description de

$\mathcal{A}'(F)$ les classes d'isomorphismes de F-algèbres semi-simples à involution $(A, \star)$,

Et, pour tout $[A, \star] \in \mathcal{A}'(F)$,

$\mathcal{H}(A, \star, u)$ les classes d'isomorphismes de $(A, \star)$-espaces u-hermitiens

On note également

$I(A)$ l'ensemble des involutions de A et
$H(A,\star,u)(V)$ l'ensemble des formes u-hermitiennes ψ sur V.

Les définitions de ces objets et des isomorphismes entre iceux seront données en temps voulu. Dans les énoncés, le corps F sera toujours supposé parfait. Le plus souvent, F sera : un corps fini, un corps local non-archimédien ou archimédien, un corps de nombre, ou un corps algébriquement clos.

Note 4. Tout cela ne devrait guère servir dans la suite du cours !

6. Algèbres semi-simples

On ne donne pas de preuve ici, mais une référence : le cours de Milne [4].

6.1. **Décomposition.**

Proposition 5. *Toute F-algèbre semi-simple A est un produit fini de F-algèbres simples, et toute F-algèbre simple est isomorphe à une algèbre de matrice sur une F-algèbre à division de dimension finie. Donc*

$$A = A_1 \times \cdots \times A_r \quad \textit{avec } A_i \simeq M_{n_i}(D_i)$$

où D_i est un corps gauche de centre C_i, une extension finie de F.

Corollary 6. *Il y a une bijection entre* (1) *les composantes simples A_i de A,* (2) *les composantes simples $Z(A_i) \simeq C_i$ du centre $Z(A)$ de A, et* (3) *les idempotents centraux minimaux 1_{A_i} de A.*

6.2. **Classification.** Pour compléter l'étude de $\mathcal{A}(F)$, il reste à classifier les F-algèbres à division, ce qui revient à déterminer l'ensemble $\mathrm{Br}(K)$ des classes d'isomorphismes de corps gauche de centre K pour toute extension K de F. Dans ce qui suit, on prend $K = F$.

On dit que deux F-algèbres centrales simples A_1 et A_2 sont Brauer, ou Morita équivalentes si $A_1 \simeq M_{n_1}(D)$ et $A_2 \simeq M_{n_2}(D)$ pour un même corps gauche D (de centre $Z(D) = F$). Cette relation est compatible avec le produit tensoriel, qui munit donc l'ensemble $\mathrm{Br}(F)$ des classes d'équivalences de F-algèbre centrale simple d'une structure de monoide, et même de groupe puisque $D \otimes D^o \sim F$. Ce groupe admet une interprétation cohomologique

$$\mathrm{Br}(F) \simeq H^2(F, \mathbf{G}_m).$$

On a $\mathrm{Br}(F) = 0$ si F est fini (théorème de Wedderburn) ou si F est algébriquement clos. La proposition qui suit est intimement liée à la théorie du corps de classe.

Theorem 7. *Pour les corps qui nous intéressent :*

(1) *Si F est un corps local non-archimédien,*

$$H^2(F,\mathbf{G}_m) \leftarrow H^2_{nr}(F,\mathbf{G}_m) \leftarrow H^1_{nr}(F,\mathbb{Z}) \leftarrow H^0_{nr}(F,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

induit un isomorphisme $\mathrm{inv} : \mathrm{Br}(F) \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. *Si $[D:F] = d^2$, alors*

$$\mathrm{inv} D = \frac{r}{d} \bmod \mathbb{Z} \quad \textit{avec } (r,d) = 1.$$

(2) *Si F est un corps local archimédien,*

$$H^2(F,\mathbf{G}_m) = \begin{cases} \{0\} & \textit{si } F \simeq \mathbb{C} \\ \frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} & \textit{si } F \simeq \mathbb{R} \end{cases}$$

qui donne encore un morphisme $\mathrm{inv} : \mathrm{Br}(F) \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

(3) *Si F est un corps global, les morphismes* $\mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(F_v)$ *induisent*

$$\mathrm{Br}(F) \simeq \ker\left(\sum_v \mathrm{inv}_v : \oplus \mathrm{Br}(F_v) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\right).$$

Corollary 8. *Soit $A = M_n(D)$ une F-algèbre centrale simple. Les conditions suivantes sont équivalentes : (1) $A \simeq A^{opp}$ comme F-algèbre, (2) $2[A] = 0$ dans $\mathrm{Br}(F)$, (3) $2[D] = 0$ dans $\mathrm{Br}(F)$, (4) $D \simeq D^{opp}$ comme F-algèbre, (5) $D = F$ ou D est un corps de quaternions sur F.*

Démonstration. Les implications (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) sont évidentes. Supposons donc (4) et soit $d^2 = [D : F]$. Si F est local, $\mathrm{inv}D = \frac{r}{d} \bmod \mathbb{Z}$ avec $(r, d) = 1$ est tué par 2, donc $d = 1$ ou 2, d'où (5). Si F est global, on a de même $\mathrm{inv}_v D \in \{0, \frac{1}{2}\} \bmod \mathbb{Z}$ pour toute place v de F, et l'ensemble S des places ou $\mathrm{inv}_v D = \frac{1}{2}$ est pair. Soit B l'algèbre de quaternion sur F telle que $\mathbf{Ram}B = S$. Alors $[B] = [D]$ dans $\mathrm{Br}(F)$, donc $B \simeq D$ si B est un corps (i.e. $S \neq \emptyset$). Sinon, $[B] = 0 = [D]$, donc $D = F$ car D est un corps, d'où (5). Supposons enfin (5) et notons $\star$ l'identité de D si $[D : F] = 1$, l'involution canonique de D si $[D : F] = 4$. Alors $M \mapsto (M^\star)^t$ est une involution F-linéaire de $A = M_n(D)$, et cette involution induit en particulier un isomorphisme de F-algèbre $A \simeq A^{opp}$, d'où (1). □

7. Modules

On fixe une F-algèbre semi-simple A et on se propose de décrire l'ensemble $\mathcal{P}(A)$ des classes d'isomorphismes de A-modules (à gauche) de F-dimension finie. Si $A = \prod A_i$, on a évidemment $\mathcal{P}(A) = \prod \mathcal{P}(A_i)$. La proposition 5 nous ramène donc immédiatement au cas d'une F-algèbre simple, de la forme $A \simeq M_n(D)$ pour un corps gauche D (avec $F \subset Z(D)$). La proposition suivante (un cas particulièrement limpide d'équivalence de Morita) appliquée à $a = n$ et $b = 1$ montre alors que $\mathcal{P}(A) \simeq \mathcal{P}(D)$. La théorie de la dimension montre enfin que $\mathcal{P}(D) \simeq \mathbb{N}$.

Proposition 9. *Soit $A = M_a(D)$, $B = M_b(D)$, $X = M_{b,a}(D)$, $Y = M_{a,b}(D)$ et*

$$\mathcal{X} : \mathbf{Mod}(A) \leftrightarrow \mathbf{Mod}(B) : \mathcal{Y}$$

les foncteurs définis par $\mathcal{X}(V) = X \otimes_A V$ et $\mathcal{Y}(W) = Y \otimes_B W$. Alors $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

Démonstration. Le produit matriciel définit des isomorphismes de (A, A) (resp. (B, B)) bimodules $\alpha : Y \otimes_B X \simeq A$ et $\beta : X \otimes_A Y \simeq B$ qui induisent à leur tour des isomorphismes d'endofoncteurs

$$\alpha : \mathcal{Y} \circ \mathcal{X} \to \mathrm{Id}_{\mathbf{Mod}(A)} \quad \text{et} \quad \beta : \mathcal{X} \otimes \mathcal{Y} \to \mathrm{Id}_{\mathbf{Mod}(B)}$$

respectivement définis par

(1) $\alpha_V : Y \otimes_B (X \otimes_A V) \simeq (Y \otimes_B X) \otimes_A V \xrightarrow{\alpha} A \otimes_A V \simeq V$ et

(2) $\beta_W : X \otimes_A (Y \otimes_B W) \simeq (Y \otimes_A X) \otimes_B W \xrightarrow{\beta} B \otimes_B W \simeq W$.

