HdR

Christophe Cornut

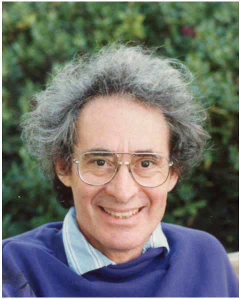
25 mai 2022

Au commencement...

Mon directeur de thèse, Norbert Schappacher, m'avait demandé de travailler sur une conjecture de Barry Mazur, portant sur les points de Heegner dans les courbes modulaires.

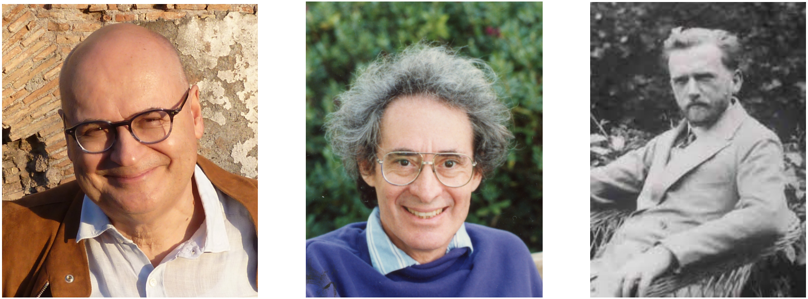
Au commencement...

Mon directeur de thèse, Norbert Schappacher, m'avait demandé de travailler sur une conjecture de Barry Mazur, portant sur les points de Heegner dans les courbes modulaires.



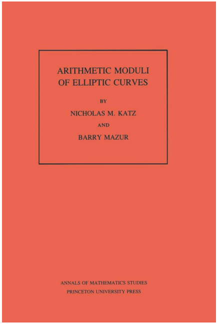
Au commencement...

Mon directeur de thèse, Norbert Schappacher, m'avait demandé de travailler sur une conjecture de Barry Mazur, portant sur les points de Heegner dans les courbes modulaires.



Au commencement...

Comme référence pour les courbes modulaires, il m'avait donné le livre de Katz-Mazur, qui commence par un rappel sur les diviseurs de Cartier relatifs, qui correspond au tout dernier paragraphe des EGAs.



ARITHMETIC MODULI
OF ELLIPTIC CURVES

BY

NICHOLAS M. KATZ

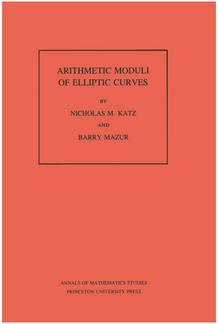
AND

BARRY MAZUR

ANNALS OF MATHEMATICS STUDIES
PRINCETON UNIVERSITY PRESS

Au commencement...

Comme référence pour les courbes modulaires, il m'avait donné le livre de Katz-Mazur, qui commence par un rappel sur les diviseurs de Cartier relatifs, qui correspond au tout dernier paragraphe des EGAs.



ARITHMETIC MODULI
OF ELLIPTIC CURVES

BY

NICHOLAS M. KATZ

AND

BARRY MAZUR

ANNALS OF MATHEMATICS STUDIES
PRINCETON UNIVERSITY PRESS

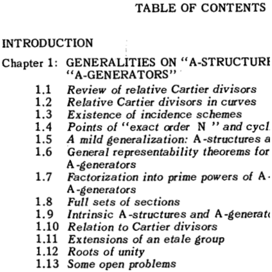
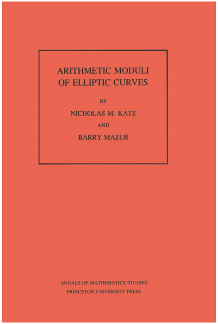


TABLE OF CONTENTS

Au commencement...

Comme référence pour les courbes modulaires, il m'avait donné le livre de Katz-Mazur, qui commence par un rappel sur les diviseurs de Cartier relatifs, qui correspond au tout dernier paragraphe des EGAs.



ARITHMETIC MODULI
OF ELLIPTIC CURVES

BY

NICHOLAS M. KATZ

AND

BARRY MAZUR

ANNALS OF MATHEMATICS STUDIES
PRINCETON UNIVERSITY PRESS

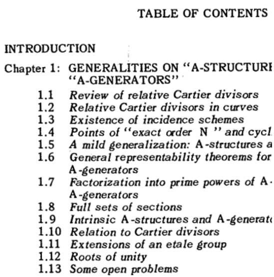
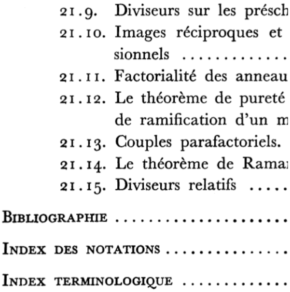


TABLE OF CONTENTS



Au commencement...

Pour les points de Heegner, il m'avait conseillé un article de B. Perrin-Riou, où l'on trouve cette formule, énoncée sans preuve :

$$\mathcal{T}_p(z_c) = \begin{cases} z_{c/p} + \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) & p \mid c, \\ \delta \cdot \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) + \begin{cases} 0 & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p} \\ \mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}^2 \\ (\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} + \mathrm{Fr}_{\overline{\mathfrak{p}}}) \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}} \end{cases} & p \nmid c. \end{cases}$$

Au commencement...

$$\mathcal{T}_p(z_c) = \begin{cases} z_{c/p} + \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) & p \mid c, \\ \delta \cdot \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) + \begin{cases} 0 & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p} \\ \mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}^2 \\ (\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} + \mathrm{Fr}_{\overline{\mathfrak{p}}}) \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}} \end{cases} & p \nmid c. \end{cases}$$

- E : extension quadratique imaginaire de $\mathbb{Q}$,

Au commencement...

$$\mathcal{T}_p(z_c) = \begin{cases} z_{c/p} + \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) & p \mid c, \\ \delta \cdot \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) + \begin{cases} 0 & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p} \\ \mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}^2 \\ (\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} + \mathrm{Fr}_{\overline{\mathfrak{p}}}) \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}} \end{cases} & p \nmid c. \end{cases}$$

- E : extension quadratique imaginaire de $\mathbb{Q}$, $\mathcal{O}_E$: son anneau des entiers,

Au commencement...

$$\mathcal{T}_p(z_c) = \begin{cases} z_{c/p} + \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) & p \mid c, \\ \delta \cdot \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) + \begin{cases} 0 & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p} \\ \mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}^2 \\ (\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} + \mathrm{Fr}_{\overline{\mathfrak{p}}}) \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}} \end{cases} & p \nmid c. \end{cases}$$

- E : extension quadratique imaginaire de $\mathbb{Q}$, $\mathcal{O}_E$: son anneau des entiers, $\mathcal{N}$: un idéal de $\mathcal{O}_E$ avec $\mathcal{O}_E/\mathcal{N} \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$,

Au commencement...

$$\mathcal{T}_p(z_c) = \begin{cases} z_{c/p} + \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) & p \mid c, \\ \delta \cdot \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) + \begin{cases} 0 & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p} \\ \mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}^2 \\ (\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} + \mathrm{Fr}_{\overline{\mathfrak{p}}}) \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}} \end{cases} & p \nmid c. \end{cases}$$

- E : extension quadratique imaginaire de $\mathbb{Q}$, $\mathcal{O}_E$: son anneau des entiers, $\mathcal{N}$: un idéal de $\mathcal{O}_E$ avec $\mathcal{O}_E/\mathcal{N} \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$,
- $z_c = [\mathbb{C}/\mathcal{O}_c \to \mathbb{C}/\mathcal{N}_c{}^{-1}] \in X_0(N)(\mathbb{C})$ où :

Au commencement...

$$\mathcal{T}_p(z_c) = \begin{cases} z_{c/p} + \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) & p \mid c, \\ \delta \cdot \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) + \begin{cases} 0 & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p} \\ \mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}^2 \\ (\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} + \mathrm{Fr}_{\overline{\mathfrak{p}}}) \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}} \end{cases} & p \nmid c. \end{cases}$$

- E : extension quadratique imaginaire de $\mathbb{Q}$, $\mathcal{O}_E$: son anneau des entiers, $\mathcal{N}$: un idéal de $\mathcal{O}_E$ avec $\mathcal{O}_E/\mathcal{N} \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$,
- $z_c = [\mathbb{C}/\mathcal{O}_c \to \mathbb{C}/{\mathcal{N}_c}^{-1}] \in X_0(N)(\mathbb{C})$ où :
- $\mathcal{O}_c = \mathbb{Z} + c\mathcal{O}_E$ et $\mathcal{N}_c = \mathcal{N} \cap \mathcal{O}_c$ avec $(c, N) = 1$,

Au commencement...

$$\mathcal{T}_p(z_c) = \begin{cases} z_{c/p} + \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) & p \mid c, \\ \delta \cdot \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) + \begin{cases} 0 & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p} \\ \mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}^2 \\ (\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} + \mathrm{Fr}_{\overline{\mathfrak{p}}}) \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}} \end{cases} & p \nmid c. \end{cases}$$

- E : extension quadratique imaginaire de $\mathbb{Q}$, $\mathcal{O}_E$: son anneau des entiers, $\mathcal{N}$: un idéal de $\mathcal{O}_E$ avec $\mathcal{O}_E/\mathcal{N} \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$,
- $z_c = [\mathbb{C}/\mathcal{O}_c \to \mathbb{C}/\mathcal{N}_c{}^{-1}] \in X_0(N)(\mathbb{C})$ où :
- $\mathcal{O}_c = \mathbb{Z} + c\mathcal{O}_E$ et $\mathcal{N}_c = \mathcal{N} \cap \mathcal{O}_c$ avec $(c, N) = 1$,
- $\mathcal{T}_p$ est l'opérateur de Hecke usuel,

Au commencement...

$$\mathcal{T}_p(z_c) = \begin{cases} z_{c/p} + \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) & p \mid c, \\ \delta \cdot \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) + \begin{cases} 0 & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p} \\ \mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}^2 \\ (\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} + \mathrm{Fr}_{\overline{\mathfrak{p}}}) \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}} \end{cases} & p \nmid c. \end{cases}$$

- E : extension quadratique imaginaire de $\mathbb{Q}$, $\mathcal{O}_E$: son anneau des entiers, $\mathcal{N}$: un idéal de $\mathcal{O}_E$ avec $\mathcal{O}_E/\mathcal{N} \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$,
- $z_c = [\mathbb{C}/\mathcal{O}_c \to \mathbb{C}/\mathcal{N}_c{}^{-1}] \in X_0(N)(E[c])$ où :
- $\mathcal{O}_c = \mathbb{Z} + c\mathcal{O}_E$ et $\mathcal{N}_c = \mathcal{N} \cap \mathcal{O}_c$ avec $(c, N) = 1$,
- $\mathcal{T}_p$ est l'opérateur de Hecke usuel,
- $E[c]$ est le « ring class field » de conducteur c,

Au commencement...

$$\mathcal{T}_p(z_c) = \begin{cases} z_{c/p} + \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) & p \mid c, \\ \delta \cdot \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) + \begin{cases} 0 & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p} \\ \mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}^2 \\ (\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} + \mathrm{Fr}_{\overline{\mathfrak{p}}}) \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}} \end{cases} & p \nmid c. \end{cases}$$

- E : extension quadratique imaginaire de $\mathbb{Q}$, $\mathcal{O}_E$: son anneau des entiers, $\mathcal{N}$: un idéal de $\mathcal{O}_E$ avec $\mathcal{O}_E/\mathcal{N} \simeq \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$,
- $z_c = [\mathbb{C}/\mathcal{O}_c \to \mathbb{C}/\mathcal{N}_c{}^{-1}] \in X_0(N)(E[c])$ où :
- $\mathcal{O}_c = \mathbb{Z} + c\mathcal{O}_E$ et $\mathcal{N}_c = \mathcal{N} \cap \mathcal{O}_c$ avec $(c, N) = 1$,
- $\mathcal{T}_p$ est l'opérateur de Hecke usuel,
- $E[c]$ est le « ring class field » de conducteur c,
- $\delta = 1$, sauf lorsque $c = 1$ et $E = \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$ ou $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

Deux remarques

$$\mathcal{T}_p(z_c) = \begin{cases} \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) + z_{c/p} & p \mid c, \\ \delta \cdot \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) + \begin{cases} 0 & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p} \\ \mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}^2 \\ (\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} + \mathrm{Fr}_{\overline{\mathfrak{p}}}) \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}} \end{cases} & p \nmid c. \end{cases}$$

L'esprit de la conjecture de Mazur

« Génériquement », il ne devrait pas y avoir d'autres relations entre les points de Heegner dans $\mathrm{Pic}(X_0(N))$.

Deux remarques

$$\mathcal{T}_p(z_c) = \begin{cases} \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) + z_{c/p} & p \mid c, \\ \delta \cdot \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) + \begin{cases} 0 & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p} \\ \mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}^2 \\ (\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} + \mathrm{Fr}_{\overline{\mathfrak{p}}}) \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}} \end{cases} & p \nmid c. \end{cases}$$

L'esprit de la conjecture de Mazur

« Génériquement », il ne devrait pas y avoir d'autres relations entre les points de Heegner dans $\mathrm{Pic}(X_0(N))$.

Forme générale

$\mathrm{Gal} \circlearrowright$ points spéciaux $\circlearrowleft$ Hecke.

Deux remarques

$$\mathcal{T}_p(z_c) = \begin{cases} \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) + z_{c/p} & p \mid c, \\ \delta \cdot \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) + \begin{cases} 0 & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p} \\ \mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}^2 \\ (\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} + \mathrm{Fr}_{\overline{\mathfrak{p}}}) \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}} \end{cases} & p \nmid c. \end{cases}$$

L'esprit de la conjecture de Mazur

« Génériquement », il ne devrait pas y avoir d'autres relations entre les points de Heegner dans $\mathrm{Pic}(X_0(N))$.

Forme générale

$\mathrm{Gal} \circlearrowright$ points spéciaux $\circlearrowleft$ Hecke.

Deux remarques

$$\mathcal{T}_p(z_c) = \begin{cases} \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) + z_{c/p} & p \mid c, \\ \delta \cdot \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) + \begin{cases} 0 & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p} \\ \mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}^2 \\ (\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} + \mathrm{Fr}_{\overline{\mathfrak{p}}}) \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}} \end{cases} & p \nmid c. \end{cases}$$

L'esprit de la conjecture de Mazur

« Génériquement », il ne devrait pas y avoir d'autres relations entre les points de Heegner dans $\mathrm{Pic}(X_0(N))$.

Forme générale

$$\mathrm{Gal} \circlearrowright \quad \text{points spéciaux} \quad \circlearrowleft \text{Hecke.}$$

Deux remarques

$$\mathcal{T}_p(z_c) = \begin{cases} \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) + z_{c/p} & p \mid c, \\ \delta \cdot \mathrm{Tr}_{cp/c}(z_{cp}) + \begin{cases} 0 & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p} \\ \mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}^2 \\ (\mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} + \mathrm{Fr}_{\overline{\mathfrak{p}}}) \cdot z_c & p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}} \end{cases} & p \nmid c. \end{cases}$$

L'esprit de la conjecture de Mazur

« Génériquement », il ne devrait pas y avoir d'autres relations entre les points de Heegner dans $\mathrm{Pic}(X_0(N))$.

Forme générale

$$\mathrm{Gal} \circlearrowright \quad \text{cycles spéciaux} \quad \circlearrowleft \text{Hecke.}$$

Variétés de Shimura

On se donne une variété de Shimura,

$$\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})$$

Variétés de Shimura

On se donne une variété de Shimura,

$$\mathrm{Sh}_K$$

Variétés de Shimura

On se donne une variété de Shimura,

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Variétés de Shimura

On se donne une variété de Shimura,

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Exemple (Courbe modulaire)

En prenant

$$\begin{aligned} G &= GL_2 \\ \mathcal{X} &= \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ K &= \left\{ g \in GL_2(\hat{\mathbb{Z}}) : g \bmod N \in \begin{pmatrix} \star & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Variétés de Shimura

On se donne une variété de Shimura,

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Exemple (Courbe modulaire)

En prenant

$$\begin{aligned} G &= GL_2 \\ \mathcal{X} &= \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ K &= \left\{ g \in GL_2(\hat{\mathbb{Z}}) : g \bmod N \in \begin{pmatrix} \star & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Variétés de Shimura

On se donne une variété de Shimura,

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Exemple (Courbe modulaire)

En prenant

$$G = GL_2$$
$$\mathcal{X} = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$
$$K = \left\{ g \in GL_2(\hat{\mathbb{Z}}) : g \bmod N \in \begin{pmatrix} \star & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix} \right\}$$

Variétés de Shimura

On se donne une variété de Shimura,

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Exemple (Courbe modulaire)

En prenant

$$\begin{aligned} G &= GL_2 \\ \mathcal{X} &= \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ K &= \left\{ g \in GL_2(\hat{\mathbb{Z}}) : g \bmod N \in \begin{pmatrix} \star & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Variétés de Shimura

On se donne une variété de Shimura,

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Exemple (Courbe modulaire)

En prenant

$$\begin{aligned} G &= GL_2 \\ \mathcal{X} &= \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ K &= \left\{ g \in GL_2(\hat{\mathbb{Z}}) : g \bmod N \in \begin{pmatrix} \star & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

on obtient l'ouvert

$$Y_0(N) \subset X_0(N).$$

Variétés de Shimura

On se donne une variété de Shimura,

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Exemple (Courbe modulaire)

En prenant

$$\begin{aligned} G &= GL_2 \\ \mathcal{X} &= \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \\ K &= \left\{ g \in GL_2(\hat{\mathbb{Z}}) : g \bmod N \in \begin{pmatrix} \star & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

on obtient l'ouvert

$$\text{Heegner} \subset Y_0(N) \subset X_0(N).$$

Variétés de Shimura

On se donne une variété de Shimura,

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Exemple (Principal)

En prenant

$$G = SO(V,\varphi) \quad \text{avec} \quad \mathrm{sign}(V,\varphi) = (2n-1,2)$$
$$\mathcal{X} = \{\mathbb{R}\text{-plans orientés négatifs de } V \otimes \mathbb{R}\}$$

Variétés de Shimura

On se donne une variété de Shimura,

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Exemple (Principal)

En prenant

$$G = SO(V,\varphi) \quad \text{avec} \quad \text{sign}(V,\varphi) = (2n-1,2)$$
$$\mathcal{X} = \{\mathbb{R}\text{-plans orientés négatifs de } V \otimes \mathbb{R}\}$$

Variétés de Shimura

On se donne une variété de Shimura,

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Exemple (Principal)

En prenant

$$G = SO(V, \varphi) \quad \text{avec} \quad \mathrm{sign}(V, \varphi) = (2n-1, 2)$$

$$\mathcal{X} = \{\mathbb{R}\text{-plans orientés négatifs de } V \otimes \mathbb{R}\}$$

Variétés de Shimura

On se donne une variété de Shimura,

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Exemple (Principal)

En prenant

$$G = SO(V, \varphi) \quad \text{avec} \quad \text{sign}(V, \varphi) = (2n - 1, 2)$$

$$\mathcal{X} = \{\mathbb{R}\text{-plans orientés négatifs de } V \otimes \mathbb{R}\}$$

Variétés de Shimura

On se donne une variété de Shimura,

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Exemple (Principal)

En prenant

$$G = SO(V,\varphi) \quad \text{avec} \quad \mathrm{sign}(V,\varphi) = (2n-1,2)$$
$$\mathcal{X} = \{\mathbb{R}\text{-plans orientés négatifs de } V \otimes \mathbb{R}\}$$

on obtient des variétés

$$\mathrm{Sh}_K \text{ de dimension } 2n-1.$$

Variétés de Shimura

On se donne une variété de Shimura,

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

En général

- G est un groupe réductif,
- $\mathcal{X}$ est une classe de $G(\mathbb{R})$-conjugaison de morphismes

$$h_x : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}},$$

- $\mathbb{S} = \mathrm{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ est le « tore de Deligne », et
- K est un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$.

Variétés de Shimura

On se donne une variété de Shimura,

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

En général

- G est un groupe réductif,
- $\mathcal{X}$ est une classe de $G(\mathbb{R})$-conjugaison de morphismes

$$h_x : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}},$$

- $\mathbb{S} = \mathrm{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ est le « tore de Deligne », et
- K est un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$.

Variétés de Shimura

On se donne une variété de Shimura,

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

En général

- G est un groupe réductif,
- $\mathcal{X}$ est une classe de $G(\mathbb{R})$-conjugaison de morphismes

$$h_x : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}},$$

- $\mathbb{S} = \mathrm{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ est le « tore de Deligne », et
- K est un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$.

Variétés de Shimura

On se donne une variété de Shimura,

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

En général

- G est un groupe réductif,
- $\mathcal{X}$ est une classe de $G(\mathbb{R})$-conjugaison de morphismes

$$h_x : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}},$$

- $\mathbb{S} = \mathrm{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ est le « tore de Deligne », et
- K est un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$.

Variétés de Shimura

On se donne une variété de Shimura,

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

En général

- G est un groupe réductif,
- $\mathcal{X}$ est une classe de $G(\mathbb{R})$-conjugaison de morphismes

$$h_x : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}},$$

- $\mathbb{S} = \mathrm{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ est le « tore de Deligne », et
- K est un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$.

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Composantes connexes

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})^+ \backslash \mathcal{X}^\circ \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Composantes connexes

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})^+\backslash\mathcal{X}^\circ \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Composantes connexes

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})^+ \backslash \mathcal{X}^\circ \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Composantes connexes

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Composantes connexes

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = \coprod_{[c]} G(\mathbb{Q})_c^+\backslash\mathcal{X}^\circ, \qquad [c] \in G(\mathbb{Q})^+\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^\circ &= \text{une composante connexe de } \mathcal{X}, \\ G(\mathbb{Q})_c^+ &= \text{stabilisateur de } \mathcal{X}^\circ \times \{c\} \text{ dans } G(\mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Composantes connexes

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = \coprod_{[c]} G(\mathbb{Q})_c^+\backslash\mathcal{X}^\circ, \qquad [c] \in G(\mathbb{Q})^+\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^\circ &= \text{une composante connexe de } \mathcal{X}, \\ G(\mathbb{Q})_c^+ &= \text{stabilisateur de } \mathcal{X}^\circ \times \{c\} \text{ dans } G(\mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Classes d'isogénies

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = \coprod_{[x]} G(\mathbb{Q})_x\backslash G(\mathbb{A}_f)/K, \qquad [x] \in G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X}$$

où

$$G(\mathbb{Q})_x = \text{Stabilisateur de } x \text{ dans } G(\mathbb{Q}).$$

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Classes d'isogénies

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = \coprod_{[x]} G(\mathbb{Q})_x\backslash G(\mathbb{A}_f)/K, \qquad [x] \in G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X}$$

où

$$G(\mathbb{Q})_x = \text{Stabilisateur de } x \text{ dans } G(\mathbb{Q}).$$

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Classes d'isogénies

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = \coprod_{[x]} G(\mathbb{Q})_x\backslash G(\mathbb{A}_f)/K, \qquad [x] \in G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X}$$

où

$$G(\mathbb{Q})_x = \text{Stabilisateur de } x \text{ dans } G(\mathbb{Q}).$$

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Points spéciaux

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Points spéciaux

C'est une réunion dénombrable de classes d'isogénies,

$$\mathrm{Sh}_K^{cm} = \coprod_{[x]} G(\mathbb{Q})_x\backslash G(\mathbb{A}_f)/K, \qquad [x] \in G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X}^{cm}$$

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Points spéciaux

C'est une réunion dénombrable de classes d'isogénies,

$$\mathrm{Sh}_K^{cm} = \coprod_{[x]} G(\mathbb{Q})_x\backslash G(\mathbb{A}_f)/K, \qquad [x] \in G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X}^{cm}$$

où

$$x \in \mathcal{X}^{cm} \iff \begin{array}{c} h_x : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}} \text{ se factorise par} \\ T_{\mathbb{R}} \hookrightarrow G_{\mathbb{R}} \text{ pour un } \mathbb{Q}-\text{tore } T \text{ de } G. \end{array}$$

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Points spéciaux

C'est une réunion dénombrable de classes d'isogénies,

$$\mathrm{Sh}_K^{cm} = \coprod_{[x]} G(\mathbb{Q})_x \backslash G(\mathbb{A}_f)/K, \qquad [x] \in G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X}^{cm}$$

où

$$x \in \mathcal{X}^{cm} \iff \begin{array}{c} h_x : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}} \text{ se factorise par} \\ T_{\mathbb{R}} \hookrightarrow G_{\mathbb{R}} \text{ pour un } \mathbb{Q}-\text{tore } T \text{ de } G. \end{array}$$

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Points spéciaux

C'est une réunion dénombrable de classes d'isogénies,

$$\mathrm{Sh}_K^{cm} = \coprod_{[x]} G(\mathbb{Q})_x\backslash G(\mathbb{A}_f)/K, \qquad [x] \in G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X}^{cm}$$

où

$$x \in \mathcal{X}^{cm} \iff \begin{array}{c} h_x : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}} \text{ se factorise par} \\ T_{\mathbb{R}} \hookrightarrow G_{\mathbb{R}} \text{ pour un } \mathbb{Q}-\text{tore } T \text{ de } G. \end{array}$$

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Points spéciaux

$$\mathrm{Sh}_K^{cm} = \coprod_{[x]} G(\mathbb{Q})_x\backslash G(\mathbb{A}_f)/K, \qquad [x] \in G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X}^{cm}$$

Exemple ($G = GL_2$)

Les points de Heegner sont des points spéciaux, leur classe d'isogénie est

$$\mathcal{Z}_K(x) = T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K, \qquad T = \mathrm{R}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$$

avec $T(\mathbb{Q}) = E^\times = G(\mathbb{Q})_x$ pour un unique point x de $\mathcal{H}$.

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Points spéciaux

$$\mathrm{Sh}_K^{cm} = \coprod_{[x]} G(\mathbb{Q})_x\backslash G(\mathbb{A}_f)/K, \qquad [x] \in G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X}^{cm}$$

Exemple ($G = GL_2$)

Les points de Heegner sont des points spéciaux, leur classe d'isogénie est

$$\mathcal{Z}_K(x) = T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K, \qquad T = \mathrm{R}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$$

avec $T(\mathbb{Q}) = E^\times = G(\mathbb{Q})_x$ pour un unique point x de $\mathcal{H}$.

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Points spéciaux

$$\mathrm{Sh}_K^{cm} = \coprod_{[x]} G(\mathbb{Q})_x\backslash G(\mathbb{A}_f)/K, \qquad [x] \in G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X}^{cm}$$

Exemple ($G = GL_2$)

Les points de Heegner sont des points spéciaux, leur classe d'isogénie est

$$\mathcal{Z}_K(x) = T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K, \qquad T = \mathrm{R}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$$

avec $T(\mathbb{Q}) = E^\times = G(\mathbb{Q})_x$ pour un unique point x de $\mathcal{H}$.

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Points spéciaux

$$\mathrm{Sh}_K^{cm} = \coprod_{[x]} G(\mathbb{Q})_x\backslash G(\mathbb{A}_f)/K, \qquad [x] \in G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X}^{cm}$$

Exemple ($G = GL_2$)

Les points de Heegner sont des points spéciaux, leur classe d'isogénie est

$$\mathcal{Z}_K(x) = \color{red}{T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K}, \qquad T = \mathrm{R}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$$

avec $T(\mathbb{Q}) = E^\times = G(\mathbb{Q})_x$ pour un unique point x de $\mathcal{H}$.

