VARIÉTÉS DE SHIMURA

1. Données de Shimura et Variétés de Shimura

1.1. Définitions.

Definition 1.1. Une donnée de Shimura est une paire $(G, \mathcal{X})$ où G est un groupe réductif sur $\mathbf{Q}$ et $\mathcal{X}$ une classe de $G(\mathbf{R})$-conjugaison de morphismes $h : \mathbf{S} \to G_{\mathbf{R}}$ vérifiant des conditions **SV1**, **SV2**, et **SV3** explicitées ci-dessous. La variété de Shimura associée à $(G, \mathcal{X})$ est le système projectif, indexé par les sous-groupes ouverts et compacts de $G(\mathbf{A}_f)$, des ensembles

$$\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C}) = G(\mathbf{Q}) \backslash \left(G(\mathbf{A}_f)/K \times \mathcal{X} \right)$$

munis de l'action à droite du groupe $G(\mathbf{A}_f)$ définie par

$$\sigma : \mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C}) \to \mathrm{Sh}_{K^\sigma}(G, \mathcal{X})(\mathbf{C}) \qquad [g, h] \mapsto [g\sigma, h]$$

où $K^\sigma = \sigma^{-1} K \sigma$.

Definition 1.2. Un morphisme de donnée de Shimura $\phi : (G, \mathcal{X}) \to (G', \mathcal{X}')$ est un morphisme de $\mathbf{Q}$-schémas en groupes $\phi : G \to G'$ qui envoie $\mathcal{X}$ dans $\mathcal{X}'$. Ce morphisme induit un morphisme entre les variétés de Shimura

$$\phi : \left(\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C})\right)_K \to \left(\mathrm{Sh}_{K'}(G', \mathcal{X}')(\mathbf{C})\right)_{K'}$$

où pour $\phi(K) \subset K'$,

$$\phi_{K,K'} : \mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C}) \to \mathrm{Sh}_{K'}(G', \mathcal{X}')(\mathbf{C}) \qquad [g, h] \to [\phi(g), \phi(h)].$$

1.2. **Structure Différentielle sur $\mathcal{X}$.** Soit $Z_G(h) \subset G_{\mathbf{R}}$ le centralisateur de h dans $G_{\mathbf{R}}$. C'est un sous-schéma en groupe fermé de $G_{\mathbf{R}}$ qui est connexe, comme le sont les centralisateurs des tores, et $K(h) = Z_G(h)(\mathbf{R})$ est le centralisateur de h dans $G(\mathbf{R})$. En particulier, $K(h)$ est un sous-groupe de Lie fermé de $G(\mathbf{R})$, et

$$G(\mathbf{R})/K(h) \simeq G(\mathbf{R}) \cdot h = \mathcal{X}$$

est donc muni d'une structure de variété lisse sur laquelle $G(\mathbf{R})$ agit par difféomorphismes. Puisque $G(\mathbf{R})$ n'a qu'un nombre fini de composantes connexes, il en est de même de l'espace topologique $\mathcal{X}$, et chacune de ces composantes connexes est de la forme $G(\mathbf{R})^+ \cdot h$ où $G(\mathbf{R})^+$ est la composante neutre de $G(\mathbf{R})$. L'espace tangent de $\mathcal{X}$ en h s'identifie à

$$T_h\mathcal{X} = \mathrm{Lie}G(\mathbf{R})/\mathrm{Lie}K(h) = \mathrm{Lie}G(\mathbf{R})/\mathrm{Lie}Z_G(h)(\mathbf{R})$$

et cette identification transporte l'action de $K(h) = \mathrm{Stab}_{G(\mathbf{R})}(h)$ sur $T_h(x)$ sur l'action adjointe de $K(h)$ sur les algèbres de Lie.

Lemma 1.3. *Soit $\mathcal{X}^{ad} = G^{ad}(\mathbf{R}) \cdot h^{ad}$ la classe de $G^{ad}(\mathbf{R})$-conjugaison de*

$$h^{ad} = \mathrm{ad} \circ h : \mathbf{S} \to G^{ad}_{\mathbf{R}}.$$

Alors $\mathrm{ad} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}^{ad}$ *identifie $\mathcal{X}$ à une réunion de composantes connexes de $\mathcal{X}^{ad}$.*

Démonstration. On sait que $\mathcal{X} = \coprod_{h\in\mathcal{H}} G(\mathbf{R})^+ \cdot h$ pour un ensemble fini $\mathcal{H} \simeq \pi_0(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$. Puisque ad : $G(\mathbf{R}) \to G^{ad}(\mathbf{R})$ induit une surjection ad : $G(\mathbf{R})^+ \twoheadrightarrow G^{ad}(\mathbf{R})^+$, on obtient

$$\mathrm{ad}(\mathcal{X}) = \mathrm{ad}(\coprod_{h\in\mathcal{H}} G(\mathbf{R})^+ \cdot h) = \coprod_{h\in\mathcal{H}'} G^{ad}(\mathbf{R})^+ \cdot h^{ad}$$

pour un sous-ensemble fini $\mathcal{H}'$ de $\mathcal{H}$. Il reste à voir que ad : $\mathcal{X} \to \mathcal{X}^{ad}$ est injective (ce qui impliquera par ailleurs que $\mathcal{H}' = \mathcal{H}$). Soit donc $h \in \mathcal{X}$ et $g \in G(\mathbf{R})$ tel que $\mathrm{ad}(ghg^{-1}) = \mathrm{ad}(h)$, i.e. $ghg^{-1} \equiv h \bmod Z_{\mathbf{R}}$, ou encore $ghg^{-1}h^{-1} : \mathbf{S} \to G_{\mathbf{R}}$ se factorise par $Z_{\mathbf{R}}$, donc aussi par $Z_{\mathbf{R}} \cap G^{der}_{\mathbf{R}} = Z(G^{der}_{\mathbf{R}})$ qui est *fini.* Puisque $\mathbf{S}$ est connexe, $ghg^{-1}h^{-1} = 1$ donc $ghg^{-1} = h$. □

On peut donc aussi décrire les espaces tangents comme

$$T_h\mathcal{X} = T_{h^{ad}}\mathcal{X}^{ad} = \mathrm{Lie}G^{ad}(\mathbf{R})/\mathrm{Lie}K(h^{ad})$$

où $K(h^{ad})$ est le stabilisateur de h^{ad} dans $G^{ad}(\mathbf{R})$.

2. L'hypothèse SV1

2.1. **Représentations de S.** Puisque $\mathbf{S} = \mathrm{Res}_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}\mathbf{G}_{m,\mathbf{C}}$, $X^\star(\mathbf{S}) = \mathbf{Z}[\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})]$ avec l'action évidente de $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$. Les représentations de $\mathbf{S} \to GL(V)$ (pour V un $\mathbf{R}$-espace vectoriel) correspondent donc bijectivement aux bigraduations de $V \otimes \mathbf{C} = \oplus V^{p,q}$ telles que $\overline{V^{p,q}} = V^{q,p}$ - ce sont les structures de Hodge sur V. Le type d'une telle bigraduation est l'ensemble des couples $(p,q) \in \mathbf{Z}^2$ tels que $V^{p,q} \neq 0$. Par convention, $z \in \mathbf{S}(\mathbf{R})$ agit sur $V^{p,q}$ par $z^{-p} \cdot \overline{z}^{-q}$. Les structures complexes correspondent donc aux bigraduations de type $\{(-1,0),(0,-1)\}$.

2.2. **L'hypothèse SV1.** Revenant aux données de Shimura, on demande :

SV1: Pour tout $h \in \mathcal{X}$, l'action de $\mathbf{S}$ sur $\mathrm{Lie}G_{\mathbf{R}}$ est de type $\{(-1,1),0,(1,-1)\}$

Du diagramme $G \xrightarrow{\mathrm{ad}} G^{ad} \overset{\mathrm{Ad}}{\hookrightarrow} GL(\mathrm{Lie}(G))$ on tire alors que

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{G}_{m,\mathbf{R}} & \xrightarrow{h} & Z_{\mathbf{R}} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{S} & \xrightarrow{h} & G_{\mathbf{R}} \end{array}$$

où Z est le centre de G. Le morphisme $h : \mathbf{G}_{m,\mathbf{R}} \to Z_{\mathbf{R}}$ est un cocaractère qui ne dépend pas du choix de $h \in \mathcal{X} = G(\mathbf{R}) \cdot h$. On note $\omega_{\mathcal{X}} : \mathbf{G}_{m,\mathbf{R}} \to Z_{\mathbf{R}}$ son *inverse.* On note aussi $C_h = h(i)$, qui est un élément de carré $h(i^2) = h(-1)$ central dans $G(\mathbf{R})$, et qui définit donc une *involution* $\mathrm{Int}C_h$ de $G_{\mathbf{R}}$. On a bien sûr $K(h) \subset K(C_h)$ où $K(C_h)$ est le centralisateur (= le commutant) de C_h dans $G(\mathbf{R})$.

On obtient aussi une factorisation de $h^{ad} = \mathrm{ad} \circ h$:

$$\mathbf{S} \xrightarrow{h} G \xrightarrow{\mathrm{ad}} G^{ad} = \mathbf{S} \xrightarrow{\pi} \mathbf{S}^1 \xrightarrow{u_h} G^{ad}$$

où $\mathbf{S}^1 = \ker(N : \mathbf{S} \to \mathbf{G}_{m,\mathbf{R}})$ et $\pi(z) = z/\overline{z}$. En particulier,

$$C_h^{ad} = h^{ad}(i) = u_h(-1) \in G^{ad}(\mathbf{R})$$

et $K(h^{ad}) = K(u_h) \subset K(C_h^{ad})$ où $K(C_h)$ est le commutant de C_h dans $G^{ad}(\mathbf{R})$.

2.3. **La structure presque complexe.** La représentation $\mathrm{Ad}\circ h : \mathbf{S} \to GL(\mathrm{Lie}G_{\mathbf{R}})$ se décompose en partie de type $(0,0)$ et partie de type $\{(1,-1),(-1,1)\}$, i.e. $\mathrm{Lie}G(\mathbf{R}) = L_h^+ \oplus L_h^-$ avec

$$\begin{aligned} L_h^+ &= \mathrm{Lie}G(\mathbf{R}) \cap \mathrm{Lie}G(\mathbf{C})^0 = \mathrm{Lie}G(\mathbf{R})[C_h - 1] \\ L_h^- &= \mathrm{Lie}G(\mathbf{R}) \cap \left(\mathrm{Lie}G(\mathbf{C})^{1,-1} \oplus \mathrm{Lie}G(\mathbf{C})^{-1,1}\right) = \mathrm{Lie}G(\mathbf{R})[C_h + 1] \end{aligned}$$

On a donc $L_h^+ = \mathrm{Lie}K(h) = \mathrm{Lie}K(C_h)$ (les groupes $K(h) \subset K(C_h)$ ont donc la même composante neutre), et $\mathcal{T}_h\mathcal{X} \simeq L_h^-$, qui est une représentation de $\mathbf{S}$ de type $\{(-1,1),(1,-1)\}$. On peut aussi procéder de même avec $\mathrm{Ad}\circ h^{ad} \to GL(\mathrm{Lie}G_{\mathbf{R}}^{ad})$, qui donne une décomposition

$$\mathrm{Lie}G^{ad}(\mathbf{R}) = L_{h^{ad}}^+ \oplus L_{h^{ad}}^- \quad \text{où} \quad L_{h^{ad}}^\pm = \mathrm{Lie}G^{ad}(\mathbf{R})[C_h^{ad} \mp 1].$$

Alors $L_{h^{ad}}^+ = \mathrm{Lie}K(h^{ad}) = \mathrm{Lie}K(C_h^{ad})$ (les groupes $K(h^{ad}) \subset K(C_h^{ad})$ ont donc la même composante neutre), et $\mathcal{T}_h\mathcal{X} \simeq L_{h^{ad}}^-$, qui est une représentation de $\mathbf{S}$ de type $\{(-1,1),(1,-1)\}$. En relabellisant la décomposition de Hodge de $\mathcal{T}_h\mathcal{X}\otimes\mathbf{C}$ associée à cette décomposition, on obtient une représentation de type $\{(-1,0),(0,-1)\}$, i.e. une *structure complexe* sur $\mathcal{T}_h\mathcal{X} \simeq L_{h^{ad}}^-$. Cette structure est caractérisée par la relation

$$\forall z \in \mathbf{S}^1(\mathbf{R}) = U^1 : \qquad \mathrm{Ad}(u_h(z)) : L_{h^{ad}}^- \ni v \mapsto z\cdot v \in L_{h^{ad}}^-.$$

Puisque $K(h)$ centralise u_h, cette structure complexe est $K(h)$-invariante, et plus généralement pour tout $g \in G(\mathbf{R})$ et $x \in \mathcal{X}$, la différentielle $\mathcal{T}_x(g) : \mathcal{T}_x\mathcal{X} \to \mathcal{T}_{g\cdot x}\mathcal{X}$ est $\mathbf{C}$-linéaire. On obtient donc sur $\mathcal{X}$ une structure presque complexe. Notant $\mathrm{Hol}(\mathcal{X})$ les difféomorphismes de $\mathcal{X}$ qui préservent cette structure complexe, on voit en particulier que :

Lemma 2.1. *Pour tout $x \in \mathcal{X}$, il existe un morphisme $u_x : U^1 \to \mathrm{Hol}(\mathcal{X})$ qui fixe x et vérifie $\forall z \in U^1$, $T_x(u_x(z)) : T_x\mathcal{X} \ni v \mapsto z\cdot v \in T_x\mathcal{X}$*

3. L'hypothèse SV2

3.1. **Involutions de Cartan.**

Definition 3.1. Soit G un groupe algébrique (affine, connexe) sur $\mathbf{R}$. Une involution de Cartan est une involution $\theta \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{R}}G$ telle que

$$G^{(\theta)}(\mathbf{R}) = \{g \in G(\mathbf{C}) : g = \theta(\overline{g})\} \quad \text{est compact.}$$

Example 3.2. Sur $G = GL_{n,\mathbf{R}}$, $\theta_0(g) = {}^t g^{-1}$ est une involution de Cartan.

