## 1. Première partie

(1) Soit $E$ une extension quadratique imaginaire et $\{1,\star\} = \mathbf{Gal}(E/\mathbb{Q})$. On note $D < 0$ le discriminant de $E$ et $\eta \in E$ une racine carré de $D$.

(a) Décrire les classes d'isomorphismes de

$$(V,\psi) \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(E,\star,-1) \quad \text{avec } \dim_E V = 2.$$

(2) On fixe $(V,\psi) \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(E,\star,-1)$ avec $\dim_E(V) = 2$, on note $\mathbf{G} = \mathbf{GU}(V,\psi)$ le $\mathbb{Q}$-groupe des similitudes symplectiques de $(V,\psi)$, $\nu : \mathbf{G} \to \mathbb{G}_m$ le rapport de similitude, et $\mathbf{G}^1 = \mathbf{U}(V,\psi)$ le noyau de $\nu$.

(a) Décrire l'ensemble

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}(V,\psi) = \left\{ I \in \mathbf{G}^1(\mathbb{R}) : I^2 = -1 \text{ et } \psi_{\mathbb{R},I} > 0 \right\}.$$

(b) Calculer le polynôme caractéristique (pour $I \in \mathcal{X}$)

$$P(X) = \det_{\mathbb{C}}(X - \eta \mathrm{Id} | V_{\mathbb{R},I}).$$

(c) Décrire le corps réflexe $E(\mathcal{X}) = E(V,\psi)$ de $\mathcal{X}$.

(3) On fixe un sous-groupe ouvert compact $K$ de $G(\mathbb{A}_f)$.

(a) Décrire soigneusement le foncteur

$$M_K : (\mathbf{SchLn}/E(\mathcal{X}))^0 \to \mathbf{Ens}$$

qui est associé à $(E,\star,V,\psi,K)$.

(b) Vérifier que

$$M_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})^+ \backslash \left( G(\mathbb{A}_f)/K \times \mathcal{X} \right)$$

où $G(\mathbb{Q})^+ = \{g \in G(\mathbb{Q}) | \nu(g) > 0\}$.

(c) Quelle est la dimension de $M$ ?

## 2. Deuxième partie

Soit $B$ un corps de quaternion sur $\mathbb{Q}$ qui contient $E$, $\star$ l'involution canonique de $B$. On fixe également un élément $j$ de $B$ tel que $j^\star = -j$, $B = E \oplus Ej$, et $ej = je^\star$ pour tout $e \in E$. On suppose que $B$ est indéfinie, c'est-à-dire que $B \otimes \mathbb{R} = M_2(\mathbb{R})$. Il revient au même de demander que $j^2 > 0$. On note $\mathrm{tr}(x) = x + x^\star$ et $\mathrm{nr}(x) = xx^\star$ la trace et la norme réduite de $B/\mathbb{Q}$.

(1) Vérifier que $(V,\psi) \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(E,\star,-1)$ où $V = B$ et

$$\forall x,y \in V : \qquad \psi(x,y) = \mathrm{tr}(\eta x y^\star).$$

(2) On fait agir $E^\times \times B^\times$ sur $V$ par $(e,b)(x) = exb^{-1}$. Vérifier que l'on obtient ainsi un isomorphisme de schémas en groupes

$$\left( E^\times \times B^\times \right) / \Delta \simeq \mathbf{G} = \mathbf{GU}(V,\psi)$$

où $\Delta \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$ est la diagonale dans $E^\times \times B^\times$.

(3) Décrire grace à cet isomorphisme

(a) le rapport de similitude $\nu : \mathbf{G} \to \mathbb{G}_{m,\mathbb{Q}}$,

(b) son noyau $\mathbf{G}^1 = \mathbf{U}(V,\psi)$,

(c) le déterminant $\det : \mathbf{G}^1 \to \mathbf{U}(1)$,

(d) les éléments de $\mathcal{X} \subset \mathbf{G}(\mathbb{R})$.

(4) Les $\mathbb{Q}$-tores maximaux de $\mathbf{G}$ sont de la forme $\mathbf{T} = E^\times \times L^\times/\Delta$, pour $L \subset B$ une extension quadratique de $\mathbb{Q}$. Montrer que $\mathcal{X} \cap \mathbf{T}(\mathbb{R})$ est non-vide si et seulement si $L$ est imaginaire, et montrer qu'alors $\mathcal{X} \cap \mathbf{T}(\mathbb{R})$ est un singleton.

(5) On suppose que $L$ est imaginaire, on note $\{I_L\} = \mathcal{X}(V, \psi) \cap \mathbf{T}(\mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{CM}(L) &= \text{image de } \mathbf{G}(\mathbb{A}_f) \times \{I_L\} \text{ dans} \\ M_K(\mathbb{C}) &= \mathbf{G}(\mathbb{Q})^+ \backslash (\mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/K \times \mathcal{X}) . \end{aligned}$$

(a) Montrer que l'application $g \mapsto (g, I_L)$ induit une bijection

$$\mathcal{CM}(L) \simeq \mathbf{T}(\mathbb{Q}) \backslash \mathbf{G}(\mathbb{A}_f)/K.$$

(b) Montrer que $\mathcal{CM}(I_L) \subset M_K(\mathbb{C})$ paramètre des variétés abéliennes à multiplication complexe par $E \otimes L$, et déterminer le type CM

$$\Phi(L) \subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}-alg}(E \otimes L, \mathbb{C})$$

de ces variétés abéliennes, ainsi que leur corps reflexe $E(L) \subset \mathbb{C}$.

(c) Décrire l'action de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/E(L))$ sur $\mathcal{CM}(L)$.

(6) En déduire une description de l'action de $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}/E(\mathcal{X}))$ sur l'ensemble des composantes connexes de $M_K(\mathbb{C})$.