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Points spéciaux

$$\mathrm{Sh}_K^{cm} = \coprod_{[x]} G(\mathbb{Q})_x\backslash G(\mathbb{A}_f)/K, \qquad [x] \in G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X}^{cm}$$

Exemple ($G = GL_2$)

Les points de Heegner sont des points spéciaux, leur classe d'isogénie est

$$\mathcal{Z}_K(x) = T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K, \qquad T = \mathrm{R}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$$

avec $T(\mathbb{Q}) = E^\times = G(\mathbb{Q})_x$ pour un unique point x de $\mathcal{H}$.

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Cycles spéciaux

Un cycle spécial est une sous-variété irréductible de Sh_K avec

$$\mathcal{Z}_K(H,g)(\mathbb{C}) = \text{Image de } \mathcal{Y}^\circ \times \{g\} \text{ dans } \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$$

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Cycles spéciaux

Un cycle spécial est une sous-variété irréductible de Sh_K avec

$$\mathcal{Z}_K(H,g)(\mathbb{C}) = \text{Image de } \mathcal{Y}^\circ \times \{g\} \text{ dans } \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$$

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Cycles spéciaux

Un cycle spécial est une sous-variété irréductible de Sh_K avec

$$\mathcal{Z}_K(H,g)(\mathbb{C}) = \text{Image de } \mathcal{Y}^\circ \times \{g\} \text{ dans } \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$$

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Cycles spéciaux

Un cycle spécial est une sous-variété irréductible de Sh_K avec

$$\mathcal{Z}_K(H,g)(\mathbb{C}) = \text{Image de } \mathcal{Y}^\circ \times \{g\} \text{ dans } \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$$

où

$$(H,\mathcal{Y}) \hookrightarrow (\mathcal{G},\mathcal{X}) \text{ est une sous-donnée de Shimura.}$$

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Cycles spéciaux

Un cycle spécial est une sous-variété irréductible de Sh_K avec

$$\mathcal{Z}_K(H,g)(\mathbb{C}) = \text{Image de } \mathcal{Y}^\circ \times \{g\} \text{ dans } \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$$

où

$$(H,\mathcal{Y}) \hookrightarrow (\mathcal{G},\mathcal{X}) \text{ est une sous-donnée de Shimura.}$$

Sa classe d'isogénie est

$$\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = \{\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}^\circ, g) : g \in G(\mathbb{A}_f)\} = G(\mathbb{Q})_{\mathcal{Y}^\circ}\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$$

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Cycles spéciaux

Un cycle spécial est une sous-variété irréductible de Sh_K avec

$$\mathcal{Z}_K(H,g)(\mathbb{C}) = \text{Image de } \mathcal{Y}^\circ \times \{g\} \text{ dans } \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$$

où

$$(H,\mathcal{Y}) \hookrightarrow (\mathcal{G},\mathcal{X}) \text{ est une sous-donnée de Shimura.}$$

Sa classe d'isogénie est

$$\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = \{\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}^\circ, g) : g \in G(\mathbb{A}_f)\} = G(\mathbb{Q})_{\mathcal{Y}^\circ}\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$$

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Cycles spéciaux

Un cycle spécial est une sous-variété irréductible de Sh_K avec

$$\mathcal{Z}_K(H,g)(\mathbb{C}) = \text{Image de } \mathcal{Y}^\circ \times \{g\} \text{ dans } \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$$

où

$$(H,\mathcal{Y}) \hookrightarrow (\mathcal{G},\mathcal{X}) \text{ est une sous-donnée de Shimura.}$$

Sa classe d'isogénie est

$$\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = \{\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}^\circ, g) : g \in G(\mathbb{A}_f)\} = G(\mathbb{Q})_{\mathcal{Y}^\circ}\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$$

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Cycles spéciaux

Un cycle spécial est une sous-variété irréductible de Sh_K avec

$$\mathcal{Z}_K(H,g)(\mathbb{C}) = \text{Image de } \mathcal{Y}^\circ \times \{g\} \text{ dans } \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$$

où

$$(H,\mathcal{Y}) \hookrightarrow (\mathcal{G},\mathcal{X}) \text{ est une sous-donnée de Shimura.}$$

Sa classe d'isogénie est

$$\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = \{\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}^\circ, g) : g \in G(\mathbb{A}_f)\} = G(\mathbb{Q})_{\mathcal{Y}^\circ}\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$$

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Cycles spéciaux

$$\mathcal{Z}_K(H,g) = \text{Image de } \mathcal{Y}^\circ \times \{g\} \text{ dans } \mathrm{Sh}_K$$

Exemple (Principal, $G = SO(V)$)

Soit W un hyperplan de V qui est un E-espace hermitien. Alors

$$H = U(W) \quad \text{et} \quad \mathcal{Y} = \{\mathbb{C}\text{-droites négatives de } W \otimes \mathbb{R}\} = \mathcal{Y}^\circ$$

donnent des cycles de codimension n dans Sh_K.

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Cycles spéciaux

$$\mathcal{Z}_K(H, g) = \text{Image de } \mathcal{Y}^\circ \times \{g\} \text{ dans } \mathrm{Sh}_K$$

Exemple (Principal, $G = SO(V)$)

Soit W un hyperplan de V qui est un E-espace hermitien. Alors

$$H = U(W) \quad \text{et} \quad \mathcal{Y} = \{\mathbb{C}\text{-droites négatives de } W \otimes \mathbb{R}\} = \mathcal{Y}^\circ$$

donnent des cycles de codimension n dans Sh_K.

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Cycles spéciaux

$$\mathcal{Z}_K(H, g) = \text{Image de } \mathcal{Y}^\circ \times \{g\} \text{ dans } \mathrm{Sh}_K$$

Exemple (Principal, $G = SO(V)$)

Soit W un hyperplan de V qui est un E-espace hermitien. Alors

$$H = U(W) \quad \text{et} \quad \mathcal{Y} = \{\mathbb{C}\text{-droites négatives de } W \otimes \mathbb{R}\} = \mathcal{Y}^\circ$$

donnent des cycles de codimension n dans Sh_K.

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Cycles spéciaux

$$\mathcal{Z}_K(H,g) = \text{Image de } \mathcal{Y}^\circ \times \{g\} \text{ dans } \mathrm{Sh}_K$$

Exemple (Principal, $G = SO(V)$)

Soit W un hyperplan de V qui est un E-espace hermitien. Alors

$$H = U(W) \quad \text{et} \quad \mathcal{Y} = \{\mathbb{C}\text{-droites négatives de } W \otimes \mathbb{R}\} = \mathcal{Y}^\circ$$

donnent des cycles de codimension n dans Sh_K.

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Cycles spéciaux

$$\mathcal{Z}_K(H, g) = \text{Image de } \mathcal{Y}^\circ \times \{g\} \text{ dans } \mathrm{Sh}_K$$

Exemple (Principal, $G = SO(V)$)

Soit W un hyperplan de V qui est un E-espace hermitien. Alors

$$H = U(W) \quad \text{et} \quad \mathcal{Y} = \{\mathbb{C}\text{-droites négatives de } W \otimes \mathbb{R}\} = \mathcal{Y}^\circ$$

donnent des cycles de codimension n dans Sh_K.

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Cycles spéciaux

$$\mathcal{Z}_K(H,g) = \text{Image de } \mathcal{Y}^\circ \times \{g\} \text{ dans } \mathrm{Sh}_K$$

Exemple (Principal, $G = SO(V)$)

Soit W un hyperplan de V qui est un E-espace hermitien. Alors

$$H = U(W) \quad \text{et} \quad \mathcal{Y} = \{\mathbb{C}\text{-droites négatives de } W \otimes \mathbb{R}\} = \mathcal{Y}^\circ$$

donnent des cycles de codimension n dans Sh_K.

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Cycles spéciaux

$$\mathcal{Z}_K(H,g) = \text{Image de } \mathcal{Y}^\circ \times \{g\} \text{ dans } \mathrm{Sh}_K$$

Exemple (Principal, $G = SO(V)$)

Soit W un hyperplan de V qui est un E-espace hermitien. Alors

$$H = U(W) \quad \text{et} \quad \mathcal{Y} = \{\mathbb{C}\text{-droites négatives de } W \otimes \mathbb{R}\} = \mathcal{Y}^\circ$$

donnent des cycles de codimension n dans Sh_K.

Variétés de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) = G(\mathbb{Q})\backslash\mathcal{X} \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

Cycles spéciaux

$$\mathcal{Z}_K(H,g) = \text{Image de } \mathcal{Y}^\circ \times \{g\} \text{ dans } \mathrm{Sh}_K$$

Exemple (Principal, $G = SO(V)$)

Soit W un hyperplan de V qui est un E-espace hermitien. Alors

$$H = U(W) \quad \text{et} \quad \mathcal{Y} = \{\mathbb{C}\text{-droites négatives de } W \otimes \mathbb{R}\} = \mathcal{Y}^\circ$$

donnent des cycles de codimension n dans Sh_K. On a

$$\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K.$$

Variétés de Shimura

Le corps reflexe $E(G, \mathcal{X})$

C'est le corps de définition de la classe de conjugaison des

$$\mu_x : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$$

où

$$\mu_x(z) = h_x(z, 1) \quad \text{via} \quad \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}.$$

Variétés de Shimura

Le corps reflexe $E(G, \mathcal{X})$

C'est le corps de définition de la classe de conjugaison des

$$\mu_x : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$$

où

$$\mu_x(z) = h_x(z, 1) \quad \text{via} \quad \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}.$$

Variétés de Shimura

Le corps reflexe $E(G, \mathcal{X})$

C'est le corps de définition de la classe de conjugaison des

$$\mu_x : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$$

où

$$\mu_x(z) = h_x(z, 1) \quad \text{via} \quad \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}.$$

Variétés de Shimura

Le corps reflexe $E(G, \mathcal{X})$

C'est le corps de définition de la classe de conjugaison des

$$\mu_x : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$$

où

$$\mu_x(z) = h_x(z, 1) \quad \text{via} \quad \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}.$$

Exemple $(G = GL_2,\ T = \mathrm{R}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m)$

$$E(G, \mathcal{X}) = \mathbb{Q} \qquad \text{et} \qquad E(T, \{x\}) = E.$$

Exemple $(G = SO(V),\ H = U(W))$

$$E(G, \mathcal{X}) = \mathbb{Q} \qquad \text{et} \qquad E(H, \mathcal{Y}) = E.$$

Variétés de Shimura

Le corps reflexe $E(G,\mathcal{X})$

C'est le corps de définition de la classe de conjugaison des

$$\mu_x : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$$

où

$$\mu_x(z) = h_x(z,1) \quad \text{via} \quad \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}.$$

Exemple ($G = GL_2$, $T = \mathrm{R}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$)

$$E(G,\mathcal{X}) = \mathbb{Q} \qquad \text{et} \qquad E(T,\{x\}) = E.$$

Exemple ($G = SO(V)$, $H = U(W)$)

$$E(G,\mathcal{X}) = \mathbb{Q} \qquad \text{et} \qquad E(H,\mathcal{Y}) = E.$$

Variétés de Shimura

Le corps reflexe $E(G, \mathcal{X})$

C'est le corps de définition de la classe de conjugaison des

$$\mu_x : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$$

où

$$\mu_x(z) = h_x(z, 1) \quad \text{via} \quad \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}.$$

Exemple $(G = GL_2,\ T = \mathrm{R}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m)$

$$E(G, \mathcal{X}) = \mathbb{Q} \qquad \text{et} \qquad E(T, \{x\}) = E.$$

Exemple $(G = SO(V),\ H = U(W))$

$$E(G, \mathcal{X}) = \mathbb{Q} \qquad \text{et} \qquad E(H, \mathcal{Y}) = E.$$

Variétés de Shimura

Le corps reflexe $E(G, \mathcal{X})$

C'est le corps de définition de la classe de conjugaison des

$$\mu_x : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$$

où

$$\mu_x(z) = h_x(z, 1) \quad \text{via} \quad \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}.$$

Corps de définition :

- La variété $\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})$ . . . . $E(G, \mathcal{X})$

Variétés de Shimura

Le corps reflexe $E(G, \mathcal{X})$

C'est le corps de définition de la classe de conjugaison des

$$\mu_x : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$$

où

$$\mu_x(z) = h_x(z, 1) \quad \text{via} \quad \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}.$$

Corps de définition :

- La variété $\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})$ .... $E(G, \mathcal{X})$
- Ses composantes connexes .... $E(G, \mathcal{X})^{ab}$

Variétés de Shimura

Le corps reflexe $E(G, \mathcal{X})$

C'est le corps de définition de la classe de conjugaison des

$$\mu_x : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$$

où

$$\mu_x(z) = h_x(z, 1) \quad \text{via} \quad \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}.$$

Corps de définition :

- La variété $\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})$ .... $E(G, \mathcal{X})$
- Ses composantes connexes .... $E(G, \mathcal{X})^{ab}$
- La classe d'isogénie de points spéciaux $\mathcal{Z}_K(x)$ .... $E(T, x)$

Variétés de Shimura

Le corps reflexe $E(G, \mathcal{X})$

C'est le corps de définition de la classe de conjugaison des

$$\mu_x : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$$

où

$$\mu_x(z) = h_x(z, 1) \quad \text{via} \quad \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}.$$

Corps de définition :

- La variété $\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})$ .... $E(G, \mathcal{X})$
- Ses composantes connexes .... $E(G, \mathcal{X})^{ab}$
- La classe d'isogénie de points spéciaux $\mathcal{Z}_K(x)$ .... $E(T, x)$
- Les points de $\mathcal{Z}_K(x)$ .... $E(T, x)^{ab}$

Variétés de Shimura

Le corps reflexe $E(G, \mathcal{X})$

C'est le corps de définition de la classe de conjugaison des

$$\mu_x : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$$

où

$$\mu_x(z) = h_x(z, 1) \quad \text{via} \quad \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}.$$

Corps de définition :

- La variété $\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})$ .... $E(G, \mathcal{X})$
- Ses composantes connexes .... $E(G, \mathcal{X})^{ab}$
- La classe d'isogénie de points spéciaux $\mathcal{Z}_K(x)$ .... $E(T, x)$
- Les points de $\mathcal{Z}_K(x)$ .... $E(T, x)^{ab}$
- La classe d'isogénie de cycles spéciaux $\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})$ .... $E(H, \mathcal{Y})$

Variétés de Shimura

Le corps reflexe $E(G, \mathcal{X})$

C'est le corps de définition de la classe de conjugaison des

$$\mu_x : \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \to G_{\mathbb{C}}$$

où

$$\mu_x(z) = h_x(z, 1) \quad \text{via} \quad \mathbb{S}_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}} \times \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}.$$

Corps de définition :

- La variété $\mathrm{Sh}_K(G, \mathcal{X})$ .... $E(G, \mathcal{X})$
- Ses composantes connexes .... $E(G, \mathcal{X})^{ab}$
- La classe d'isogénie de points spéciaux $\mathcal{Z}_K(x)$ .... $E(T, x)$
- Les points de $\mathcal{Z}_K(x)$ .... $E(T, x)^{ab}$
- La classe d'isogénie de cycles spéciaux $\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})$ .... $E(H, \mathcal{Y})$
- Les cycles de $\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})$ .... $E(H, \mathcal{Y})^{ab}$

Variétés de Shimura

Lois de réciprocité

L'action de Galois sur les classes d'isogénies est explicite.

Variétés de Shimura

Lois de réciprocité

L'action de Galois sur les classes d'isogénies est explicite.

Exemple ($G = GL_2,\ T = \mathrm{R}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$)

Pour $\sigma \in \mathrm{Gal}_E$ et $[g] \in \mathcal{Z}_K(x) = T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$,

$$\sigma \cdot [g] = [t \cdot g], \qquad t \in T(\mathbb{A}_f), \quad \mathrm{Art}(t) = \sigma | E^{ab}$$

où $\mathrm{Art} : T(\mathbb{A}_f) \hookrightarrow \mathrm{Gal}_E^{ab}$ est l'application d'Artin.

Variétés de Shimura

Lois de réciprocité

L'action de Galois sur les classes d'isogénies est explicite.

Exemple $(G = GL_2,\ T = \mathrm{R}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m\ )$

Pour $\sigma \in \mathrm{Gal}_E$ et $[g] \in \mathcal{Z}_K(x) = T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$,

$$\sigma \cdot [g] = [t \cdot g], \qquad t \in T(\mathbb{A}_f), \quad \mathrm{Art}(t) = \sigma|E^{ab}$$

où $\mathrm{Art} : T(\mathbb{A}_f) \hookrightarrow \mathrm{Gal}_E^{ab}$ est l'application d'Artin.

Variétés de Shimura

Lois de réciprocité

L'action de Galois sur les classes d'isogénies est explicite.

Exemple $(G = GL_2,\ T = \mathrm{R}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m\ )$

Pour $\sigma \in \mathrm{Gal}_E$ et $[g] \in \mathcal{Z}_K(x) = T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$,

$$\sigma \cdot [g] = [t \cdot g], \qquad t \in T(\mathbb{A}_f), \quad \mathrm{Art}(t) = \sigma|E^{ab}$$

où $\qquad \mathrm{Art} : T(\mathbb{A}_f) \hookrightarrow \mathrm{Gal}_E^{ab}$ $\quad$ est l'application d'Artin.

Variétés de Shimura

Lois de réciprocité

L'action de Galois sur les classes d'isogénies est explicite.

Exemple $(G = GL_2,\ T = \mathrm{R}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m)$

Pour $\sigma \in \mathrm{Gal}_E$ et $[g] \in \mathcal{Z}_K(x) = T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$,

$$\sigma \cdot [g] = [t \cdot g], \qquad t \in T(\mathbb{A}_f), \quad \mathrm{Art}(t) = \sigma | E^{ab}$$

où $\mathrm{Art} : T(\mathbb{A}_f) \hookrightarrow \mathrm{Gal}_E^{ab}$ est l'application d'Artin.

Variétés de Shimura

Lois de réciprocité

L'action de Galois sur les classes d'isogénies est explicite.

Exemple ($G = GL_2$, $T = \mathrm{R}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$)

Pour $\sigma \in \mathrm{Gal}_E$ et $[g] \in \mathcal{Z}_K(x) = T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$,

$$\sigma \cdot [g] = [t \cdot g], \qquad t \in T(\mathbb{A}_f), \quad \mathrm{Art}(t) = \sigma|E^{ab}$$

où $\mathrm{Art} : T(\mathbb{A}_f) \hookrightarrow \mathrm{Gal}_E^{ab}$ est l'application d'Artin.

Variétés de Shimura

Lois de réciprocité

L'action de Galois sur les classes d'isogénies est explicite.

Exemple ($G = GL_2$, $T = \mathrm{R}_{E/\mathbb{Q}}\mathbb{G}_m$)

Pour $\sigma \in \mathrm{Gal}_E$ et $[g] \in \mathcal{Z}_K(x) = T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$,

$$\sigma \cdot [g] = [t \cdot g], \qquad t \in T(\mathbb{A}_f), \quad \mathrm{Art}(t) = \sigma | E^{ab}$$

où $\mathrm{Art} : T(\mathbb{A}_f) \hookrightarrow \mathrm{Gal}_E^{ab}$ est l'application d'Artin.

Variétés de Shimura

Lois de réciprocité

L'action de Galois sur les classes d'isogénies est explicite.

Exemple ($G = SO(V)$, $H = U(W)$)

Pour $\sigma \in \mathrm{Gal}_E$ et $[g] \in \mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$,

$$\sigma \cdot [g] = [h \cdot g], \qquad h \in H(\mathbb{A}_f), \quad \mathrm{Art}^1 \circ \det(h) = \sigma | E[\infty]$$

où $E[\infty] = \cup_c E[c]$, det : $H \to T^1$ avec $T^1 = \ker(N : T \to \mathbb{G}_m)$

Variétés de Shimura

Lois de réciprocité

L'action de Galois sur les classes d'isogénies est explicite.

Exemple ($G = SO(V)$, $H = U(W)$)

Pour $\sigma \in \mathrm{Gal}_E$ et $[g] \in \mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$,

$$\sigma \cdot [g] = [h \cdot g], \qquad h \in H(\mathbb{A}_f), \quad \mathrm{Art}^1 \circ \det(h) = \sigma|E[\infty]$$

où $E[\infty] = \cup_c E[c]$, $\det : H \to T^1$ avec $T^1 = \ker(N : T \to \mathbb{G}_m)$

Variétés de Shimura

Lois de réciprocité

L'action de Galois sur les classes d'isogénies est explicite.

Exemple ($G = SO(V)$, $H = U(W)$)

Pour $\sigma \in \mathrm{Gal}_E$ et $[g] \in \mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$,

$$\sigma \cdot [g] = [h \cdot g], \qquad h \in H(\mathbb{A}_f), \quad \mathrm{Art}^1 \circ \det(h) = \sigma | E[\infty]$$

où $E[\infty] = \cup_c E[c]$, $\det : H \to T^1$ avec $T^1 = \ker(N : T \to \mathbb{G}_m)$

Variétés de Shimura

Lois de réciprocité

L'action de Galois sur les classes d'isogénies est explicite.

Exemple ($G = SO(V)$, $H = U(W)$)

Pour $\sigma \in \mathrm{Gal}_E$ et $[g] \in \mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$,

$$\sigma \cdot [g] = [h \cdot g], \qquad h \in H(\mathbb{A}_f), \quad \mathrm{Art}^1 \circ \det(h) = \sigma|E[\infty]$$

où $E[\infty] = \cup_c E[c]$, $\det : H \to T^1$ avec $T^1 = \ker(N : T \to \mathbb{G}_m)$

Variétés de Shimura

Lois de réciprocité

L'action de Galois sur les classes d'isogénies est explicite.

Exemple ($G = SO(V)$, $H = U(W)$)

Pour $\sigma \in \mathrm{Gal}_E$ et $[g] \in \mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$,

$$\sigma \cdot [g] = [h \cdot g], \qquad h \in H(\mathbb{A}_f), \quad \mathrm{Art}^1 \circ \det(h) = \sigma|E[\infty]$$

où $E[\infty] = \cup_c E[c]$, $\det : H \to T^1$ avec $T^1 = \ker(N : T \to \mathbb{G}_m)$

Variétés de Shimura

Lois de réciprocité

L'action de Galois sur les classes d'isogénies est explicite.

Exemple ($G = SO(V)$, $H = U(W)$)

Pour $\sigma \in \mathrm{Gal}_E$ et $[g] \in \mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$,

$$\sigma \cdot [g] = [h \cdot g], \qquad h \in H(\mathbb{A}_f), \quad \mathrm{Art}^1 \circ \det(h) = \sigma|E[\infty]$$

où $E[\infty] = \cup_c E[c]$, $\det : H \to T^1$ avec $T^1 = \ker(N : T \to \mathbb{G}_m)$

Variétés de Shimura

Lois de réciprocité

L'action de Galois sur les classes d'isogénies est explicite.

Exemple ($G = SO(V)$, $H = U(W)$)

Pour $\sigma \in \mathrm{Gal}_E$ et $[g] \in \mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$,

$$\sigma \cdot [g] = [h \cdot g], \qquad h \in H(\mathbb{A}_f), \quad \mathrm{Art}^1 \circ \det(h) = \sigma|E[\infty]$$

où $E[\infty] = \cup_c E[c]$, $\det : H \to T^1$ avec $T^1 = \ker(N : T \to \mathbb{G}_m)$

Variétés de Shimura

Lois de réciprocité

L'action de Galois sur les classes d'isogénies est explicite.

Exemple ($G = SO(V)$, $H = U(W)$)

Pour $\sigma \in \mathrm{Gal}_E$ et $[g] \in \mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$,

$$\sigma \cdot [g] = [h \cdot g], \qquad h \in H(\mathbb{A}_f), \quad \mathrm{Art}^1 \circ \det(h) = \sigma|E[\infty]$$

où $E[\infty] = \cup_c E[c]$, $\det : H \to T^1$ avec $T^1 = \ker(N : T \to \mathbb{G}_m)$

Variétés de Shimura

Lois de réciprocité

L'action de Galois sur les classes d'isogénies est explicite.