Theorem 3.3. *Un groupe algébrique sur $\mathbf{R}$ possède une involution de Cartan si et seulement si il est réductif, et alors toutes les involutions de Cartan sont conjuguées.*

Démonstration. [REF]. □

Si G est un groupe réductif, il existe une représentation fidèle $G \hookrightarrow GL(V)$ et un produit scalaire sur $V \simeq \mathbf{R}^n$ tel que G soit stable sous la transposition définie par ce produit scalaire. Alors G est stable sous l'involution de Cartan $\theta_0(g) = {}^t g^{-1}$ de $GL(V)$, donc $\theta = \theta_0|G$ est une involution de Cartan de G. Le théorème implique que toutes les involutions de Cartan sont de ce type, pour un produit scalaire convenable sur V.

Proposition 3.4. *Soit θ une involution de Cartan de $G_{\mathbf{R}}$,*

$$K = G^{\theta}(\mathbf{R}) = \{g \in G(\mathbf{R}) : \theta(g) = g\} \quad \textit{et} \quad \mathcal{P} = \{x \in \mathbf{Lie}G(\mathbf{R}) : \theta(g) = -g\}.$$

Alors K est un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{R})$ et

$$K \times \mathcal{P} \to G(\mathbf{R}) \qquad (k,p) \mapsto k \cdot \exp p$$

est un homéomorphisme.

Démonstration. Supposons d'abord que $\theta = \theta_0$ sur $G = GL_{n,\mathbf{R}}$. Alors

$$K = \{g \in G(\mathbf{R}) : g^t g = 1\} = O_n(\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = \{x \in M_n(\mathbf{R}) :^t x = x\} = Sym_n(\mathbf{R})$$

Les matrices symétriques sont les matrices diagonalisables à valeurs propres réelles dans une base orthonormée, donc $\exp \mathcal{P}$ est l'ensemble des matrices > 0, i.e. diagonalisables à valeurs propres réelles strictement positives dans une base orthonormée, et $\exp : \mathcal{P} \to \exp(\mathcal{P})$ est un homéomorphisme (d'inverse le logarithme). Si $g \in GL_n(\mathbf{R})$, alors ${}^t gg > 0$ donc ${}^t gg = \exp 2p = (\exp p)^2$ pour un $p \in \mathcal{P}$ et $\exp(-p)^t gg \exp(-p) = 1$, i.e. $g \exp(-p) = k \in K$: l'application est surjective. Inversement si $g = k \exp p$, alors ${}^t gg = (\exp p)^2 = \exp 2p$, donc $p = \frac{1}{2}\ln({}^t gg)$ et $k = g \cdot \exp(-p)$, CQFD. Dans le cas général, on peut supposer que $\theta = \theta_0 | G$ pour un plongement $G \hookrightarrow GL_{n,\mathbf{R}}$ et il suffit de montrer que si $g = k \cdot \exp p \in G(\mathbf{R})$ avec $k \in O_n(\mathbf{R})$ et $p \in Sym_n(\mathbf{R})$, alors $k \in G(\mathbf{R})$ et $p \in \mathrm{Lie}G(\mathbf{R})$. Or $\exp(2p) = \theta(g)^{-1} g \in G(\mathbf{R})$ donc $p \in \mathrm{Lie}G(\mathbf{R})$, et alors $k = g \cdot \exp(-p) \in G(\mathbf{R})$. $\square$

Corollary 3.5. *K est un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbf{R})$ et*

$$\pi_0(K) \xrightarrow{\simeq} \pi_0(G(\mathbf{R})).$$

3.2. **L'hypothèse SV2.** Revenant aux notations des données de Shimura, on demande :

SV2: Pour tout $h \in \mathcal{X}$, $\mathrm{Int}(C_h^{ad})$ est une involution de Cartan de $G_{\mathbf{R}}^{ad}$.

Alors $K(C_h^{ad})$ est un sous-groupe compact maximal de $G^{ad}(\mathbf{R})$, et son sous-groupe $K(h^{ad})$ est aussi compact. Puisque $\mathrm{Lie}K(h^{ad}) = \mathrm{Lie}K(C_h^{ad}) = \mathrm{Lie}G^{ad}(\mathbf{R})[C_h^{ad} - 1]$, $K(h^{ad})$ et $K(C_h^{ad})$ ont la même composante neutre. Mais $K(h^{ad})$ est déja connexe, puisque c'est le groupe des $\mathbf{R}$-points du $\mathbf{R}$-schéma en groupe connexe $Z_{G_{\mathbf{R}}^{ad}}(h^{ad})$ et que ce groupe est compact. On en déduit que le stabilisateur dans $G^{ad}(\mathbf{R})$ de toute composante connexe $G^{ad}(\mathbf{R})^+ \cdot h^{ad}$ de $\mathcal{X}^{ad}$ est la composante neutre $G^{ad}(\mathbf{R})^+$ de $G^{ad}(\mathbf{R})$, et donc d'après le lemme 1.3 :

Lemma 3.6. *Les composantes connexes $\mathcal{X}^+ = G(\mathbf{R})^+ \cdot h$ de $\mathcal{X}$ ont pour stabilisateur (commun) dans $G(\mathbf{R})$ l'image inverse $G(\mathbf{R})_+$ de $G^{ad}(\mathbf{R})^+$ dans $G(\mathbf{R})$.*

3.3. **Structure Hermitienne.** Soit $x \in \mathcal{X}$. Choisissons sur l'espace tangent $T_x\mathcal{X}$ une forme hermitienne définie positive. En intégrant cette forme sur le compact $K(x) = \mathrm{Stab}_{G^{ad}(\mathbf{R})}(x)$ (qui agit $\mathbf{C}$-linéairement sur $T_x\mathcal{X}$), on obtient une nouvelle forme qui est maintenant $K(x)$-invariante, et toujours définie positive. En transportant cette forme à $T_{g\cdot x}\mathcal{X}$ par $T_x(g) : T_x\mathcal{X} \to T_{g\cdot x}\mathcal{X}$, on obtient sur $\mathcal{X}$ une forme Hermitienne $G(\mathbf{R})$-invariante, et notamment une métrique $G(\mathbf{R})$-invariante (donnée par la forme Riemanienne associée).

On peut d'ailleurs rendre la construction de cette forme encore plus canonique, en choisissant comme point de départ la forme de Killing sur $\mathrm{Lie}G^{ad}(\mathbf{R})$, qui est donnée par

$$\phi(x,y) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{R}}\left([x,[y,\bullet] : \mathrm{Lie}G^{ad}(\mathbf{R})\right).$$

Cette forme est en effet déjà invariante (à un caractère près) sous l'action adjointe de $G(\mathbf{R})$, et elle est non-dégénérée puisque $G^{ad}_{\mathbf{R}}$ est semi-simple. Pour tout $h \in \mathcal{X}$, la décomposition de $\mathrm{Lie}G^{ad}(\mathbf{R})$ donnée par C^{ad}_h est une décomposition orthogonale pour ϕ, et en fait Lagrangienne, i.e.

$$L^+_{h^{ad}} \perp L^-_{h^{ad}} = \mathrm{Lie}G^{ad}(\mathbf{R})$$

avec $\phi|L^+_{h^{ad}} < 0$ et $\phi|L^-_{ad} > 0$ (on le voit par exemple en travaillant avec un plongement $G^{ad}_{\mathbf{R}} \hookrightarrow GL_{n,\mathbf{R}}$ tel que $\mathrm{Int}C^{ad}_h$ soit $g \mapsto {}^tg^{-1}$). L'action du compact $K(h^{ad})$ sur $T_h(\mathcal{X}) \simeq L^-_{h^{ad}}$ préserve ϕ, et en particulier $\phi(ix, iy) = 1$ puisque $i = u_h(i) \in K(h^{ad})$. Donc

$$\psi_h(x, y) = \phi(x, y) + i\phi(x, iy)$$

est une forme hermitienne définie positive et $K(h)$-invariante sur $T_h(\mathcal{X})$.

Proposition 3.7. *Les composantes connexes $\mathcal{X}^+$ de $\mathcal{X}$ sont des espaces symétriques hermitiens, i.e. des variétés holomorphes connexes, munies d'une forme hermitienne définie positive ψ, et telle qu'en tout point $x \in \mathcal{X}^+$, il existe une symétrie $s_x \in \mathrm{Is}(\mathcal{X}, \psi)$ qui admet x pour point fixe isolé.*

Démonstration. Il faut d'abord montrer que la structure presque complexe est intégrable (i.e. définit sur $\mathcal{X}$ une structure de variété holomorphe). Comme symétrie en $h \in \mathcal{X}$, on prend bien sûr le difféomorphisme induit par $C^{ad}_h = h^{ad}(i) \in G^{ad}(\mathbf{R})$. Ce difféomorphisme préserve la composante connexe $G^{ad}(\mathbf{R})^+ \cdot h$ de h puisque $C^{ad}_h \in G^{ad}(\mathbf{R})^+$ (car $\mathbf{S}$ est connexe), il préserve ψ et la structure presque complexe par construction, il fixe bien sûr le point h de $G^{ad}(\mathbf{R})$ (puisque $h^{ad}(\mathbf{S}) \subset K(h^{ad})$ car $\mathbf{S}$ est commutatif). Puisqu'il induit -1 sur l'espace tangent $T_h\mathcal{X}$, h est un point fixe isolé. □

On peut montrer que de tels espaces sont totalement géodésiques, que s_x stabilise toutes les géodésiques qui passent par x, et induit sur chacune d'elles l'inversion : $s_x\gamma(t) = \gamma(-t)$ si $\gamma(0) = x$. Les espaces symétriques hermitiens ont été totalement classifiés. Ceux que l'on obtient par la procédure ci-dessus sont exactement ceux qui sont de courbures négatives : on les appelle les domaines symétriques hermitiens.

3.4. **Retour à la variété de Shimura.** Soit $\mathcal{X}^+ \subset \mathcal{X}$ une composante connexe de $\mathcal{X}$. Puisque $G(\mathbf{Q})$ est dense dans $G(\mathbf{R})$, $G(\mathbf{Q})$ agit transitivement sur l'ensemble des composantes connexes, et le stabilisateur dans $G(\mathbf{Q})$ de $\mathcal{X}^+$ est l'intersection $G(\mathbf{Q})_+ = G(\mathbf{R})_+ \cap G(\mathbf{Q})$. On obtient donc

$$\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C}) = G(\mathbf{Q})_+ \backslash \left(G(\mathbf{A}_f)/K \times \mathcal{X}^+\right).$$

Lemma 3.8. *$G(\mathbf{Q})_+ \backslash G(\mathbf{A}_f)/K$ est fini.*

Démonstration. Cf. [REF], qui dit que $G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A}_f)/K$ est fini. □

Soit $\mathcal{C} \subset G(\mathbf{A}_f)$ un système de représentants pour $G(\mathbf{Q})^+ \backslash G(\mathbf{A}_f)/K$. Alors

$$\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C}) \simeq \coprod_{g \in \mathcal{C}} \Gamma_{gKg^{-1}} \backslash \mathcal{X}^+ = \coprod_{g \in \mathcal{C}} \Gamma^{ad}_{gKg^{-1}} \backslash \mathcal{X}^+$$

où $\Gamma_{gKg^{-1}}$ est le stabilisateur de $g \cdot K$ dans $G(\mathbf{Q})_+$, i.e. $\Gamma_{gKg^{-1}} = G(\mathbf{Q})_+ \cap gKg^{-1}$, et $\Gamma(g)^{ad}$ son image dans $G^{ad}(\mathbf{Q})^+ \subset G^{ad}(\mathbf{R})^+$.