CQFD. □

Conclusion 10. Si $A \simeq \prod_{i=1}^r M_{n_i}(D_i)$, alors

$$\mathcal{P}(A) \simeq \mathbb{N}^r \quad \text{via} \quad (x_1, \cdots, x_r) \mapsto \oplus_{i=1}^r (D_i^{n_i})^{x_i}.$$

8. Involutions

8.1. **Définitions.** Une involution d'un anneau A est un morphisme de groupe

$$\star : A \to A \quad \text{tel que } (ab)^\star = b^\star a^\star \quad \text{et} \quad a^{\star\star} = a.$$

On a alors $1_A^\star = 1_A$ et $\psi : A \to A^o$ est un isomorphisme d'anneau. On note $I(A)$ l'ensemble des involutions de A. On définit trois relations d'équivalences sur $I(A)$:

$\star_1 \equiv \star_2$ si et seulement si il existe un automorphisme intérieur $\mathrm{Ad}\alpha : A \to A$ tel que $\mathrm{Ad}\alpha \circ \star_1 = \star_2 \circ \mathrm{Ad}\alpha$.

$\star_1 \simeq \star_2$ si et seulement si il existe un automorphisme intérieur $\mathrm{Ad}a : A \to A$ avec $a \in A^\times$ et $a^{\star_1} = a$ tel que $\star_2 = \mathrm{Ad}a \circ \star_1$.

$\star_1 \sim \star_2$ si et seulement si il existe un automorphisme intérieur $\mathrm{Ad}a : A \to A$ avec $a \in A^\times$ tel que $\star_2 = \mathrm{Ad}a \circ \star_1$.

Dans le premier cas, $\star_2 = \mathrm{Ad}(\alpha\alpha^{\star_1}) \circ \star_1$ donc $\star_1 \simeq \star_2$ et bien sur $\star_1 \sim \star_2$. Dans le troisième cas, $(\mathrm{Ad}a \circ \star_1)^2 = 1$ donc $\mathrm{Ad}(a^{\star_1}) = \mathrm{Ad}(a)$ i.e. $a^{\star_1} = \lambda a$ avec $\lambda \in Z(A^\times)$. Puisque $\lambda = a^{\star_1}a^{-1} = a^{-1}a^{\star_1}$, on a $\lambda^c\lambda = 1$ où c est l'involution de $Z(A^\times)$ induite par $\star_1$ ou $\star_2 = \mathrm{Ad}a \circ \star_1$. La substitution $a \mapsto \frac{1}{\mu}a$ avec $\mu \in Z(A^\times)$ ne change pas $\star_2$, mais modifie λ en $\mu^{1-c}\lambda$. On a donc :

Proposition 11. *Pour $\star_1, \star_2 \in I(A)$:*

$$\star_1 \equiv \star_2 \implies \star_1 \simeq \star_2 \implies \star_1 \sim \star_2.$$

De plus :

1. *Dans la classe d'équivalence de $\star$ pour $\simeq$, les classes d'équivalences de $\equiv$ sont en bijection avec le quotient de $\{a \in A^\times | a^\star = a\}$ pour la relation d'équivalence $a \leftrightarrow \mu\alpha^\star a\alpha$, $\alpha \in A^\times$ et $\mu \in Z(A)^\times$, $\mu^\star = \mu$.*
2. *Dans la classe d'équivalence de $\star$ pour $\sim$, les classes d'équivalences de $\simeq$ sont en bijection avec un sous-ensemble de*
$$\{\lambda \in Z(A^\times) | \lambda^c\lambda = 1\} \bmod \{\mu/\mu^c | \mu \in Z(A^\times)\}$$
où $c = \star|Z(A)$ est la restriction de $\star$ au centre $Z(A)$ de A.

Classifier les involutions sur A signifie : déterminer les classes d'équivalences pour la plus fine de ces relations, à savoir $\equiv$. Pour ce faire, on commence par déterminer les classes d'équivalences pour $\sim$, puis $\simeq$.

8.2. **Décomposition et types.** Lorsque A est une F-algèbre semi-simple, tout $Z(A)$-automorphisme de A est intérieur, donc

Lemma 12. $\star_1 \sim \star_2 \iff \star_1$ *et* $\star_2$ *induisent la même involution c sur $Z(A)$.*

On note alors $I(A, c)$ l'ensemble des involutions de A qui induisent c sur $Z(A)$. C'est un sous-ensemble de $I(A)$ qui est soit vide, soit une classe d'équivalence pour $\sim$ (selon que c se prolonge ou non en une *involution* de A[6]). Tous les éléments de $I(A, c)$ induisent la même involution c sur l'ensemble des idempotents centraux minimaux, donc la même involution c sur l'ensemble des composantes simples de A. En regroupant ces composantes simples en c-orbites, on voit donc que l'étude de $I(A, c)$ se ramène à l'un des trois cas irréductibles suivants :

6. Attention : c se prolonge toujours en un automorphisme de A !

8.2.1. *Type D : $A = A_1 \times A_2$ avec A_1 et A_2 simples et échangés par c.* Soit $\star$ dans $I(A,c)$. Alors $\star|A_2$ induit un isomorphisme $A_2 \simeq A_1^{opp}$. Par transport de structure, on peut supposer que $A_2 = A_1^{opp}$ et que cet isomorphisme est l'identité, ce qui nous ramène à $A = A_1 \times A_1^{opp}$ avec $\star(0,a) = (a,0)$ donc $\star(a,0) = (0,a)$ et $\star(a,b) = (b,a)$. On en déduit facilement que les trois relations d'équivalences $\sim, \simeq$ et $\equiv$ coincident sur $I(A,c)$. Il n'y a qu'une classe d'équivalence pour chacune de ces relations.

8.2.2. *Type I : A est simple et $c = \mathrm{Id}$ sur $C = Z(A)$.* Soit $\star_1, \star_2 \in I(A,\mathrm{Id})$. Soit $a \in A^\times$ tel que $\star_2 = \mathrm{Ad}(a) \circ \star_1$. Alors $a^{\star_1} = \epsilon a$ avec $\epsilon \in \{\pm 1\}$ et

$$A[\star_2 \pm Id] = A[\star_1 \pm \epsilon Id] \cdot a$$

donc $\dim_C A[\star_2 \pm Id] = \dim_C A[\star_1 \pm \epsilon Id]$. Si $A = M_n(C)$ et $\star_1$ est la transposition,

$$\dim_C A[\star_1 - Id] = \frac{n(n+1)}{2} > \dim_C A[\star_1 + Id] = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Puisque toute C-algèbre centrale simple devient isomorphe à $M_n(C')$ sur une extension convenable C' de C, les classes d'équivalences de $\simeq$ dans $I(A,\mathrm{Id})$ sont

$$I(A,\pm) = \{\star \in I(A,\mathrm{Id}) | \dim_C A[\star \mp \mathrm{Id}] > \dim_C A[\star \pm \mathrm{Id}]\}.$$

Attention : il se peut toutefois que $I(A,\pm) = \emptyset$!

Proposition 13. *Soit $A = M_n(D)$ avec $Z(A) = Z(D) = C$ et $d^2 = [D : C]$.*

(1) *Si $d = 1$, $I(A,+) \neq \emptyset$ et ($I(A,-) \neq \emptyset \iff n \equiv 0 \bmod 2$).*

(2) *Si $d = 2$, $I(A,+) \neq \emptyset$ et $I(A,-) \neq \emptyset$. De plus, $I(D,-) = \{can\}$.*

(3) *Si $d > 2$ et $C \in \{loc, cn\}$, $I(A,+) = I(A,-) = \emptyset$.*

Démonstration. Si $\star \in I(D,\pm)$, alors $(m_{i,j}) \mapsto (m_{j,i}^\star) \in I(A,\pm)$. Si $D = C$, $I(D,+) = \{\mathrm{Id}\} \neq \emptyset$, qui donne $\star \in I(A,+) \neq \emptyset$. Les éléments de $I(A,\pm)$ sont alors de la forme $\mathrm{Ad}a \circ t$ avec $a^t = \pm a$, donc

$$I(A,-) \neq 0 \iff \exists a \in GL_n(C) | a^t = -a \iff n \equiv 0 \bmod 2.$$

Si D est un corps de quaternion sur C, l'involution canonique $\star = can$ est dans $I(D,-) \neq \emptyset$. Les éléments de $I(D,\pm)$ sont de la forme $\mathrm{Ad}d \circ \star$ avec $d^\star = \mp d$. Donc $I(D,-) = \{can\}$, $I(D,+) = \mathrm{Ad}(D_0^\times) \cdot \{can\} \neq \emptyset$ où $D_0 = \ker(\mathrm{tr} : D \to C)$ et $D_0^\times = D_0 - \{0\}$, et $I(A,\pm) \neq \emptyset$. Si enfin $d > 2$ et C est un corps local ou un corps de nombre, alors $A \not\simeq A^{opp}$ donc $I(A,\pm) = \emptyset$. $\square$

8.2.3. *Type II : A est simple et $c \neq \mathrm{Id}$ sur $C = Z(A)$.* Le théorème de Hilbert 90 montre alors que $\simeq = \sim$ sur $I(A,c)$.