Exemple ($G = SO(V)$, $H = U(W)$)

Pour $\sigma \in \mathrm{Gal}_E$ et $[g] \in \mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$,

$$\sigma \cdot [g] = [h \cdot g], \qquad h \in H(\mathbb{A}_f), \quad \mathrm{Art}^1 \circ \det(h) = \sigma | E[\infty]$$

où $E[\infty] = \cup_c E[c]$, $\det : H \to T^1$ avec $T^1 = \ker(N : T \to \mathbb{G}_m)$, et

$$\begin{tikzcd}
T(\mathbb{A}_f) \arrow[r, "\mathrm{Art}"] \arrow[d, two heads, "z \mapsto z/\overline{z}"'] & \mathrm{Gal}_E^{ab} \arrow[d, two heads] \\
T^1(\mathbb{A}_f) \arrow[r, two heads, "\mathrm{Art}^1"] & \mathrm{Gal}(E[\infty]/E)
\end{tikzcd}$$

Module des cycles

On voudrait comprendre la structure de

$$\mathrm{Gal}_E^{ab} \circlearrowright \quad \mathbb{Z}[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})] = \mathbb{Z}[H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K] \quad \circlearrowleft \mathcal{H}_K$$

où

$$\mathcal{H}_K = \text{algèbre de Hecke de } G(\mathbb{A}_f)//K.$$

Module des cycles

On voudrait comprendre la structure de

$$\mathrm{Gal}_E^{ab} \circlearrowleft \quad \mathbb{Z}[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})] = \mathbb{Z}[H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K] \quad \circlearrowright \mathcal{H}_K$$

où

$$\mathcal{H}_K = \text{algèbre de Hecke de } G(\mathbb{A}_f)//K.$$

Module des cycles

On voudrait comprendre la structure de

$$\mathrm{Gal}_E^{ab} \circlearrowright \quad \mathbb{Z}[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})] = \mathbb{Z}[H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K] \quad \circlearrowleft \mathcal{H}_K$$

où

$$\mathcal{H}_K = \text{algèbre de Hecke de } G(\mathbb{A}_f)//K.$$

Module des cycles

On voudrait comprendre la structure de

$$\mathrm{Gal}_E^{ab} \circlearrowright \quad \mathbb{Z}[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})] = \mathbb{Z}[H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K] \quad \circlearrowleft \mathcal{H}_K$$

où

$$\mathcal{H}_K = \text{algèbre de Hecke de } G(\mathbb{A}_f)//K.$$

Module des cycles

On voudrait comprendre la structure de

$$\mathrm{Gal}_E^{ab} \circlearrowright \quad \mathbb{Z}[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})] = \mathbb{Z}[H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K] \quad \circlearrowleft \mathcal{H}_K$$

où

$$\mathcal{H}_K = \text{algèbre de Hecke de } G(\mathbb{A}_f)//K.$$

En pratique :

- On travaille avec des objets plus simples. . .
- De nature locale. . .
- Et on se contente de quelques « relations de distribution »

Module des cycles

On voudrait comprendre la structure de

$$\mathrm{Gal}_E^{ab} \circlearrowright \quad \mathbb{Z}[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})] = \mathbb{Z}[H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K] \quad \circlearrowleft \mathcal{H}_K$$

où

$$\mathcal{H}_K = \text{algèbre de Hecke de } G(\mathbb{A}_f)//K.$$

En pratique :

- On travaille avec des objets plus simples. . .
- De nature locale. . .
- Et on se contente de quelques « relations de distribution »

Module des cycles

On voudrait comprendre la structure de

$$\mathrm{Gal}_E^{ab} \circlearrowleft \quad \mathbb{Z}[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})] = \mathbb{Z}[H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K] \quad \circlearrowright \mathcal{H}_K$$

où

$$\mathcal{H}_K = \text{algèbre de Hecke de } G(\mathbb{A}_f)//K.$$

En pratique :

- On travaille avec des objets plus simples. . .
- De nature locale. . .
- Et on se contente de quelques « relations de distribution »

Module des cycles

On voudrait comprendre la structure de

$$\mathrm{Gal}_E^{ab} \circlearrowright \quad \mathbb{Z}[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})] = \mathbb{Z}[H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K] \quad \circlearrowleft \mathcal{H}_K$$

où

$$\mathcal{H}_K = \text{algèbre de Hecke de } G(\mathbb{A}_f)//K.$$

En pratique :

- On travaille avec des objets plus simples...
- De nature locale...
- Et on se contente de quelques « relations de distribution »

Simplification des cycles ($G = SO(V)$, $H = U(W)$)

On remplace $\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ par

$$H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$$

Simplification des cycles ($G = SO(V)$, $H = U(W)$)

On remplace $\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ par

$$H(\mathbb{Q})H^1(\mathbb{A}_f)\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$$

avec $H^1 = SU(W) = \ker(\det)$

Simplification des cycles ($G = SO(V)$, $H = U(W)$)

On remplace $\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ par

$$\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = H(\mathbb{Q})H^1(\mathbb{A}_f)\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$$

avec $H^1 = SU(W) = \ker(\det)$ (car $H^1(\mathbb{Q})$ est dense dans $H^1(\mathbb{A}_f)$)

Simplification des cycles ($G = SO(V)$, $H = U(W)$)

On remplace $\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ par

$$\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = \cancel{H(\mathbb{Q})}H^1(\mathbb{A}_f)\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$$

avec $H^1 = SU(W) = \ker(\det)$

Simplification des cycles ($G = SO(V)$, $H = U(W)$)

On remplace $\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ par

$$\mathcal{Z}_K^{\sim}(\mathcal{Y}) = H^1(\mathbb{A}_f)\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$$

avec $H^1 = SU(W) = \ker(\det)$

Simplification des cycles ($G = SO(V)$, $H = U(W)$)

On remplace $\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ par

$$\mathcal{Z}_K^{\sim}(\mathcal{Y}) = H^1(\mathbb{A}_f)\backslash G(\mathbb{A}_f)/K = \prod\nolimits_p' H_p^1\backslash G_p/K_p$$

avec $H^1 = SU(W) = \ker(\det)$ et

$$X_p = X(\mathbb{Q}_p) \quad \text{pour} \quad X \in \{H, H^1, T, T^1, G\}.$$

Simplification des cycles ($G = SO(V)$, $H = U(W)$)

On remplace $\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ par

$$\mathcal{Z}_{\widetilde{K}}(\mathcal{Y}) = H^1(\mathbb{A}_f)\backslash G(\mathbb{A}_f)/K = \prod\nolimits_p' H_p^1\backslash G_p/K_p$$

avec $H^1 = SU(W) = \ker(\det)$ et

$$X_p = X(\mathbb{Q}_p) \quad \text{pour} \quad X \in \{H, H^1, T, T^1, G\}.$$

Module local des cycles

$$T_p^1 \quad \circlearrowright \quad \mathbb{Z}[H_p^1\backslash G_p/K_p] \quad \circlearrowleft \quad \mathcal{H}_p$$

Simplification des cycles ($G = SO(V)$, $H = U(W)$)

On remplace $\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ par

$$\mathcal{Z}_K^{\sim}(\mathcal{Y}) = H^1(\mathbb{A}_f)\backslash G(\mathbb{A}_f)/K = \prod\nolimits_p' H_p^1\backslash G_p/K_p$$

avec $H^1 = SU(W) = \ker(\det)$ et

$$X_p = X(\mathbb{Q}_p) \quad \text{pour} \quad X \in \{H, H^1, T, T^1, G\}.$$

Module local des cycles

$$T_p^1 \quad \circlearrowright \quad \mathbb{Z}[H_p^1\backslash G_p/K_p] \quad \circlearrowleft \quad \mathcal{H}_p$$

Simplification des cycles ($G = SO(V)$, $H = U(W)$)

On remplace $\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ par

$$\mathcal{Z}_K^{\sim}(\mathcal{Y}) = H^1(\mathbb{A}_f)\backslash G(\mathbb{A}_f)/K = \prod\nolimits_p' H_p^1\backslash G_p/K_p$$

avec $H^1 = SU(W) = \ker(\det)$ et

$$X_p = X(\mathbb{Q}_p) \quad \text{pour} \quad X \in \{H, H^1, T, T^1, G\}.$$

Module local des cycles

$$\color{red}{H_p} \quad \circlearrowright \quad \mathbb{Z}[H_p^1\backslash G_p/K_p] \quad \circlearrowleft \quad \mathcal{H}_p$$

Simplification des cycles ($G = SO(V)$, $H = U(W)$)

On remplace $\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ par

$$\mathcal{Z}_K^{\sim}(\mathcal{Y}) = H^1(\mathbb{A}_f)\backslash G(\mathbb{A}_f)/K = \prod\nolimits_p' H_p^1\backslash G_p/K_p$$

avec $H^1 = SU(W) = \ker(\det)$ et

$$X_p = X(\mathbb{Q}_p) \quad \text{pour} \quad X \in \{H, H^1, T, T^1, G\}.$$

Module local des cycles

$$H_p \quad \circlearrowright \quad \mathbb{Z}[H_p^1\backslash G_p/K_p] \quad \circlearrowleft \quad \mathcal{H}_p$$

où

$$\mathcal{H}_p = \text{algèbre de Hecke de } G_p/K_p$$

Simplification des cycles ($G = SO(V)$, $H = U(W)$)

On remplace $\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y}) = H(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ par

$$\mathcal{Z}^{\sim}_K(\mathcal{Y}) = H^1(\mathbb{A}_f)\backslash G(\mathbb{A}_f)/K = \prod\nolimits'_p H^1_p\backslash G_p/K_p$$

avec $H^1 = SU(W) = \ker(\det)$ et

$$X_p = X(\mathbb{Q}_p) \quad \text{pour} \quad X \in \{H, H^1, T, T^1, G\}.$$

Module local des cycles

$$H_p \quad \circlearrowright \quad \mathbb{Z}[H^1_p\backslash G_p/K_p] \quad \circlearrowleft \quad \mathcal{T}_{p,1}, \cdots, \mathcal{T}_{p,n}$$

où

$$\mathcal{H}_p = \mathbb{Z}[\mathcal{T}_{p,1}, \cdots, \mathcal{T}_{p,n}]$$

Simplification dans le cas Heegner

On remplace $\mathcal{Z}_K(x) = T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ par

$$T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$$

Simplification dans le cas Heegner

On remplace $\mathcal{Z}_K(x) = T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ par

$$\cancel{T(\mathbb{Q})}\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$$

Simplification dans le cas Heegner

On remplace $\mathcal{Z}_K(x) = T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ par

$$G^{ad}(\mathbb{A}_f)/K^{ad}$$

Simplification dans le cas Heegner

On remplace $\mathcal{Z}_K(x) = T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ par

$$G^{ad}(\mathbb{A}_f)/K^{ad} = \prod\nolimits'_p G_p^{ad}/K_p^{ad}$$

Simplification dans le cas Heegner

On remplace $\mathcal{Z}_K(x) = T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ par

$$G^{ad}(\mathbb{A}_f)/K^{ad} = \prod\nolimits'_p G_p^{ad}/K_p^{ad}$$

Module local des points de Heegner

$$T_p \circlearrowright \mathbb{Z}[G_p^{ad}/K_p^{ad}] \circlearrowleft \mathcal{H}_p^{ad}$$

Simplification dans le cas Heegner

On remplace $\mathcal{Z}_K(x) = T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ par

$$G^{ad}(\mathbb{A}_f)/K^{ad} = {\prod_p}' G_p^{ad}/K_p^{ad}$$

Module local des points de Heegner

$$\color{red}{T_p}\color{black} \quad \circlearrowright \quad \mathbb{Z}[G_p^{ad}/K_p^{ad}] \quad \circlearrowleft \quad \mathcal{H}_p^{ad}$$

Simplification dans le cas Heegner

On remplace $\mathcal{Z}_K(x) = T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ par

$$G^{ad}(\mathbb{A}_f)/K^{ad} = \prod\nolimits'_p G_p^{ad}/K_p^{ad}$$

Module local des points de Heegner

$$\textcolor{red}{E_p^\times} \circlearrowleft \mathbb{Z}[G_p^{ad}/K_p^{ad}] \circlearrowright \mathcal{H}_p^{ad}$$

Simplification dans le cas Heegner

On remplace $\mathcal{Z}_K(x) = T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ par

$$G^{ad}(\mathbb{A}_f)/K^{ad} = \prod\nolimits'_p G_p^{ad}/K_p^{ad}$$

Module local des points de Heegner

$$E_p^\times \quad \circlearrowright \quad \mathbb{Z}[G_p^{ad}/K_p^{ad}] \quad \circlearrowleft \quad \mathcal{H}_p^{ad}$$

$$\mathcal{H}_p^{ad} = \text{algèbre de Hecke de } G_p^{ad}/K_p^{ad}$$

Simplification dans le cas Heegner

On remplace $\mathcal{Z}_K(x) = T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ par

$$G^{ad}(\mathbb{A}_f)/K^{ad} = \prod\nolimits'_p G_p^{ad}/K_p^{ad}$$

Module local des points de Heegner

$$E_p^\times \quad \circlearrowright \quad \mathbb{Z}[G_p^{ad}/K_p^{ad}] \quad \circlearrowleft \quad \mathcal{T}_p$$

$$\mathcal{H}_p^{ad} = \mathbb{Z}[\mathcal{T}_p]$$

Simplification dans le cas Heegner

On remplace $\mathcal{Z}_K(x) = T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ par

$$G^{ad}(\mathbb{A}_f)/K^{ad} = \prod\nolimits'_p G_p^{ad}/K_p^{ad}$$

Module local des points de Heegner

$$E_p^\times \quad \circlearrowright \quad \mathbb{Z}[G_p^{ad}/K_p^{ad}] \quad \circlearrowleft \quad \mathcal{T}_p$$

$$\begin{aligned} G_p^{ad}/K_p^{ad} &= \text{sommets de l'arbre de Bruhat-Tits} \\ \mathcal{H}_p^{ad} &= \mathbb{Z}[\mathcal{T}_p] \end{aligned}$$

Simplification dans le cas Heegner

On remplace $\mathcal{Z}_K(x) = T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ par

$$G^{ad}(\mathbb{A}_f)/K^{ad} = \prod\nolimits_p' G_p^{ad}/K_p^{ad}$$

Module local des points de Heegner

$$E_p^\times \curvearrowright \mathbb{Z}[\mathcal{S}_p] \curvearrowleft \mathcal{T}_p$$

$$\mathcal{S}_p = \text{sommets de l'arbre de Bruhat-Tits}$$
$$\mathcal{H}_p^{ad} = \mathbb{Z}[\mathcal{T}_p]$$

Simplification dans le cas Heegner

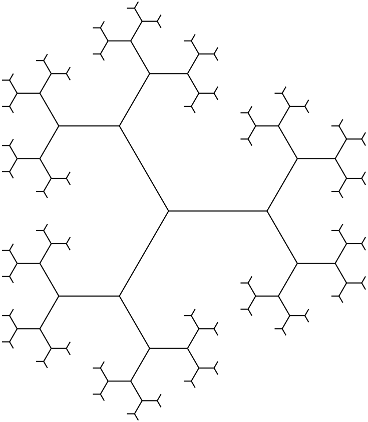
On remplace $\mathcal{Z}_K(x) = T(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$ par

$$G^{ad}(\mathbb{A}_f)/K^{ad} = \prod\nolimits'_p G_p^{ad}/K_p^{ad}$$

Module local des points de Heegner

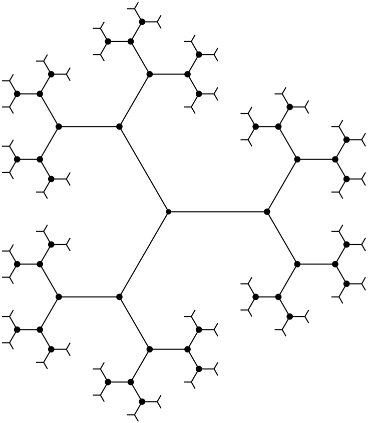
$$E_p^\times \quad \circlearrowright \quad \mathbb{Z}[\mathcal{S}_p] \quad \circlearrowleft \quad \mathcal{T}_p$$

La formule de Perrin-Riou ($p = 2$)



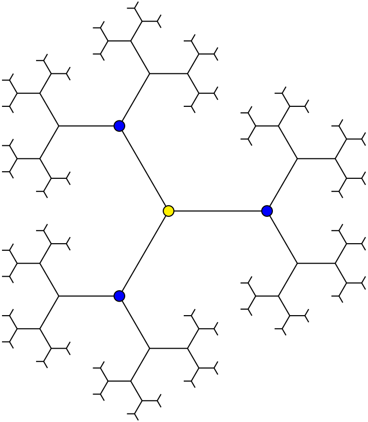
- L'arbre

La formule de Perrin-Riou ($p = 2$)



- L'arbre
- Ses sommets $\mathcal{S}_p$

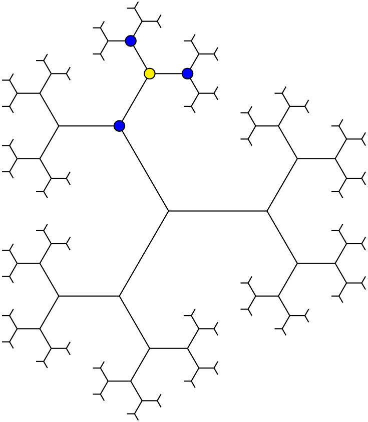
La formule de Perrin-Riou ($p = 2$)



- L'arbre
- Ses sommets $\mathcal{S}_p$
- L'opérateur de Hecke

$$\mathcal{T}_p(\bullet) = \sum \bullet$$

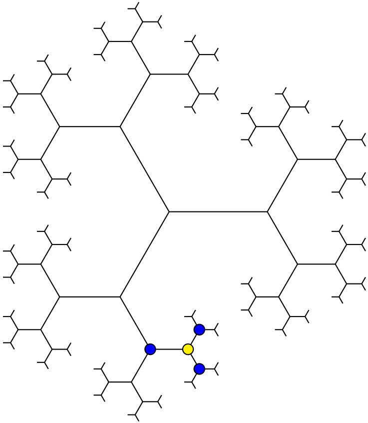
La formule de Perrin-Riou ($p = 2$)



- L'arbre
- Ses sommets $\mathcal{S}_p$
- L'opérateur de Hecke

$$\mathcal{T}_p(\bullet) = \sum \bullet$$

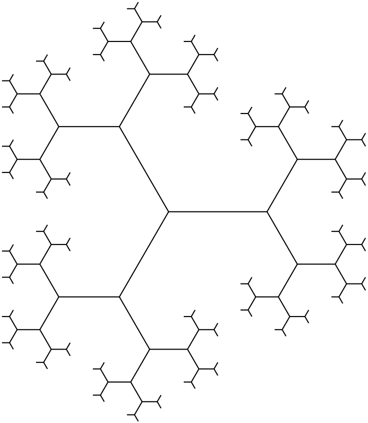
La formule de Perrin-Riou ($p = 2$)



- L'arbre
- Ses sommets $\mathcal{S}_p$
- L'opérateur de Hecke

$$\mathcal{T}_p(\bullet) = \sum \bullet$$

La formule de Perrin-Riou ($p = 2$)



- L'arbre
- Ses sommets $\mathcal{S}_p$
- L'opérateur de Hecke

$$\mathcal{T}_p(\bullet) = \sum \bullet$$

- Action de $E_p^\times$?

La formule de Perrin-Riou

- $\mathcal{S}_p$ = classes d'homothétie de $\mathbb{Z}_p$-réseaux dans $\mathbb{Q}_p^2$

La formule de Perrin-Riou

- $\mathcal{S}_p$ = classes d'homothétie de $\mathbb{Z}_p$-réseaux dans $\mathbb{Q}_p^2$
- $\mathbb{Q}_p^2$ est un E_p-module libre de rang un

La formule de Perrin-Riou

- $\mathcal{S}_p =$ classes d'homothétie de $\mathbb{Z}_p$-réseaux dans $\mathbb{Q}_p^2$
- $\mathbb{Q}_p^2$ est un E_p-module libre de rang un
- L : $\mathbb{Z}_p$-réseau de $\mathbb{Q}_p^2$

La formule de Perrin-Riou

- $\mathcal{S}_p$ = classes d'homothétie de $\mathbb{Z}_p$-réseaux dans $\mathbb{Q}_p^2$
- $\mathbb{Q}_p^2$ est un E_p-module libre de rang un
- L : $\mathbb{Z}_p$-réseau de $\mathbb{Q}_p^2 \Rightarrow \mathcal{O}(L)$: ordre de E_p

$$\mathcal{O}(L) = \{\lambda \in E_p : \lambda L \subset L\}$$

La formule de Perrin-Riou

- $\mathcal{S}_p$ = classes d'homothétie de $\mathbb{Z}_p$-réseaux dans $\mathbb{Q}_p^2$
- $\mathbb{Q}_p^2$ est un E_p-module libre de rang un
- L : $\mathbb{Z}_p$-réseau de $\mathbb{Q}_p^2$ $\Rightarrow$ $\mathcal{O}(L)$: ordre de E_p $\Rightarrow$ $n(L)$: conducteur.

$$\mathcal{O}(L) = \{\lambda \in E_p : \lambda L \subset L\} = \mathcal{O}_{n(L)}$$

La formule de Perrin-Riou

- $\mathcal{S}_p$ = classes d'homothétie de $\mathbb{Z}_p$-réseaux dans $\mathbb{Q}_p^2$
- $\mathbb{Q}_p^2$ est un E_p-module libre de rang un
- L : $\mathbb{Z}_p$-réseau de $\mathbb{Q}_p^2 \Rightarrow \mathcal{O}(L)$: ordre de $E_p \Rightarrow n(L)$: conducteur.

$$\mathcal{O}(L) = \{\lambda \in E_p : \lambda L \subset L\} = \mathcal{O}_{n(L)}$$

$$\mathcal{O}_n = \mathbb{Z}_p + p^n \mathcal{O}_{E_p}$$

La formule de Perrin-Riou

- $\mathcal{S}_p$ = classes d'homothétie de $\mathbb{Z}_p$-réseaux dans $\mathbb{Q}_p^2$
- $\mathbb{Q}_p^2$ est un E_p-module libre de rang un
- L : $\mathbb{Z}_p$-réseau de $\mathbb{Q}_p^2 \Rightarrow \mathcal{O}(L)$: ordre de $E_p \Rightarrow n(L)$: conducteur.

$$\mathcal{O}(L) = \{\lambda \in E_p : \lambda L \subset L\} = \mathcal{O}_{n(L)}$$

$$\mathcal{O}_n = \mathbb{Z}_p + p^n \mathcal{O}_{E_p}$$

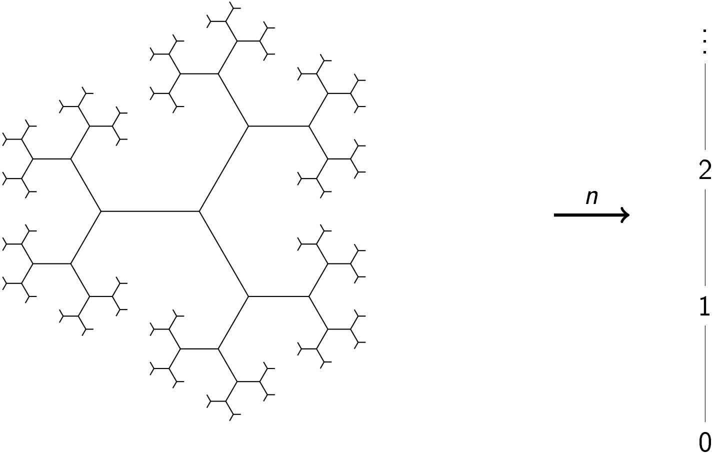
Théorème

Cette construction induit une bijection

$$E_p^\times \backslash \mathcal{S}_p \xrightarrow{n} \mathbb{N}.$$

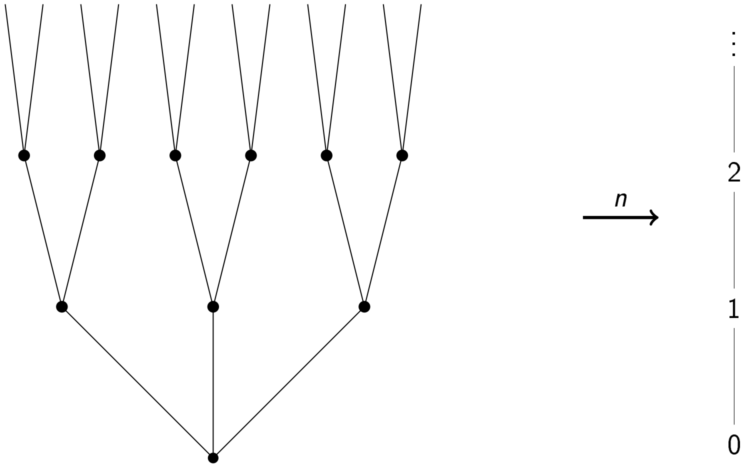
La formule de Perrin-Riou ($p = 2$)

Que sont les fibres (=$E_p^\times$-orbites) de $n : \mathcal{S}_p \twoheadrightarrow \mathbb{N}$?



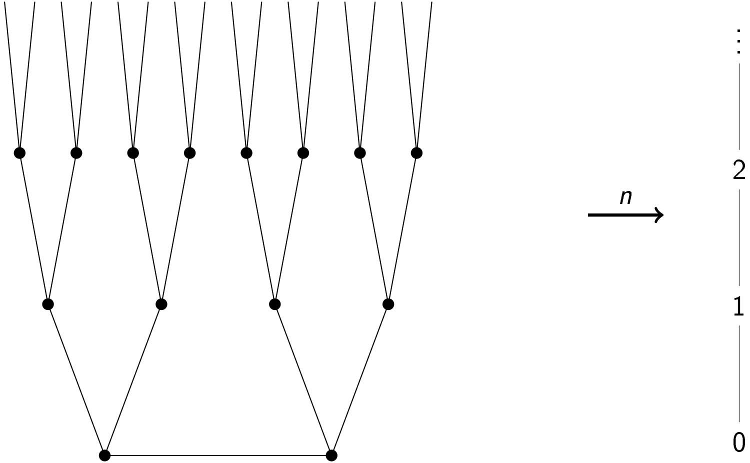
La formule de Perrin-Riou ($p = 2$)

... dans le cas inerte, $p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}$.



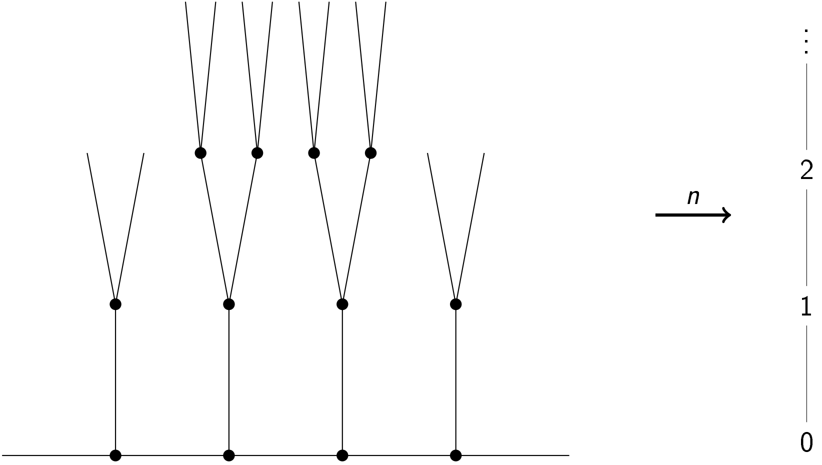
La formule de Perrin-Riou ($p = 2$)

... dans le cas ramifié, $p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}^2$.



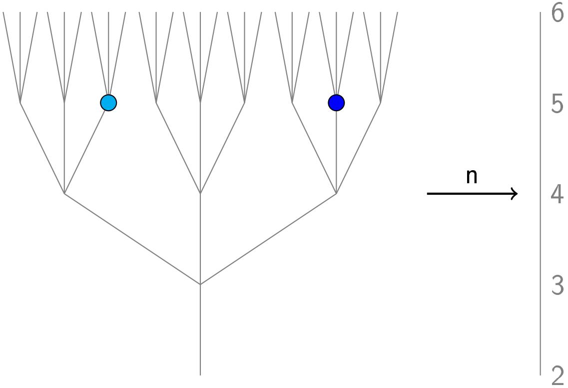
La formule de Perrin-Riou ($p = 2$)

… dans le cas décomposé, $p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}}$.