3.5. La structure holomorphe sur $\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C})$.

Lemma 3.9. *Pour tout compact K de $G(\mathbf{A}_f)$, le sous-groupe $\Gamma_K = G(\mathbf{Q}) \cap K$ de $G(\mathbf{Q})$ est discret dans $G(\mathbf{R})$ et son image Γ_K^{ad} dans $G^{ad}(\mathbf{Q})$ est discrète dans $G^{ad}(\mathbf{R})$. Si K est suffisamment petit, alors $\Gamma_{gKg^{-1}}$ et $\Gamma_{gKg^{-1}}^{ad}$ sont sans torsion pour tout $g \in G(\mathbf{A}_f)$.*

Démonstration. On choisit une représentation fidèle $\rho : G \hookrightarrow GL(V)$ et un réseau L de V fixé par K. Une base de ce réseau identifie $GL(V)$ à $GL_{n,\mathbf{Q}}$ et Γ_K à un sous-groupe de $GL_n(\mathbf{Z})$. Puisque $GL_n(\mathbf{Z})$ est discret dans $GL_n(\mathbf{R})$, Γ_K est discret dans $G(\mathbf{R})$. Si K agit trivialement sur $L/\ell L$ pour un premier $\ell \geq 3$, Γ_K est contenu dans $\Gamma(\ell) = \{g \in GL_n(\mathbf{Z}) : g \equiv 1 \bmod \ell\}$ qui est sans torsion, donc Γ_K est sans torsion. Mais alors gKg^{-1} agit trivialement sur $L'/\ell \cdot L'$ où $L' = g \cdot L$, donc $\Gamma_{gKg^{-1}}$ est à nouveau sans torsion. Pour G^{ad}, on procède de même avec une représentation fidèle de G^{ad}. □

Corollary 3.10. *Si K est assez petit, $\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C})$ est une variété holomorphe.*

Démonstration. On suppose que K est assez petit, i.e. tel que $\Gamma_{gKg^{-1}}^{ad}$ est sans torsion pour tout $g \in G(\mathbf{A}_f)$. On a vu que

$$\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C}) = \coprod_{g \in \mathcal{C}} \Gamma_K^{ad}(g) \backslash \mathcal{X}^+ \quad \text{où } \mathcal{X}^+ \simeq G^{ad}(\mathbf{R})^+/K(h^{ad})$$

et le lemme suivant permet facilement de munir chacun des espaces $\Gamma_K^{ad}(g) \backslash \mathcal{X}^+$ d'une structure holomorphe – telle que la projection $\mathcal{X}^+ \twoheadrightarrow \Gamma_K^{ad}(g) \backslash \mathcal{X}^+$ soit un isomorphisme local. □

Lemma 3.11. *Soit G un groupe localement compact, K un sous-groupe compact de G, Γ un sous-groupe discret de G. On munit $\mathcal{X} = G/K$ de la topologie quotient. Alors :*

1. *Pour tout $x \in \mathcal{X}$, $\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma : \gamma x = x\}$ est fini.*
2. *Pour tout compact $A, B \subset \mathcal{X}$, $\{\gamma \in \Gamma : \gamma A \cap B \neq \emptyset\}$ est fini.*
3. *Pour tout $x \in \mathcal{X}$, il existe un voisinage ouvert U de x tel que $\gamma U \cap U \neq \emptyset \Rightarrow \gamma x = x$.*
4. *Pour tout $\Gamma x \neq \Gamma y \in \mathcal{X}$, il existe des voisinages ouverts U de x et V de y tels que $\Gamma U \cap \Gamma V = \emptyset$.*

Démonstration. Puisque K est fermé, $\mathcal{X}$ est séparé. Pour tout $x \in \mathcal{X}$, le stabilisateur K_x de x dans G est compact, car c'est un conjugué de K. Donc $\Gamma_x = \Gamma \cap K_x$ est compact et discret, i.e. fini, ce qui prouve (1). L'application $\pi : G \to G/K = \mathcal{X}$ est ouverte par définition de la topologie de $\mathcal{X}$, et elle est aussi rétro-compact : si A est un compact de $\mathcal{X}$, $\pi^{-1}(A)$ est un compact de G. En effet, si $G = \cup U_i$ avec U_i ouvert et $\overline{U}_i$ compact, alors $\mathcal{X} = \cup \pi(U_i)$ avec $\pi(U_i)$ ouvert, donc $A \subset \cup_{i \in I} \pi(U_i)$ avec I fini et $\pi^{-1}(A) \subset \cup_{i \in I} U_i \cdot K \subset \cup_{i \in I} \overline{U_i} \cdot K$ qui est compact. Si A et B sont des compacts de $\mathcal{X}$ et $\gamma A \cap B \neq \emptyset$, alors $\gamma \pi^{-1}(A) \cap \pi^{-1}(B) \neq \emptyset$, donc $\gamma \in \pi^{-1}(B) \cdot (\pi^{-1}(A))^{-1} \cap \Gamma$, qui est compact et discret donc fini, ce qui prouve (2). Pour (3), on commence par choisir un voisinage compact V de x, et on note que d'après (2), $\Gamma_V = \{\gamma \in \Gamma : \gamma V \cap V \neq \emptyset\}$ est fini. Pour chaque $\gamma \in \Gamma_V - \Gamma_x$, on choisit des voisinages disjoints V_γ de x et W_γ de γx. On pose $U = V \cap \cap_{\gamma \in \Gamma_V - \Gamma_x} V_\gamma \cap \gamma^{-1} W_\gamma$, qui est un voisinage de x contenu dans V. On a donc $\Gamma_x \subset \Gamma_U \subset \Gamma_V$. Mais si $\gamma \in \Gamma_V - \Gamma_x$, $\gamma U \subset W_\gamma$

et $U \subset V_\gamma$, donc $\gamma U \cap U = \emptyset$ et $\gamma \notin \Gamma_U$: donc $\Gamma_x = \Gamma_U$, i.e. (3). Pour (4), on commence de même par prendre des voisinages compacts A de x et B de y, puis on considère l'ensemble fini $\Gamma(A,B) = \{\gamma \in \Gamma : \gamma A \cap B \neq \emptyset\}$, et on choisit pour tout $\gamma \in \Gamma(A,B)$ des voisinages disjoints V_γ de γx et W_γ de y. On pose alors $V = A \cap \cap_{\gamma \in \Gamma(A,B)} \gamma^{-1} V_\gamma$ et $W = B \cap \cap_{\gamma \in \Gamma(A,B)} W_\gamma$. Ce sont respectivement des voisinages de A et B. Si $\gamma \in \Gamma(V,W)$, alors $\gamma \in \Gamma(A,B)$, donc $\gamma V \subset V_\gamma$ tandis que $W \subset W_\gamma$, donc $\gamma V \cap W = \emptyset$, une contradiction. Donc $\Gamma(V,W) = \emptyset$, ce qui prouve (4). □

Ci-dessus, nous n'avons utilisé que la compacité des sous-groupes K de $G(\mathbf{A}_f)$, dont nous avons vu essentiellement qu'elle implique que les groupes de type $\Gamma_K = G(\mathbf{Q}) \cap K$ sont petits, i.e. discret dans $G(\mathbf{R})$. D'un autre côté, les sous-groupes K de $G(\mathbf{A}_f)$ considérés dans la définition des variétés de Shimura sont *aussi* assez gros : ils sont ouverts en plus d'être compacts. Cette hypothèse implique que les sous-groupes $\Gamma_K \subset G(\mathbf{Q})$ sont aussi assez gros (en plus d'être discrets). Plus précisément, ces sous-groupes sont exactement ceux que l'on appelle les *sous-groupes de congruences*, qui sont eux-mêmes des *sous-groupes arithmétiques*. Pour donner un énoncé qualitatif, on peut noter que la métrique Riemannienne $G^{ad}(\mathbf{R})$ -invariante sur $\mathcal{X}^+$ descend en une métrique Riemannienne sur chacun des $\Gamma^{ad}_{gKg^{-1}} \backslash \mathcal{X}$, lesquelles se recollent en une métrique Riemannienne sur $\mathrm{Sh}_K(G,\mathcal{X})$, d'où une notion de volume. Et bien :

Proposition 3.12. *Le volume de* $\mathrm{Sh}_K(G,\mathcal{X})(\mathbf{C})$ *est fini.*

Démonstration. Cf. [5, Theorem 4.13], qui implique que $\Gamma \backslash G^{ad}(\mathbf{R})$ est déjà de volume fini pour tout sous-groupe arithmétique Γ de $G^{ad}(\mathbf{R})$. □

4. Les Autres Hypothèses

4.1. **L'hypothèse SV3.** Décomposons $G^{ad} = \prod G_j$ en produit de facteurs $\mathbf{Q}$-simples et soient $h_j^{ad} = \mathbf{S} \to G_{j,\mathbf{R}}$ les projections correspondantes de $h^{ad} : \mathbf{S} \to G^{ad}_{\mathbf{R}}$. Si $h_j^{ad} = 1$, l'identité est une involution de Cartan de $G_{j,\mathbf{R}}$, donc $G_j(\mathbf{R})$ est *compact.* Inversement, si $G_j(\mathbf{R})$ est compact, l'involution de Cartan $\mathrm{Int} h_j^{ad}(i)$ est conjuguée à l'identité, donc *est* l'identité, c'est-à-dire que $h_j^{ad}(i)$ est central donc trivial (puisque G_j est adjoint), donc $K(h_j^{ad}) = G_j(\mathbf{R})^+ = G_j(\mathbf{R})$, i.e. $h_j^{ad} : \mathbf{S} \to G_{j,\mathbf{R}}$ est central donc trivial.

SV3: $h_j^{ad} \neq 1$ pour tout j, i.e. aucun des $G_j(\mathbf{R})$ n'est compact[1].

Cette hypothèse est toujours requise pour les variétés de Shimura. Elle est utilisée en conjonction avec le théorème d'*approximation forte*, qui dit que

Theorem 4.1. *Si G est semi-simple, simplement connexe et $G(\mathbf{R})$ n'est pas compact, alors $G(\mathbf{Q})$ est dense dans $G(\mathbf{A}_f)$, donc $G(\mathbf{Q}) \backslash G(\mathbf{A}_f)/K = \{\bullet\}$ pour tout sous-groupe ouvert K.*

Démonstration. [5, Theorem 7.12]. □

Ce théorème permet de calculer par dévissage l'ensemble des composantes connexes $\pi_0(\mathrm{Sh}_K(G,\mathcal{X}))$ des variétés de Shimura. Pour le calcul lorsque G^{der} est semi-simple, voir [4, Theorem 5.17]. Le calcul dans le cas général est plus ardu, cf. [2].

[1] On veut cependant que cette condition n'exclue pas les tores, dont le groupe adjoint est trivial : il faut donc convenir que le groupe trivial $\{1\}$ est *sans* facteur simple.

Ce calcul est préliminaire à l'analyse de la *loi de réciprocité pour les composantes connexes*, dont nous ne parlerons pas.

4.2. **Hypothèses auxiliaires.** Le morphisme de poids $\omega_{\mathcal{X}} : \mathbf{G}_{m,\mathbf{R}} \to Z_{\mathbf{R}}$ est un cocaractère de Z, il est donc défini sur $\overline{\mathbf{Q}}$.

SV4: $\omega_{\mathcal{X}}$ est défini sur $\mathbf{Q}$.

SV5: $Z(\mathbf{Q})$ est discret dans $Z(\mathbf{A}_f)$.

Ces axiomes correspondent aux variétés de Shimura dont on espère qu'elles classifient des objets de nature géométrique : les motifs.