Proposition 14. *Soit $A = M_n(D)$ avec $Z(A) = Z(D) = C$ et $d^2 = [D : C]$. Soit $C_0 = \{x \in C | x^c = x\}$.*

(1) *Si $d = 1$, $I(A,c) \neq \emptyset$.*

(2) *Si $d > 1$ et C est local, $I(A,c) = \emptyset$.*

(3) *Si $d > 1$ et C est global,*

$$I(A,c) \neq \emptyset \iff \forall v_0 \text{ de } C_0 : \sum_{v|v_0} \mathrm{inv}_v C = 0.$$

Démonstration. Si $d = 1$, $(m_{i,j}) \mapsto (m^c_{j,i}) \in I(A, c) \neq \emptyset$. En général : si $\star \in I(A, c)$, l'isomorphisme semi-linéaire $\star : A \to A^{opp}$ induit un isomorphisme de C-algèbres $A \otimes_{C,c} C \simeq A^{opp}$, donc $[A] + c[A] = 0$ dans BrC. Si C est local, l'action de c sur BrC est triviale, donc $2[A] = 0$ dans BrC, et $D = C$ ou bien D est un corps de quaternions. Dans le second cas, can $\circ \star$ fournit une donnée de descente sur D/C relativement à Spec$C \to$ SpecC_0 : il existe donc une C_0-algèbre (de quaternions) D_0 telle que $D_0 \otimes_{C_0} C \simeq D$. Mais alors $D \simeq M_2(C)$ puisque $[C : C_0] = 2$, une contradiction. Supposons enfin que C est global. Soit $v \mid v_0$ une place de c. Si $cv = c$, $\star \in I(A_v, c) \neq \emptyset$ donc $\mathrm{inv}_v A = 0$. Sinon, $\mathrm{inv}_v A + \mathrm{inv}_{cv} A = 0$. Pour la preuve de l'implication inverse $\Leftarrow$ dans (3), voir [6], mais nous n'en aurons (presque) pas besoin. □

8.3. **Conclusion.** On connaît maintenant les classes d'équivalences d'involutions sur A pour $\simeq$, ce que l'on appelle les types d'involution, qui sont donc des produits de types élémentaires D, $I(\pm)$ ou $II(c)$. On veut ensuite décomposer chacun de ces types en classes d'équivalence pour $\equiv$. Nous verrons plus bas que ce problème est un cas particulier de la classification des formes hermitiennes correspondant à une involution du type donnée.

9. Formes hermitiennes

9.1. **Définitions.** Soit A un anneau, $C = Z(A)$ le centre de A, $\star$ une involution de A, $U = \{u \in C | u^c u = 1\}$ le groupe des unités de (C, c).

Definition 15. Soit V un A-module à gauche. Une forme sesquilinéaire sur V est un morphisme biadditif $\psi : V \times V \to A$ tel que

$$\forall a, b \in A, \forall v, w \in V : \qquad \psi(av, bw) = a\psi(v, w)b^\star.$$

On note $S(A, \star)(V)$ l'ensemble des formes sesquilinéaires sur V. C'est un C-module à gauche muni d'une involution semi-linéaire τ définie par

$$(\tau\psi)(v, w) = \psi(w, v)^\star.$$

Definition 16. Soit $u \in U$ et V un A-module à gauche. Une forme u-hermitienne sur V est une forme sequilinéaire $\psi : V \times V \to A$ telle que

(1) $\tau\psi = u\psi$, i.e. $\psi(w, v)^\star = u\psi(v, w)$ pour tout $v, w \in V$, et
(2) ψ est non-dégénérée, i.e. $\psi(v, -) \equiv 0 \iff \psi(-, v) \equiv 0 \iff v = 0$.

On note $\mathcal{H}(A, \star, u)(V)$ l'ensemble des formes u-hermitiennes sur V et $\mathcal{H}(A, \star, u)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes d'espace u-hermitien (V, ψ) où V est de type fini sur A.

9.2. **Variantes.** Supposons que A est une F-algèbre semi-simple, et que $F \subset C$ est stable sous $\star$. On note $\mathrm{tr} = \mathrm{tr}_{A/F} : A \to F$ le composé de la trace réduite $\mathrm{tr}_{A/C} : A \to C$ et de la trace usuelle $\mathrm{Tr}_{C/F} : C \to F$.

Lemma 17. *C'est une application F-linéaire qui vérifie*

(1) $\mathrm{tr}(ab) = \mathrm{tr}(ba)$,
(2) $\mathrm{tr}(a-) \equiv 0 \iff \mathrm{tr}(-a) \equiv 0 \iff a = 0$,
(3) $\mathrm{tr}(a^\star) = \mathrm{tr}(a)^\star$.

Démonstration. Par définition, si $A = \prod A_i$ est la décomposition de A en facteurs simples A_i de centre C_i, on a

$$\mathrm{tr}_{A/F} = \sum_i \mathrm{tr}_{A_i/F} = \sum_i \mathrm{Tr}_{C_i/F} \circ \mathrm{tr}_{A_i/C_i}.$$

Les propriétés (1) et (2) résultent donc des propriétés similaires pour les algèbres centrales simples A_i/C_i, lesquelles se démontrent par passage à une clôture algébrique de C_i. Le même argument montre aussi que $\mathrm{tr}_{A/F}(a) = \mathrm{tr}_{A^{opp}/F}(a)$ pour tout $a \in A$. Si $\sigma : F \to F'$ est un isomorphisme de corps et $\sigma : A \to A'$ un isomorphisme σ-linéaire, on voit de même que

$$\sigma \circ \mathrm{tr}_{A/F} = \mathrm{tr}_{A'/F'} \circ \sigma : A \to F'.$$

Appliquant ceci à $\star : A \to A^{opp}$, on en déduit que

$$\mathrm{tr}_{A/F}(a)^\star = \mathrm{tr}_{A^{opp}/F}(a^\star) = \mathrm{tr}_{A/F}(a^\star)$$

pour tout $a \in A$. □

Corollary 18. *Pour tout A-module V de F-dimension finie, $\phi \mapsto \mathrm{tr}_{A/F} \circ \phi$ induit un isomorphisme* $\mathrm{Hom}_A(V, A) \to \mathrm{Hom}_F(V, F)$.