La formule de Perrin-Riou ($p = 3$)

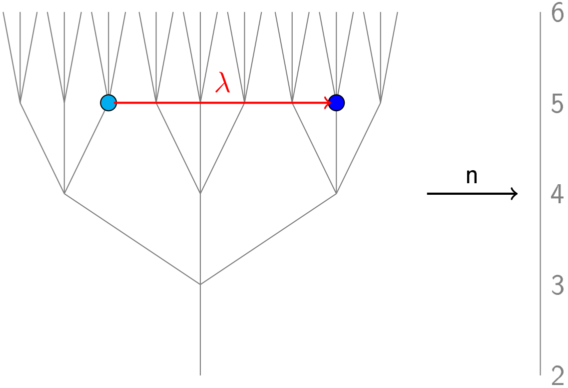
Ces représentations permettent de visualiser les traces :



$$n(\bullet) = n(\bullet) = 5$$

La formule de Perrin-Riou ($p = 3$)

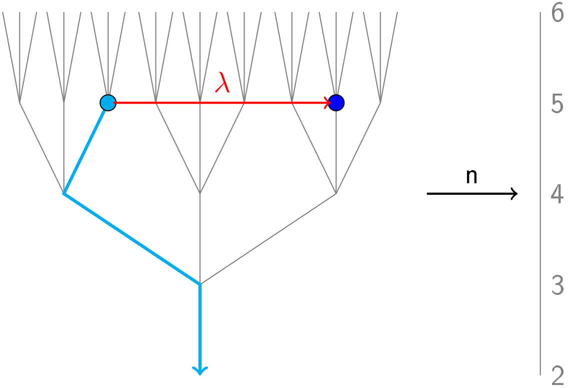
Ces représentations permettent de visualiser les traces :



$$n(\bullet) = n(\bullet) = 5$$
$$\Rightarrow \quad \exists\lambda : \lambda\bullet = \bullet$$

La formule de Perrin-Riou ($p = 3$)

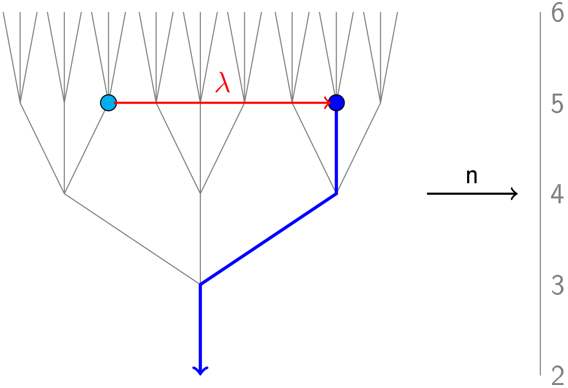
Ces représentations permettent de visualiser les traces :



$$n(\bullet) = n(\bullet) = 5$$
$$\Rightarrow \quad \exists \lambda : \lambda \bullet = \bullet$$

La formule de Perrin-Riou ($p = 3$)

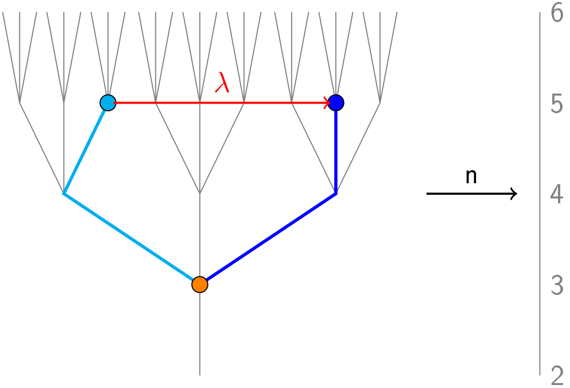
Ces représentations permettent de visualiser les traces :



$$n(\bullet) = n(\bullet) = 5$$
$$\Rightarrow \quad \exists \lambda : \lambda \bullet = \bullet$$
$$\Rightarrow \quad \lambda \backslash = /$$

La formule de Perrin-Riou ($p = 3$)

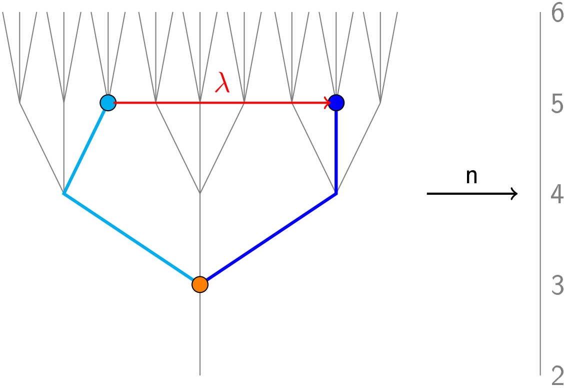
Ces représentations permettent de visualiser les traces :



$$n(\bullet) = n(\bullet) = 5$$
$$\Rightarrow \quad \exists\lambda : \lambda\bullet = \bullet$$
$$\Rightarrow \quad \lambda\backslash = /$$
$$\Rightarrow \quad \lambda\bullet = \bullet$$

La formule de Perrin-Riou ($p = 3$)

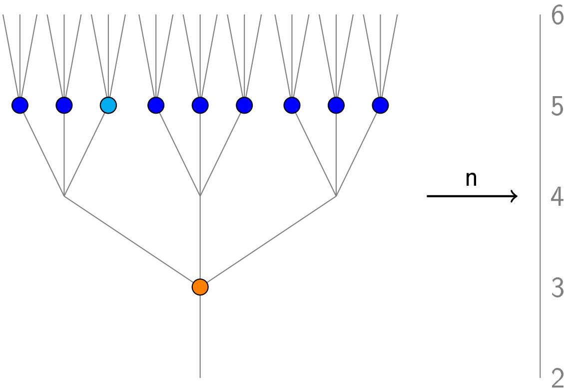
Ces représentations permettent de visualiser les traces :



$$
\begin{aligned}
& n(\bullet) = n(\bullet) = 5 \\
\Rightarrow \quad & \exists \lambda : \lambda \bullet = \bullet \\
\Rightarrow \quad & \lambda \backslash = / \\
\Rightarrow \quad & \lambda \bullet = \bullet \\
\Rightarrow \quad & \bullet \in \mathrm{Stab}(\bullet) \bullet
\end{aligned}
$$

La formule de Perrin-Riou ($p = 3$)

Ces représentations permettent de visualiser les traces :

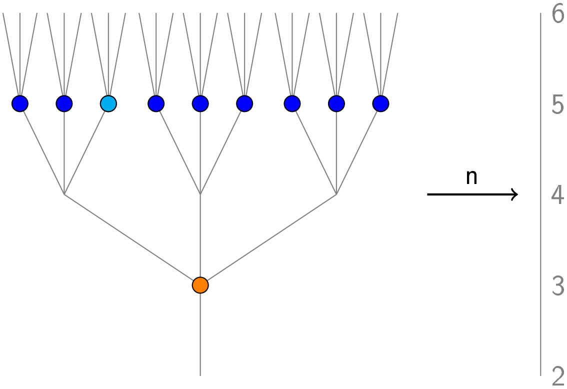


$$n(\bullet) = n(\bullet) = 5$$

$$\sum \bullet = \sum_{\lambda \in \mathrm{Stab}(\bullet)} \lambda \bullet$$

La formule de Perrin-Riou ($p = 3$)

Ces représentations permettent de visualiser les traces :

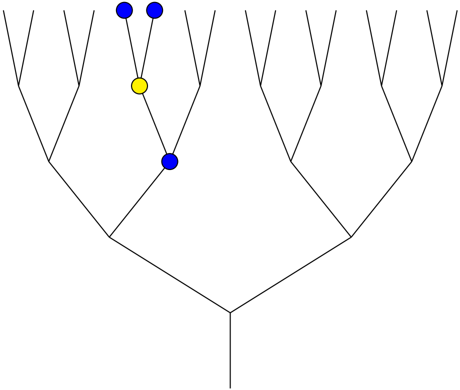


$$n(\bullet) = n(\bullet) = 5$$

$$\sum \bullet = \mathrm{Tr}_{5/3}(\bullet)$$

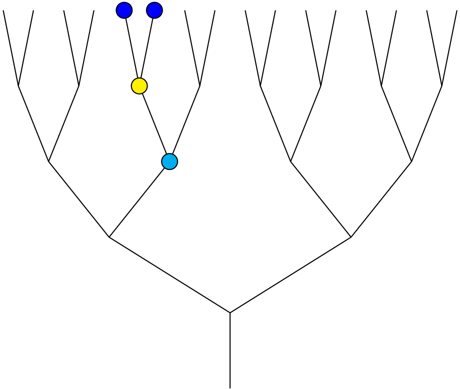
La formule de Perrin-Riou ($p = 2$)

$\mathcal{T}_p(z_n)$



La formule de Perrin-Riou ($p = 2$)

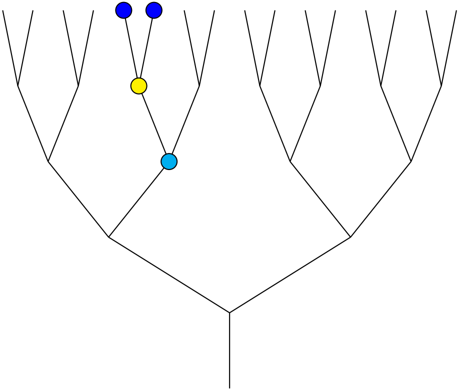
$$\mathcal{T}_p(z_n) = \mathrm{Tr}_{n+1/n}(z_{n+1}) + z_{n-1}$$



La formule de Perrin-Riou ($p = 2$)

Relation « **verticale** » : $n \geq 1$

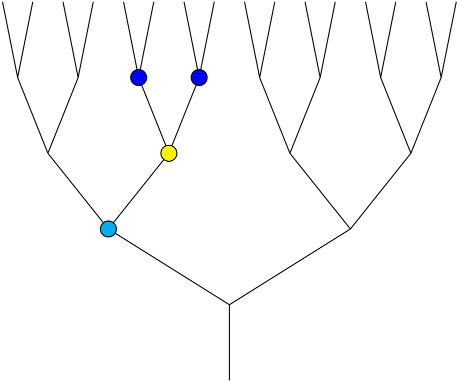
$$\mathcal{T}_p(z_n) = \mathrm{Tr}_{n+1/n}(z_{n+1}) + z_{n-1}$$



La formule de Perrin-Riou ($p = 2$)

Relation « **verticale** » : $n \geq 1$

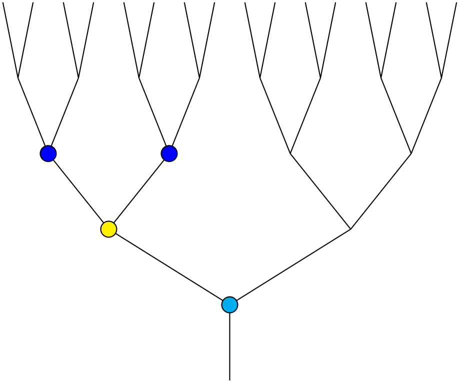
$$\mathcal{T}_p(z_n) = \mathrm{Tr}_{n+1/n}(z_{n+1}) + z_{n-1}$$



La formule de Perrin-Riou ($p = 2$)

Relation « **verticale** » : $n \geq 1$

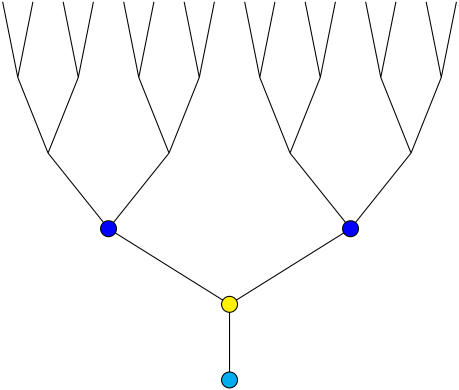
$$\mathcal{T}_p(z_n) = \mathrm{Tr}_{n+1/n}(z_{n+1}) + z_{n-1}$$



La formule de Perrin-Riou ($p = 2$)

Relation « **verticale** » : $n \geq 1$

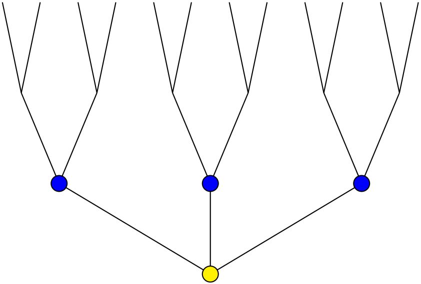
$$\mathcal{T}_p(z_n) = \mathrm{Tr}_{n+1/n}(z_{n+1}) + z_{n-1}$$



La formule de Perrin-Riou ($p = 2$)

Relation « **horizontale** » : $n = 0$, $p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}$

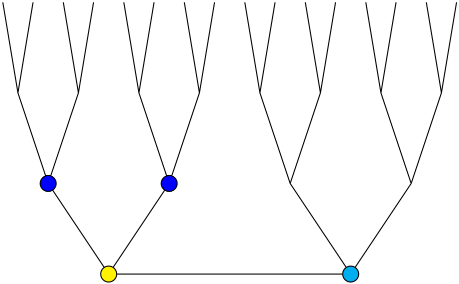
$$\mathcal{T}_p(z_0) = \mathrm{Tr}_{1/0}(z_1)$$



La formule de Perrin-Riou ($p = 2$)

Relation « **horizontale** » : $n = 0$, $p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}^2$

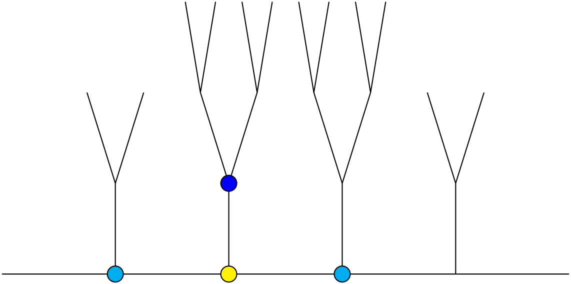
$$\mathcal{T}_p(z_0) = \mathrm{Tr}_{1/0}(z_1) + \mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} \cdot z_0$$



La formule de Perrin-Riou ($p = 2$)

Relation « **horizontale** » : $n = 0$, $p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}}$

$$\mathcal{T}_p(z_0) = \mathrm{Tr}_{1/0}(z_1) + \mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} \cdot z_0 + \mathrm{Fr}_{\overline{\mathfrak{p}}} \cdot z_0$$



Généralisation à $(G = SO(V), H = U(W))$

Pour étudier

$$H_p \twoheadrightarrow T_p^1 \quad \circlearrowright \quad \mathbb{Z}[H_p^1 \backslash G_p / K_p] \quad \circlearrowleft \quad \mathcal{T}_{p,1}, \cdots, \mathcal{T}_{p,n}$$

Généralisation à $(G = SO(V), H = U(W))$

Pour étudier

$$H \twoheadrightarrow T^1 \quad \circlearrowright \quad \mathbb{Z}[H^1\backslash G/K] \quad \circlearrowleft \quad \mathcal{T}_1, \cdots, \mathcal{T}_n$$

Généralisation à $(G = SO(V), H = U(W))$

Pour étudier

$$H \twoheadrightarrow T^1 \quad \circlearrowright \quad \mathbb{Z}[H^1\backslash G/K] \quad \circlearrowleft \quad \mathcal{T}_1, \cdots, \mathcal{T}_n$$

on regarde

$$H \quad \circlearrowright \quad G/K \qquad \text{et} \qquad \mathbb{Z}[H\backslash G/K] \quad \circlearrowleft \quad \mathcal{T}_1, \cdots, \mathcal{T}_n$$

Généralisation à $(G = SO(V), H = U(W))$

Pour étudier

$$H \twoheadrightarrow T^1 \quad \circlearrowright \quad \mathbb{Z}[H^1 \backslash G / K] \quad \circlearrowleft \quad \mathcal{T}_1, \cdots, \mathcal{T}_n$$

on regarde

$$H \quad \circlearrowright \quad G/K \qquad \text{et} \qquad \mathbb{Z}[H \backslash G / K] \quad \circlearrowleft \quad \mathcal{T}_1, \cdots, \mathcal{T}_n$$

Hypothèses

- G est déployé
- K est hyperspécial
- p est inerte

Généralisation à $(G = SO(V), H = U(W))$

Pour étudier

$$H \twoheadrightarrow T^1 \quad \circlearrowright \quad \mathbb{Z}[H^1\backslash G/K] \quad \circlearrowleft \quad \mathcal{T}_1, \cdots, \mathcal{T}_n$$

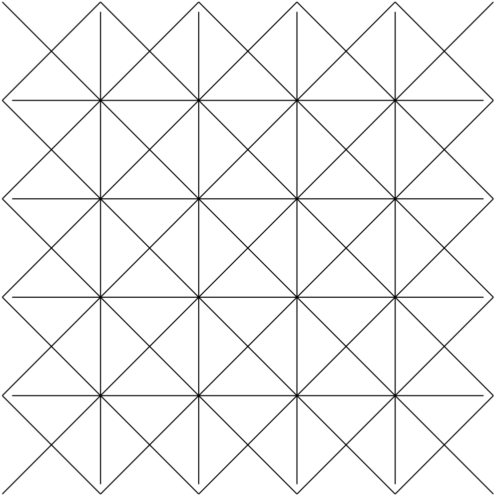
on regarde

$$H \quad \circlearrowright \quad G/K \qquad \text{et} \qquad \mathbb{Z}[H\backslash G/K] \quad \circlearrowleft \quad \mathcal{T}_1, \cdots, \mathcal{T}_n$$

Hypothèses

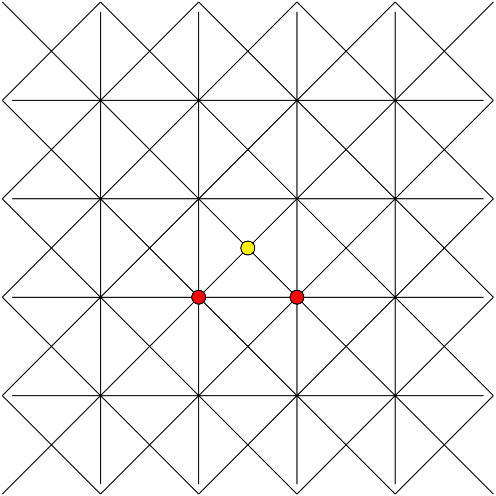
- G est déployé
- K est hyperspécial
- p est inerte
- G/K =sommets hyperspéciaux de
- $\mathbf{BT}(G)$=immeuble de Bruhat-Tits

L'immeuble de Bruhat-Tits ($n = 2$)



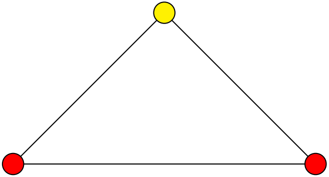
- Un appartement
- Hyper/spéciaux
- Une alcôve
- Un nouveau point
- Une demi-alcôve
- ... orientée !
- Voisins des hyperspéciaux
- Opérateur $\mathcal{T}_1$
- Opérateur $\mathcal{T}_2$

L'immeuble de Bruhat-Tits ($n = 2$)



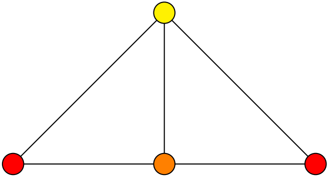
- Un appartement
- Hyper/spéciaux
- Une alcôve
- Un nouveau point
- Une demi-alcôve
- ... orientée !
- Voisins des hyperspéciaux
- Opérateur $\mathcal{T}_1$
- Opérateur $\mathcal{T}_2$

L'immeuble de Bruhat-Tits ($n = 2$)



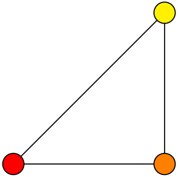
- Un appartement
- Hyper/spéciaux
- Une alcôve
- Un nouveau point
- Une demi-alcôve
- ... orientée !
- Voisins des hyperspéciaux
- Opérateur $\mathcal{T}_1$
- Opérateur $\mathcal{T}_2$

L'immeuble de Bruhat-Tits ($n = 2$)



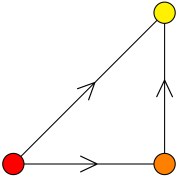
- Un appartement
- Hyper/spéciaux
- Une alcôve
- Un nouveau point
- Une demi-alcôve
- ... orientée !
- Voisins des hyperspéciaux
- Opérateur $\mathcal{T}_1$
- Opérateur $\mathcal{T}_2$

L'immeuble de Bruhat-Tits ($n = 2$)



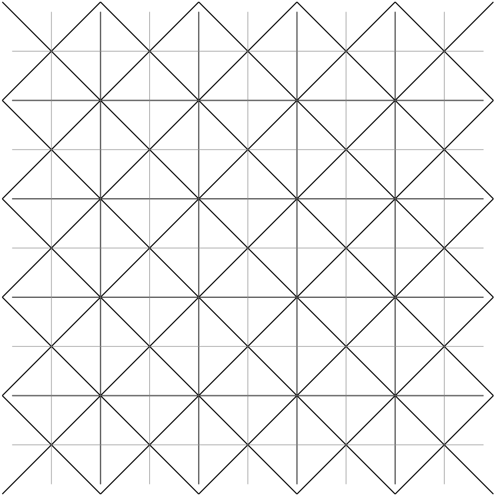
- Un appartement
- Hyper/spéciaux
- Une alcôve
- Un nouveau point
- Une demi-alcôve
- ... orientée !
- Voisins des hyperspéciaux
- Opérateur $\mathcal{T}_1$
- Opérateur $\mathcal{T}_2$

L'immeuble de Bruhat-Tits ($n = 2$)



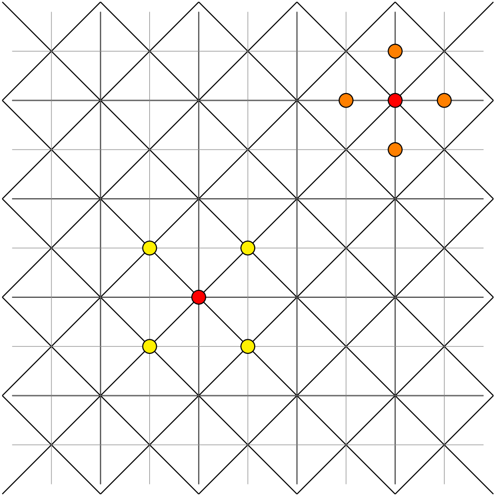
- Un appartement
- Hyper/spéciaux
- Une alcôve
- Un nouveau point
- Une demi-alcôve
- ... orientée !
- Voisins des hyperspéciaux
- Opérateur $\mathcal{T}_1$
- Opérateur $\mathcal{T}_2$

L'immeuble de Bruhat-Tits ($n = 2$)



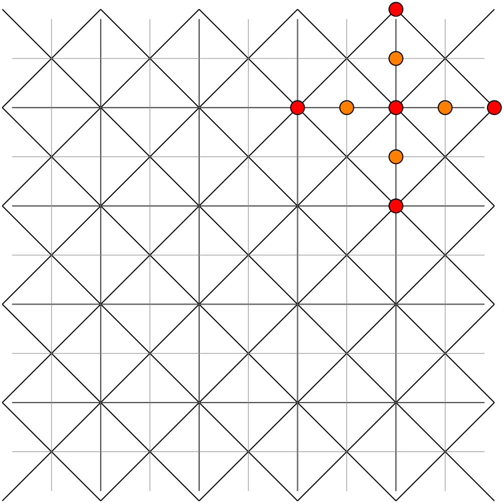
- Un appartement
- Hyper/spéciaux
- Une alcôve
- Un nouveau point
- Une demi-alcôve
- ... orientée !
- Voisins des hyperspéciaux
- Opérateur $\mathcal{T}_1$
- Opérateur $\mathcal{T}_2$

L'immeuble de Bruhat-Tits ($n = 2$)



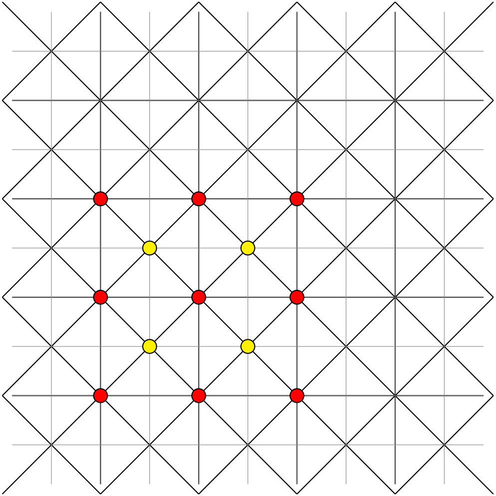
- Un appartement
- Hyper/spéciaux
- Une alcôve
- Un nouveau point
- Une demi-alcôve
- ... orientée !
- Voisins des hyperspéciaux
- Opérateur $\mathcal{T}_1$
- Opérateur $\mathcal{T}_2$

L'immeuble de Bruhat-Tits ($n = 2$)



- Un appartement
- Hyper/spéciaux
- Une alcôve
- Un nouveau point
- Une demi-alcôve
- ... orientée !
- Voisins des hyperspéciaux
- Opérateur $\mathcal{T}_1$
- Opérateur $\mathcal{T}_2$

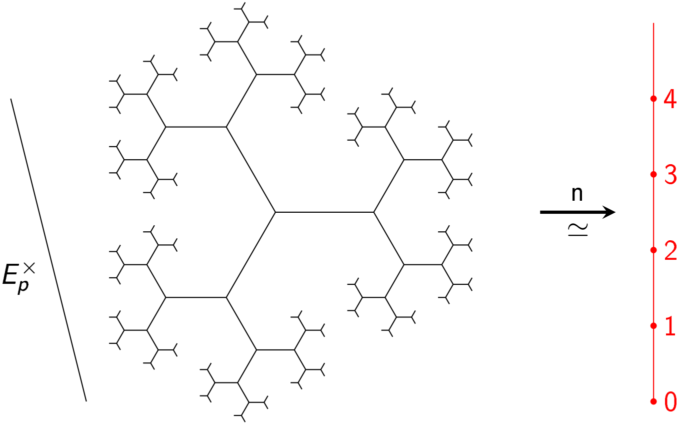
L'immeuble de Bruhat-Tits ($n = 2$)



- Un appartement
- Hyper/spéciaux
- Une alcôve
- Un nouveau point
- Une demi-alcôve
- ... orientée !
- Voisins des hyperspéciaux
- Opérateur $\mathcal{T}_1$
- Opérateur $\mathcal{T}_2$

Le quotient $H\backslash\mathbf{BT}(G)$ ($n \geq 1$)

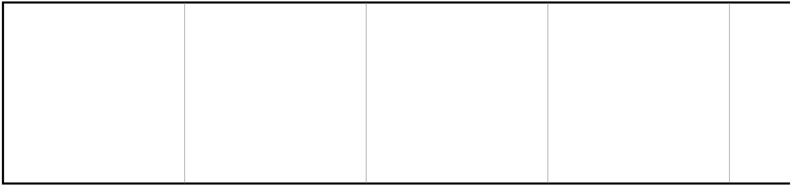
Le quotient $H\backslash\mathbf{BT}(G)$ est une demi-droite quand $n = 1$...



Le quotient $H\backslash\mathbf{BT}(G)$ $(n \geq 1)$

Le quotient $H\backslash\mathbf{BT}(G)$ est un *sous-ensemble* de l'ensemble des

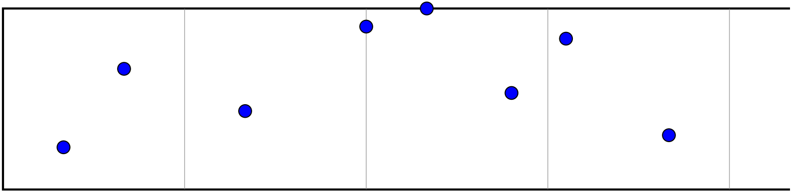
«diviseurs» de degré n sur une bande infinie de largeur 1.



Le quotient $H\backslash\mathbf{BT}(G)$ $(n \geq 1)$

Voilà le « diviseur » associé à $x \in \mathbf{BT}(G)$! C'est donc :

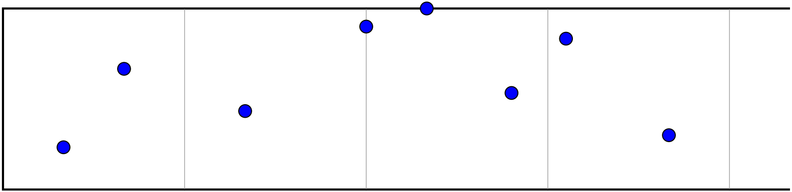
$$\text{une } H\text{-orbite dans } \mathbf{BT}(G).$$



Le quotient $H\backslash\mathbf{BT}(G)$ $(n \geq 1)$

Le stabilisateur de $T^1 \circlearrowright [x] \in H^1\backslash\mathbf{BT}(G)$ est

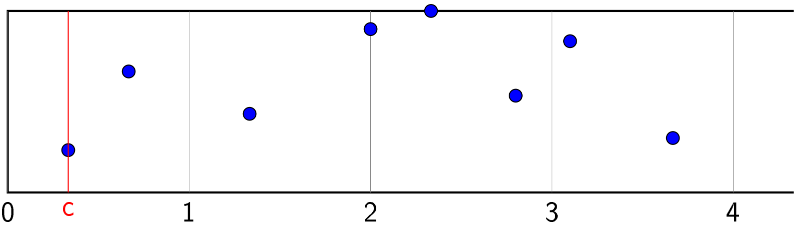
.