5. Exemples

5.1. **Exemple n°1 : courbes modulaires.** On prend $G = GL_{2,\mathbf{Q}}$ et pour $\mathcal{X}$ la classe de $G(\mathbf{R})$-conjugaison du morphisme $h : \mathbf{S} \to GL_{2,\mathbf{R}}$ défini par

$$h(z) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{pour } z = a + ib \in \mathbf{S}(\mathbf{R}) = \mathbf{C}^\times.$$

On a $K(h) = K(C_h) = SO(2,\mathbf{R})$ mais

$$K(h^{ad}) = SO(2,\mathbf{R})/\{\pm 1\} \subsetneq K(C_h^{ad}) = O(2,\mathbf{R})/\{\pm 1\}.$$

Puisque $SO(2,\mathbf{R})$ est aussi le stabilisateur de $i \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ pour l'action transitive

$$\forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2,\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad z \in \mathbf{C} - \mathbf{R} : \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbf{C} - \mathbf{R},$$

cette action identifie $\mathcal{X} \simeq \mathbf{C} - \mathbf{R}$, par $g \cdot h \mapsto g \cdot i$. On a Lie$G = M_2$ avec l'action par conjugaison de G, et pour tout $z = a + ib \in \mathbf{C}^\times = \mathbf{S}(\mathbf{R})$,

$$h(z) \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} h(z)^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad h(z) \begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & -1 \end{pmatrix} h(z)^{-1} = \frac{(a \pm ib)}{(a \mp ib)} \begin{pmatrix} 1 & \pm i \\ \pm i & 1 \end{pmatrix}$$

donc Lie$G(\mathbf{C}) = V^{0,0} \oplus V^{1,-1} \oplus V^{-1,1}$ avec

$$V^{0,0} = \mathbf{C} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus \mathbf{C} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V^{\pm 1, \mp 1} = \mathbf{C} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \mp i \\ \mp i & 1 \end{pmatrix}$$

i.e. $(G,\mathcal{X})$ vérifie **SV1**. La décomposition de Lie$G(\mathbf{R}) = L_h^+ \oplus L_h^-$ est

$$L_h^+ = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbf{R} \right\} \qquad L_h^- = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} : x, y \in \mathbf{R} \right\}.$$

Le morphisme $u_h : \mathbf{S}^1 \to G^{ad}(\mathbf{R}) = PGL_2(\mathbf{R}) = GL_2(\mathbf{R})/\mathbf{R}^\times$ est

$$\frac{a+ib}{a-ib} \mapsto \mathbf{R}^\times \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{donc } i = \frac{1+i}{1-i} \mapsto \mathbf{R}^\times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

La structure complexe I_h sur $T_h\mathcal{X} \simeq L_h^-$ est donc

$$I_h \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} = u_h(i) \begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} u_h(i)^{-1} = \begin{pmatrix} y & -x \\ -x & -y \end{pmatrix}.$$

Le difféomorphisme $g \cdot h \mapsto g \cdot i$ identifie $L_h^- \simeq T_h\mathcal{X} \simeq T_i(\mathbf{C} - \mathbf{R}) \simeq \mathbf{C}$ par

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix} \in L_h^- \mapsto 2(y + ix) \in \mathbf{C}$$

et envoie donc I_h sur $[\times i] = d_i(z \mapsto \frac{z+1}{-z+1})$. Puisque l'action de $G(\mathbf{R})$ sur $\mathbf{C} - \mathbf{R}$ est holomorphe, on en déduit que notre difféomorphisme $\mathcal{X} \simeq \mathbf{C} - \mathbf{R}$ est compatible avec les structures complexes, i.e. est holomorphe. La symétrie $u_h(-1)$ sur $\mathcal{X}$ correspond à $z \mapsto \frac{-1}{z}$ sur $\mathbf{C} - \mathbf{R}$. Pour $\theta = \mathrm{Int}C_h$,

$$\begin{aligned} G^{(\theta)}(\mathbf{C}) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{C},\, a\overline{a} + b\overline{b} \neq 0 \right\} \\ (G^{ad})^{(\theta)}(\mathbf{C}) &\simeq \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} : a\overline{a} + b\overline{b} = 1 \right\} / \{\pm 1\} \end{aligned}$$

qui est compact, donc θ est une involution de Cartan de $G^{ad}_{\mathbf{R}}$ et $(G, \mathcal{X})$ vérifie **SV2**. Pour la forme de Killing sur $\mathrm{Lie}G(\mathbf{R})$, on a une décomposition orthogonale

$$\mathrm{Lie}G(\mathbf{R}) = \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \perp \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \perp \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \perp \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et la forme quadratique associée vaut $0, -8, 8, 8$ sur la base indiquée, qui induit

$$\phi\left(\begin{pmatrix} x & y \\ y & -x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' & y' \\ y' & -x' \end{pmatrix} \right) = 8(xx' + yy') \quad \text{sur } L_h^- \simeq T_h\mathcal{X}.$$

Sur $\mathcal{X} \simeq \mathbf{C} - \mathbf{R}$, la forme induite sur l'espace tangent $\mathbf{C}$ en $i \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ est donc exactement la forme standard $\phi(z_1, z_2) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}(z_1\overline{z}_2)$. En $z = x+iy$, on transporte cette forme de l'espace tangent $\mathbf{C}$ de $i \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ à l'espace tangent $\mathbf{C}$ de $z = gi \in \mathbf{C} - \mathbf{R}$ avec

$$g = \begin{pmatrix} \mathrm{signe}(y) \cdot \sqrt{|y|} & x/\sqrt{|y|} \\ & 1/\sqrt{|y|} \end{pmatrix} \text{ qui donne } dg = [y\times] : \mathbf{C} \to \mathbf{C}.$$

On obtient donc la métrique riemanienne $\frac{dx \cdot dy}{y^2}$ sur $\mathbf{C} - \mathbf{R}$. Il est clair que $(G, \mathcal{X})$ vérifie aussi **SV3**, **SV4** et **SV5**. Les variétés $\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})$ que l'on obtient sont les courbes modulaires.

Remark 5.1. Soit B un corps de quaternion sur $\mathbf{Q}$ tel que $B_{\mathbf{R}} \simeq M_2(\mathbf{R})$. On prend pour G le groupe multiplicatif de B, i.e $G(R) = (B \otimes R)^\times$ pour toute $\mathbf{Q}$-algèbre R. Et pour $\mathcal{X}$, on prend la $G(\mathbf{R})$-classe de conjugaison de h... comme ci-dessus, puisque $G(\mathbf{R}) \simeq GL_2(\mathbf{R})$. Alors $(G, \mathcal{X})$ est encore une donnée de Shimura. Les variétés que l'on obtient ainsi sont les courbes de Shimura.

5.2. **Exemple n°2 : variétés de type PEL.** Soit B une $\mathbf{Q}$-algèbre semi-simple, $\star$ une involution positive sur B, $(V, \psi) \in \mathcal{H}_{\mathbf{Q}}(B, \star, -1)$ un $(B, \star)$-module symplectique. On prend pour G le groupe des similitudes B-linéaires de (V, ψ) et pour $\mathcal{X}$ la classe de conjugaison d'un morphisme $h_I : \mathbf{S} \to G(\mathbf{R})$ provenant d'une structure complexe $(B, \star)$ linéaire I sur $V_{\mathbf{R}}$ telle que $\psi_{\mathbf{R},I} > 0$, i.e. $h_I : \mathbf{S} \to G_{\mathbf{R}}$ envoie $a + bi \in \mathbf{C}^\times = \mathbf{S}(\mathbf{R})$ sur la multiplication par $a + bI$ dans $V_{\mathbf{R}}$. Vérifions les axiomes.

Pour vérifier l'axiome **SV1**, on plonge G dans $\mathbf{GL}(V)$. Sur $V_{\mathbf{R}}$, l'action de $\mathbf{S}$ est de type $\{(-1, 0), (0, -1)\}$ puisqu'elle provient d'une structure complexe. Cela signifie que $V_{\mathbf{C}} = V^+ \oplus V^-$ avec $h_I(z)(v) = zv$ pour $v \in V^+$ et $\overline{z}v$ pour $v \in V^-$. Donc sur

$$\mathrm{Lie}G(\mathbf{C}) \subset \mathrm{Lie}\mathbf{GL}(V)(\mathbf{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V_{\mathbf{C}}, V_{\mathbf{C}}) = \oplus_{\pm_1, \pm_2} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V^{\pm_1}, V^{\pm_2})$$

l'action adjointe est

$$\mathrm{Ad}(h_I(z)) = \begin{cases} 1 & \text{sur } \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V^\pm, V^\pm), \\ z/\overline{z} & \text{sur } \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V^-, V^+), \\ \overline{z}/z & \text{sur } \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(V^+, V^-). \end{cases}$$

i.e., elles est de type $\{(1,-1),0,(-1,1)\}$, CQFD.

Pour l'axiome **SV2**, il faut vérifier que $\mathrm{Int}(\mathrm{ad}(I))$ est une involution de Cartan de $G^{ad}_{\mathbf{R}}$. Il suffit pour cela de vérifier que $\theta=\mathrm{Int}(I)$ est une involution de Cartan du groupe dérivé $G^{der}_{\mathbf{R}}$. On plonge cette fois-ci G dans $\mathbf{GSp}(V,\psi)$, donc G^{der} dans $\mathbf{Sp}(V,\psi)$. Pour tout $g\in\mathbf{Sp}(V,\psi)(\mathbf{C})$ et $v,w\in V_{\mathbf{C}}$, on a

$$(\psi_{\mathbf{R},I})_{\mathbf{C}}(gv,\overline{gw})=(\psi_{\mathbf{R}})_{\mathbf{C}}(Igv,\overline{gw})=\psi_{\mathbf{C}}(gv,I^\star\overline{gw})$$

avec $I^\star=-I$. Donc si $I\overline{g}=gI$, $I^\star\overline{g}=gI^\star$ et

$$(\psi_{\mathbf{R},I})_{\mathbf{C}}(gv,\overline{gw})=\psi_{\mathbf{C}}(gv,gI^\star\overline{w})=\psi_{\mathbf{C}}(v,I^\star\overline{w})=\psi_{\mathbf{C}}(Iv,\overline{w})=(\psi_{\mathbf{R},I})_{\mathbf{C}}(v,\overline{w}).$$

Mais $\psi_{\mathbf{R},I}>0$, donc $(\psi_{\mathbf{R},I})_{\mathbf{C}}(v,\overline{w})$ est une forme hermitienne $\Psi>0$ sur $V_{\mathbf{C}}$. Donc

$$(G^{der})^\theta(\mathbf{R})\subset\mathbf{Sp}(V,\psi)^\theta(\mathbf{R})\subset U(\Psi)\subset\mathbf{Sp}(V_{\mathbf{C}},\psi_{\mathbf{C}})$$

est compact, CQFD.

Pour l'axiome **SV3**, il faut faire des hypothèses supplémentaires. Le composé du poids $\omega_{\mathcal{X}}:\mathbf{G}_{m,\mathbf{R}}\to Z_{\mathbf{R}}$ avec l'inclusion $Z_{\mathbf{R}}\to\mathbf{GL}(V_{\mathbf{R}})$ correspond à l'inverse du morphisme évident $\mathbf{G}_{m,\mathbf{R}}\to\mathbf{GL}(V_{\mathbf{R}})$, et ce poids est donc défini sur $\mathbf{Q}$, i.e. $(G,\mathcal{X})$ vérifie **SV4**.

5.3. **Exemple n°2bis : Un cas PEL simple.** Il y a un cas particulier qui a été abondamment étudié, notamment dans le cadre du programme de Langlands. C'est celui où le centre de B est un corps CM E. Alors B est simple et l'involution $\star$ de B induit l'involution canonique de E. Dans ce cas,

$$(B_{\mathbf{R}},\star)\simeq\prod_{\phi}(M_n(\mathbf{C}),\star)$$

Le choix d'un tel isomorphisme fournit un type CM Φ sur E, et une équivalence

$$\mathcal{H}(B_{\mathbf{R}},\star,-)\simeq\prod_{\phi}\mathcal{H}(\mathbf{C},\star).$$

En particulier, $G(\mathbf{R})\subset\prod\mathbf{GU}(V_\phi)=\mathbf{GU}(p_\phi,q_\phi)$ pour des signatures (p_ϕ,q_ϕ). Les domaines symétriques hermitiens associés à chacun des facteurs sont en bijection avec l'ensemble des décompositions $V_\phi=V_\phi^+\perp V_\phi^-$ en partie où la forme hermitienne est respectivement définie positive et définie négative. On peut de plus choisir Φ de sorte que le morphisme $h_\phi:\mathbf{S}\hookrightarrow G_{\mathbf{R}}$ correspondant à une telle décomposition envoie z sur $(z\,\text{sur}\,V_\phi^+,\overline{z}\,\text{sur}\,V_\Phi^-)$.