Démonstration. C'est F-linéaire et injectif par (2) : il suffit donc de voir que source et but ont même dimension. Or si $A \simeq \oplus A_i$ avec $A_i = M_{n_i}(D_i)$ et $V = \oplus V_i$ avec $V_i = V_{i,0}^{r_i}$ où $V_{i,0} = D_i^{n_i}$, on a

$$\mathrm{Hom}_A(V, A) = \oplus_i \mathrm{Hom}_{A_i}(V_i, A_i) = \oplus_i \mathrm{Hom}_{A_i}(V_{i,0}, A_i)^{r_i}$$

et $\mathrm{Hom}_{A_i}(V_{i,0}, A_i) \simeq \mathrm{Hom}_{D_i}(D_i, D_i^{n_i}) = (D_i^{opp})^{n_i}$ par Morita, donc

$$\dim_F \mathrm{Hom}_A(V, A) = \sum_i r_i n_i \dim_F D_i = \dim_F V = \dim_F \mathrm{Hom}_F(V, F),$$

CQFD. □

Munissons $\mathrm{Hom}_A(V, A)$ de la structure de A-module à gauche définie par

$$\forall a \in A \text{ et } v \in V : \qquad (a\Phi)(v) = \Phi(v)a^\star$$

Puisque $\mathrm{tr}(\Phi(v)a^\star) = \mathrm{tr}(a^\star\Phi(v)) = \mathrm{tr}(\Phi(a^\star v))$, elle correspond sur $\mathrm{Hom}_F(V, F)$ à

$$\forall a \in A \quad \text{et} \quad v \in V : \qquad (a\phi)(v) = \phi(a^\star v).$$

La donnée d'une forme sesquilinéaire $\Psi : V \times V \to A$ est équivalente à la donnée d'un morphisme de A-module $\Phi : V \to \mathrm{Hom}_A(V, A)$, via $\Phi(v)(w) = \Psi(w, v)$, donc à la donnée d'un morphisme de A-module $\phi : V \to \mathrm{Hom}_F(V, F)$, elle même équivalente à la donnée d'une forme bi-additive $\psi : V \times V \to F$, via $\phi(v)(w) = \psi(w, v)$. On obtient ainsi une bijection $\Psi \mapsto \psi = \mathrm{tr} \circ \Psi$ de l'ensemble des formes sesquilinéaires $\Psi : V \times V \to A$ sur l'ensemble des formes $\psi : V \times V \to F$ telles que

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in F \quad \text{et} \quad v, w \in V : \qquad \psi(\lambda_1 v, \lambda_2 w) = \lambda_1 \lambda_2^\star \psi(v, w)$$

et

$$\forall a \in A \quad \text{et} \quad v, w \in V : \qquad \psi(av, w) = \psi(v, a^\star w).$$

On note $S_F(A, \star)(V)$ l'ensemble de ces formes, que l'on appelle aussi sesquilinéaires.

L'involution $(\tau\Psi)(v, w) = \Psi(w, v)^\star$ de $S(A, \star)(V)$ correspond à l'involution donnée par la même formule $(\tau\psi)(v, w) = \psi(w, v)^\star$ sur $S_F(A, \star)(V)$, tandis que la structure de C-module $(c\Psi)(v,w) = c\Psi(v,w)$ de $S(A,\star)(V)$ correspond à la structure $(c\psi)(v,w) = \psi(cv,w) = \psi(v,c^\star w)$. L'ensemble $\mathcal{H}(A,\star,u)(V)$ des formes u-hermitiennes $\Psi : V \times V \to A$ correspond enfin à l'ensemble $\mathcal{H}_F(A,\star,u)(V)$ des formes sesquilinéaires $\psi : V \times V \to F$ telles que

$$(1) : \psi(w,v)^\star = \psi(uv,w) \quad \text{et} \quad (2) : \psi(v,-) \equiv 0 \iff \psi(-,v) = 0 \iff v = 0.$$

9.3. **Formes et Involutions.** Soit $(A,\star)$ comme ci-dessus et V un A-module à gauche de type fini. Pour tout $\psi \in \mathcal{H}(A,\star,u)(V)$, la formule

$$\forall v,w \in V : \qquad \psi(bv,w) = \psi(v,b^{\star_\psi}w)$$

définit une involution $\star_\psi$ de $B = \mathrm{End}_A V$.

Proposition 19. *Si A est simple de centre C, alors B est simple de centre C et*

(1) *Si $\star$ est de type $I(\pm)$, alors $\psi \mapsto \star_\psi$ induit une bijection*
$$\mathcal{H}(A,\star,\epsilon)(V) \bmod C^\times \simeq \mathcal{I}(B,\pm\epsilon).$$
(2) *Si $\star$ est de type $II(c)$, alors $\psi \mapsto \star_\psi$ induit une bijection*
$$\mathcal{H}(A,\star,u)(V) \bmod U \simeq \mathcal{I}(B,c).$$

Dans les deux cas, la relation d'équivalence $\equiv$ sur le terme de droite correspond à la relation $\psi \equiv \psi'$ si et seulement si il existe un A-isomorphisme de V qui envoie ψ sur un C-multiple de ψ' (le facteur multiplicatif est alors un élément inversible du sous-corps C_0 de C fixé par c). Si $A = D$ et $V = D^n$, alors $B = M_n(D)$. On obtient ainsi la classification annoncée des involutions :

(1) Pour connaître $\mathcal{I}(M_n(D),\pm)$ modulo $\equiv$, il suffit de déterminer $\mathcal{H}(D,\star,\pm\epsilon)$ pour une seule involution $\star \in \mathcal{I}(D,\epsilon)$.
(2) Pour connaître $\mathcal{I}(M_n(D),c)$ modulo $\equiv$, il suffit de déterminer $\mathcal{H}(D,\star,1)$ pour une seule involution $\star \in \mathcal{I}(D,c)$.

9.4. **Décomposition.**

Lemma 20. *Si $(A,\star) = \prod(A_i,\star_i)$, $Z(A) = \prod Z(A_i)$ et $u = (u_i)$, alors*
$$\mathcal{H}(A,\star,u) = \prod_i \mathcal{H}(A_i,\star_i,u_i).$$

Démonstration. C'est immédiat. □

Cela nous ramène immédiatement, dans la classification des espaces u-hermitiens, à l'un des quatre types élémentaires de $(A,\star)$: D (décomposé), $I(\pm)$ (simple de première espèce), ou $II(c)$ (simple de seconde espèce).

9.5. **Le type D.** On suppose que $(A,\star) = (A_1 \times A_1^{opp},\star)$ avec $(a,b)^\star = (b,a)$ (où A_1 est une F-algèbre simple). Alors $u = (u_1,u_1^{-1})$ avec u_1 dans le centre C_1 de A_1. Soit V un A-module à gauche. Alors $V = V_1 \times V_1^o$ où V_1 et V_1^o sont respectivement des A_1 et A_1^{opp}-modules à gauche. On regarde V_1^0 comme un A_1-module à droite. La donnée d'une forme sesquilinéaire $\psi : V \times V \to A$ est équivalentes à celles de deux applications

$$\psi_1 : V_1 \times V_1^0 \to A_1 \quad \text{et} \quad \psi_1^0 : V_1^0 \times V_1 \to A_1$$

telles que $\psi_1(av,wb) = a\psi_1(v,w)b$ et $\psi_1^0(wb,av) = a\psi_1^0(w,v)a$, via

$$\psi((v,w),(v',w')) = (\psi_1(v,w'),\psi_1^0(w,v')) \in A_1 \times A_1^0$$

On a alors $(\tau\psi)_1(v,w) = \psi_1^0(w,v)$ et $(\tau\psi)_1^0(w,v) = \psi_1(v,w)$. Donc ψ est u-hermitienne si et seulement si $\psi_1^0(w,v) = u_1\psi_1(v,w)$ et

$$\psi_1(v,-) \equiv 0 \iff \psi_1(-,v) \equiv 0 \iff v = 0.$$

Dans ce cas, ψ_1 induit un isomorphisme de A_1-modules à droite [7]

$$v_1^0 \in V_1^0 \mapsto \psi_1(-,v_1^0) \in \mathrm{Hom}_A(V_1, A_1).$$

Par transport de structure, on peut donc supposer que

$$V_1^0 = \mathrm{Hom}_A(V_1, A_1) \quad \text{avec} \quad \psi_1(v,w) = w(v)$$

et alors $\psi_1^0(w,v) = u_1 w(v)$. On en déduit que

Lemma 21. $(V,\psi) \mapsto V_1$ *induit une bijection* $\mathcal{H}(A,\star,u) \simeq \mathcal{P}(A_1)$.

9.6. **Les types I et II (Morita).** On fixe $(D,\star)$ et pour tout $x,y \in \mathbb{N}$, on note encore $\star : M_{x,y}(D) \to M_{y,x}(D)$ l'application $(m_{i,j}) \mapsto (m_{j,i}^\star)$. Soient

(1) $A = M_a(D)$ muni de $\star_A = \mathrm{Ad}u_A \circ \star \sim \star$ avec $u_A^\star = \epsilon_A u_A$, $\epsilon_A \in U$,

(2) $B = M_b(D)$ muni de $\star_B = \mathrm{Ad}u_B \circ \star \sim \star$ avec $u_B^\star = \epsilon_B u_B$, $\epsilon_B \in U$.