Le quotient $H\backslash\mathbf{BT}(G)$ $(n \geq 1)$

Le stabilisateur de $T^1 \circlearrowleft [x] \in H^1\backslash\mathbf{BT}(G)$ est

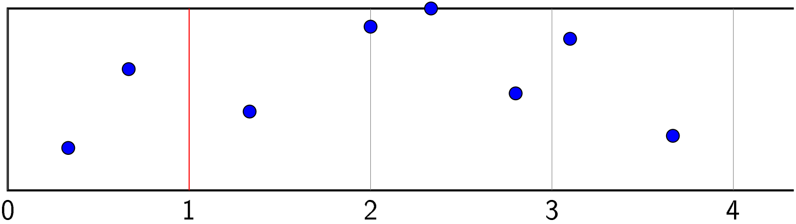
$$\mathrm{Stab}_{T^1}(x) = T^1(\lceil c \rceil) \qquad .$$



Le quotient $H\backslash\mathbf{BT}(G)$ $(n \geq 1)$

Le stabilisateur de $T^1 \circlearrowleft [x] \in H^1\backslash\mathbf{BT}(G)$ est

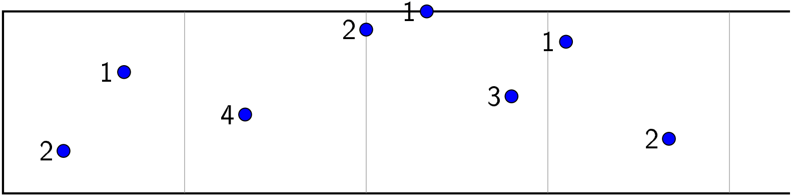
$$\mathrm{Stab}_{T^1}(x) = T^1(\lceil c \rceil) \quad \text{où} \quad T^1(r) = \left\{ z/\bar{z} : z \in \mathcal{O}_r^\times \right\}.$$



Le quotient $H\backslash\mathbf{BT}(G)$ $(n \geq 1)$

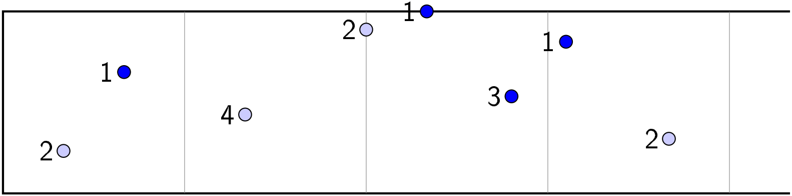
Pour que ce « diviseur » corresponde à une H-orbite...

$$(n = 2 + 1 + 4 + 2 + 1 + 3 + 1 + 2 = 16)$$



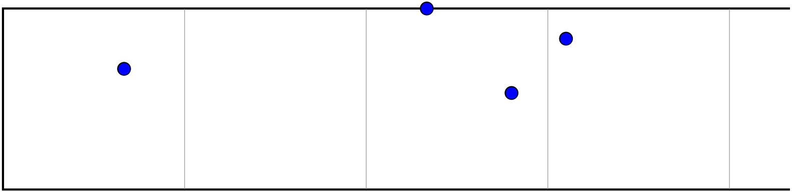
Le quotient $H\backslash\mathbf{BT}(G)$ $(n \geq 1)$

… on le regarde modulo 2…



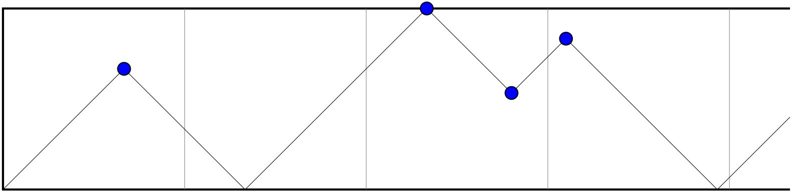
Le quotient $H\backslash\mathbf{BT}(G)$ $(n \geq 1)$

. . . on le regarde modulo 2. . .



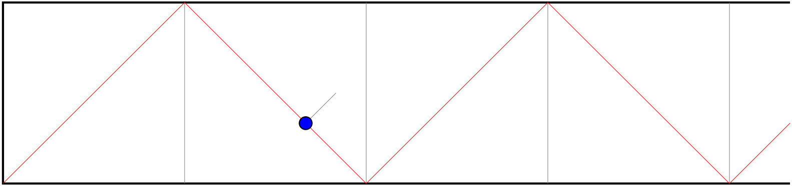
Le quotient $H\backslash\mathbf{BT}(G)$ ($n \geq 1$)

. . . et les points qui restent doivent être sur cette ligne brisée :



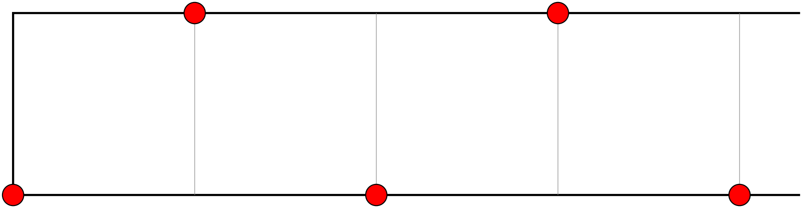
Le quotient $H\backslash\mathbf{BT}(G)$ $(n \geq 1)$

Pour $n = 1$: le point doit être sur une demi-droite (brisée) !



Le quotient $H\backslash\mathbf{BT}(G)$ $(n \geq 1)$

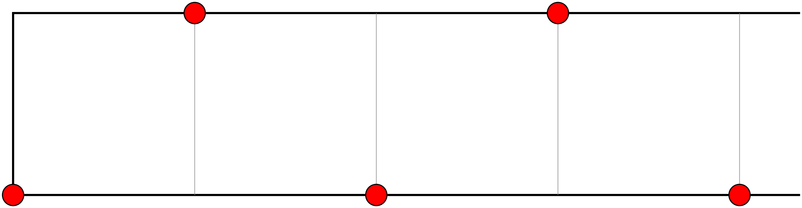
Voici le « support » des orbites hyperspéciales.



Le quotient $H\backslash\mathbf{BT}(G)$ $(n \geq 1)$

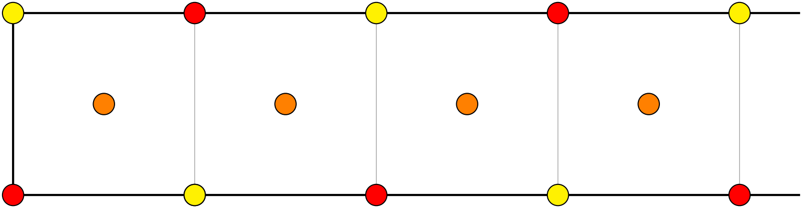
Voici le « support » des orbites hyperspéciales. On obtient :

$$H\backslash G/K \simeq \{(c_1 \leq \cdots \leq c_n) : c_i \in \mathbb{N}\}$$



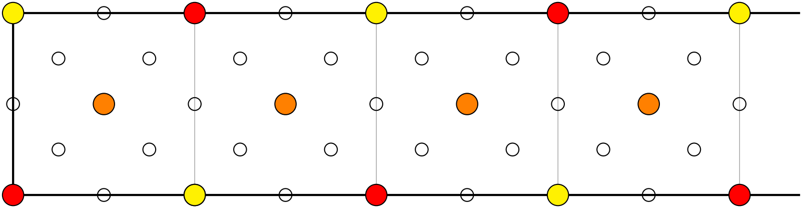
Le quotient $H\backslash\mathbf{BT}(G)$ $(n \geq 1)$

Voici le « support » pour les autres sommets. . .



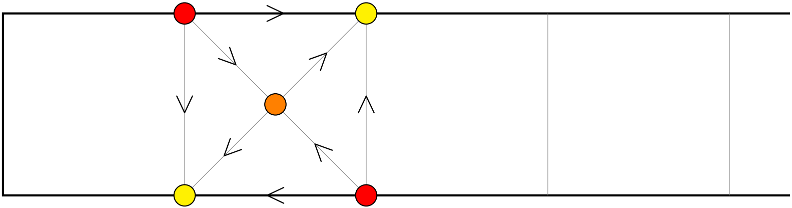
Le quotient $H \backslash \mathbf{BT}(G)$ $(n \geq 1)$

. . . et le « support » pour les (milieux) d'arêtes.



Le quotient $H\backslash\mathbf{BT}(G)$ $(n \geq 1)$

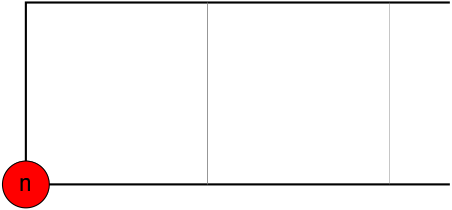
Les orbites des extrémités d'une arête (orientée) se calculent ainsi !



Le quotient $H\backslash \mathbf{BT}(G)$ $(n \geq 1)$

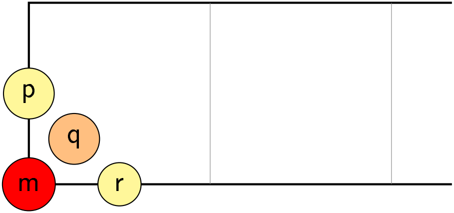
Le point base correspond à une *H*-orbite de points hyperspéciaux

$$\mathbf{BT}^{\circ}(H) \subset \mathbf{BT}(H) \subset \mathbf{BT}(G)$$



Le quotient $H\backslash\mathbf{BT}(G)$ $(n \geq 1)$

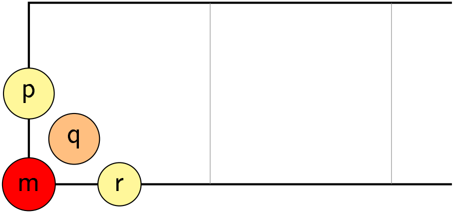
Les orbites des arêtes adjacentes. . .



Le quotient $H\backslash\mathbf{BT}(G)$ $(n \geq 1)$

Les orbites des arêtes adjacentes vérifient

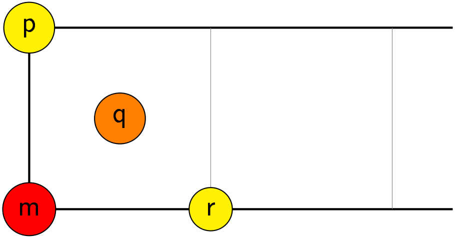
$$m + p + q + r = n, \quad p \equiv (q-1)r \equiv 0 \bmod 2.$$



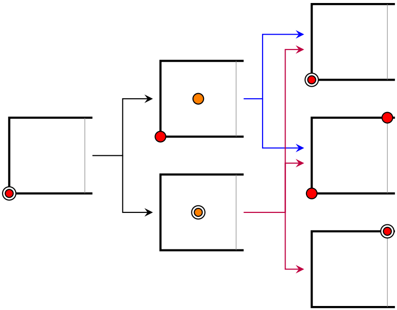
Le quotient $H\backslash\mathbf{BT}(G)$ $(n \geq 1)$

Les orbites des sommets voisins vérifient donc aussi :

$$m + p + q + r = n, \quad p \equiv (q-1)r \equiv 0 \bmod 2.$$

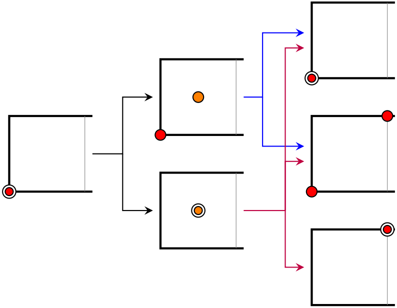


Les opérateurs $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ au point base ($n = 2$)



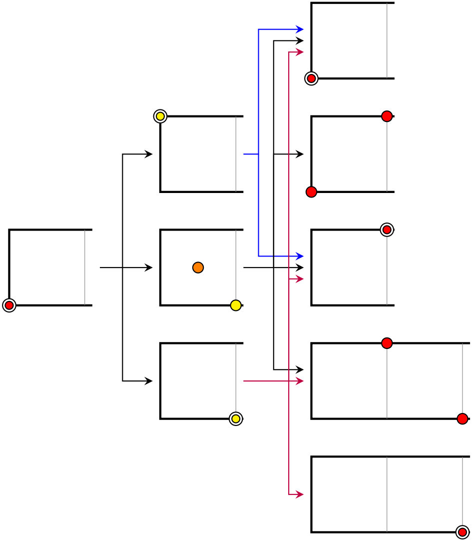
- $\mathcal{T}_1$(point base)

Les opérateurs $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ au point base ($n = 2$)



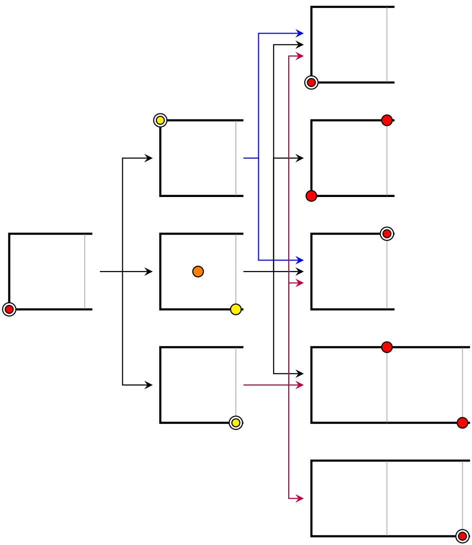
- $\mathcal{T}_1$(point base)
  - $c = 0$: 2 orbites
  - $c = 1$: 1 orbite

Les opérateurs $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ au point base ($n = 2$)



- $\mathcal{T}_2$(point base)

Les opérateurs $\mathcal{T}_1$ et $\mathcal{T}_2$ au point base ($n = 2$)



- $\mathcal{T}_2$(point base)
  - $c = 0$: 2 orbites
  - $c = 1$: 2 orbites
  - $c = 2$: 1 orbite !

Les relations horizontales ($n \geq 1$)

Pour $n \geq 1$, mais seulement pour le point base :

Les relations horizontales ($n \geq 1$)

Pour $n \geq 1$, mais seulement pour le point base :

$$\bullet \in H\backslash G/K$$

Les relations horizontales ($n \geq 1$)

Pour $n \geq 1$, mais seulement pour le point base :

$$\bullet \in H^{1} \backslash G / K$$

Les relations horizontales ($n \geq 1$)

Pour $n \geq 1$, mais seulement pour le point base :

$$\bullet \in H^1\backslash G/K \subset \mathbb{Z}[H^1\backslash G/K]$$

Les relations horizontales ($n \geq 1$)

Pour $n \geq 1$, mais seulement pour le point base :

$$\bullet \in H^1 \backslash G / K \subset \mathbb{Z}[H^1 \backslash G / K] \quad \circlearrowleft \quad \mathcal{T}_1, \cdots, \mathcal{T}_n$$

Les relations horizontales ($n \geq 1$)

Pour $n \geq 1$, mais seulement pour le point base :

$$\bullet \in H^1\backslash G/K \subset \mathbb{Z}[H^1\backslash G/K] \circlearrowleft \quad \mathcal{T}_1, \cdots, \mathcal{T}_n$$

Théorème

Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\mathcal{T}_i(\bullet) = \mathrm{Tr}_{1/0}(\star_i)$$

Les relations horizontales ($n \geq 1$)

Pour $n \geq 1$, mais seulement pour le point base :

$$\bullet \in H^1\backslash G/K \subset \mathbb{Z}[H^1\backslash G/K] \quad \circlearrowleft \quad \mathcal{T}_1, \cdots, \mathcal{T}_n$$

Théorème

Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\mathcal{T}_i(\bullet) = \mathrm{Tr}_{1/0}(\star_i) \quad \textit{avec} \quad \star_i \in \mathbb{Z}[H^1\backslash G/K]^{T^1(1)}$$

Les relations horizontales $(n \geq 1)$

Pour $n \geq 1$, mais seulement pour le point base :

$$\bullet \in H^1 \backslash G/K \subset \mathbb{Z}[H^1 \backslash G/K] \quad \circlearrowleft \quad \mathcal{T}_1, \cdots, \mathcal{T}_n$$

Théorème

Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\mathcal{T}_i(\bullet) = \mathrm{Tr}_{1/0}(\star_i) \quad \textit{avec} \quad \star_i \in \mathbb{Z}[H^1 \backslash G/K]^{T^1(1)}$$

Démonstration.

Comme $\bullet \in \mathbb{Z}[H^1 \backslash G/K]^{T^1(0)}$

Les relations horizontales ($n \geq 1$)

Pour $n \geq 1$, mais seulement pour le point base :

$$\bullet \in H^1 \backslash G/K \subset \mathbb{Z}[H^1 \backslash G/K] \quad \circlearrowleft \quad \mathcal{T}_1, \cdots, \mathcal{T}_n$$

Théorème

Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\mathcal{T}_i(\bullet) = \mathrm{Tr}_{1/0}(\star_i) \quad \textit{avec} \quad \star_i \in \mathbb{Z}[H^1 \backslash G/K]^{T^1(1)}$$

Démonstration.

Comme $\mathcal{T}_i(\bullet) \in \mathbb{Z}[H^1 \backslash G/K]^{T^1(0)}$

Les relations horizontales ($n \geq 1$)

Pour $n \geq 1$, mais seulement pour le point base :

$$\bullet \in H^1\backslash G/K \subset \mathbb{Z}[H^1\backslash G/K] \circlearrowleft \mathcal{T}_1, \cdots, \mathcal{T}_n$$

Théorème

Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\mathcal{T}_i(\bullet) = \mathrm{Tr}_{1/0}(\star_i) \quad \textit{avec} \quad \star_i \in \mathbb{Z}[H^1\backslash G/K]^{T^1(1)}$$

Démonstration.

Comme $\mathcal{T}_i(\bullet) \in \mathbb{Z}[H^1\backslash G/K]^{T^1(0)}$, il reste à voir que $[T^1(0) : T^1(1)]$ divise les multiplicités des orbites de conducteur 0 dans le support de

$$\mathcal{T}_i(\bullet) \in \mathbb{Z}[H\backslash G/K]$$

□

Les relations horizontales ($n \geq 1$)

Pour $n \geq 1$, mais seulement pour le point base :

$$\bullet \in H^1\backslash G/K \subset \mathbb{Z}[H^1\backslash G/K] \quad \circlearrowleft \quad \mathcal{T}_1, \cdots, \mathcal{T}_n$$

Théorème

Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\mathcal{T}_i(\bullet) = \mathrm{Tr}_{1/0}(\star_i) \quad \textit{avec} \quad \star_i \in \mathbb{Z}[H^1\backslash G/K]^{T^1(1)}$$

Démonstration.

Comme $\mathcal{T}_i(\bullet) \in \mathbb{Z}[H^1\backslash G/K]^{T^1(0)}$, il reste à voir que $[T^1(0) : T^1(1)]$ divise les multiplicités des orbites de conducteur 0 dans le support de

$$\mathcal{T}_i(\bullet) \in \mathbb{Z}[H\backslash G/K]$$

□

Les relations horizontales ($n \geq 1$)

Pour $n \geq 1$, mais seulement pour le point base :

$$\bullet \in H^1 \backslash G/K \subset \mathbb{Z}[H^1 \backslash G/K] \quad \circlearrowright \quad \mathcal{T}_1, \cdots, \mathcal{T}_n$$

Théorème

Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\mathcal{T}_i(\bullet) = \mathrm{Tr}_{1/0}(\star_i) \quad \textit{avec} \quad \star_i \in \mathbb{Z}[H^1 \backslash G/K]^{T^1(1)}$$

Démonstration.

Comme $\mathcal{T}_i(\bullet) \in \mathbb{Z}[H^1 \backslash G/K]^{T^1(0)}$, il reste à voir que $[T^1(0) : T^1(1)]$ divise les multiplicités des orbites de conducteur 0 dans le support de

$$\mathcal{T}_i(\bullet) \in \mathbb{Z}[H \backslash G/K]$$

□

Les relations horizontales ($n \geq 1$)

Pour $n \geq 1$, mais seulement pour le point base :

$$\bullet \in H^1\backslash G/K \subset \mathbb{Z}[H^1\backslash G/K] \circlearrowleft \mathcal{T}_1, \cdots, \mathcal{T}_n$$

Théorème

Pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\mathcal{T}_i(\bullet) = \mathrm{Tr}_{1/0}(\star_i) \quad \textit{avec} \quad \star_i \in \mathbb{Z}[H^1\backslash G/K]^{T^1(1)}$$

Démonstration.

Comme $\mathcal{T}_i(\bullet) \in \mathbb{Z}[H^1\backslash G/K]^{T^1(0)}$, il reste à voir que $[T^1(0) : T^1(1)]$ divise les multiplicités des orbites de conducteur 0 dans le support de

$$\mathcal{T}_i(\bullet) \in \mathbb{Z}[H\backslash G/K]$$

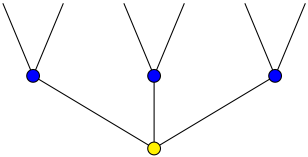
□

Les relations horizontales ($n \geq 1$)

- Le calcul des multiplicités est très laborieux.

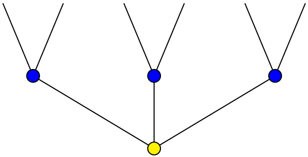
Les relations horizontales ($n \geq 1$)

- Le calcul des multiplicités est très laborieux.
- Ce théorème généralise uniquement la relation correspondant à



Les relations horizontales ($n \geq 1$)

- Le calcul des multiplicités est très laborieux.
- Ce théorème généralise uniquement la relation correspondant à



- Pour aller plus loin, on dispose de...

La méthode de Réda

. . . la méthode de Réda Boumasmoud

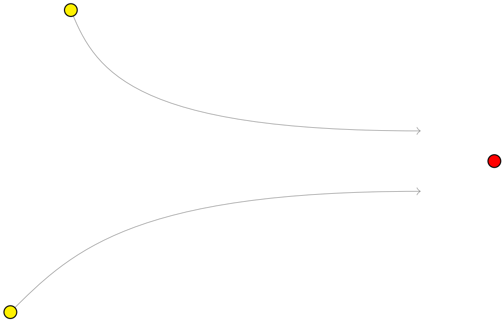
La méthode de Réda

…la méthode de Réda Boumasmoud

Pour l'expliquer, il faut d'abord parler du

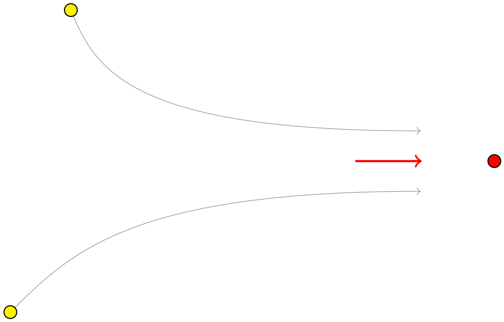
bord de l'immeuble

Le bord de l'immeuble



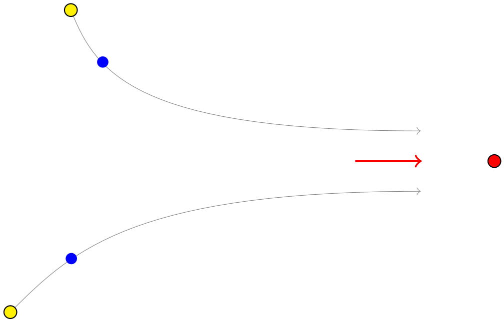
- Un point du bord...

Le bord de l'immeuble



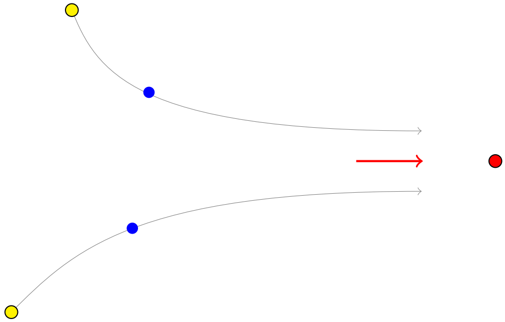
- Un point du bord. . .
- + une longueur

Le bord de l'immeuble



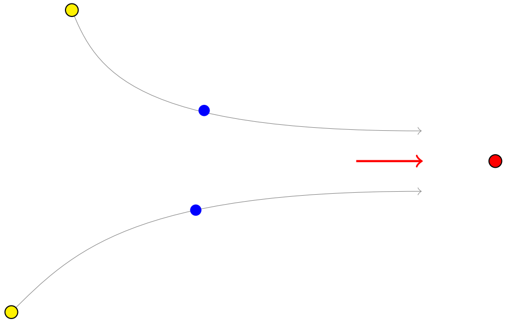
- Un point du bord...
- $+$ une longueur
- $=$ opérateur $+\xi$

Le bord de l'immeuble



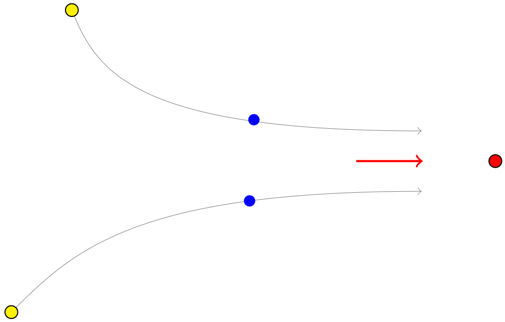
- Un point du bord. . .
- $+$ une longueur
- $=$ opérateur $+2\xi$

Le bord de l'immeuble



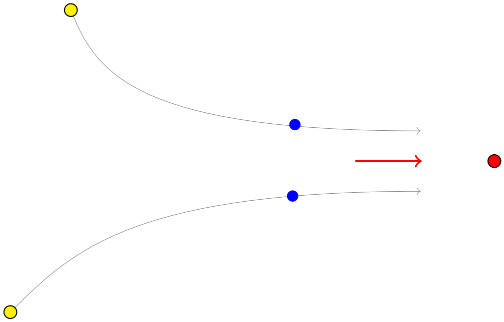
- Un point du bord...
- + une longueur
- = opérateur $+3\xi$

Le bord de l'immeuble



- Un point du bord. . .
- + une longueur
- = opérateur $+4\xi$

Le bord de l'immeuble



- Un point du bord. . .
- $+$ une longueur
- $=$ opérateur $+5\xi$

Le bord de l'immeuble

On voit donc que le cône sur le bord de l'immeuble agit sur l'immeuble :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{BT}(G) \times \mathcal{C}\left(\partial \mathbf{BT}(G)\right) & \longrightarrow & \mathbf{BT}(G) \\ (x, t \cdot \xi) & \longmapsto & x + t \cdot \xi \end{array}$$

Le bord de l'immeuble

On voit donc que le cône sur le bord de l'immeuble agit sur l'immeuble :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{BT}(G) \times \mathcal{C}\left(\partial \mathbf{BT}(G)\right) & \longrightarrow & \mathbf{BT}(G) \\ (x, t \cdot \xi) & \longmapsto & {\color{red} x + t \cdot \xi} \end{array}$$

Le bord de l'immeuble

On voit donc que le cône sur le bord de l'immeuble agit sur l'immeuble :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{BT}(G) \times \mathcal{C}(\partial \mathbf{BT}(G)) & \longrightarrow & \mathbf{BT}(G) \\ (x, t \cdot \xi) & \longmapsto & x + t \cdot \xi \end{array}$$

Mais qu'est-ce que c'est que

$$\mathcal{C}(\partial \mathbf{BT}(G))?$$

Le bord de l'immeuble

On voit donc que le cône sur le bord de l'immeuble agit sur l'immeuble :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{BT}(G) \times \mathcal{C}(\partial \mathbf{BT}(G)) & \longrightarrow & \mathbf{BT}(G) \\ (x, t \cdot \xi) & \longmapsto & x + t \cdot \xi \end{array}$$

Mais qu'est-ce que c'est que

$$\mathcal{C}(\partial \mathbf{BT}(G))?$$

C'est l'ensemble des $\mathbb{R}$-filtrations « pour G »

Les $\mathbb{R}$-filtrations (pour $G = GL(V)$)

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie.