5.4. **Exemple n°3 : Tores.** Si T est un tore et $h:\mathbf{S}\to T_{\mathbf{R}}$ un morphisme quelconque, alors h agit trivialement sur $\mathrm{Lie}T_{\mathbf{R}}$ et $T^{ad}_{\mathbf{R}}$ est trivial : les conditions **SV1,2,3** sont donc automatiquement vérifiées. Les variétés de Shimura correspondantes sont de dimension 0 : juste un ensemble fini de points

$$\mathrm{Sh}_K(T,\{h\})(\mathbf{C})=T(\mathbf{Q})\backslash T(\mathbf{A}_f)/K.$$

5.5. **Exemple n°4 : variétés de type B ou D.** Soit F un corps totalement réel, (V,ϕ) un F-espace quadratique de dimension $n\geq 3$ tel que pour tout plongement $\tau:F\hookrightarrow\mathbf{R}$, (V_τ,ϕ_τ) est de signature

$$(p_\tau,q_\tau)\in\{(n,0),(0,n),(2,n-2),(n-2,2)\}.$$

On suppose aussi qu'*au moins une* de ces signatures est dans $\{(2,n-2),(n-2,2)\}$. On fixe dans chaque V_τ de signature $(2,n-2)$ ou $(n-2,2)$ un sous-espace totalement anisotrope W_τ maximal et de dimension 2, et une orientation sur ce sous-espace.

On munit W_τ de la structure complexe déduite de cette orientation, i.e. de celle pour laquelle la multiplication par i est une rotation d'angle $\pi/2$. On prend alors $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbf{Q}} SO(V,\phi)$ et pour $\mathcal{X}$, la classe de $G(\mathbf{R})$-conjugaison du morphisme $h : \mathbf{S} \to G_{\mathbf{R}}$ qui envoie $z \in \mathbf{C}^\times = \mathbf{S}(\mathbf{R})$ sur l'élément qui agit par $z/\overline{z}$ sur $\oplus W_\tau$ et qui est trivial sur $(\oplus W_\tau)^\perp$.

Exercise 5.2. Vérifier les axiomes **SV1-5.**

6. Structure algébrique sur C

A ce stade, on a déjà une structure de variété holomorphe (ou analytique complexe) sur

$$\mathrm{Sh}_K(G,\mathcal{X})(\mathbf{C}) = G(\mathbf{Q})\backslash \left(G(\mathbf{A}_f)/K \times \mathcal{X}\right),$$

au moins lorsque K est assez petit. Si cette variété est projective, i.e. isomorphe à un fermé d'un $\mathbf{P}^n(\mathbf{C})$, on peut appliquer le théorème suivant pour obtenir une variété *algébrique projective lisse* sur $\mathbf{C}$ dont $\mathrm{Sh}_K(G,\mathcal{X})(\mathbf{C})$ est l'ensemble des points complexes :

Theorem 6.1. *Le foncteur $V \mapsto V(\mathbf{C})^{an}$ est une équivalence de catégorie entre variété algébrique lisse projective sur $\mathbf{C}$ et variété analytique complexe projective.*

En règle générale, $\mathrm{Sh}_K(G,\mathcal{X})(\mathbf{C})$ n'est cependant pas compacte. Mais un théorème de Bailly et Borel permet de compactifier chacune des composantes connexes $\Gamma\backslash\mathcal{X}^+$de $\mathrm{Sh}_K(G,\mathcal{X})(\mathbf{C})$ en la réalisant comme un ouvert de Zariski d'une variété algébrique projective $(\Gamma\backslash\mathcal{X}^+)^\star$. On obtient alors une variété algébrique lisse et quasi-projective $\mathrm{Sh}_K(G,\mathcal{X})_{\mathbf{C}}$ sur $\mathbf{C}$ dont la variété analytique complexe sous-jacente $\mathrm{Sh}_K(G,\mathcal{X})_{\mathbf{C}}(\mathbf{C})^{an}$ est bien ce qu'il faut, à savoir notre variété analytique complexe $\mathrm{Sh}_K(G,\mathcal{X})(\mathbf{C})$! Un théorème de Borel dit que la structure algébrique ainsi obtenue est universelle - donc unique à unique isomorphisme près :

Theorem 6.2. *Pour toute variété algébrique quasi-projective lisse V sur $\mathbf{C}$, tout morphisme analytique complexe $V^{an}(\mathbf{C}) \to \mathrm{Sh}_K(G,\mathcal{X})(\mathbf{C})^{an}$ est induit par un morphisme algébrique $V \to \mathrm{Sh}_K(G,\mathcal{X})_{\mathbf{C}}$.*

Pour les variétés qui nous concernent principalement - à savoir les variétés de Shimura de type PEL, nous verrons plus bas pourquoi ces résultats ne nous concernent guère, compte-tenu de ce que l'on a déjà fait dans ce cours : on sait déjà que $\mathrm{Sh}_K(G,\mathcal{X})(\mathbf{C})$ est l'ensemble des $\mathbf{C}$-points d'une variété, celle qui représente le problème de module ad-hoc.

7. Modèles Canoniques

7.1. **Le corps reflex d'une donnée de Shimura.** Soit $(G,\mathcal{X})$ une donnée de Shimura. Pour tout $h \in \mathcal{X}$, on note

$$\mu_h : \mathbf{G}_{m,\mathbf{C}} \hookrightarrow \mathbf{G}_{m,\mathbf{C}} \times \mathbf{G}_{m,\mathbf{C}} \simeq \mathbf{S}_{\mathbf{C}} \xrightarrow{h_{\mathbf{C}}} G_{\mathbf{C}}$$

où le premier morphisme envoie z sur $(z,1)$ et l'inverse du second $z \in \mathbf{S}(\mathbf{R}) \subset \mathbf{S}(\mathbf{C})$ sur $(z,\overline{z}) \in \mathbf{G}_m(\mathbf{C}) \times \mathbf{G}_m(\mathbf{C})$. On obtient ainsi un élément bien défini $\mu(G,\mathcal{X}) \in \mathcal{C}(G,\mathbf{C})$, où pour tout corps $k \subset \mathbf{C}$, on note

$$\mathcal{C}(G,k) = G(k)\backslash \mathrm{Hom}_{k-gr}(\mathbf{G}_{m,k}, G_k)$$

l'ensemble des classes de $G(k)$-conjugaison de cocaractères de G_k.

Lemma 7.1. *Si G_k est décomposé, i.e. contient un tore maximal déployé $T = \mathbf{G}^r_{m,k}$, alors*

$$W(k)\backslash \mathrm{Hom}_{k-gr}(\mathbf{G}_{m,k}, T) \simeq G(k)\backslash \mathrm{Hom}_{k-gr}(\mathbf{G}_{m,k}, G_k)$$

où $W(k) = N_{G(k)}(T_k)/Z_{G(k)}(T_k)$ est le groupe de Weyl.

Démonstration. L'application est surjective car deux tores déployés maximaux sont nécessairement conjugués. Elle est injective : si $\mu, \mu' : \mathbf{G}_{m,k} \hookrightarrow T$ sont conjugués dans G_k, i.e. il existe $g \in G(k)$ tel que $\mu = \mathrm{Int}(g) \circ \mu'$. Alors μ est à valeur dans $T \cap \mathrm{Int}(g)(T)$, donc μ commute à T et $\mathrm{Int}(g)(T)$, i.e. T et $\mathrm{Int}(g)(T)$ sont deux tores maximaux dans le centralisateur $Z_\mu(G_k)$ de μ dans G_k, qui est un groupe connexe réductif, donc ils sont conjugués aussi par un élément $h \in Z_\mu(G_k)(k)$. On a donc

$$\mathrm{Int}(h) \circ \mu = \mu = \mathrm{Int}(h) \circ \mathrm{Int}(g) \circ \mu' = \mathrm{Int}(hg) \circ \mu'$$

avec maintenant $\mathrm{Int}(hg)(T) = T$, i.e. $hg \in N_{G(k)}(T_k)$, CQFD. □

On en déduit que $\mu(G, \mathcal{X}) \in \mathcal{C}(E)$ pour un corps de nombre $E \subset \mathbf{C}$ suffisamment gros.

Definition 7.2. Le corps reflex $E(G, \mathcal{X}) \subset \mathbf{C}$ est le corps de définition de $\mu(G, \mathcal{X}) \in \mathcal{C}(\overline{\mathbf{Q}})$.

Lemma 7.3. *Si $(H, \mathcal{Y}) \subset (G, \mathcal{X})$, alors $E(H, \mathcal{Y}) \supset E(G, \mathcal{X})$.*

Démonstration. Immédiat. □

7.2. **Les points spéciaux.**

Definition 7.4. Un point $h \in \mathcal{X}$ est dit spécial si et seulement si il existe un $\mathbf{Q}$-tore $T \subset G$ tel que $h : \mathbf{S} \hookrightarrow G_{\mathbf{R}}$ se factorise par $T_{\mathbf{R}}$. Un point $x \in \mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C})$ est dit spécial si et seulement si il existe un élément $g \in G(\mathbf{A}_f)$ et un point spécial h de $\mathcal{X}$ tel que

$$x = [g, h] \in G(\mathbf{Q})\backslash \left(G(\mathbf{A}_f)/K \times \mathcal{X}\right) = \mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C}).$$

Remark 7.5. Si T est un $\mathbf{Q}$-tore *maximal* (ce que l'on peut toujours supposer dans la définition ci-dessus), pour que $h \in \mathcal{X}$ se factorise par $T_{\mathbf{R}}$, il faut et il suffit que $h(\mathbf{C}^\times)$ et $T(\mathbf{R})$ commutent. En effet, h se factorise alors par le centralisateur $Z_{G_{\mathbf{R}}}(T_{\mathbf{R}}) = T_{\mathbf{R}}$ de $T_{\mathbf{R}}$ dans $G_{\mathbf{R}}$.

Remark 7.6. Pour tout $h \in \mathcal{X}$, le groupe de Mumford-Tate $\mathbf{MT}(h)$ de h est le plus petit sous-groupe H de G qui est défini sur $\mathbf{Q}$ et tel que $h : \mathbf{S} \to G_{\mathbf{R}}$ se factorise par $H_{\mathbf{R}}$. Presque par définition, $h \in \mathcal{X}$ est spécial si et seulement si $\mathbf{MT}(h) \subset G$ est un tore.

Soit h un point spécial de $\mathcal{X}$ et $T \subset G$ un $\mathbf{Q}$-tore tel que $h : \mathbf{S} \to G_{\mathbf{R}}$ se factorise par $T_{\mathbf{R}}$. Alors $(T, \{h\})$ est une sous-donnée de Shimura de $(G, \mathcal{X})$. Le corps reflex de $(T, \{h\})$ est le corps de définition du cocaractère $\mu_h : \mathbf{G}_{m,\mathbf{C}} \to T_{\mathbf{C}} \hookrightarrow G_{\mathbf{C}}$: il ne dépend pas du choix de T, mais seulement de $h \in \mathcal{X}$. On le note $E(h)$. Puisque pour tout corps $k \subset \overline{\mathbf{Q}}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{k-gr}\left(\mathbf{G}_{m,k}, T_{/k}\right) &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[\mathrm{Gal}_k]}\left(X^\star(T), X^\star(\mathbf{G}_{m,k})\right) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[\mathrm{Gal}_{\mathbf{Q}}]}\left(X^\star(T), \mathrm{Ind}_{\mathrm{Gal}_k}^{\mathrm{Gal}_{\mathbf{Q}}} X^\star(\mathbf{G}_{m,\mathbf{Q}})\right) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}[\mathrm{Gal}_{\mathbf{Q}}]}\left(X^\star(T), X^\star(T_k)\right) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}-gr}\left(T_k, T\right) \end{aligned}$$

le cocaractère $\mu_h : \mathbf{G}_{m,E(h)} \to T_{/E(h)}$ induit à son tour un morphisme de $\mathbf{Q}$-tores

$$r_h : T_{E(h)} = \mathrm{Res}_{E(h)/\mathbf{Q}}\mathbf{G}_{m,E(h)} \to T.$$

On obtient ainsi un morphisme

$$r_h : T_{E(h)}(\mathbf{A}) \to T(\mathbf{A}) \xrightarrow{\mathrm{proj}} T(\mathbf{A}_f) \hookrightarrow G(\mathbf{A}_f)$$

qui ne dépend à nouveau pas du choix de T.

7.3. **Le modèle canonique.**

Definition 7.7. Soit $(G, \mathcal{X})$ une donnée de Shimura et K un sous-groupe ouvert et compact de $G(\mathbf{A}_f)$.

(1) Un modèle M_K de $\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})$ sur $E(G, \mathcal{X})$ est dit canonique si et seulement si il vérifie la propriété suivante : pour tout point spécial h de $\mathcal{X}$ et tout $g \in G(\mathbf{A}_f)$, le point $[g, h]$ de $M_K(\mathbf{C})$ est défini sur l'extension abélienne maximale $E(h)^{ab}$ de $E(h) \supset E(G, \mathcal{X})$ dans $\mathbf{C}$, et pour tout $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}/E(h))$, pour tout $s \in T_{E(h)}(\mathbf{A})$ tel que $\sigma|E(h)^{ab} = \mathrm{Art}_{E(h)}(s)$,
$$\sigma \cdot [g, h] = [r_x(s)g, h] \quad \text{dans } \mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C}).$$
(2) Un modèle de $\mathrm{Sh}(G, \mathcal{X})$ est un système projectif de modèles canoniques $(\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X}))_K$ sur $E(G, \mathcal{X})$, indexé par les sous-groupes ouverts et compacts (suffisamment petits) K de $G(\mathbf{A}_f)$, muni d'une action à droite de $G(\mathbf{A}_f)$ qui induit celle que l'on a déjà sur $(\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C}))_K$.