On considère

(1) $X = M_{ba}(D)$ muni de $[,]_B : X \times X \to B$ où $[x_1,x_2]_B = x_1 u_A x_2^\star u_B^{-1}$,

(2) $Y = M_{ab}(D)$ muni de $[,]_A : Y \times Y \to B$ où $[y_1,y_2]_A = y_1 u_B y_2^\star u_A^{-1}$.

On peut alors étendre les foncteurs de l'équivalence de Morita

$$\mathcal{X} : \mathbf{Mod}(A) \leftrightarrow \mathbf{Mod}(B) : \mathcal{Y} \qquad \mathcal{X}(V) = X \otimes_A V \quad \text{et} \quad \mathcal{Y}(W) = Y \otimes_B W$$

aux catégories d'espaces sesquilinéaires

$$\mathcal{X} : S(A,\star_A) \leftrightarrow S(B,\star_B) : \mathcal{Y}$$

en posant :

(1) Pour $V \in \mathbf{Mod}(A)$ et $\phi \in S(A,\star_A)(V)$, $\mathcal{X}(\phi) : \mathcal{X}(V) \times \mathcal{X}(V) \to B$ est

$$\mathcal{X}(\phi)(x_1 \otimes v_1, x_2 \otimes v_2) = [x_1\phi(v_1,v_2), x_2]_B.$$

(2) Pour $W \in \mathbf{Mod}(B)$ et $\psi \in S(B,\star_B)(W)$, $\mathcal{Y}(\psi) : \mathcal{Y}(V) \times \mathcal{Y}(V) \to A$ est

$$\mathcal{Y}(\phi)(y_1 \otimes w_1, y_2 \otimes w_2) = [y_1\psi(w_1,w_2), y_2]_B.$$

On vérifie aisément que

$$\mathcal{X}(\tau\phi) = \epsilon_A\epsilon_B\tau\mathcal{X}(\phi) \quad \text{et} \quad \mathcal{Y}(\tau\psi) = \epsilon_A\epsilon_B\tau\mathcal{Y}(\psi).$$

On en déduit que pour $\mathcal{V} \leftrightarrow \mathcal{W}$, les constructions ci-dessus induisent des bijections

$$\mathcal{H}(A,\star_A,u\epsilon_A) \leftrightarrow \mathcal{H}(B,\star_B,u\epsilon_B)$$

pour tout u dans $U = \{u \in Z(D) | u^c u = 1\}$.

---

7. C'est le seul endroit où l'on a besoin des hypothèses de finitudes - de A_1 et V sur F- pour ramener cette question à un calcul de F-dimension.

9.7. **Les types I et II (Classification).** D'après les résultats qui précèdent, il ne nous reste plus qu'à étudier les cas suivants (où loc=corps local non-archimédien et cn=corps de nombre) :

(1) $\mathcal{Q}(F) = \mathcal{H}(F, 1, 1)$ pour $F \in \{loc, \mathbb{R}, \mathbb{C}, cn\}$,
(2) $\mathcal{A}(F) = \mathcal{H}(F, 1, 1)$ pour $F \in \{loc, \mathbb{R}, \mathbb{C}, cn\}$,
(3) $\mathcal{Q}(B) = \mathcal{H}(B, can, 1)$ pour B/F corps de quaternions, $F \in \{loc, \mathbb{R}, cn\}$,
(4) $\mathcal{A}(B) = \mathcal{H}(B, can, -1)$ pour B/F corps de quaternions, $F \in \{loc, \mathbb{R}, cn\}$,
(5) $\mathcal{H}(K) = \mathcal{H}(K, c, 1)$ pour K/F quadratique avec $F \in \{loc, \mathbb{R}, cn\}$,
(6) $\mathcal{H}(D) = \mathcal{H}(D, \star, 1)$ pour $D/K/F$ centrale simple avec $F \in \{cn\}$.

Mentionnons quelques principes généraux :

(1) Toutes les formes admettent des décompositions de Witt : hyperbolique + anisotrope. Cela permet de définir l'index de Witt.
(2) Toutes les formes sont diagonalisables, sauf pour $\mathcal{A}(F)$. Cela permet de calculer/définir le déterminant (ou le discriminant), ainsi que d'autres invariants : signature, invariants de Hasse...
(3) Toutes les formes vérifient le principe de Hasse, *sauf* $\mathcal{A}(D)$.

Donnons enfin la liste des invariants qui permettent de classifier toutes ces formes.

9.7.1. *Pour* $\mathcal{A}(F)$. Le rang suffit. C'est le double de l'index.

9.7.2. *Pour* $\mathcal{Q}(F)$. C'est le cas le plus classique, très lié à la théorie du corps de classe. Les invariants sont

$$\begin{cases} F = \mathbb{R} & \text{rang, signature} \\ F = \mathbb{C} & \text{rang} \\ F = loc & \text{rang, discriminant, Hasse} \\ F = cn & \text{rang, discriminant, Hasse, signatures} \end{cases}$$

9.7.3. *Pour* $\mathcal{H}(K)$. C'est encore très classique, et cela résulte du théorème de Jacobson, qui dit qu'une forme K-hermitienne est déterminée par la forme quadratique sous-jacente. Les invariants sont :

$$\begin{cases} F = \mathbb{R} & \text{rang, signature} \\ F = loc & \text{rang, discriminant} \\ F = cn & \text{rang, discriminant, signatures} \end{cases}$$

9.7.4. *Pour* $\mathcal{Q}(D)$. C'est moins classique. Le théorème de Jacobson dit maintenant qu'une forme D-hermitienne est déterminée par la forme quadratique sous-jacente. Les invariants sont :

$$\begin{cases} F = \mathbb{R} & \text{rang, signature} \\ F = loc & \text{rang} \\ F = cn & \text{rang, signatures} \end{cases}$$

9.7.5. *Pour* $\mathcal{A}(D)$. Le principe de Hasse est en défaut, et la classification sur un corps de nombre est donc plus difficile. Les invariants sont

$$\begin{cases} F = \mathbb{R} & \text{rang} \\ F = loc & \text{rang, discriminant} \\ F = cn & \textbf{???} \end{cases}$$

9.7.6. *Pour* $\mathcal{H}(D)$. Cela ne fait sens que sur un corps de nombre. Les invariants sont le rang, les signatures aux places où $K/F = \mathbb{C}/\mathbb{R}$, et le discriminant.

10. Conditions de Positivité

10.1. **Les $\mathbb{R}$-algèbres simples.** Il y a $M_n(\mathbb{R})$, $M_n(\mathbb{C})$ et $M_n(\mathbb{H})$ où $\mathbb{H}$ est le corps de quaternions.

10.2. **Les formes hermitiennes élémentaires.** Le tableau suivant liste les classes d'isomorphismes d'espaces hermitiens $(V, \psi) \in \mathcal{H}(D, \star, \pm 1)$ dans les situations élémentaires. Les représentants sont donnés sous la forme V =D-espace vectoriel des vecteurs lignes à n-coefficients dans D et $\psi(X, Y) = XMY^{\star t}$ avec $M \in M_n(D)$.

Nom	$\mathcal{H}(D, \star, u)$	Formes $XMY^{\star t}$	Rang	Invariants
$\mathcal{A}(\mathbb{R})$	$\mathcal{H}(\mathbb{R}, \mathrm{Id}, -1)$	$M = J_m$	$n = 2m$	index m
$\mathcal{A}(\mathbb{C})$	$\mathcal{H}(\mathbb{C}, \mathrm{Id}, -1)$	$M = J_m$	$n = 2m$	index m
$\mathcal{A}(\mathbb{H})$	$\mathcal{H}(\mathbb{H}, \mathrm{can}, -1)$	$M = jI_n$	n	rang n
$\mathcal{Q}(\mathbb{R})$	$\mathcal{H}(\mathbb{R}, \mathrm{Id}, 1)$	$M = I_{p,q}$	$n = p + q$	signature (p, q)
$\mathcal{Q}(\mathbb{C})$	$\mathcal{H}(\mathbb{C}, \mathrm{Id}, 1)$	$M = I_n$	n	rang n
$\mathcal{Q}(\mathbb{H})$	$\mathcal{H}(\mathbb{H}, \mathrm{can}, 1)$	$M = I_{p,q}$	$n = p + q$	signature (p, q)
$\mathcal{H}(\mathbb{C})$	$\mathcal{H}(\mathbb{C}, \mathrm{can}, 1)$	$M = I_{p,q}$	$n = p + q$	signature (p, q)

L'élément j de $\mathbb{H}$ vérifie $j^2 = -1$ et les matrices sont

$$J_m = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ +I_m & 0 \end{pmatrix} \quad I_{p,q} = \begin{pmatrix} +I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

La démonstration se fait comme suit.