Les $\mathbb{R}$-filtrations (pour $G = GL(V)$)

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie.

Définition

Une $\mathbb{R}$-filtration sur V est une fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \{\text{sous-esp. vect. de } V\} \\ \lambda & \longmapsto & \mathcal{F}^{\lambda} V \end{array}$$

qui est décroissante, exhaustive, séparée, continue à gauche.

Les $\mathbb{R}$-filtrations (pour $G = GL(V)$)

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie.

Définition

Une $\mathbb{R}$-filtration sur V est une fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \{\text{sous-esp. vect. de } V\} \\ \lambda & \longmapsto & \mathcal{F}^{\lambda} V \end{array}$$

qui est décroissante, exhaustive, séparée, continue à gauche.

Les $\mathbb{R}$-filtrations (pour $G = GL(V)$)

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie.

Définition

Une $\mathbb{R}$-filtration sur V est une fonction

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \{\text{sous-esp. vect. de } V\} \\ \lambda & \longmapsto & \mathcal{F}^{\lambda} V \end{array}$$

qui est décroissante, exhaustive, séparée, continue à gauche.

Les $\mathbb{R}$-filtrations (pour $G = GL(V)$)

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie.

Définition

Une $\mathbb{R}$-filtration sur V est une fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \{\text{sous-esp. vect. de } V\} \\ \lambda & \longmapsto & \mathcal{F}^{\lambda} V \end{array}$$

qui est décroissante, exhaustive, séparée, continue à gauche.

Les $\mathbb{R}$-filtrations (pour $G = GL(V)$)

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie.

Définition

Une $\mathbb{R}$-filtration sur V est une fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \{\text{sous-esp. vect. de } V\} \\ \lambda & \longmapsto & \mathcal{F}^\lambda V \end{array}$$

qui est décroissante, exhaustive, séparée, continue à gauche.

Les $\mathbb{R}$-filtrations (pour $G = GL(V)$)

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie.

Définition

Une $\mathbb{R}$-filtration sur V est une fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \{\text{sous-esp. vect. de } V\} \\ \lambda & \longmapsto & \mathcal{F}^{\lambda} V \end{array}$$

qui est décroissante, exhaustive, séparée, continue à gauche.

Les $\mathbb{R}$-filtrations (pour $G = GL(V)$)

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie.

Définition

Une $\mathbb{R}$-filtration sur V est une fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \{\text{sous-esp. vect. de } V\} \\ \lambda & \longmapsto & \mathcal{F}^{\lambda}V \end{array}$$

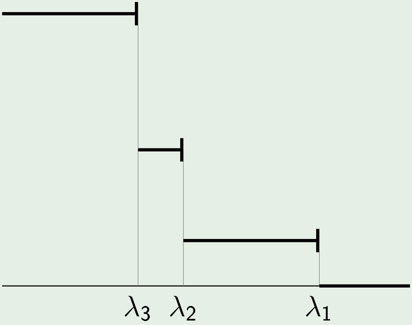
qui est décroissante, exhaustive, séparée, continue à gauche.

Les $\mathbb{R}$-filtrations (pour $G = GL(V)$)

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie.

Exemple (Une filtration)

$$V = \mathcal{F}^{\lambda_3} V \supsetneq \mathcal{F}^{\lambda_2} V \supsetneq \mathcal{F}^{\lambda_1} V \supsetneq 0$$

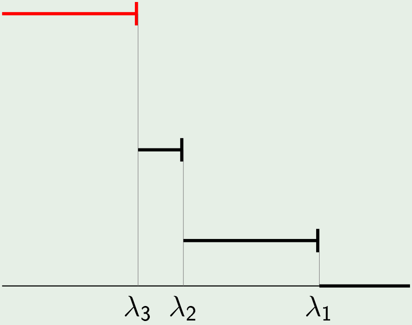


Les $\mathbb{R}$-filtrations (pour $G = GL(V)$)

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie.

Exemple (Une filtration)

$$V = \mathcal{F}^{\lambda_3} V \supsetneq \mathcal{F}^{\lambda_2} V \supsetneq \mathcal{F}^{\lambda_1} V \supsetneq 0$$

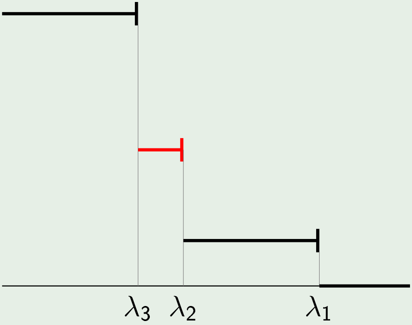


Les $\mathbb{R}$-filtrations (pour $G = GL(V)$)

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie.

Exemple (Une filtration)

$$V = \mathcal{F}^{\lambda_3} V \supsetneq \mathcal{F}^{\lambda_2} V \supsetneq \mathcal{F}^{\lambda_1} V \supsetneq 0$$

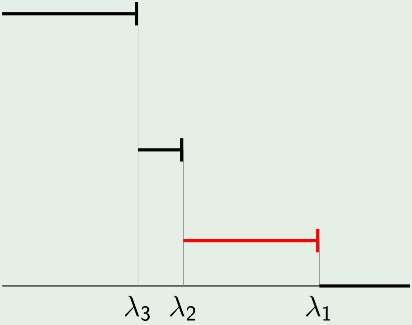


Les $\mathbb{R}$-filtrations (pour $G = GL(V)$)

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie.

Exemple (Une filtration)

$$V = \mathcal{F}^{\lambda_3} V \supsetneq \mathcal{F}^{\lambda_2} V \supsetneq \color{red}{\mathcal{F}^{\lambda_1} V} \supsetneq 0$$

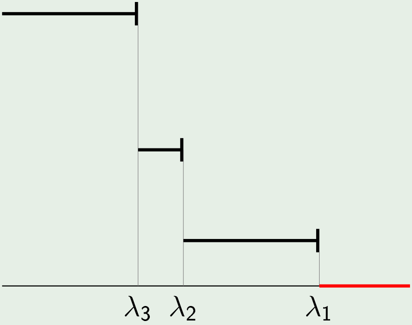


Les $\mathbb{R}$-filtrations (pour $G = GL(V)$)

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie.

Exemple (Une filtration)

$$V = \mathcal{F}^{\lambda_3} V \supsetneq \mathcal{F}^{\lambda_2} V \supsetneq \mathcal{F}^{\lambda_1} V \supsetneq 0$$

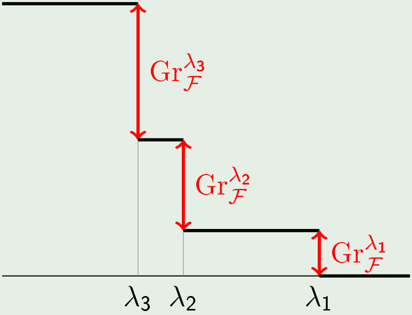


Les $\mathbb{R}$-filtrations (pour $G = GL(V)$)

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie.

Exemple (Une filtration)

$$V = \mathcal{F}^{\lambda_3} V \supsetneq \mathcal{F}^{\lambda_2} V \supsetneq \mathcal{F}^{\lambda_1} V \supsetneq 0$$



Les $\mathbb{R}$-filtrations (pour $G = GL(V)$)

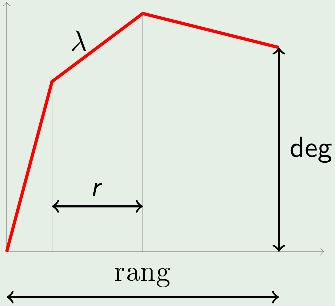
Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie.

Exemple (Une filtration)

$$V = \mathcal{F}^{\lambda_3} V \supsetneq \mathcal{F}^{\lambda_2} V \supsetneq \mathcal{F}^{\lambda_1} V \supsetneq 0$$

Type de $\mathcal{F}$

$r = \dim \mathrm{Gr}_{\mathcal{F}}^{\lambda}$



Les $\mathbb{R}$-filtrations (pour $G = GL(V)$)

Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie.

Les $\mathbb{R}$-filtrations (cas général)

Pour le cas général, on utilise le formalisme Tannakien !

Le formalisme Tannakien

Pour un groupe algébrique G

- Si C est une catégorie de trucs, un G-truc est un foncteur

$$t : \mathrm{Rep}(G) \to \mathsf{C}$$

où $\mathrm{Rep}(G)$ est la catégorie des représentations de G

$$\rho : G \to GL(V(\rho))$$

- En présence d'un foncteur fibre $\omega : \mathsf{C} \to \mathrm{Vect}$, on demande que

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Rep}(G) \arrow[rr, "V"] \arrow[dr, "t"'] & & \mathrm{Vect} \\ & \mathsf{C} \arrow[ur, "\omega"'] & \end{tikzcd}$$

commute, où $V : \mathrm{Rep}(G) \to \mathrm{Vect}$ est le foncteur fibre standard.

Le formalisme Tannakien

Pour un groupe algébrique G

- Si C est une catégorie de trucs, un G-truc est un foncteur

$$t : \mathrm{Rep}(G) \to \mathsf{C}$$

où $\mathrm{Rep}(G)$ est la catégorie des représentations de G

$$\rho : G \to GL(V(\rho))$$

- En présence d'un foncteur fibre $\omega : \mathsf{C} \to \mathrm{Vect}$, on demande que

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}(G) \arrow[rr, "V"] \arrow[dr, "t"'] & & \mathrm{Vect} \\
& \mathsf{C} \arrow[ur, "\omega"'] &
\end{tikzcd}$$

commute, où $V : \mathrm{Rep}(G) \to \mathrm{Vect}$ est le foncteur fibre standard.

Le formalisme Tannakien

Pour un groupe algébrique G

- Si C est une catégorie de trucs, un G-truc est un foncteur

$$t : \mathrm{Rep}(G) \to \mathsf{C}$$

  où $\mathrm{Rep}(G)$ est la catégorie des représentations de G

$$\rho : G \to GL(V(\rho))$$

- En présence d'un foncteur fibre $\omega : \mathsf{C} \to \mathrm{Vect}$, on demande que

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}(G) \arrow[rr, "V"] \arrow[dr, "t"'] & & \mathrm{Vect} \\
& \mathsf{C} \arrow[ur, "\omega"'] &
\end{tikzcd}$$

  commute, où $V : \mathrm{Rep}(G) \to \mathrm{Vect}$ est le foncteur fibre standard.

Le formalisme Tannakien

Pour un groupe algébrique G

- Si C est une catégorie de trucs, un G-truc est un foncteur

$$t : \mathrm{Rep}(G) \to \mathsf{C}$$

où $\mathrm{Rep}(G)$ est la catégorie des représentations de G

$$\rho : G \to GL(V(\rho))$$

- En présence d'un foncteur fibre $\omega : \mathsf{C} \to \mathrm{Vect}$, on demande que

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}(G) \arrow[rr, "V"] \arrow[dr, "t"'] & & \mathrm{Vect} \\
& \mathsf{C} \arrow[ur, "\omega"'] &
\end{tikzcd}$$

commute, où $V : \mathrm{Rep}(G) \to \mathrm{Vect}$ est le foncteur fibre standard.

Le formalisme Tannakien

Pour un groupe algébrique G

- Si C est une catégorie de trucs, un G-truc est un foncteur

$$t : \mathrm{Rep}(G) \to \mathsf{C}$$

où $\mathrm{Rep}(G)$ est la catégorie des représentations de G

$$\rho : G \to GL(V(\rho))$$

- En présence d'un foncteur fibre $\omega : \mathsf{C} \to \mathrm{Vect}$, on demande que

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}(G) \arrow[rr, "V"] \arrow[dr, "t"'] & & \mathrm{Vect} \\
& \mathsf{C} \arrow[ur, "\omega"'] &
\end{tikzcd}$$

commute, où $V : \mathrm{Rep}(G) \to \mathrm{Vect}$ est le foncteur fibre standard.

Le formalisme Tannakien

Pour un groupe algébrique G

- Si C est une catégorie de trucs, un G-truc est un foncteur

$$t : \mathrm{Rep}(G) \to \mathsf{C}$$

où $\mathrm{Rep}(G)$ est la catégorie des représentations de G

$$\rho : G \to GL(V(\rho))$$

- En présence d'un foncteur fibre $\omega : \mathsf{C} \to \mathrm{Vect}$, on demande que

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}(G) \arrow[rr, "V"] \arrow[dr, "t"'] & & \mathrm{Vect} \\
& \mathsf{C} \arrow[ur, "\omega"'] &
\end{tikzcd}$$

commute, où $V : \mathrm{Rep}(G) \to \mathrm{Vect}$ est le foncteur fibre standard.

Le formalisme Tannakien

Pour un groupe algébrique G

- Si C est une catégorie de trucs, un G-truc est un foncteur

$$t : \mathrm{Rep}(G) \to \mathsf{C}$$

où $\mathrm{Rep}(G)$ est la catégorie des représentations de G

$$\rho : G \to GL(V(\rho))$$

- En présence d'un foncteur fibre $\omega : \mathsf{C} \to \mathrm{Vect}$, on demande que

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}(G) \arrow[rr, "V"] \arrow[dr, "t"'] & & \mathrm{Vect} \\
& \mathsf{C} \arrow[ur, "\omega"'] &
\end{tikzcd}$$

commute, où $V : \mathrm{Rep}(G) \to \mathrm{Vect}$ est le foncteur fibre standard.

Le formalisme Tannakien

Pour un groupe algébrique G sur k,

- Si C est une $\otimes-$catégorie de trucs, un G-truc est un $\otimes-$foncteur

  $$t : \mathrm{Rep}_k(G) \to \mathsf{C}$$

  où $\mathrm{Rep}_k(G)$ est la catégorie des représentations de G

  $$\rho : G \to GL_k(V(\rho))$$

- En présence d'un foncteur fibre $\omega : \mathsf{C} \to \mathrm{Vect}_k$, on demande que

  $$\begin{tikzcd}\mathrm{Rep}_k(G) \arrow[rr, "V"] \arrow[dr, "t"'] & & \mathrm{Vect}_k \\ & \mathsf{C} \arrow[ur, "\omega"'] & \end{tikzcd}$$

  commute, où $V : \mathrm{Rep}_k(G) \to \mathrm{Vect}_k$ est le foncteur fibre standard.

Les $\mathbb{R}$-filtrations « pour G »

Définition

On note $\mathbf{F}(G)$ l'ensemble des $\mathbb{R}$-filtrations sur

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Rep}_k(G) \arrow[r, "V"] & \mathrm{Vect}_k\end{tikzcd}$$

Les $\mathbb{R}$-filtrations « pour G »

Définition

On note $\mathbf{F}(G)$ l'ensemble des factorisations $\mathcal{F}$ de

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}_k(G) \arrow[rr, "V"] \arrow[dr, "\mathcal{F}"'] & & \mathrm{Vect}_k \\
& \mathrm{Fil}_k \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où Fil_k est la catégorie des k-espaces vectoriels $\mathbb{R}$-filtrés

Les $\mathbb{R}$-filtrations « pour G »

Définition

On note $\mathbf{F}(G)$ l'ensemble des factorisations $\mathcal{F}$ de

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}_k(G) \arrow[rr, "V"] \arrow[dr, "\mathcal{F}"'] & & \mathrm{Vect}_k \\
& \mathrm{Fil}_k \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où Fil_k est la catégorie des k-espaces vectoriels $\mathbb{R}$-filtrés

Les $\mathbb{R}$-filtrations « pour G »

Définition

On note $\mathbf{F}(G)$ l'ensemble des factorisations $\mathcal{F}$ de

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}_k(G) \arrow[rr, "V"] \arrow[dr, "\mathcal{F}"'] & & \mathrm{Vect}_k \\
& \mathrm{Fil}_k \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où Fil_k est la catégorie des k-espaces vectoriels $\mathbb{R}$-filtrés

Définition

On note $t : \mathbf{F}(G) \twoheadrightarrow \mathbf{C}(G)$ le « type » des $\mathbb{R}$-filtrations.

Fait

L'ensemble des types $\mathbf{C}(G)$ *est un monoïde commutatif ordonné.*

Les $\mathbb{R}$-filtrations « pour G »

Définition

On note $\mathbf{F}(G)$ l'ensemble des factorisations $\mathcal{F}$ de

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}_k(G) \arrow[rr, "V"] \arrow[dr, "\mathcal{F}"'] & & \mathrm{Vect}_k \\
& \mathrm{Fil}_k \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où Fil_k est la catégorie des k-espaces vectoriels $\mathbb{R}$-filtrés

Définition

On note $t : \mathbf{F}(G) \twoheadrightarrow \mathbf{C}(G)$ le « type » des $\mathbb{R}$-filtrations.

Fait

L'ensemble des types $\mathbf{C}(G)$ *est un monoïde commutatif ordonné.*

Les $\mathbb{R}$-filtrations « pour G »

Définition

On note $\mathbf{F}(G)$ l'ensemble des factorisations $\mathcal{F}$ de

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}_k(G) \arrow[rr, "V"] \arrow[dr, "\mathcal{F}"'] & & \mathrm{Vect}_k \\
& \mathrm{Fil}_k \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où Fil_k est la catégorie des k-espaces vectoriels $\mathbb{R}$-filtrés

Définition

On note $t : \mathbf{F}(G) \twoheadrightarrow \mathbf{C}(G)$ le « type » des $\mathbb{R}$-filtrations.

Fait

L'ensemble des types $\mathbf{C}(G)$ est un monoïde commutatif ordonné.

Immeubles de Tits vs Bruhat-Tits

Théorème (C'14)

Il y a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{F}(G) \simeq \mathcal{C}(\partial \mathbf{BT}(G))$$

Immeubles de Tits vs Bruhat-Tits

Théorème (Saavedra Rivano + Bruhat-Tits > C'14)

Il y a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{F}(G) \simeq \mathcal{C}(\partial \mathbf{BT}(G))$$

Immeubles de Tits vs Bruhat-Tits

Théorème (Saavedra Rivano + Bruhat-Tits > C'14)

Il y a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{F}(G) \simeq \mathcal{C}(\partial \mathbf{BT}(G))$$

Immeubles de Tits vs Bruhat-Tits

Théorème (Saavedra Rivano + Bruhat-Tits > C'14)

Il y a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{F}(G) \simeq \mathcal{C}(\partial \mathbf{BT}(G)) \quad \Longleftarrow \quad \mathbf{F}(G) \textit{ agit sur } \mathbf{BT}(G)$$

Immeubles de Tits vs Bruhat-Tits

Théorème (Saavedra Rivano + Bruhat-Tits > C'14)

Il y a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{F}(G) \simeq \mathcal{C}(\partial\mathbf{BT}(G)) \quad \Longleftarrow \quad \mathbf{F}(G) \text{ agit sur } \mathbf{BT}(G)$$

Exemple ($k = \mathbb{Q}_p$, $G = GL(V)$)

Pour une $\mathbb{Z}$-filtration $\mathcal{F}$ de V et un $\mathbb{Z}_p$-réseau L de V,

Immeubles de Tits vs Bruhat-Tits

Théorème (Saavedra Rivano + Bruhat-Tits > C'14)

Il y a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{F}(G) \simeq \mathcal{C}(\partial \mathbf{BT}(G)) \quad \Longleftarrow \quad \mathbf{F}(G) \text{ agit sur } \mathbf{BT}(G)$$

Exemple ($k = \mathbb{Q}_p$, $G = GL(V)$)

Pour une $\mathbb{Z}$-filtration $\mathcal{F}$ de V et un $\mathbb{Z}_p$-réseau L de V,

Immeubles de Tits vs Bruhat-Tits

Théorème (Saavedra Rivano + Bruhat-Tits > C'14)

Il y a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{F}(G) \simeq \mathcal{C}(\partial \mathbf{BT}(G)) \quad \Longleftarrow \quad \mathbf{F}(G) \text{ agit sur } \mathbf{BT}(G)$$

Exemple ($k = \mathbb{Q}_p$, $G = GL(V)$)

Pour une $\mathbb{Z}$-filtration $\mathcal{F}$ de V et un $\mathbb{Z}_p$-réseau L de V,

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} p^{-i} L \cap \mathcal{F}^i V$$

Immeubles de Tits vs Bruhat-Tits

Théorème (Saavedra Rivano + Bruhat-Tits > C'14)

Il y a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{F}(G) \simeq \mathcal{C}(\partial \mathbf{BT}(G)) \quad \Longleftarrow \quad \mathbf{F}(G) \textit{ agit sur } \mathbf{BT}(G)$$

Exemple ($k = \mathbb{Q}_p$, $G = GL(V)$)

Pour une $\mathbb{Z}$-filtration $\mathcal{F}$ de V et un $\mathbb{Z}_p$-réseau L de V,

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} p^{-i} L \cap \mathcal{F}^i V$$

Immeubles de Tits vs Bruhat-Tits

Théorème (Saavedra Rivano + Bruhat-Tits > C'14)

Il y a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{F}(G) \simeq \mathcal{C}(\partial \mathbf{BT}(G)) \quad \Longleftarrow \quad \mathbf{F}(G) \text{ agit sur } \mathbf{BT}(G)$$

Exemple ($k = \mathbb{Q}_p$, $G = GL(V)$)

Pour une $\mathbb{Z}$-filtration $\mathcal{F}$ de V et un $\mathbb{Z}_p$-réseau L de V,

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} p^{-i} L \cap \mathcal{F}^i V$$

Immeubles de Tits vs Bruhat-Tits

Théorème (Saavedra Rivano + Bruhat-Tits > C'14)

Il y a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{F}(G) \simeq \mathcal{C}(\partial \mathbf{BT}(G)) \quad \Longleftarrow \quad \mathbf{F}(G) \text{ agit sur } \mathbf{BT}(G)$$

Exemple ($k = \mathbb{Q}_p$, $G = GL(V)$)

Pour une $\mathbb{Z}$-filtration $\mathcal{F}$ de V et un $\mathbb{Z}_p$-réseau L de V,

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} p^{-i} L \cap \mathcal{F}^i V = L + \mathcal{F}$$

Immeubles de Tits vs Bruhat-Tits

Théorème (Saavedra Rivano + Bruhat-Tits > C'14)

Il y a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{F}(G) \simeq \mathcal{C}(\partial \mathbf{BT}(G)) \quad \Longleftarrow \quad \mathbf{F}(G) \textit{ agit sur } \mathbf{BT}(G)$$

Définition (Distance vectorielle)

C'est la fonction

$$\mathbf{d} : \mathbf{BT}(G) \times \mathbf{BT}(G) \to \mathbf{C}(G)$$

définie par $\mathbf{d}(x, y) = t(\mathcal{F}) \quad \text{si} \quad y = x + \mathcal{F}$

Fait (Parreau / C'14)

C'est indépendant du choix de $\mathcal{F}$, et c'est une distance :

$$\mathbf{d}(x, z) \leq \mathbf{d}(x, y) + \mathbf{d}(y, z)$$

Immeubles de Tits vs Bruhat-Tits

Théorème (Saavedra Rivano + Bruhat-Tits > C'14)

Il y a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{F}(G) \simeq \mathcal{C}(\partial \mathbf{BT}(G)) \quad \Longleftarrow \quad \mathbf{F}(G) \text{ agit sur } \mathbf{BT}(G)$$

Définition (Distance vectorielle)

C'est la fonction

$$\mathbf{d} : \mathbf{BT}(G) \times \mathbf{BT}(G) \to \mathbf{C}(G)$$

définie par $$\mathbf{d}(x, y) = t(\mathcal{F}) \quad \text{si} \quad y = x + \mathcal{F}$$

Fait (Parreau / C'14)

C'est indépendant du choix de $\mathcal{F}$, et c'est une distance :

$$\mathbf{d}(x, z) \leq \mathbf{d}(x, y) + \mathbf{d}(y, z)$$

Immeubles de Tits vs Bruhat-Tits

Théorème (Saavedra Rivano + Bruhat-Tits > C'14)

Il y a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{F}(G) \simeq \mathcal{C}(\partial\mathbf{BT}(G)) \quad \Longleftarrow \quad \mathbf{F}(G) \textit{ agit sur } \mathbf{BT}(G)$$

Définition (Distance vectorielle)

C'est la fonction

$$\mathbf{d} : \mathbf{BT}(G) \times \mathbf{BT}(G) \to \mathbf{C}(G)$$

définie par $$\mathbf{d}(x, y) = \color{red}{t(\mathcal{F})} \quad \text{si} \quad y = x + \mathcal{F}$$

Fait (Parreau / C'14)

C'est indépendant du choix de $\mathcal{F}$, et c'est une distance :

$$\mathbf{d}(x, z) \leq \mathbf{d}(x, y) + \mathbf{d}(y, z)$$

Immeubles de Tits vs Bruhat-Tits

Théorème (Saavedra Rivano + Bruhat-Tits > C'14)

Il y a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{F}(G) \simeq \mathcal{C}(\partial \mathbf{BT}(G)) \quad \Longleftarrow \quad \mathbf{F}(G) \text{ agit sur } \mathbf{BT}(G)$$

Définition (Distance vectorielle)

C'est la fonction

$$\mathbf{d} : \mathbf{BT}(G) \times \mathbf{BT}(G) \to \mathbf{C}(G)$$

définie par $\mathbf{d}(x, y) = t(\mathcal{F}) \quad \text{si} \quad {\color{red} y = x + \mathcal{F}}$

Fait (Parreau / C'14)

C'est indépendant du choix de $\mathcal{F}$, et c'est une distance :

$$\mathbf{d}(x, z) \leq \mathbf{d}(x, y) + \mathbf{d}(y, z)$$

Immeubles de Tits vs Bruhat-Tits

Théorème (Saavedra Rivano + Bruhat-Tits > C'14)

Il y a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{F}(G) \simeq \mathcal{C}(\partial \mathbf{BT}(G)) \quad \Longleftarrow \quad \mathbf{F}(G) \text{ agit sur } \mathbf{BT}(G)$$

Définition (Distance vectorielle)