Cette définition peut paraître bien singulière. Nous verrons plus bas pourquoi elle est au contraire tout à fait naturelle : la loi de réciprocité qui exprime l'action de Galois sur les points spéciaux est, tout au moins pour les variétés de Shimura de type PEL, rien d'autre qu'un avatar du théorème principal de la multiplication complexe.

7.4. **Unicité des modèles canoniques.** On veut montrer que

Theorem 7.8. *Si* $\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})$ *a un modèle canonique, celui-ci est unique à isomorphisme unique près.*

Démonstration. On applique le théorème suivant avec $K = K'$ et $\sigma = 1$. □

Theorem 7.9. *Soit* $\mathcal{T}(n) : \mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X}) \to \mathrm{Sh}_{K'}(G, \mathcal{X})$ *un morphisme* $[g, h] \mapsto [gn, h]$ *avec donc* $n \in G(\mathbf{A}_f)$*, pour des sous-groupes ouverts et compacts* K *et* K' *de* $G(\mathbf{A}_f)$ *tels que* $n^{-1}Kn \subset K'$*. Si* $\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})$ *et* $\mathrm{Sh}_{K'}(G, \mathcal{X})$*, ont un modèle canonique, alors* $\mathcal{T}(n)$ *est défini sur* $E(G, \mathcal{X})$*.*

Démonstration. Il suffit de voir que $\sigma(\mathcal{T}(n)) = \mathcal{T}(n)$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}/E(G, \mathcal{X}))$ (par descente fpqc des morphismes), ou encore que

$$\sigma \cdot \mathcal{T}(n)(x) = \mathcal{T}(n)(\sigma \cdot x)$$

pour un ensemble Zariski dense de points $x \in \mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C})$. Si $x = [g, h]$ pour un point spécial $h \in \mathcal{X}$ de corps réflexe $E(h) \supset E(G, \mathcal{X})$ et σ fixe $E(h)$, alors pour tout $s \in T_{E(x)}(\mathbf{A})$ tel que $\sigma|E(h)^{ab} = \mathrm{Art}_{E(h)}(s) \in \mathrm{Gal}^{ab}_{E(h)}$, on a

$$\sigma \cdot \mathcal{T}(n)([g, h]) = \sigma \cdot [gn, h] = [r_h(s)gn, h] = \mathcal{T}(n)[r_h(s)g, h] = \mathcal{T}(n)(\sigma \cdot [g, h]).$$

Le théorème résulte donc des deux lemmes suivants. □

Lemma 7.10. *Pour tout* $h \in \mathcal{X}$*,* $[G(\mathbf{A}_f), h]$ *est Zariski dense dans* $\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C})$*.*

Démonstration. Exercice. □

Lemma 7.11. (1) *Il existe un point spécial* $h \in \mathcal{X}$, *et* (2) $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/E(G,\mathcal{X}))$ *est engendré par les* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/E(h))$ *pour* $h \in \mathcal{X}$ *spécial.*

Démonstration. (1) On part d'un point $h \in \mathcal{X}$, on choisit un tore maximal $T \subset G_{\mathbf{R}}$ à travers lequel h se factorise. Alors T est le centralisateur de tout point régulier $t \in \mathrm{Lie}T(\mathbf{R})$. Mais si $t_0 \in \mathrm{Lie}G(\mathbf{Q})$ est suffisamment proche de $t \in \mathrm{Lie}G(\mathbf{R}) = \mathrm{Lie}G(\mathbf{Q}) \otimes \mathbf{R}$, alors t_0 est encore régulier, donc son centralisateur T_0 est encore un tore maximal dans G, qui est maintenant défini sur $\mathbf{Q}$. Tous les tores maximaux de $G_{\mathbf{R}}$ ne sont malheureusement pas conjugués, mais il n'y a qu'un nombre fini de classes de conjugaisons - et si t_0 est suffisamment proche de t, alors $T_{0\mathbf{R}} = gTg^{-1}$ pour un $g \in G(\mathbf{R})$. Alors $ghg^{-1} = g \cdot h$ se factorise par T_0 : c'est donc un point spécial de $\mathcal{X}$. (2) Voir la version originale de [1, 5.1]. □

Remark 7.12. On montre de même que si tous les $\mathrm{Sh}_K(G,\mathcal{X})$ ont un modèle canonique, alors $\mathrm{Sh}(G,\mathcal{X})$ en a un aussi (i.e. les applications de transitions et l'action de $G(\mathbf{A}_f)$ sont données par des morphismes algébriques définis sur le corps reflex $E(G,\mathcal{X})$.

Remark 7.13. On montre encore de même que les modèles canoniques sont fonctoriels en la donnée de Shimura : si $\iota : (G,\mathcal{X}) \to (G',\mathcal{X}')$ est un morphisme de données de Shimura, si $\iota(K) \subset K'$ sont des sous-groupes ouverts et compacts de $G(\mathbf{A}_f)$ et de $G'(\mathbf{A}_f)$, et si $\mathrm{Sh}_K(G,\mathcal{X})$ et $\mathrm{Sh}_{K'}(G',\mathcal{X}')$ ont des modèles canoniques, alors $\iota : \mathrm{Sh}_K(G,\mathcal{X}) \to \mathrm{Sh}_K(G',\mathcal{X}')$ est défini sur $E(G,\mathcal{X}) \cdot E(G',\mathcal{X}')$.

7.5. **Existence des modèles canoniques.** Il s'agit d'un problème de descente fpqc, le long de $S = \mathrm{Spec}\mathbf{C} \to S_0 = \mathrm{Spec}E$ où $E = E(G,\mathcal{X})$. Dans ce contexte, une donnée de descente sur un $\mathrm{Spec}\mathbf{C}$-schéma X est - comme d'habitude - un isomorphisme $p_1^\star X \simeq p_2^\star X$ de S'-schémas vérifiant une condition de cocycle, où $p_1, p_2 : S' = S \times_{S_0} S \to S$ sont les deux projections, et une telle donnée de descente est effective lorsque X est quasi-projectif. Malheureusement, le schéma $S' = \mathrm{Spec}\mathbf{C} \otimes_E \mathbf{C}$ est nettement plus compliqué qu'il n'en a l'air. Cependant tout élément $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}/E)$ définit un morphisme $\mathbf{C} \otimes_E \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ donné par $x \otimes y \mapsto \sigma(x)y$, donc un morphisme $(\sigma, 1) : \mathrm{Spec}(\mathbf{C}) \to S'$. En faisant le pull-back de notre isomorphisme $p_1^\star X \simeq p_2^\star X$, par $(\sigma, 1)$, on obtient un isomorphisme $f_\sigma : \sigma X \simeq X$. La condition de cocycle implique alors que $f_{\sigma\tau} = f_\sigma \circ \sigma(f_\tau) : \sigma\tau X \to \sigma X \to X$, et la collection de ces isomorphismes est presque aussi bonne que la donnée de descente elle-même : Milne décrit dans [4] une condition suffisante, dite de continuité, pour qu'une telle (variante de) donnée de descente sur un schéma quasi-projectif X sur $\mathbf{C}$ soit effective. Si de plus X est lisse, on peut encore décrire les f_σ au moyen de l'action qu'ils induisent sur $X(\mathbf{C})$: $\sigma \cdot x = f_\sigma(\sigma x)$. Une action de $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}/E)$ sur l'ensemble $X(\mathbf{C})$ est dite régulière si elle provient de tels morphismes f_σ. Au final, une action *régulière* et *continue* sur $X(\mathbf{C})$ est donc effective si X est quasi-projectif et lisse.

D'après l'unicité des modèles canoniques, il existe au plus une donnée de descente canonique sur $\mathrm{Sh}_K(G,\mathcal{X})(\mathbf{C})$, c'est-à-dire au plus une action régulière et continue telle que $\sigma \cdot [g,h] = [r_h(s)g, h]$ pour tout $g \in G(\mathbf{A}_f)$, tout $h \in \mathcal{X}$ spécial, tout $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}/E(h))$ et tout $s \in T_{E(h)}(\mathbf{A})$ tel que $\mathrm{Art}_{E(h)}(s) = \sigma|E(h)^{ab}$. Il reste à *construire* une telle action de $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}/E)$ sur $\mathrm{Sh}_K(G,\mathcal{X})$, et à *vérifier* qu'elle est bien *régulière* et *continue*.

Lorsque les points de $\mathrm{Sh}_K(G,\mathcal{X})(\mathbf{C})$ classifient des objets algébriques sur $\mathbf{C}$, comme c'est le cas pour les variétés de type PEL, l'action de $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}/E)$ sur les objets classifiés fournit déjà une action de $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}/E)$ sur $\mathrm{Sh}_K(G,\mathcal{X})(\mathbf{C})$ et Milne vérifie dans [4, §14] que cette action est bien régulière et continue. Nous n'avons pas besoin de vérifier cela pour les variétés qui nous intéressent : nous savons déjà que cette action est une donnée de descente effective, puisque c'est celle qui provient du modèle que nous avons construit dans le début du cours. En revanche, et comme Milne, nous devons vérifier que notre modèle est bien *canonique*, ce que l'on fait dans la section suivante.

Remark 7.14. La démonstration de l'existence des modèles canoniques pour toutes les variétés de Shimura est beaucoup plus fastidieuse, et les dernières ramifications de la preuve ne datent que d'une dizaine d'année.

8. Le cas des Variétés de Shimura de Type PEL

Soient B une $\mathbf{Q}$-algèbre semi-simple, $\star$ une involution positive de B, $(V,\psi)\in\mathcal{H}_{\mathbf{Q}}(B,\star,-1)$ un espace $(B,\star)$-symplectique, I une structure complexe $(B,\star)$ linéaire sur $(V_{\mathbf{R}},\psi_{\mathbf{R}})$ telle que $\psi_{\mathbf{R},I}>0$, G le groupe des similitudes symplectiques B-linéaire de (V,ψ), $\mathcal{X}$ la classe de $G(\mathbf{R})$-conjugaison du morphisme $h_I:\mathbf{S}\to G_{\mathbf{R}}$ donné par la structure complexe I, et K un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbf{A}_f)$. On s'intéresse à la variété de Shimura $\mathrm{Sh}_K(G,\mathcal{X})$.

8.1. **Les points complexes.** L'ensemble des points complexes

$$\mathrm{Sh}_K(G,\mathcal{X})(\mathbf{C})=G(\mathbf{Q})\backslash\left(G(\mathbf{A}_f)/K\times\mathcal{X}\right)$$

paramètre les classes d'isomorphismes de quadruplets $(A,\iota,[\lambda],[\kappa])$ où

(1) A est une variété abélienne à isogénie près sur $\mathbf{C}$,
(2) $\iota:B\to\mathrm{End}^0(A)$ est une action de B telle que le $B\otimes\mathbf{C}$-module $\mathrm{Lie}(A)$ soit isomorphe à $V_{\mathbf{R},I}$,
(3) $[\lambda]=\mathbf{Q}\lambda$ où $\lambda:A\to A^t$ est une polarisation $(B,\star)$-linéaire,
(4) $[\kappa]=\kappa K$ est une K-orbite d'isomorphismes $\widehat{B}$-linéaires $\kappa:\widehat{V}\to V_f(A,\mathbf{C})$ tels qu'il existe un isomorphisme $\nu:\mathbf{A}_f\to V_f(\mu,\mathbf{C})$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{cccc}\widehat{\psi}: & \widehat{V}\times\widehat{V} & \to & \mathbf{A}_f\\ & \kappa\downarrow & & \nu\downarrow\\ \langle\bullet,\bullet\rangle_f^{\lambda}: & V_f(A,\mathbf{C})\times V_f(A,\mathbf{C}) & \to & V_f(\mu,\mathbf{C})\end{array}$$