Pour $\mathcal{A}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}(\mathbb{C})$, les espaces considérés admettent des décompositions de Witt, $V = \perp_{k=1}^{n} De_k \oplus De_{-k}$ avec $\psi(e_k, e_{-k}) = 1$. Dans tous les autres cas, ils admettent des décompositions orthogonales : $V = \perp_{k=1}^{n} De_k$. Posons $\alpha_k = \psi(e_k, e_k) \neq 0$. La substitution $e_k \mapsto de_k$ change α_k en $d\alpha_k d^\star$. Dans le cas $\mathcal{A}(\mathbb{H})$, $\alpha_k^\star = -\alpha_k$, donc $\alpha_k^2 = -\mathrm{nr}\alpha_k < 0$ et l'on peut changer chaque α_k en $j \in \mathbb{H}$. Pour les quatre derniers cas, on a $\alpha_k^\star = \alpha_k$, que l'on peut changer en 1 dans le cas $\mathcal{Q}(\mathbb{C})$, et en ± 1 dans les trois autres cas $\mathcal{Q}(\mathbb{R})$, $\mathcal{Q}(\mathbb{H})$ et $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

10.3. **Les classes d'équivalences d'involutions.** On en déduit que les classes d'équivalences de paires élémentaires $(A, \star)$ sont données par (1) les types D, i.e. $(A_1 \times A_1^{opp}, \star)$ pour $A_1 = M_n(\mathbb{R})$, $M_n(\mathbb{C})$ ou $M_n(\mathbb{H})$ et $(a, b)^\star = (b, a)$, et (2) les autres :

nom	A	Type	Involution	Invariants
$\mathcal{A}(\mathbb{R})$	$M_{2m}(\mathbb{R})$	$I(-)$	$\mathrm{Ad}J_m \circ (M \mapsto M^t)$	rang $2m$
$\mathcal{A}(\mathbb{C})$	$M_{2m}(\mathbb{C})$	$I(-)$	$\mathrm{Ad}J_m \circ (M \mapsto M^t)$	rang $2m$
$\mathcal{A}(\mathbb{H})$	$M_n(\mathbb{H})$	$I(+)$	$\mathrm{Ad}jI_n \circ (M \mapsto \overline{M}^t)$	rang n
$\mathcal{Q}(\mathbb{R})$	$M_n(\mathbb{R})$	$I(+)$	$\mathrm{Ad}I_{p,q} \circ (M \mapsto M^t)$	signature $\{p, q\}$
$\mathcal{Q}(\mathbb{C})$	$M_n(\mathbb{C})$	$I(+)$	$M \mapsto M^t$	rang n
$\mathcal{Q}(\mathbb{H})$	$M_n(\mathbb{H})$	$I(-)$	$\mathrm{Ad}I_{p,q} \circ (M \mapsto \overline{M}^t)$	signature $\{p, q\}$
$\mathcal{H}(\mathbb{C})$	$M_n(\mathbb{C})$	$II(c)$	$\mathrm{Ad}I_{p,q} \circ (M \mapsto \overline{M}^t)$	signature $\{p, q\}$

Le nom est $\simeq \mathcal{H}(A, \star)$ par équivalence de Morita.

10.4. **Formes et involutions positives.** Pour tout $(A,\star)$ et $\psi\in\mathcal{H}(A,\star)(V)$, on peut former

$$\psi_{\mathbb{R}}=\mathrm{Tr}_{A/\mathbb{R}}\circ\psi\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}(A,\star)(V)$$

puis oublier la structure de A-module sur V pour obtenir

$$\psi_{\mathbb{R}}\in\mathcal{H}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R},\star)(V)=\mathcal{Q}(\mathbb{R})(V)$$

i.e. une forme quadratique sur V.

Definition 22. On dit que $\psi>0$ ssi cette forme quadratique est définie positive.

D'autre part, $(a,b)\mapsto ab^\star$ est un élément canonique $\psi(\star)$ de $\mathcal{H}(A,\star)(A)$. Ce qui nous conduit à la définition :

Definition 23. On dit que $\star>0$ ssi $\psi(\star)>0$, i.e. $\mathrm{Tr}_{A/\mathbb{R}}(aa^\star)>0$ pour tout $a\neq 0$.

On se propose de démontrer :

Proposition 24. *Les conditions suivantes sur $(A,\star)$ sont équivalentes :*

(1) *Il existe $[V,\psi]\in\mathcal{H}(A,\star,1)$ avec V fidèle et $\psi>0$,*
(2) *L'involution $\star$ est positive,*
(3) *L'algèbre à involution $(A,\star)$ est un produit de facteurs du type*

$$(M_n(\mathbb{R}),\star)\quad (M_n(\mathbb{C}),\star)\quad et\quad (M_n(\mathbb{H}),\star)$$

avec $(m_{i,j})^\star=(\overline{m}_{j,i})$.

Si ces conditions sont vérifiées, alors pour tout V, *il existe* une *et* une seule *classe d'isomorphisme de $\psi>0$ dans $\mathcal{H}(A,\star)(V)$.*

Démonstration. (1) $\iff$ (2) : Il est clair que (2) $\Rightarrow$ (1). Inversement, soit $[V,\psi]\in\mathcal{H}(A,\star)$ avec V fidèle et $\psi>0$. Pour tout A-module simple W, il existe un plongement $W\hookrightarrow V$. Son orthogonal W' pour ψ est alors un supplémentaire de W dans V. On en déduit que V est une somme directe orthogonale de $(V_i,\psi|V_i)$ avec V_i un A-module simple, et que chaque A-module simple est isomorphe à au moins un des V_i. Soit maintenant $0\neq a\in A$ et $\alpha=aa^\star$. Alors $\alpha|V_i$ est auto-adjoint, donc diagonalisable dans une $\mathbb{R}$-base orthonormée $e_1,\cdots,e_r$ de $(V_i,\psi_{\mathbb{R}}|V_i)$, et de trace $\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(\alpha|V_i)=\sum\psi_{\mathbb{R}}(\alpha e_i,e_i)=\sum\psi_{\mathbb{R}}(ae_i,ae_i)$. Chacun des termes est ici positif, et ils sont tous nuls si et seulement si $a|V_i=0$. Puisque V est fidèle et $a\neq 0$, on voit donc que pour tout A-module simple, $\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(\alpha|W)\geq 0$ avec $\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(\alpha|W)>0$ pour au moins un W. Mais $\mathrm{tr}_{A/\mathbb{R}}(\alpha)$ est une combinaison linéaire à coefficient entier >0 des $\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(\alpha|W)$, donc $\mathrm{tr}_{A/\mathbb{R}}(\alpha)>0$.