C'est la fonction

$$\mathbf{d} : \mathbf{BT}(G) \times \mathbf{BT}(G) \to \mathbf{C}(G)$$

définie par $$\mathbf{d}(x, y) = t(\mathcal{F}) \quad \text{si} \quad y = x + \mathcal{F}$$

Fait (Parreau / C'14)

C'est indépendant du choix de $\mathcal{F}$, et c'est une distance :

$$\mathbf{d}(x, z) \leq \mathbf{d}(x, y) + \mathbf{d}(y, z)$$

Immeubles de Tits vs Bruhat-Tits

Théorème (Saavedra Rivano + Bruhat-Tits > C'14)

Il y a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{F}(G) \simeq \mathcal{C}(\partial \mathbf{BT}(G)) \quad \Longleftarrow \quad \mathbf{F}(G) \textit{ agit sur } \mathbf{BT}(G)$$

Définition (Distance vectorielle)

C'est la fonction

$$\mathbf{d} : \mathbf{BT}(G) \times \mathbf{BT}(G) \to \mathbf{C}(G)$$

définie par $\mathbf{d}(x,y) = t(\mathcal{F}) \quad \text{si} \quad y = x + \mathcal{F}$

Fait (Parreau / C'14)

C'est indépendant du choix de $\mathcal{F}$, et c'est une distance :

$$\mathbf{d}(x,z) \leq \mathbf{d}(x,y) + \mathbf{d}(y,z)$$

Immeubles de Tits vs Bruhat-Tits

Théorème (Saavedra Rivano + Bruhat-Tits > C'14)

Il y a un isomorphisme canonique

$$\mathbf{F}(G) \simeq \mathcal{C}(\partial\mathbf{BT}(G)) \quad \Longleftarrow \quad \mathbf{F}(G) \text{ agit sur } \mathbf{BT}(G)$$

Définition (Distance vectorielle)

C'est la fonction

$$\mathbf{d} : \mathbf{BT}(G) \times \mathbf{BT}(G) \to \mathbf{C}(G)$$

définie par $\mathbf{d}(x, y) = t(\mathcal{F}) \quad \text{si} \quad y = x + \mathcal{F}$

Fait (Parreau / C'14)

C'est indépendant du choix de $\mathcal{F}$, et c'est une distance :

$$\mathbf{d}(x, z) \leq \mathbf{d}(x, y) + \mathbf{d}(y, z)$$

Interprétation Tannakienne de $\mathbf{BT}(G)$

Théorème (C'14)

L'immeuble $\mathbf{BT}(G)$ *s'identifie à un ensemble de k-normes sur*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_k}(G) \arrow[rr, "V"] & & \mathrm{Vect}_k
\end{tikzcd}$$

Interprétation Tannakienne de **BT**(G)

Théorème (C'14)

L'immeuble **BT**(G) *s'identifie à un ensemble de k-normes sur*

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_k}(G) \arrow[rr, "V"] & & \mathrm{Vect}_k\end{tikzcd}$$

Interprétation Tannakienne de $\mathbf{BT}(G)$

Théorème (C'14)

L'immeuble $\mathbf{BT}(G)$ *s'identifie à un ensemble de factorisations* α *de*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_k}(G) \arrow[rr, "V"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \mathrm{Vect}_k \\
& \mathrm{Norm}_k \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où Norm_k *est la catégorie des* k*-espaces vectoriels normés*

Interprétation Tannakienne de $\mathbf{BT}(G)$

Théorème (C'14)

L'immeuble $\mathbf{BT}(G)$ *s'identifie à un ensemble de factorisations* α *de*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_k}(G) \arrow[rr, "V"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \mathrm{Vect}_k \\
& \mathrm{Norm}_k \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où Norm_k *est la catégorie des* k*-espaces vectoriels normés*

Interprétation Tannakienne de $\mathbf{BT}(G)$

Si G est un groupe réductif sur $\mathcal{O}_k$:

Théorème (C'14)

L'immeuble $\mathbf{BT}(G_k)$ *s'identifie à un ensemble de factorisations* α *de*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_k}(G) \arrow[rr, "V"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \mathrm{Vect}_k \\
& \mathrm{Norm}_k \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où Norm_k *est la catégorie des* k*-espaces vectoriels normés*

Interprétation Tannakienne de $\mathbf{BT}(G)$

Si G est un groupe réductif sur $\mathcal{O}_k$:

Théorème (C'14)

L'immeuble $\mathbf{BT}(G_k)$ *s'identifie à un ensemble de factorisations* α *de*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_k}(G) \arrow[rr, "V"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \mathrm{Vect}_k \\
& \color{red}{\mathrm{Norm}_k} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où Norm_k *est la catégorie des* k*-espaces vectoriels normés*

Interprétation Tannakienne de $\mathbf{BT}(G)$

Si G est un groupe réductif sur $\mathcal{O}_k$:

Théorème (C'14)

L'immeuble $\mathbf{BT}(G_k)$ *s'identifie à un ensemble de factorisations* α *de*

$$\begin{tikzcd}
\color{red}{\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_k}(G)} \arrow[rr, "V"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \mathrm{Vect}_k \\
& \mathrm{Norm}_k \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où Norm_k *est la catégorie des* k*-espaces vectoriels normés*

Interprétation Tannakienne de $\mathbf{BT}(G)$

Si G est un groupe réductif sur $\mathcal{O}_k$:

Théorème (C'14)

L'immeuble $\mathbf{BT}(G_k)$ *s'identifie à un ensemble de factorisations* α *de*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_k}(G) \arrow[rr, "V"] \arrow[dr, "\alpha"'] & & \mathrm{Vect}_k \\
& \mathrm{Norm}_k \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

où Norm_k *est la catégorie des* k*-espaces vectoriels normés*

Notations

$\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_k}(G)$ = représentations de G sur des

$\mathrm{Bun}_{\mathcal{O}_k}$ = $\mathcal{O}_k$-modules libres de rang fini.

Interprétation Tannakienne de $\mathbf{BT}^{\circ}(G)$

Si $\circ \in \mathbf{BT}(G_k)$ est le point hyperspécial qui correspond à G sur $\mathcal{O}_k$ et

$$\mathbf{BT}^{\circ}(G) = G(k) \cdot \circ \subset \mathbf{BT}(G_k)$$

Interprétation Tannakienne de $\mathbf{BT}^{\circ}(G)$

Si $\circ \in \mathbf{BT}(G_k)$ est le point hyperspécial qui correspond à G sur $\mathcal{O}_k$ et

$$\mathbf{BT}^{\circ}(G) = G(k) \cdot \circ \subset \mathbf{BT}(G_k)$$

Théorème (C'14, Interprétation Tannakienne de BT)

L'orbite $\mathbf{BT}^{\circ}(G)$ s'identifie à l'ensemble $\mathcal{L}(V)$ des $\mathcal{O}_k$-réseaux de

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_k}(G) \arrow[r, "V"] & \mathrm{Vect}_k \end{tikzcd}$$

Interprétation Tannakienne de $\mathbf{BT}^\circ(G)$

Si $\circ \in \mathbf{BT}(G_k)$ est le point hyperspécial qui correspond à G sur $\mathcal{O}_k$ et

$$\mathbf{BT}^\circ(G) = G(k) \cdot \circ \subset \mathbf{BT}(G_k)$$

Théorème (C'14, Interprétation Tannakienne de BT)

L'orbite $\mathbf{BT}^\circ(G)$ *s'identifie à l'ensemble* $\mathcal{L}(V)$ *des $\mathcal{O}_k$-réseaux de*

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_k}(G) \arrow[r, "V"] & \mathrm{Vect}_k\end{tikzcd}$$

Interprétation Tannakienne de $\mathbf{BT}^\circ(G)$

Si $\circ \in \mathbf{BT}(G_k)$ est le point hyperspécial qui correspond à G sur $\mathcal{O}_k$ et

$$\mathbf{BT}^\circ(G) = G(k) \cdot \circ \subset \mathbf{BT}(G_k)$$

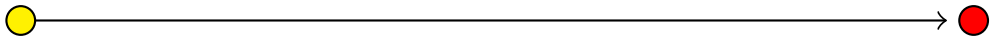
Théorème (C'14, Interprétation Tannakienne de BT)

L'orbite $\mathbf{BT}^\circ(G)$ *s'identifie à l'ensemble* $\mathcal{L}(V)$ *des factorisations* L

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_k}(G) \arrow[rr, "V"] \arrow[dr, "L"'] & & \mathrm{Vect}_k \\
& \mathrm{Bun}_{\mathcal{O}_k} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Les opérateurs $\alpha_{\mathcal{F}}$ et $\beta_{\mathcal{F}}$

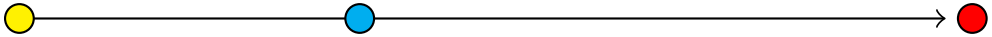
Soit $\mathcal{F} \in \mathbf{F}(G)$, ● $\in \mathbf{BT}(G)$.



Les opérateurs $\alpha_{\mathcal{F}}$ et $\beta_{\mathcal{F}}$

Soit $\mathcal{F} \in \mathbf{F}(G)$, 🟡 $\in \mathbf{BT}(G)$. On considère

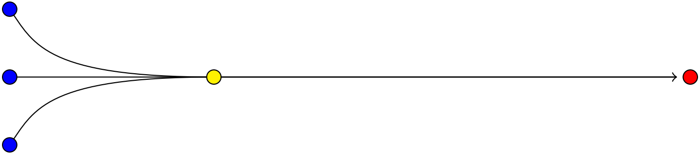
$\alpha_{\mathcal{F}}($🟡$) =$ 🟡 $+ \mathcal{F} =$ 🔵



Les opérateurs $\alpha_{\mathcal{F}}$ et $\beta_{\mathcal{F}}$

Soit $\mathcal{F} \in \mathbf{F}(G)$, $\bullet \in \mathbf{BT}(G)$. On considère

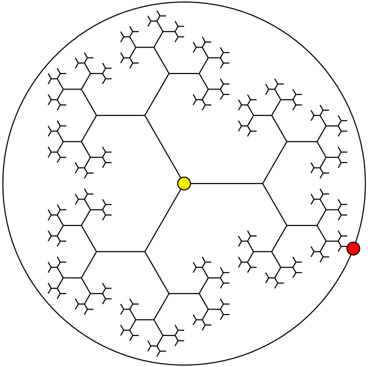
$$\alpha_{\mathcal{F}}(\bullet) = \bullet + \mathcal{F} = \bullet \qquad \text{et} \qquad \beta_{\mathcal{F}}(\bullet) = \alpha_{\mathcal{F}}^{-1}(\bullet) = \sum \bullet$$



Les opérateurs $\alpha_{\mathcal{F}}$ et $\beta_{\mathcal{F}}$ ($G = PGL_2$)

Soit $\mathcal{F} \in \mathbf{F}(G)$, ● $\in \mathbf{BT}(G)$.

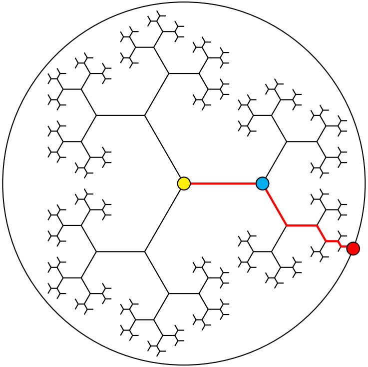
.



Les opérateurs $\alpha_{\mathcal{F}}$ et $\beta_{\mathcal{F}}$ ($G = PGL_2$)

Soit $\mathcal{F} \in \mathbf{F}(G)$, ● $\in \mathbf{BT}(G)$. On considère

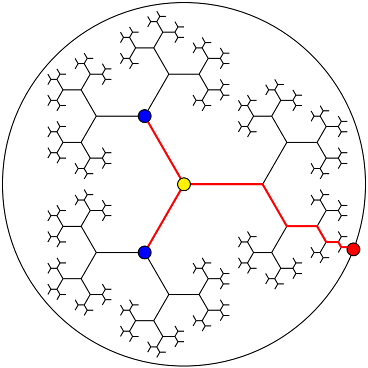
$$\alpha_{\mathcal{F}}(●) = ● + \mathcal{F} = ● \qquad .$$



Les opérateurs $\alpha_{\mathcal{F}}$ et $\beta_{\mathcal{F}}$ $(G = PGL_2)$

Soit $\mathcal{F} \in \mathbf{F}(G)$, $\bullet \in \mathbf{BT}(G)$. On considère

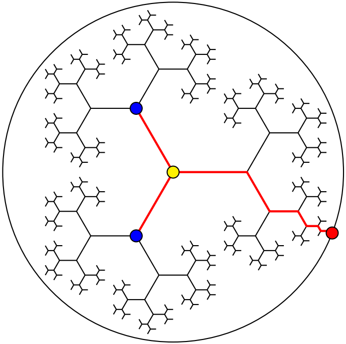
$$\alpha_{\mathcal{F}}(\bullet) = \bullet + \mathcal{F} = \bullet \qquad \text{et} \qquad \beta_{\mathcal{F}}(\bullet) = \alpha_{\mathcal{F}}^{-1}(\bullet) = \sum \bullet.$$



Les opérateurs $\alpha_{\mathcal{F}}$ et $\beta_{\mathcal{F}}$ $(G = PGL_2)$

Appliquons T_p à

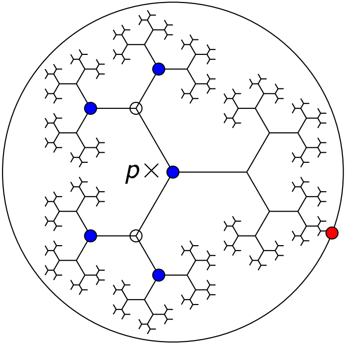
$\beta_{\mathcal{F}}(●)$



Les opérateurs $\alpha_{\mathcal{F}}$ et $\beta_{\mathcal{F}}$ ($G = PGL_2$)

Appliquons T_p à

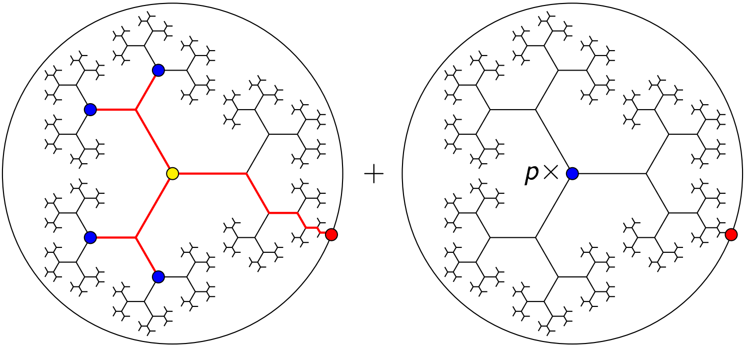
$$\mathcal{T}_p \circ \beta_{\mathcal{F}}(\bullet)$$



Les opérateurs $\alpha_{\mathcal{F}}$ et $\beta_{\mathcal{F}}$ ($G = PGL_2$)

Appliquons T_p à

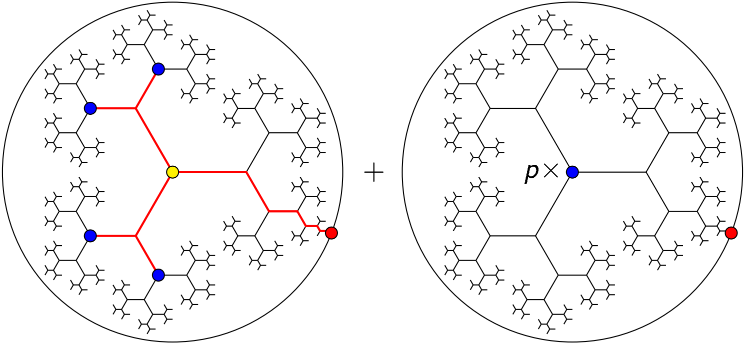
$$\mathcal{T}_p \circ \beta_{\mathcal{F}}(\bullet) = \beta_{\mathcal{F}}^2(\bullet) + p \times (\bullet)$$



Les opérateurs $\alpha_{\mathcal{F}}$ et $\beta_{\mathcal{F}}$ ($G = PGL_2$)

Appliquons T_p à

$$\mathcal{T}_p \circ \beta_{\mathcal{F}}(\bullet) = \beta_{\mathcal{F}}^2(\bullet) + p \times (\bullet)$$



Donc $\beta_{\mathcal{F}}$ est une racine (à droite) de

$$x^2 - \mathcal{T}_p x + p \quad (!)$$

La formule de Reda

La formule de Reda

Théorème (Boumasmoud'19)

Pour toute $\mathbb{Z}$-filtration $\mathcal{F} \in \mathbf{F}^{\mathbb{Z}}(G)$ de type $\mu \in \mathbf{C}^{\mathbb{Z}}(G)$,

$$P_\mu(\beta_{\mathcal{F}}) = 0 \quad \textit{sur} \quad \mathbb{Z}[G/K]$$

La formule de Reda

Théorème (Boumasmoud'19)

Pour toute $\mathbb{Z}$-filtration $\mathcal{F} \in \mathbf{F}^{\mathbb{Z}}(G)$ de type $\mu \in \mathbf{C}^{\mathbb{Z}}(G)$,

$$P_{\mu}(\beta_{\mathcal{F}}) = 0 \quad \textit{sur} \quad \mathbb{Z}[G/K]$$

où

- $t : \mathbf{F}^{\mathbb{Z}}(G) \twoheadrightarrow \mathbf{C}^{\mathbb{Z}}(G)$ est l'application « type »
- $\mathbf{C}^{\mathbb{Z}}(G)$: classes de conjugaison de cocaractères de G
- $P_{\mu}(x) \in \mathcal{H}_K[x]$: polynôme de Hecke associé à μ

La formule de Reda

Théorème (Boumasmoud'19)

Pour toute $\mathbb{Z}$-filtration $\mathcal{F} \in \mathbf{F}^{\mathbb{Z}}(G)$ de type $\mu \in \mathbf{C}^{\mathbb{Z}}(G)$,

$$P_\mu(\beta_{\mathcal{F}}) = 0 \quad \textit{sur} \quad \mathbb{Z}[G/K]$$

où

- $t : \mathbf{F}^{\mathbb{Z}}(G) \twoheadrightarrow \mathbf{C}^{\mathbb{Z}}(G)$ est l'application « type »
- $\mathbf{C}^{\mathbb{Z}}(G)$: classes de conjugaison de cocaractères de G
- $P_\mu(x) \in \mathcal{H}_K[x]$: polynôme de Hecke associé à μ

La formule de Reda

Théorème (Boumasmoud'19)

Pour toute $\mathbb{Z}$-filtration $\mathcal{F} \in \mathbf{F}^{\mathbb{Z}}(G)$ de type $\mu \in \mathbf{C}^{\mathbb{Z}}(G)$,

$$P_{\mu}(\beta_{\mathcal{F}}) = 0 \quad \textit{sur} \quad \mathbb{Z}[G/K]$$

où

- $t : \mathbf{F}^{\mathbb{Z}}(G) \twoheadrightarrow \mathbf{C}^{\mathbb{Z}}(G)$ est l'application « type »
- $\mathbf{C}^{\mathbb{Z}}(G)$: classes de conjugaison de cocaractères de G
- $P_{\mu}(x) \in \mathcal{H}_K[x]$: polynôme de Hecke associé à μ

La formule de Reda

Théorème (Boumasmoud'19)

Pour toute $\mathbb{Z}$*-filtration* $\mathcal{F} \in \mathbf{F}^{\mathbb{Z}}(G)$ *de type* $\mu \in \mathbf{C}^{\mathbb{Z}}(G)$,

$$P_\mu(\beta_{\mathcal{F}}) = 0 \quad \textit{sur} \quad \mathbb{Z}[G/K]$$

où

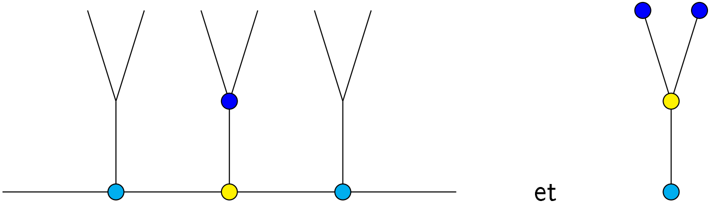
- $t : \mathbf{F}^{\mathbb{Z}}(G) \twoheadrightarrow \mathbf{C}^{\mathbb{Z}}(G)$ est l'application « type »
- $\mathbf{C}^{\mathbb{Z}}(G)$: classes de conjugaison de cocaractères de G
- $P_\mu(x) \in \mathcal{H}_K[x]$: polynôme de Hecke associé à μ

Application ($G = PGL_2$)

Voyons comment utiliser la formule de Reda

$$P_\mu(\beta_{\mathcal{F}}) = 0$$

pour étudier les relations



lorsque p est décomposé :

$$p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}}$$

Applications ($G = PGL_2$)

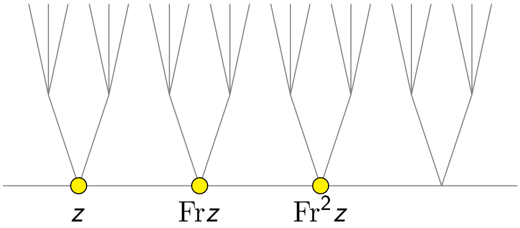
choix de $\mathfrak{p} \mid p$

Applications ($G = PGL_2$)

choix de $\mathfrak{p} \mid p \quad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Fr} = \mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}}$

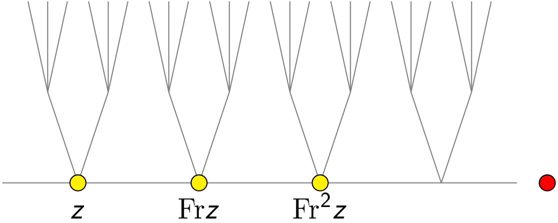
Applications ($G = PGL_2$)

choix de $\mathfrak{p} \mid p \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Fr} = \mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}}$



Applications ($G = PGL_2$)

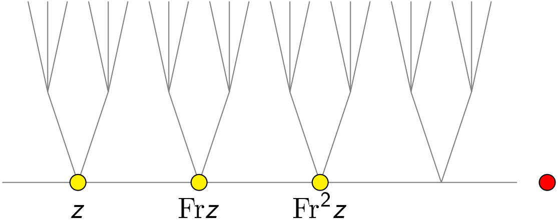
$$\text{choix de } \mathfrak{p} \mid p \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Fr} = \mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F} \in \mathbf{F}(G)$$



Applications ($G = PGL_2$)

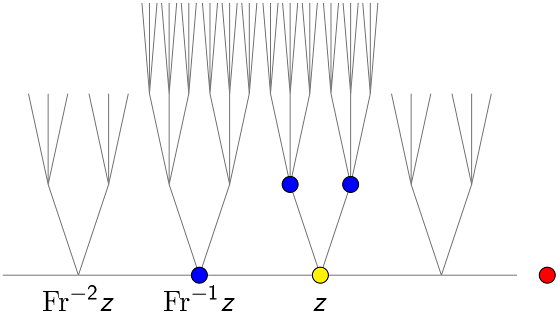
$$\text{choix de } \mathfrak{p} \mid p \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Fr} = \mathrm{Fr}_{\mathfrak{p}} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{F} \in \mathbf{F}(G)$$

$$P(\beta) = 0 \quad \text{où} \quad P = x^2 - T_p x + p$$



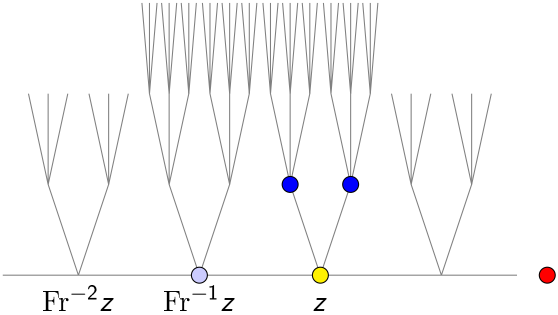
Applications ($G = PGL_2$)

Appliquant β à z...



Applications ($G = PGL_2$)

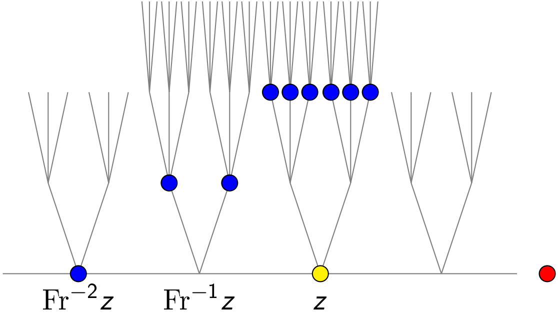
Appliquant β à z...



... on voit que $(\beta - \mathrm{Fr}^{-1})(z)$ est une trace !

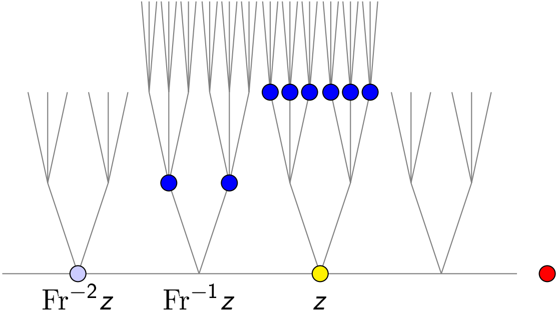
Applications ($G = PGL_2$)

Appliquant β^2 à $z\ldots$



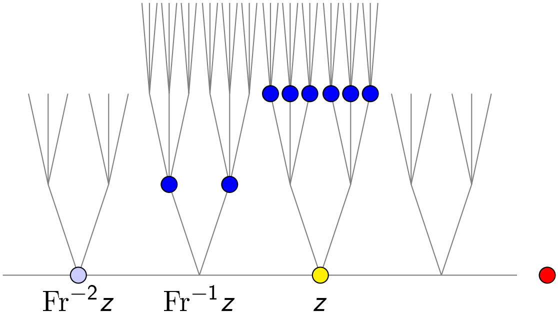
Applications ($G = PGL_2$)

Appliquant β^2 à z...



... on voit que $(\beta^2 - \mathrm{Fr}^{-2})(z)$ est aussi une trace !

Applications ($G = PGL_2$)

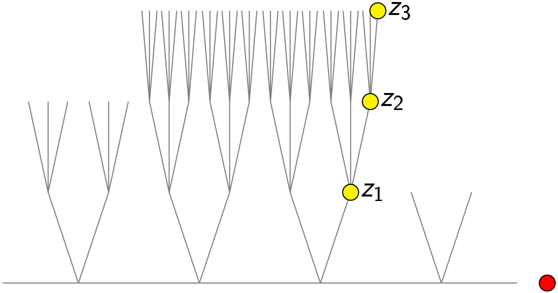


On en déduit que

$$P(\mathrm{Fr}^{-1})(\bullet) = \big(P(\mathrm{Fr}^{-1}) - P(\beta)\big)\,(\bullet) = \mathrm{Tr}_{1/0}(\star)$$

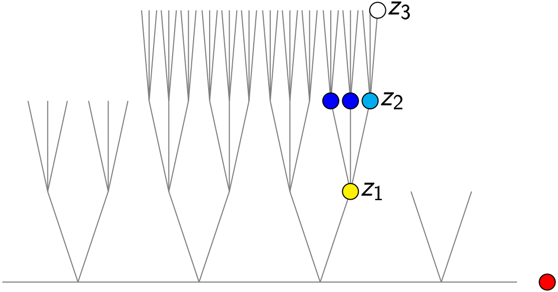
Applications ($G = PGL_2$)

Pour les relations verticales, on trouve...