(les isomorphismes sont alors automatiquement $\widehat{B}$-linéaires),

Le tout étant de plus assujetti à la condition suivante :

$$[V,\mathbf{Q}^\times\psi]=[H_1(A,\mathbf{Q}),\mathbf{Q}^\times\psi_\lambda]\quad\text{dans } \mathcal{H}_{\mathbf{Q}}(B,\star,-1). \tag{8.1}$$

i.e. les $(B,\star)$-modules symplectiques (V,ψ) et $(H_1(A,\mathbf{Q}),\psi_\lambda)$ sont isomorphes à une similitude près. En effet, soit $(A,\iota,[\lambda],[\kappa])$ un tel quadruplet. Choisissons un isomorphisme B-linéaire

$$\nu:H_1(A,\mathbf{Q})\to V$$

qui envoie $\mathbf{Q}\psi_\lambda$ sur $\mathbf{Q}\psi$. Alors

$$\widehat{\nu}\circ\kappa:V\otimes\mathbf{A}_f=\widehat{V}\to V_f(A,\mathbf{C})\simeq H_1(A,\mathbf{Q})\otimes\mathbf{A}_f\to V\otimes\mathbf{A}_f$$

est un élément $g \in G(\mathbf{A}_f)$ et $J = \nu_{\mathbf{R}} \circ [i] \circ \nu_{\mathbf{R}}^{-1} : V_{\mathbf{R}} \to V_{\mathbf{R}}$

$$J : V \otimes \mathbf{R} \to H_1(A, \mathbf{R}) \simeq \mathrm{Lie}(A)(\mathbf{C}) \xrightarrow{i} \mathrm{Lie}(A)(\mathbf{C}) \simeq H_1(A, \mathbf{R}) \to V \otimes \mathbf{R}$$

est une structure complexe $(B, \star)$-linéaire sur $(V_{\mathbf{R}}, \psi_{\mathbf{R}})$ telle que les $B \otimes \mathbf{C}$-modules $V_{\mathbf{R},I}$ et $W_{\mathbf{R},J}$ soient isomorphes, et $\pm\psi_{\mathbf{R},J} > 0$, donc J est conjugué à I par un élément de $G(\mathbf{R})$, i.e. $h_J \in \mathcal{X}$. Puisque κK et $G(\mathbf{Q})\nu$ sont bien déterminés, on obtient

$$[g, h_J] \in \mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C}) = G(\mathbf{Q}) \backslash (G(\mathbf{A}_f)/K \times \mathcal{X}) .$$

Inversement, un tel élément détermine le quadruplet $[A, \iota, [\lambda], [\kappa]]$ où $A = V_{\mathbf{R},J}/\Lambda$, $\psi_\lambda = \pm\psi$, $\kappa = g$ et $\iota(b) \in \mathrm{End}^0(A) = \{\alpha \in \mathrm{End}_{\mathbf{Q}}(V) : \alpha_{\mathbf{R}} \circ J = J \circ \alpha_{\mathbf{R}}\}$ est la multiplication par b. Ici, Λ est un réseau quelconque de A sur lequel ψ est entier.

Remark 8.1. Si le groupe des similitudes de (V, ψ) vérifie le principe de Hasse, la condition (8.1) est superflue : la structure de niveau détermine la classe de similitude de $(H_1(A, \mathbf{Q}), \psi_\lambda) \otimes \mathbf{Q}_p$ pour tout nombre premier p, et la condition sur le déterminant détermine celle de $(H_1(A, \mathbf{Q}), \psi_\lambda) \otimes \mathbf{R}$.

8.2. **Le corps reflex.** Pour $h : \mathbf{S} \to G_{\mathbf{R}}$ dans $\mathcal{X}$, on note $\mu_h : \mathbf{G}_{m,\mathbf{C}} \to G_{\mathbf{C}}$ le cocaractère défini par

$$\mu_h : \mathbf{G}_{m,\mathbf{C}} \xrightarrow{i_1} \mathbf{G}_{m,\mathbf{C}} \times \mathbf{G}_{m,\mathbf{C}} \simeq \mathbf{S}_{\mathbf{C}} \xrightarrow{h_{\mathbf{C}}} G_{\mathbf{C}}.$$

Si $\iota : G \hookrightarrow GL_B(V)$ est l'inclusion naturelle, on obtient donc aussi

$$\iota h : \mathbf{S} \to GL_B(V)_{\mathbf{R}} \quad \text{et} \quad \iota\mu_h : \mathbf{G}_{m,\mathbf{C}} \to GL_B(V)_{\mathbf{C}}.$$

On note $V \otimes \mathbf{C} = V_h^{-1,0} \oplus V_h^{0,-1}$ la décomposition de Hodge associée à h. C'est une décomposition du $B \otimes \mathbf{C}$-module $V \otimes \mathbf{C}$ en somme directe de deux $B \otimes \mathbf{C}$-sous-modules échangés par la conjugaison. Le morphisme $h_{\mathbf{C}}$ envoie $(z_1, z_2) \in \mathbf{S}(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^\times \times \mathbf{C}^\times$ sur l'isomorphisme $B \otimes \mathbf{C}$-linéaire $([z_1], [z_2])$ qui est la multiplication par z_1 sur $V_h^{-1,0}$ et la multiplication par z_2 sur $V_h^{0,-1}$. Le cocaractère μ_h envoie donc $z \in \mathbf{C}^\times$ sur $([z], [1])$ tandis que $(\tau\mu_h)$ envoit $z \in \mathbf{C}^\times$ sur $([1], [z])$. D'autre part, l'inclusion $V \otimes \mathbf{R} \hookrightarrow V \otimes \mathbf{C}$ induit un isomorphisme de $B \otimes \mathbf{R}$-module $V \otimes \mathbf{R} \simeq V \otimes \mathbf{C}/V_h^{0,-1}$, et cet isomorphisme envoie l'isomorphisme $B \otimes \mathbf{R}$-linéaire $h(i)$ de $V \otimes \mathbf{R}$ sur la multiplication par i. On peut donc voir cet isomorphisme comme un isomorphisme de $B \otimes \mathbf{C}$-module

$$V_{\mathbf{R},h(i)} \simeq V \otimes \mathbf{C}/V_h^{0,-1} \simeq V \otimes \mathbf{C}/(V \otimes \mathbf{C})^{\mu_h(\mathbf{C}^\times)}.$$

On définit trois corps reflex :

- E_{Shi} est le corps de définition de la classe de $G(\mathbf{C})$-conjugaison $\mathcal{C}(\mu_h)$,
- E_{Rep} est le corps de définition de la classe de $GL_B(V)(\mathbf{C})$-conjugaison $\mathcal{C}(\iota\mu_h)$,
- E_{Mod} est le corps de définition du déterminant $d(\mathcal{X}) : B \otimes \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ de $V_{\mathbf{R},h(i)}$.

Lemma 8.2. *On a $E_{Mod} \subset E_{Rep} \subset E_{Shi}$.*

Démonstration. Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}/E_{Shi})$. Alors $\sigma\mu_h = \mathrm{Int}(g) \circ \mu_h$ pour un $g \in G(\mathbf{C})$, donc

$$\sigma(\iota \circ \mu_h) = \iota \circ (\sigma\mu_h) = \iota \circ \mathrm{Int}(g) \circ \mu_h = \mathrm{Int}(\iota(g)) \circ (\iota \circ \mu_h)$$

donc $\sigma\mathcal{C}(\iota\mu_h) = \mathcal{C}(\iota\mu_h)$, i.e. σ fixe E_{Rep} et $E_{Rep} \subset E_{Shi}$. Soit ensuite $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}/E_{Rep})$. Alors $\sigma\mu_h = \mathrm{Int}(g) \circ \mu_h$ pour un $g \in GL_{B\otimes\mathbf{C}}(V \otimes \mathbf{C})$, i.e.

$$\forall z \in \mathbf{C}^\times : \qquad (Id_V \otimes \sigma) \circ \mu_h(\sigma^{-1}z) \circ (Id_V \otimes \sigma)^{-1} = g \circ \mu_h(z) \circ g^{-1} \text{ sur } V \otimes \mathbf{C}.$$

Alors $(Id_V \otimes \sigma)^{-1} \circ g : V \otimes \mathbf{C} \to V \otimes \mathbf{C}$ induit un isomorphisme $B \otimes \mathbf{C}$-linéaire

$$V \otimes \mathbf{C}/(V \otimes \mathbf{C})^{\mu_h(\mathbf{C}^\times)} \to \sigma^\star(V \otimes \mathbf{C}/(V \otimes \mathbf{C})^{\mu_h(\mathbf{C}^\times)})$$

où pour tout $B \otimes \mathbf{C}$-module W, $\sigma^\star W$ est le $B \otimes \mathbf{C}$-module dont le B-module sous-jacent est W, et où $\lambda \in \mathbf{C}$ agit par $\sigma^{-1}(\lambda)$. Donc $\sigma^\star(V_{\mathbf{R},h(i)}) \simeq V_{\mathbf{R},h(i)}$ comme $B \otimes \mathbf{C}$-module, donc $\sigma d(\mathcal{X}) = d(\mathcal{X})$, i.e. σ fixe E_{Mod}. □

Remark 8.3. On doit pouvoir montrer que $E_{Mod} = E_{Rep} = E_{Shi}$.

8.3. **Le problème de module.** On a définit un problème de module

$$M_K : (\mathbf{Sch}/E_{Mod})^0 \to \mathbf{Ens}$$

qui à un E_{Mod}-schéma S associe l'ensemble des classes d'isomorphismes de quadruplets $(A, \iota, [\lambda], [\kappa])$ où

(1) A est un S-schéma abélien à isogénie près,
(2) $\iota : B \to \mathrm{End}^0(A)$ est un action de B sur A, telle que le déterminant du $B \otimes \mathcal{O}_S$-module $\mathrm{Lie}(A)$ soit égal à $d(\mathcal{X})$.
(3) $[\lambda] = \mathbf{Q}\lambda$ où $\lambda : A \to A^t$ est une polarisation,
(4) $[\kappa]$ est la donnée, pour un point géométrique s dans chacune des composantes connexes de S, d'une K-orbite κK d'isomorphismes B-linéaires $\kappa : \widehat{V} \to V_f(A, s)$ tels qu'il existe un isomorphisme $\nu : \mathbf{A}_f \to V_f(\mu, s)$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\psi} : & \widehat{V} \times \widehat{V} & \to & \mathbf{A}_f \\ & \kappa \downarrow & & \nu \downarrow \\ \langle \bullet, \bullet \rangle_f^\lambda : & V_f(A, s) \times V_f(A, s) & \to & V_f(\mu, s) \end{array}$$

Notons que l'on ne peut pas imposer la condition (8.1), qui n'a aucun sens dans ce contexte plus général. On a vu que ce problème de module était représentable par un E_{Mod}-schéma que l'on note encore M_K. Sur les $\mathbf{C}$-points, on obtient donc une inclusion

$$p : \mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C}) \hookrightarrow M_K(\mathbf{C}).$$

Remark 8.4. Si le groupe des similitudes G de (V, ψ) vérifie le principe de Hasse, cette inclusion est une bijection. En général, $M_K(\mathbf{C})$ est la réunion d'un nombre fini de variétés de Shimura de même type, indexées par les classes de similitudes de couples $(V', \psi') \in \mathcal{H}_{\mathbf{Q}}(B, \star, -1)$ qui sont partout localement isomorphes (=similaires) à (V, ψ).

8.4. **Les points spéciaux.** Soit $x = [g, h]$ un point de $\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C})$ et $p(x) = [A, \iota, [\lambda], [\kappa]]$ le point correspondant de $M_K(\mathbf{C})$. Soit $\mathbf{MT}(x) \subset GL(V)$ le groupe de Mumford-Tate de h, i.e. le plus petit sous-groupe algébrique H défini sur $\mathbf{Q}$ de $GL(V)$ tel que $h : \mathbf{S} \hookrightarrow GL(V)_{\mathbf{R}}$ se factorise par $H_{\mathbf{R}}$. On a donc $\mathbf{MT}(x) \subset G$, et :

Lemma 8.5. *x est spécial $\iff$ $\mathbf{MT}(x)$ est un tore $\iff$ A est à multiplication complexe.*

Démonstration. La première équivalence est tautologique, la seconde a déjà été démontrée. □

On suppose dorénavant que c'est le cas. Alors

Lemma 8.6. *Il existe une sous-$\mathbf{Q}$-algèbre CM E de $\mathrm{End}^0(A)$ telle que* (1) $\dim_{\mathbf{Q}} E = 2\dim A$ *et* (2) *l'involution de Rosati $\star_\lambda$ induite par la polarisation λ stabilise E.*

Démonstration. Si $A \sim \oplus A_i^{n_i}$ avec A_i simples et deux à deux non-isogènes, alors $\mathrm{End}^0(A) = \prod M_{n_i}(E_i)$ où $E_i = \mathrm{End}^0 A_i$ est un corps CM. Puisque l'involution $\star_\lambda$ est positive, elle fixe chaque facteur simple $M_{n_i}(E_i)$ et induit sur celui-ci une involution positive du centre E_i - qui est donc l'involution canonique de E_i. On a vu qu'une telle involution (de seconde espèce de $M_{n_i}(E_i)$) était de la forme $\star_{\psi_i}$ pour une forme hermitienne (définie positive) sur $E_i^{n_i}$. Une telle forme est diagonalisable dans une base β_i de $E_i^{n_i}$, et le produit E des sous-algèbres $E_i^{n_i} \subset M_{n_i}(E_i)$ correspondant à ces choix de bases est la $\mathbf{Q}$-algèbre CM recherchée. □

On fixe une telle sous-algèbre CM, de sorte que A a maintenant aussi multiplication complexe par E, et V est un E-module libre de rang 1, T_E un sous-tore de $GL(V)$ défini sur $\mathbf{Q}$, et $h : \mathbf{S} \to GL(V)_{\mathbf{R}}$ se factorise par $T_{E,\mathbf{R}}$, donc $T \subset G \cap T_E \subset T_E$:

$$\begin{array}{ccc} T & \hookrightarrow & T_E \\ \cap & & \cap \\ G & \hookrightarrow & GL(V) \end{array}$$

On a $E(T, \{h\}) = E(T_E, \{h\}) = E(\Phi)$ où $\Phi \subset \mathrm{Hom}_{\mathbf{Q}-alg}(E, \mathbf{C})$ est le type CM sur E défini par h, de sorte que le $E \otimes \mathbf{C}$-module $V_{\mathbf{R},h(i)} \simeq \mathrm{Lie}A(\mathbf{C})$ est isomorphe à $\oplus_{\phi\in\Phi}\mathbf{C}(\phi)$.