(2) $\iff$ (3) : Si $(A,\star)=\prod(A_i,\star_i)$, alors $\star>0\iff(\forall i:\star_i>0)$. On est donc ramené à l'un des cas suivants :

- $(A,\star)=(A_1\times A_1^{opp},\star)$ avec $(a,b)^\star=(b,a)$. Soit $a_1\neq 0$ dans A_1 et $a=(a_1,0)\neq 0$ dans A. Alors $aa^\star=0$ donc $\star\not>0$.
- $(A,\star)=(\mathrm{End}_D V,\star_\psi)$ pour $\psi\in\mathcal{H}(D,\star)(V)$ avec

$$(D,\star)\in(\mathbb{R},\mathrm{Id}),\,(\mathbb{C},\mathrm{can}),\,(\mathbb{H},\mathrm{can}),\,(\mathbb{C},\mathrm{Id}),\,(\mathbb{H},\neq\mathrm{can}).$$

Dans tous ces cas, (V,ψ) admet une décomposition en droite :

$$(V,\psi)=\perp(D,\epsilon_i xy^\star)\qquad\text{avec }\epsilon_i\in\{\pm1\}.$$

Si $a\in A$ préserve cette décomposition, i.e. $a=(d_i)$, on a donc

$$\mathrm{tr}_{A/\mathbb{R}}(aa^\star)=\mathrm{tr}_{\mathbb{R}}(aa^\star|V)=\sum\epsilon_i\mathrm{tr}_{D/\mathbb{R}}(d_id_i^\star).$$

On en déduit que $\star>0$ si et seulement si

– $\star > 0$ sur D, i.e. $(D,\star) \in (\mathbb{R},\mathrm{Id}),(\mathbb{C},\mathrm{can}),(\mathbb{H},\mathrm{can})$ et
– tous les ϵ_i sont égaux à 1

Ce qui démontre bien que (2) $\iff$ (3).

Supposons enfin que $(A,\star) > 0$ et montrons que l'application

$$R : \mathcal{H}(A,\star) \to \mathcal{P}(A) \qquad [V,\psi] \mapsto [V]$$

induit une bijection

$$R^{>} : \mathcal{H}^{>}(A,\star) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{P}(A).$$

On se ramène aux trois cas élémentaires de (3), pour lesquels la signature donne $\mathcal{H}(A,\star) \simeq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ avec $\mathcal{H}^{>}(A,\star) = \mathbb{N}\times\{0\}$, le rang $\mathcal{P}(A) \simeq \mathbb{N}$, avec $R(p,q) = p+q$. Donc $R^{>} : (n,0) \mapsto n$ est bien une bijection. □

10.5. **Polarisations.** On veut maintenant classifier les triplets (V,ψ,I) où $[V,\psi] \in \mathcal{H}_{\mathbb{R}}(A,\star,-1)$ et I est une structure complexe sur V compatible avec ψ. C'est-à-dire, $I \in \mathrm{End}_A V$, $I^2 = -1$ et $\psi(Iv,Iw) = \psi(v,w)$. La donnée de I est équivalente à celle d'un morphisme d'anneau $h : \mathbb{C} \to \mathrm{End}_A V$ (donné par $h(a+bi) = a+bI$) tel que $\psi(h(z)v,w) = \psi(v,h(\overline{z})w)$. Elle fournit aussi d'autres structures :

(1) V devient un $A\otimes\mathbb{C}$-module V_I,
(2) $\psi(v,w)$ est dans $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}(A\otimes\mathbb{C},\star\otimes c,-1)(V_I)$,
(3) $\psi_I(v,w) = \psi(Iv,w)$ est dans $\mathcal{H}_{\mathbb{R}}(A\otimes\mathbb{C},\star\otimes c,1)(V_I)$
(4) $\Psi_I(v,w) = \psi_I(v,w) + i\psi(v,w)$ est dans $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}(A\otimes\mathbb{C},\star\otimes c,1)(V_I)$

Les données (V,I,ψ), (V_I,ψ), (V_I,ψ_I) et (V_I,Ψ_I) sont équivalentes, de sorte que nos triplets sont classifiés par :

$$\mathcal{H}_{\mathbb{R}}(A\otimes\mathbb{C},\star\otimes c,-1) \simeq \mathcal{H}_{\mathbb{R}}(A\otimes\mathbb{C},\star\otimes c) \simeq \mathcal{H}_{\mathbb{C}}(A\otimes\mathbb{C},\star\otimes c)$$

(c'est évident sur les formules, mais on peut aussi utiliser des arguments plus sophistiqués : le premier isomorphisme est un cas particulier d'équivalence de Morita, le second un cas particulier de trace $\mathcal{H} \simeq \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \simeq \mathcal{H}_{\mathbb{R}}$).

Definition 25. Un triplet (V,ψ,I) est positif ssi $\psi_I > 0 \iff \Psi_I > 0$.

L'existence d'un seul triplet positif fidèle implique donc que $(A,\star) > 0$. **Nous ferons maintenant cette hypothèse**. La dernière assertion de la proposition 24 appliquée à $(A\otimes\mathbb{C},\star\otimes c)$ dit que sur tout $A\otimes\mathbb{C}$-module V_I, il existe une unique classe d'isomorphisme de ψ_I. En particulier :

Proposition 26. *Soient (V,ψ,I) et (V',ψ',I') deux triplets > 0. Alors*

$$(V,I) \simeq (V',I') \iff (V,\psi,I) \simeq (V',\psi',I').$$

De plus, toute paire (V,I) peut être complétée en un triplet $(V,\psi,I) > 0$.

Nous aurons en outre besoin de la proposition suivante :

Proposition 27. *Soient (V,ψ,I) et (V',ψ',I') deux triplets > 0. Alors*

$$(V,\psi) \simeq (V',\psi') \iff (V,\psi,I) \simeq (V',\psi',I').$$

De plus, toute paire (V,ψ) peut être complétée en un triplet $(V,\psi,I) > 0$.

Démonstration. Il s'agit de voir que l'application d'oubli de la $\mathbb{C}$-structure

$$R : \mathcal{H}_{\mathbb{R}}(A\otimes\mathbb{C},\star\otimes c,-1)\to\mathcal{H}_{\mathbb{R}}(A,\star,-1)\qquad [V_I,\psi]\mapsto[V,\psi]$$

induit une bijection

$$R^{>} : \mathcal{H}_{\mathbb{R}}^{>}(A\otimes\mathbb{C},\star\otimes c,-1)\xrightarrow{\simeq}\mathcal{H}_{\mathbb{R}}(A,\star,-1).$$

On se ramène immédiatement aux cas élémentaires où

$$(A,\star)\in\{(M_n(\mathbb{R}),\mathrm{can}),(M_n(\mathbb{C}),\mathrm{can}),(M_n(\mathbb{H}),\mathrm{can})\}$$

et par une équivalence de Morita au cas où $n=1$.

(1) Si $(A,\star)=(\mathbb{R},\mathrm{Id})$, $(A\otimes\mathbb{C},\star\otimes c)=(\mathbb{C},c)$. Alors : ($a$) (V_I,ψ) est classifié par la signature $(2p,2q)$ de $(V_I,\psi_I)\in\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ et $(V_I,\psi)>0\iff q=0$; (b) (V,ψ) est classifié par l'index $2m=\dim_{\mathbb{R}}V$; (c) R s'identifie à $(p,q)\mapsto m=p+q$. Donc $R^{>}:(p,0)\mapsto p$ est une bijection.

(2) Si $(A,\star)=(\mathbb{C},c)$, $(A\otimes\mathbb{C},\star\otimes c)\simeq(\mathbb{C},c)\times(\mathbb{C},c)$ via $z_1\otimes z_2\mapsto(z_1z_2,\overline{z}_1z_2)$. Alors : ($a$) $(V_I,\psi)=(V_I^{(1)},\psi^{(1)})\oplus(V_I^{(2)},\psi^{(2)})$ est classifié par les signatures $(2p^{(1)},2q^{(1)})$ et $(2p^{(2)},2q^{(2)})$ de $\psi_I^{(1)}$ et $\psi_I^{(2)}\in\mathcal{Q}(\mathbb{R})$, et $(V_I,\psi)>0$ ssi $q^{(1)}=q^{(2)}=0$; (b) (V,ψ) est classifié par les signatures (p,q) de $i\psi$; et (c) R s'identifie à $\big((p^{(1)},q^{(1)}),(p^{(2)},q^{(2)})\big)\mapsto(p^{(1)}+q^{(2)},q^{(1)}+p^{(2)})$. Donc $R^{>}:\big((p^{(1)},0),(p^{(2)},0)\big)\mapsto(p^{(1)},p^{(2)})$ est une bijection.