Lemma 8.7. *Les morphismes $r_x : T_{E(\Phi)} \to T \hookrightarrow T_E$ et $N_\Phi : T_{E(\Phi)} \to T_E$ coincident.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que les (σ, ϕ)-composantes des deux morphismes

$$r_x, N_\Phi : \left(T_{E(\Phi)}(\mathbf{C}) = \prod_{\sigma: E(\Phi)\to\mathbf{C}} \mathbf{C}^\times \right) \to \left(T_E(\mathbf{C}) = \prod_{\phi: E\to\mathbf{C}} \mathbf{C}^\times \right)$$

coïncident. En revenant aux définitions, on voit que

$$(r_x)_{\sigma,\phi} = (N_\Phi)_{\sigma,\phi} = \begin{cases} Id & \text{si } \phi \in \Phi, \\ 1 & \text{si } \phi \notin \Phi. \end{cases}$$

CQFD. □

Soit $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}/E(x))$ et $s \in T_{E(\Phi)}(\mathbf{A}_f)$ tel que $\sigma|E(x)^{ab} = \mathrm{Art}_{E(\Phi)}(s)$. Soit $\alpha : A \to \sigma A$ l'unique E-isogénie telle que $\alpha(r_x(s)\cdot v) = \sigma v$ pour tout $v \in V_f(A, \mathbf{C})$, qui existe d'après le théorème principal de la multiplication complexe et le lemme précédent.

Lemma 8.8. *Avec ces notations, α est une B-isogénie, et*

$$\alpha^{-1}[\sigma\lambda] = [\lambda] \quad \textit{et} \quad \alpha^{-1}[\sigma\kappa] = [r_x(s)\kappa].$$

Démonstration. Pour (1), il suffit de vérifier que $V_f(\alpha) : V_f(A, \mathbf{C}) \to V_f(\sigma A, \mathbf{C})$ est $\widehat{B}$-linéaire. Mais $\sigma : V_f(A, \mathbf{C}) \to V_f(\sigma A, \mathbf{C})$ l'est par définition de $\sigma\iota$, et $r_x(s) : V_f(A, \mathbf{C}) \to V_f(A, \mathbf{C})$ l'est aussi puisque $r_x(T_{E(\Phi)}) \subset G \subset GL_B(V)$, donc $V_f(\alpha) =$

$\sigma \circ r_x(s)^{-1}$ est $\widehat{B}$-linéaire. Pour (2), calculons la forme symplectique induite par la polarisation $\alpha^{-1}(\sigma\lambda) = \alpha^t \circ \sigma\lambda \circ \alpha$ sur $V_f(A, \mathbf{C})$:

$$\begin{aligned}
\langle v, w \rangle_f^{\alpha^t \circ \sigma\lambda \circ \alpha} &= \langle \alpha(v), \alpha(w) \rangle_f^{\sigma\lambda} = \left\langle \sigma(r_x(s)^{-1}v), \sigma(r_x(s)^{-1}w) \right\rangle_f^{\sigma\lambda} \\
&= \chi_{cyc}(\sigma) \left\langle r_x(s)^{-1}v, r_x(s)^{-1}w \right\rangle_f^{\lambda} = c \langle v, w \rangle_f^{\lambda}
\end{aligned}$$

où $c = \frac{\chi_{cyc}(\sigma)}{N_\Phi(s) \cdot N_\Phi(s)^\star} \in \mathbf{Q}_>^\times$, donc $\alpha^{-1}(\sigma\lambda) = c\lambda$ et $\alpha^{-1}[\sigma\lambda] = [\lambda]$. Pour (3), choisissons $\kappa : \widehat{V} \to V_f(A, \mathbf{C}) \in [\kappa] = \kappa K$. Alors $\alpha^{-1} \circ \sigma \circ \kappa = r_x(s) \cdot \kappa$ donc $\alpha^{-1}[\kappa] = [r_x(s) \cdot \kappa]$. □

Corollary 8.9. *Pour tout point spécial* $x = [g, h] \in \mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C})$*, pour tout* $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C}/E(x))$ *et* $s \in T_{E(x)}(\mathbf{A})$ *tel que* $\mathrm{Art}_{E(x)}(s) = \sigma | E(x)^{ab}$*,*

$$\sigma p([g, h]) = p([r_x(s)g, h]) \quad \textit{dans } M_K(\mathbf{C})$$

Démonstration. Le lemme précédent montre que

$$\sigma[A, \iota, [\lambda], [\kappa]] = [A, \iota, [\lambda], [r_x(s)\kappa]] \quad \text{dans } M_K(\mathbf{C}).$$

On conclut aisément en revenant à la définition de p. □

8.5. **Modèle canonique, I.** Si l'on admet le théorème de Bailly-Borel, qui nous dit que $\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})$ existe en tant que variété algébrique sur $\mathbf{C}$, on peut utiliser le corollaire ci-dessus pour construire le modèle canonique de cette variété, i.e. pour construire la donnée de descente (continue, régulière) canonique sur $\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C})$. On procède comme suit.

Le groupe $\mathrm{Aut}(\mathbf{C})$ agit sur les quadruplets $(A, \iota, [\lambda], [\kappa])$ qui sont classifiés par nos variétés de Shimura. La condition sur le déterminant est préservée par $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}/E_{Mod})$, mais il n'est pas clair (pour moi) que la condition (8.1) l'est aussi. On relâche donc d'abord cette condition, ce qui nous donne une action du groupe $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}/E_{Mod})$ sur les $\mathbf{C}$-points d'une réunion de variétés de Shimura (qui n'est autre que l'action naturelle de $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}/E_{Mod})$ sur $M_K(\mathbf{C})$). On montre comme Milne dans [4, §14] que cette "donnée de descente" est continue et régulière, dans le sens de [4, §14]. Du corollaire, on déduit dans un premier temps que pour tout point spécial h de $\mathcal{X}$, le sous-groupe $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}/E(x))$ de $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}/E_{Mod})$ stabilise le sous-ensemble Zariski dense $[G(\mathbf{A}_f), h]$ de $\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C})$. Ce sous-groupe stabilise donc tout $\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C})$. D'après le lemme 7.11, on obtient alors une action (régulière et continue) de $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}/E_{Shi})$ sur $\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C})$, et le corollaire montre exactement que cette donnée de descente est canonique.

8.6. **Modèle canonique, II.** On peut aussi ne vouloir rien admettre du tout, et essayer de montrer directement que M_K *est* le modèle canonique recherché (de notre réunion de variétés de Shimura). Le corollaire nous dit en effet que l'action naturelle de $\mathrm{Aut}(\mathbf{C}/E_{Mod})$ sur $M_K(\mathbf{C})$ donne bien ce qu'il faut sur les points spéciaux. Mais alors, que s'agit-il de démontrer ? Essentiellement ceci : que pour K suffisamment petit, le E_{Mod}-schéma M_K est *lisse*.

Dans ce cas : (1) une extension convenable de l'équivalence de catégorie entre (variétés abéliennes sur $\mathbf{C}$) et (tores complexes polarisables) en une équivalence de catégorie entre (schémas abéliens sur une base S lisse sur $\mathbf{C}$) et (objets analytiques complexes analogues sur $S(\mathbf{C})^{an})^2$ permet de montrer que le morphisme

$$p : \mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C}) \to M_K(\mathbf{C})$$

est compatible avec les structures analytiques complexes. En particulier, il identifie $\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})(\mathbf{C})$ à une réunion de composantes connexes de $M_K(\mathbf{C})$. Puis : (2) le théorème de Borel montre alors que ce morphisme est aussi compatible avec les structures algébriques sur $\mathbf{C}$.

8.7. **Autour de la lissité de M_K.** Elle peut se vérifier directement sur le problème de module - comme il résulte de la définition Grothendieckienne de la lissité :

Definition 8.10. [3, IV, 17.1.1] Un morphisme localement de présentation finie $f : X \to S$ est lisse si et seulement si il est formellement lisse, i.e. pour tout anneau R, et tout idéal nilpotent I de R (ou même seulement pour tout idéal I de R tel que $I^2 = 0$), l'application $X(R) \to X(R/I)$ est *surjective.*

La vérification de ce critère est alors un problème de *déformation* : si A_0 est une variété abélienne sur R/I (avec des structures telles que polarisation, endomorphismes, structures de niveaux...), peut-on la relever en une variété abélienne sur R (avec ses structures) ? On peut d'ailleurs prolonger ce point de vue : pour un morphisme $f : X \to S$ localement de type fini (avec S noethérien), la propriété pour f d'être lisse en un point x est une propriété du morphisme entre les anneaux locaux complétés $\widehat{\mathcal{O}}_{S,f(x)} \to \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$. Si par exemple $f(x)$ et x ont le même corps résiduel k, il faut que $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{S,f(x)}[[T_1, \cdots, T_n]]$, cf. [3, 17.5.3]. Or si X représente $\mathcal{F} = \mathrm{Hom}_S(\bullet, X)$, on peut calculer le $\widehat{\mathcal{O}}_{S,f(x)}$-anneau local complété $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ comme l'anneau qui pro-représente le foncteur $\mathcal{F}_x(R) = \{z \in \mathcal{F}(R) : z \bmod m_R = x \in \mathcal{F}(k(x))\}$, foncteur qui est défini sur la catégorie des $\mathcal{O}_{S,f(x)}$-algèbres artiniennes locales R de corps résiduel $R/m_R \simeq k$. Les anneaux locaux complétés de nos schémas de modules sont donc les *anneaux de déformation universels* des objets classifiés.

Remark 8.11. Ce point de vue est surtout utile lorsqu'il s'agit d'étudier les anneaux locaux des problèmes de modules sur des anneaux d'entiers, en un point d'une fibre fermée (= spéciale). Si la caractéristique du corps résiduel k est p, la théorie de Serre-Tate ramène l'étude des déformations de variétés abéliennes A sur k à celle des déformations du groupe p-divisible $A(p^\infty)$. Pour ces derniers, on dispose de tout un éventail d'outils (groupes formels, modules de Dieudonné, théorie de Fontaine-Messing...) dont nous ne parlerons pas. C'est ainsi que l'on arrive finalement parfois à démontrer que ces anneaux locaux sont, par exemple, réguliers.

Références

[1] P. Deligne. *Travaux de Shimura.*

[2] P. Deligne, *Variétés de Shimura : interprétation modulaire et techniques de construction de modèles canoniques*, in Automorphic Forms, representations and L-functions (alias **Corvallis**). Proc. Symp. Pure Math. ,XXXIII, Amer. Math. Soc. Providence RI.

[3] J. Dieudonné et A. Grothendieck, *Eléments de Géométrie Algébrique.* Publications Scientifiques de l'IHES n°**4**, **8**, **11**, **17**, **20**, **24**, **28**, **32.**

[4] J. Milne, *Shimura Varieties.*

[2] Dans ce contexte, la notion pertinente est celle de *variations de structures de Hodge*, cf. [4, §2 et Theorem 14.8].

[5] V. Platonov et A. Rapinchuk, *Algebraic Groups and Number Theory*, Vol **139**, de Pure and Applied Mathematcis, Academic Press.