(3) Si $(A,\star)=(\mathbb{H},\mathrm{can})$, $(A\otimes\mathbb{C},\star\otimes c)\simeq(M_2(\mathbb{C}),\mathrm{can})$. Alors ($a$) (V_I,ψ) est classifié par les signatures $(4p,4q)$ de $(V_I,\psi_I)\in\mathcal{Q}(\mathbb{R})$ et $(V_I,\psi)>0$ ssi $q=0$; (b) (V,ψ) est classifié par le rang $4m=\dim_{\mathbb{R}}V$; et (c) R s'identifie à $(p,q)\mapsto m=p+q$. Donc $R^{>}:(p,0)\mapsto p$ est une bijection.

CQFD. □

Corollary 28. *Fixons $[V,\psi]\in\mathcal{H}(A,\star,-1)$. Soit $G=\mathrm{Aut}_A(V,\psi)$. Alors l'ensemble $\mathcal{X}$ des I tels que $(V,\psi,I)>0$ est une classe de $G(\mathbb{R})$-conjugaison dans $G(\mathbb{R})$.*

Démonstration. Pour tout triplet (V,ψ,I), on a $\psi(Ix,Iy)=\psi(x,y)$ donc $I\in G(\mathbb{R})$. Si (V,ψ,I_1) et (V,ψ,I_2) sont positifs, il existe un isomorphisme $\alpha:(V,\psi,I_1)\to(V,\psi,I_2)$, donc $\alpha\in G(\mathbb{R})$ et $\alpha\circ I_1=I_2\circ\alpha$, i.e. $I_2=\alpha I_1\alpha^{-1}$ dans $G(\mathbb{R})$. □

Donnons enfin une description concrète des ensembles $\mathcal{X}$ ainsi obtenus. En décomposant $(A,\star)$ en composantes simples et en utilisant une nouvelle fois l'équivalence de Morita, on voit que $\mathcal{X}$ est un produit des espaces élémentaires suivants :

Type I(+). Si $(A,\star)=(\mathbb{R},\mathrm{Id})$, (V,ψ) est un $\mathbb{R}$-espace symplectique et $G\simeq\mathbf{Sp}_{2n}$. Soit $\mathcal{B}=(e_1,e_{-1},\cdots,e_n,e_{-n})$ une base symplectique de (V,ψ) et $I=I(\mathcal{B})$ l'endomorphisme de V défini par $Ie_k=\mathrm{sign}(k)e_{-k}$.Alors $I\in\mathcal{X}$ et le stabilisateur de I dans $G(\mathbb{R})$ est le groupe des $\mathbb{C}$-automorphismes de V_I qui préservent ψ, ou ψ_I, ou Ψ_I : c'est donc le groupe unitaire de (V_I,Ψ_I), qui est compact puisque $\Psi_I>0$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathcal{X}&=G(\mathbb{R})\cdot I=\{I(\mathcal{B})|\mathcal{B}\text{ base symplectique}\}\\&\simeq\mathbf{Sp}(2n)/U(n).\end{aligned}$$

Type II. Si $(A,\star)=(\mathbb{C},c)$, $\mathrm{Aut}(V,\psi)=\mathrm{Aut}(V,\Psi)$ où $\Psi(v,w)=\psi(iv,w)+i\psi(v,w)$, donc $G\simeq U(p,q)$ où (p,q) est la signature de (V,Ψ). Soit $V=V_+\perp V_-$ une décomposition de V avec $\Psi|V_+>0$ et $\Psi|V_-<0$. Soit $I=I(V_+)$ l'endomorphisme $\mathbb{C}$-linéaire de V qui est la multiplication par $\pm i$ sur $V_\pm$. Alors $I\in\mathcal{X}$ et le stabilisateur de I dans $G(\mathbb{R})$ est $U(V_+)\times U(V_-)\simeq U(p)\times U(q)$, donc

$$\begin{array}{rcl}\mathcal{X} & = & G(\mathbb{R})\cdot I=\{I(V_+)|\Psi|V_+>0 \text{ et } \Psi|V_+^\perp<0\}\\ & \simeq & U(p,q)/U(p)\times U(q).\end{array}$$

Type I(-). Si $(A,\star)=(\mathbb{H},\mathrm{can})$, choisissons $i\in\mathbb{H}$ avec $i^2=-1$. Soit $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ une $(i,\mathbb{H})$-base, i.e. une $\mathbb{H}$-base orthogonale de V telle que $\psi(h_1e_k,h_2e_k)=\mathrm{tr}_{\mathbf{H}/\mathbf{R}}(h_1ih_2^\star)$ pour tout k. Soit $I=I(\mathcal{B})$ l'endomorphisme $\mathbb{H}$-linéaire de (V,ψ) qui envoie e_k sur $-ie_k$. Alors $I\in\mathcal{X}$ et

$$\mathcal{X}=G(\mathbb{R})\cdot I=\{I(\mathcal{B})|\mathcal{B}\ (i,\mathbb{H})-\mathrm{base}\}.$$

10.6. **Les cas simples.** On décrit (1) les $\mathbb{Q}$-algèbres simples à involutions $(B,\star)$ tels que $\star_\mathbb{R}>0$ sur $B_\mathbb{R}$, (2) les invariants qui classifient $\mathcal{H}(B,\star,-)$, (3) les espaces $\mathcal{X}=G(\mathbb{R})\cdot I$. On part de la classification déjà établie.

- **$\mathcal{Q}(F)$:** $B=M_n(F)$ avec $\star=\star_\phi$ pour $\phi\in\mathcal{Q}(F)$. Alors F est totalement réel, $\mathcal{H}(B,\star,-1)\simeq\mathcal{A}(F)$ est classifié par le rang et $\mathcal{X}$ est un produit de $[F:\mathbb{Q}]$ espaces de type $I(+)$.
- **$\mathcal{A}(D)$:** $B=M_n(D)$ avec $\star=\star_\phi$ pour $\phi\in\mathcal{A}(D)$, D/F quaternionique. Alors F est totalement réel, D totalement indéfini, $\mathcal{H}(B,\star,-1)\simeq\mathcal{Q}(D)$ est classifié par le rang et $\mathcal{X}$ est un produit de $[F:\mathbb{Q}]$ espaces de type $I(+)$.
- **$\mathcal{A}(F)$:** ce cas est *exclu,* il n'y a pas d'involution positive. Heureusement, puisque c'est le seul cas ou les invariants plus subtils de type Hasse sont requis pour la classification de $\mathcal{H}(B,\star,-)\simeq\mathcal{Q}(F)$.
- **$\mathcal{Q}(D)$:** $B=M_n(D)$ avec $\star=\star_\phi$ pour $\phi\in\mathcal{Q}(D)$, D/F quaternionique. Alors F est totalement réel, D totalement défini, $\mathcal{H}(B,\star,-1)\simeq\mathcal{A}(D)$ est... problématique, car ne vérifie pas le principe de Hasse, et $\mathcal{X}$ est un produit de $[F:\mathbb{Q}]$-espaces de type $I(-)$.
- **$\mathcal{H}(K)$:** $B=M_n(K)$ avec $\star=\star_\phi$ pour $\phi\in\mathcal{H}(K)$. Alors K est une extension CM de F, $\mathcal{H}(B,\star,-)\simeq\mathcal{H}(K)$ est classifiée par rang, discriminant et signatures, et $\mathcal{X}$ est un produit de $[F:\mathbb{Q}]$-espaces de type II.
- **$\mathcal{H}(D)$:** $B=M_n(D)$ avec $\star=\star_\phi$ pour $\phi\in\mathcal{H}(D)$. Alors K est une extension CM de F, $\mathcal{H}(B,\star,-)\simeq\mathcal{H}(D)$ est classifiée par rang, discriminant et signatures, et $\mathcal{X}$ est un produit de $[F:\mathbb{Q}]$-espaces de type II.

Références

[1] J. Dieudonné, A. Grothendieck, *Eléments de Géométrie algébriques*, Publications de L'IHES.

[2] Katz, B. Mazur, *Moduli of Elliptic Curves.*

[3] Kottwitz, *Zeta functions of some simple Shimura Varieties.*

[4] J. Milne, Class Field Theory Course.

[5] D. Mumford, *Abelian Varieties.*

[6] W. Scharlau

[7] C. Voisin, *Théorie de Hodge et Géométrie Algébrique Complexe.*

[8] J. Tate, *Finite Flat Group Schemes*