Applications ($G = PGL_2$)

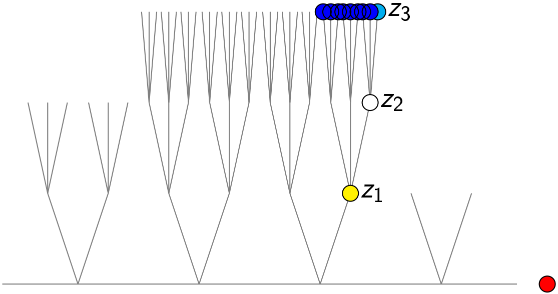
Pour les relations verticales, on trouve...



... $\beta(z_1) = \mathrm{Tr}_{2/1}(z_2)$,

Applications ($G = PGL_2$)

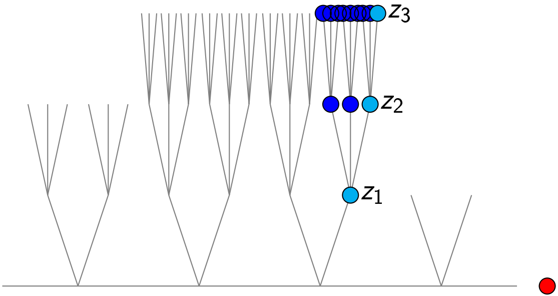
Pour les relations verticales, on trouve. . .



$\ldots\ \beta(z_1) = \mathrm{Tr}_{2/1}(z_2)$, $\beta^2(z_1) = \mathrm{Tr}_{3/1}(z_3)$,

Applications ($G = PGL_2$)

Pour les relations verticales, on trouve...

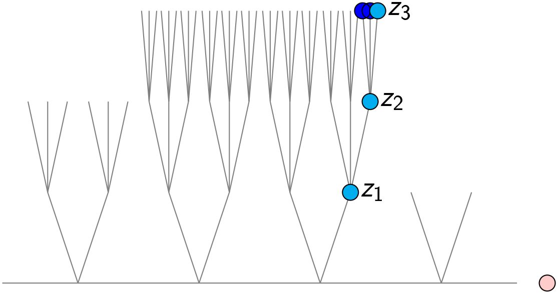


... $\beta(z_1) = \mathrm{Tr}_{2/1}(z_2)$, $\beta^2(z_1) = \mathrm{Tr}_{3/1}(z_3)$, donc

$$\mathrm{Tr}_{3/1}(z_3) - T_p\left(\mathrm{Tr}_{2/1}(z_2)\right) + pz_1 = 0.$$

Applications ($G = PGL_2$)

Pour les relations verticales, on trouve…



… $\beta(z_1) = \mathrm{Tr}_{2/1}(z_2)$, $\beta^2(z_1) = \mathrm{Tr}_{3/1}(z_3)$, donc

$$\mathrm{Tr}_{3/1}(z_3) - T_p\left(\mathrm{Tr}_{2/1}(z_2)\right) + pz_1 = 0.$$

(Perrin-Riou)
$$\mathrm{Tr}_{3/2}(z_3) - T_p\left(z_2\right) + z_1 = 0.$$

Applications ($G = SO(V)$, $H = U(W)$)

En utilisant la méthode de Réda, mon étudiant Ruishen Zhao

a démontré les relations horizontales et verticales lorsque $p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}}$.

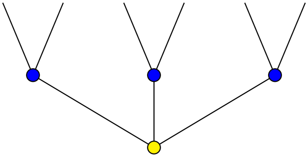
Applications ($G = SO(V)$, $H = U(W)$)

En utilisant la méthode de Réda, mon étudiant Ruishen Zhao

a démontré les relations horizontales et verticales lorsque $p\mathcal{O}_E = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}}$.

Oui, mais à quoi ça sert ?

Les relations de distributions correspondant à



sont suffisantes pour construire un système Eulérien.

Oui, mais à quoi ça sert ?

Les relations de distributions correspondant à p inerte et $c = 1$ sont suffisantes pour construire un système Eulérien. Pour GL_2, on obtient :

Théorème (Kolyvagin '90)

Si $y_0 \neq$ torsion, alors

$$A(E) \text{ est de rang } 1 \quad \text{et} \quad Ш(A, E) \text{ est fini.}$$

Oui, mais à quoi ça sert ?

Les relations de distributions correspondant à p inerte et $c = 1$ sont suffisantes pour construire un système Eulérien. Pour GL_2, on obtient :

Théorème (Kolyvagin '90)

Si $y_0 \neq$ torsion, alors

$$A(E) \text{ est de rang } 1 \quad \text{et} \quad Ш(A, E) \text{ est fini.}$$

- *A est une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$,*
- *$\pi : X_0(N) \twoheadrightarrow A$ est une paramétrisation,*
- *$y_1 = \pi(z_1)$ et $y_0 = \mathrm{Tr}_{E[1]/E}(y_1)$,*

Oui, mais à quoi ça sert ?

Les relations de distributions correspondant à p inerte et $c = 1$ sont suffisantes pour construire un système Eulérien. Pour GL_2, on obtient :

Théorème (Kolyvagin '90)

Si $y_0 \neq$ torsion, alors

$$A(E) \text{ est de rang } 1 \quad \text{et} \quad Ш(A, E) \text{ est fini.}$$

- *A est une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$,*
- *$\pi : X_0(N) \twoheadrightarrow A$ est une paramétrisation,*
- *$y_1 = \pi(z_1)$ et $y_0 = \mathrm{Tr}_{E[1]/E}(y_1)$,*

Oui, mais à quoi ça sert ?

Les relations de distributions correspondant à p inerte et $c = 1$ sont suffisantes pour construire un système Eulérien. Pour GL_2, on obtient :

Théorème (Kolyvagin '90)

Si $y_0 \neq$ *torsion, alors*

$$A(E) \text{ est de rang } 1 \quad \text{et} \quad Ш(A, E) \text{ est fini.}$$

- A *est une courbe elliptique sur* $\mathbb{Q}$,
- $\pi : X_0(N) \twoheadrightarrow A$ *est une paramétrisation,*
- $y_1 = \pi(z_1)$ *et* $y_0 = \mathrm{Tr}_{E[1]/E}(y_1)$,

Oui, mais à quoi ça sert ?

Les relations de distributions correspondant à p inerte et $c = 1$ sont suffisantes pour construire un système Eulérien. Pour GL_2, on obtient :

Théorème (Kolyvagin '90)

Si $y_0 \neq$ *torsion, alors*

$$A(E) \text{ est de rang } 1 \quad \text{et} \quad Ш(A, E) \text{ est fini.}$$

- *A est une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$,*
- *$\pi : X_0(N) \twoheadrightarrow A$ est une paramétrisation,*
- *$y_1 = \pi(z_1)$ et $y_0 = \mathrm{Tr}_{E[1]/E}(y_1)$,*

Oui, mais à quoi ça sert ?

Les relations de distributions correspondant à p inerte et $c = 1$ sont suffisantes pour construire un système Eulérien. Pour GL_2, on obtient :

Théorème (Kolyvagin '90)

Si $y_0 \neq$ torsion, alors

$$\mathrm{Sel}_{p^\infty}(A_E) \text{ est de corang } 1.$$

- *A est une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$,*
- *$\pi : X_0(N) \twoheadrightarrow A$ est une paramétrisation,*
- *$y_1 = \pi(z_1)$ et $y_0 = \mathrm{Tr}_{E[1]/E}(y_1)$,*

Oui, mais à quoi ça sert ?

Les relations de distributions correspondant à p inerte et $c = 1$ sont suffisantes pour construire un système Eulérien. Pour GL_2, on obtient :

Théorème (Kolyvagin '90)

Si $y_0 \neq$ torsion, alors

$$H^1_f(E, T_p) \text{ est de rang } 1.$$

- *A est une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$,*
- *$\pi : X_0(N) \twoheadrightarrow A$ est une paramétrisation,*
- *$y_1 = \pi(z_1)$ et $y_0 = \mathrm{Tr}_{E[1]/E}(y_1)$,*
- *$T_p = T_p(A)$ est le module de Tate,*

Oui, mais à quoi ça sert ?

Les relations de distributions correspondant à p inerte et $c = 1$ sont suffisantes pour construire un système Eulérien. Pour GL_2, on obtient :

Théorème (Kolyvagin '90)

Si $y_0 \neq$ torsion, alors

$$H^1_f(E, T_p) \text{ est de rang 1.}$$

- *A est une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$,*
- *$\pi : X_0(N) \twoheadrightarrow A$ est une paramétrisation,*
- *$y_1 = \pi(z_1)$ et $y_0 = \mathrm{Tr}_{E[1]/E}(y_1)$,*
- *$T_p = T_p(A)$ est le module de Tate,*

Oui, mais à quoi ça sert ?

Les relations de distributions correspondant à p inerte et $c = 1$ sont suffisantes pour construire un système Eulérien. Pour GL_2, on obtient :

Théorème (Kolyvagin '90)

Si $y_0 \neq$ torsion, alors

$$H^1_f(E, V_p) \text{ est de rang } 1.$$

- *A est une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$,*
- *$\pi : X_0(N) \twoheadrightarrow A$ est une paramétrisation,*
- *$y_1 = \pi(z_1)$ et $y_0 = \mathrm{Tr}_{E[1]/E}(y_1)$,*
- *$V_p = V_p(A)$ est le module de Tate,*

Oui, mais à quoi ça sert ?

Les relations de distributions correspondant à p inerte et $c = 1$ sont suffisantes pour construire un système Eulérien. Pour GL_2, on obtient :

Théorème (Kolyvagin '90)

Si $y_0 \neq$ torsion, alors

$$H^1_f(E, V_p) \text{ est de rang } 1.$$

- *A est une courbe elliptique sur $\mathbb{Q}$,*
- *$\pi : X_0(N) \twoheadrightarrow A$ est une paramétrisation,*
- *$y_1 = \pi(z_1)$ et $y_0 = \mathrm{Tr}_{E[1]/E}(y_1)$,*
- *$V_p = V_p(A)$ est le module de Tate,*

Oui, mais à quoi ça sert ?

Les relations de distributions correspondant à p inerte et $c = 1$ sont suffisantes pour construire un système Eulérien. Pour GL_2, on obtient :

Théorème (Kolyvagin '90)

Si $y_0 \neq$ torsion, alors

$$H^1_f(E, V_p) \text{ est de rang } 1.$$

- *A est une variété abélienne sur $\mathbb{Q}$,*
- *$\pi : J_0(N) \twoheadrightarrow A$ est un quotient,*
- *$y_1 = \pi(z_1 - \infty)$ et $y_0 = \mathrm{Tr}_{E[1]/E}(y_1)$,*
- *$V_p = V_p(A)$ est le module de Tate,*

Oui, mais à quoi ça sert ?

Les relations de distributions correspondant à p inerte et $c = 1$ sont suffisantes pour construire un système Eulérien. Pour GL_2, on obtient :

Théorème (Kolyvagin '90)

Si $y_0 \neq$ torsion, alors

$$H^1_f(E, V_p) \text{ est de rang } 1.$$

- *A est une variété abélienne sur $\mathbb{Q}$,*
- *$\pi : J_0(N) \twoheadrightarrow A$ est un quotient,*
- *$y_1 = \pi(z_1 - \infty)$ et $y_0 = \mathrm{Tr}_{E[1]/E}(y_1)$,*
- *$V_p = V_p(A)$ est le module de Tate,*

Oui, mais à quoi ça sert ?

Les relations de distributions correspondant à p inerte et $c = 1$ sont suffisantes pour construire un système Eulérien. Pour GL_2, on obtient :

Théorème (Kolyvagin '90)

Si $y_0 \neq$ torsion, alors

$$H^1_f(E, V_p) \text{ est de rang 1.}$$

- *A est une variété abélienne sur $\mathbb{Q}$,*
- *$\pi : J_0(N) \twoheadrightarrow A$ est un quotient,*
- *$y_1 = \pi(z_1 - \infty)$ et $y_0 = \mathrm{Tr}_{E[1]/E}(y_1)$,*
- *$V_p = V_p(A)$ est le module de Tate,*

Oui, mais à quoi ça sert ?

Les relations de distributions correspondant à p inerte et $c = 1$ sont suffisantes pour construire un système Eulérien. Pour GL_2, on obtient :

Théorème (Kolyvagin '90)

Si $y_0 \neq$ torsion, alors

$$H^1_f(E, V_p) \text{ est de rang } 1.$$

- *A est une variété abélienne sur $\mathbb{Q}$,*
- *$\pi : J_0(N) \twoheadrightarrow A$ est un quotient,*
- *$y_1 = \pi(z_1 - \infty)$ et $y_0 = \mathrm{Tr}_{E[1]/E}(y_1)$,*
- *$V_p = V_p(A)$ est le module de Tate,*
- *C : extension finie de $\mathbb{Q}_p$,*

Oui, mais à quoi ça sert ?

Les relations de distributions correspondant à p inerte et $c = 1$ sont suffisantes pour construire un système Eulérien. Pour GL_2, on obtient :

Théorème (Nekovář '04)

Si $y_1^{\chi} \neq 0$, *alors*

$$H^1_f(E[1], V_p)^{\chi} \text{ est de rang 1.}$$

- A *est une variété abélienne sur* $\mathbb{Q}$,
- $\pi : J_0(N) \twoheadrightarrow A$ *est un quotient,*
- $y_1 = \pi(z_1 - \infty)$ *et* $y_1^{\chi} = \sum \chi^{-1}(\sigma)\sigma(y_1)$,
- $V_p = V_p(A)$ *est le module de Tate,*
- C *: extension finie de* $\mathbb{Q}_p$,
- $\chi : \mathrm{Gal}(E[1]/E) \to C^{\times}$ *est un caractère.*

Oui, mais à quoi ça sert ?

Les relations de distributions correspondant à p inerte et $c = 1$ sont suffisantes pour construire un système Eulérien. Pour GL_2, on obtient :

Théorème (Nekovář '04)

Si $y_1^\chi \neq 0$, *alors*

$$H^1_f(E[1], V_p)^\chi \text{ est de rang 1.}$$

- A *est une variété abélienne sur* $\mathbb{Q}$,
- $\pi : J_0(N) \twoheadrightarrow A$ *est un quotient,*
- $y_1 = \pi(z_1 - \infty)$ *et* $y_1^\chi = \sum \chi^{-1}(\sigma)\sigma(y_1)$,
- $V_p = V_p(A)$ *est le module de Tate,*
- C *: extension finie de* $\mathbb{Q}_p$,
- $\chi : \mathrm{Gal}(E[1]/E) \to C^\times$ *est un caractère.*

Oui, mais à quoi ça sert ?

Les relations de distributions correspondant à p inerte et $c = 1$ sont suffisantes pour construire un système Eulérien. Pour GL_2, on obtient :

Théorème (Nekovář '04)

Si $y_c^\chi \neq 0$, alors

$$H_f^1(E[c], V_p)^\chi \text{ est de rang } 1.$$

- *A est une variété abélienne sur $\mathbb{Q}$,*
- *$\pi : J_0(N) \twoheadrightarrow A$ est un quotient,*
- *$y_c = \pi(z_c - \infty)$ et $y_c^\chi = \sum \chi^{-1}(\sigma)\sigma(y_c)$,*
- *$V_p = V_p(A)$ est le module de Tate,*
- *C : extension finie de $\mathbb{Q}_p$,*
- *$\chi : \mathrm{Gal}(E[c]/E) \to C^\times$ est un caractère.*

Oui, mais à quoi ça sert ?

Les relations de distributions correspondant à p inerte et $c = 1$ sont suffisantes pour construire un système Eulérien. Pour GL_2, on obtient :

Théorème (Nekovář '04)

Si $y_c^\chi \neq 0$, alors

$$H^1_f(E[c], V_p)^\chi \text{ est de rang 1.}$$

- *A est une variété abélienne sur $\mathbb{Q}$,*
- *$\pi : J_0(N) \twoheadrightarrow A$ est un quotient,*
- *$y_c = \pi(z_c - \infty)$ et $y_c^\chi = \sum \chi^{-1}(\sigma)\sigma(y_c)$,*
- *$V_p = V_p(A)$ est le module de Tate,*
- *C : extension finie de $\mathbb{Q}_p$,*
- *$\chi : \mathrm{Gal}(E[c]/E) \to C^\times$ est un caractère.*

Oui, mais à quoi ça sert ?

Les relations de distributions correspondant à p inerte et $c = 1$ sont suffisantes pour construire un système Eulérien. Pour GL_2, on obtient :

Théorème (Nekovář '04,♭)

Si $y_c^\chi \neq 0$, alors

$$H_f^1(E[c], V_p)^\chi \text{ est de rang 1.}$$

- *A est une variété abélienne sur $\mathbb{Q}$,*
- *$\pi : J_0(N) \twoheadrightarrow A$ est un quotient,*
- *$y_c = \pi(z_c - \infty)$ et $y_c^\chi = \sum \chi^{-1}(\sigma)\sigma(y_c)$,*
- *$V_p = V_p(A)$ est le module de Tate,*
- *C : extension finie de $\mathbb{Q}_p$,*
- *$\chi : \mathrm{Gal}(E[c]/E) \to C^\times$ est un caractère.*

Le résultat principal ?

Pour $H = U(W)$ dans $G = SO(V)$, on obtient de même :

Le résultat principal ?

Pour $H = U(W)$ dans $G = SO(V)$, on obtient de même :

Théorème (Cornut'18)

$$y^{\chi} \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad H^1_f(E(z), V_p)^{\chi} \textit{ est de rang } 1.$$

- *V_p est un quotient de $H^{2n-1}_{et}\left(\overline{\mathrm{Sh}}_K, \mathbb{Q}_p(n)\right)$,*
- *z est un cycle spécial arbitraire dans $\mathbb{Z}[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})]$,*
- *$E(z)$ est son corps de définition,*
- *$\chi : \mathrm{Gal}(E(z)/E) \to C^{\times}$ est un caractère, $[C : \mathbb{Q}_p] < \infty$,*
- *y est la projection de l'image de z par Abel-Jacobi.*

Le résultat principal ?

Pour $H = U(W)$ dans $G = SO(V)$, on obtient de même :

Théorème (Cornut'18)

$$y^{\chi} \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad H^1_f(E(z), V_p)^{\chi} \textit{ est de rang } 1.$$

- V_p *est un quotient de* $H^{2n-1}_{et}\left(\overline{\mathrm{Sh}}_K, \mathbb{Q}_p(n)\right)$,
- z *est un cycle spécial arbitraire dans* $\mathbb{Z}[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})]$,
- $E(z)$ *est son corps de définition,*
- $\chi : \mathrm{Gal}(E(z)/E) \to C^{\times}$ *est un caractère,* $[C : \mathbb{Q}_p] < \infty$,
- y *est la projection de l'image de* z *par Abel-Jacobi.*

Le résultat principal ?

Pour $H = U(W)$ dans $G = SO(V)$, on obtient de même :

Théorème (Cornut'18)

$$y^\chi \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad H^1_f(E(z), V_p)^\chi \textit{ est de rang } 1.$$

- *V_p est un quotient de $H^{2n-1}_{et}\left(\overline{\mathrm{Sh}}_K, \mathbb{Q}_p(n)\right)$,*
- *z est un cycle spécial arbitraire dans $\mathbb{Z}[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})]$,*
- *$E(z)$ est son corps de définition,*
- *$\chi : \mathrm{Gal}(E(z)/E) \to C^\times$ est un caractère, $[C : \mathbb{Q}_p] < \infty$,*
- *y est la projection de l'image de z par Abel-Jacobi.*

Le résultat principal ?

Pour $H = U(W)$ dans $G = SO(V)$, on obtient de même :

Théorème (Cornut'18)

$$y^\chi \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad H^1_f(E(z), V_p)^\chi \text{ est de rang } 1.$$

- V_p *est un quotient de* $H^{2n-1}_{et}(\overline{\mathrm{Sh}}_K, \mathbb{Q}_p(n))$,
- z *est un cycle spécial arbitraire dans* $\mathbb{Z}[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})]$,
- $E(z)$ *est son corps de définition*,
- $\chi : \mathrm{Gal}(E(z)/E) \to C^\times$ *est un caractère*, $[C : \mathbb{Q}_p] < \infty$,
- y *est la projection de l'image de* z *par Abel-Jacobi.*

Le résultat principal ?

Pour $H = U(W)$ dans $G = SO(V)$, on obtient de même :

Théorème (Cornut'18)

$$y^{\chi} \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad H^1_f(E(z), V_p)^{\chi} \text{ est de rang } 1.$$

- *V_p est un quotient de $H^{2n-1}_{et}\left(\overline{\mathrm{Sh}}_K, \mathbb{Q}_p(n)\right)$,*
- *z est un cycle spécial arbitraire dans $\mathbb{Z}[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})]$,*
- *$E(z)$ est son corps de définition,*
- *$\chi : \mathrm{Gal}(E(z)/E) \to C^{\times}$ est un caractère, $[C : \mathbb{Q}_p] < \infty$,*
- *y est la projection de l'image de z par Abel-Jacobi.*

Le résultat principal ?

Pour $H = U(W)$ dans $G = SO(V)$, on obtient de même :

Théorème (Cornut'18)

$$y^{\chi} \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad H^1_f(E(z), V_p)^{\chi} \textit{ est de rang } 1.$$

- V_p *est un quotient de* $H^{2n-1}_{et}\left(\overline{\mathrm{Sh}}_K, \mathbb{Q}_p(n)\right)$,
- z *est un cycle spécial arbitraire dans* $\mathbb{Z}[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})]$,
- $E(z)$ *est son corps de définition,*
- $\chi : \mathrm{Gal}(E(z)/E) \to C^{\times}$ *est un caractère,* $[C : \mathbb{Q}_p] < \infty$,
- y *est la projection de l'image de* z *par Abel-Jacobi.*

Le résultat principal ?

Pour $H = U(W)$ dans $G = SO(V)$, on obtient de même :

Théorème (Cornut'18)

$$y^{\chi} \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad H^1_f(E(z), V_p)^{\chi} \text{ est de rang } 1.$$

- V_p *est un quotient de* $H^{2n-1}_{et}\left(\overline{\mathrm{Sh}}_K, \mathbb{Q}_p(n)\right)$,
- z *est un cycle spécial arbitraire dans* $\mathbb{Z}[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})]$,
- $E(z)$ *est son corps de définition,*
- $\chi : \mathrm{Gal}(E(z)/E) \to C^{\times}$ *est un caractère,* $[C : \mathbb{Q}_p] < \infty$,
- y *est la projection de l'image de* z *par Abel-Jacobi.*

Le résultat principal ?

Pour $H = U(W)$ dans $G = SO(V)$, on obtient de même :

Théorème (Cornut'18)

$$y^{\chi} \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad H^1_f(E(z), V_p)^{\chi} \textit{ est de rang } 1.$$

- V_p *est un quotient de* $H^{2n-1}_{et}\left(\overline{\mathrm{Sh}}_K, \mathbb{Q}_p(n)\right)$,
- z *est un cycle spécial arbitraire dans* $\mathbb{Z}[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})]$,
- $E(z)$ *est son corps de définition,*
- $\chi : \mathrm{Gal}(E(z)/E) \to C^{\times}$ *est un caractère,* $[C : \mathbb{Q}_p] < \infty$,
- y *est la projection de l'image de* z *par Abel-Jacobi.*

L'application d'Abel-Jacobi

Il y a une suite spectrale et une application cycle

$$
\begin{aligned}
H^p\left(E(\star), H^q\left(\mathrm{Sh}|_{\overline{E}}, \mathbb{Q}_p(n)\right)\right) &\implies H^{p+q}\left(\mathrm{Sh}|_{E(\star)}, \mathbb{Q}_p(n)\right) \\
\mathrm{Ch}^n\left(\mathrm{Sh}|_{E(\star)}\right) &\xrightarrow{\mathrm{cyc}} H^{2n}\left(\mathrm{Sh}|_{E(\star)}, \mathbb{Q}_p(n)\right)
\end{aligned}
$$

L'application d'Abel-Jacobi

Il y a une suite spectrale et une application cycle

$$\begin{aligned} H^p\left(E(\star), H^q\left(\mathrm{Sh}|_{\overline{E}}, \mathbb{Q}_p(n)\right)\right) &\implies H^{p+q}\left(\mathrm{Sh}|_{E(\star)}, \mathbb{Q}_p(n)\right) \\ \mathrm{Ch}^n\left(\mathrm{Sh}|_{E(\star)}\right) &\xrightarrow{\mathrm{cyc}} H^{2n}\left(\mathrm{Sh}|_{E(\star)}, \mathbb{Q}_p(n)\right) \end{aligned}$$

qui donnent une application d'Abel-Jacobi

$$\mathrm{Ch}^n_0\left(\mathrm{Sh}|_{E(\star)}\right) \longrightarrow H^1\left(E(\star), H^{2n-1}\left(\mathrm{Sh}|_{\overline{E}}, \mathbb{Q}_p(n)\right)\right)$$

L'application d'Abel-Jacobi

Il y a une suite spectrale et une application cycle

$$\begin{aligned} H^p\left(E(\star), H^q\left(\mathrm{Sh}|_{\overline{E}}, \mathbb{Q}_p(n)\right)\right) &\Longrightarrow H^{p+q}\left(\mathrm{Sh}|_{E(\star)}, \mathbb{Q}_p(n)\right) \\ \mathrm{Ch}^n\left(\mathrm{Sh}|_{E(\star)}\right) &\xrightarrow{\mathrm{cyc}} H^{2n}\left(\mathrm{Sh}|_{E(\star)}, \mathbb{Q}_p(n)\right) \end{aligned}$$

qui donnent une application d'Abel-Jacobi

$$\mathrm{Ch}^n_0\left(\mathrm{Sh}|_{E(\star)}\right) \longrightarrow H^1\left(E(\star), H^{2n-1}\left(\mathrm{Sh}|_{\overline{E}}, \mathbb{Q}_p(n)\right)\right)$$

où $\mathrm{Ch}^n_0\left(\mathrm{Sh}|_{E(\star)}\right)$ est le noyau de

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Ch}^n\left(\mathrm{Sh}|_{E(\star)}\right) \arrow[r] \arrow[d] & H^0\left(E(\star), H^{2n}\left(\mathrm{Sh}|_{\overline{E}}, \mathbb{Q}_p(n)\right)\right) \arrow[d] \\ \mathrm{Ch}^n\left(\mathrm{Sh}|_{\overline{E}}\right) \arrow[r, "\overline{\mathrm{cyc}}"] & H^{2n}\left(\mathrm{Sh}|_{\overline{E}}, \mathbb{Q}_p(n)\right) \end{tikzcd}$$

L'application d'Abel-Jacobi

Il y a une suite spectrale et une application cycle

$$H^p\left(E(\star), H^q\left(\mathrm{Sh}|_{\overline{E}}, \mathbb{Q}_p(n)\right)\right) \implies H^{p+q}\left(\mathrm{Sh}|_{E(\star)}, \mathbb{Q}_p(n)\right)$$

$$\mathbb{Z}\left[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})\right]^{\mathrm{Gal}_{E(\star)}} \xrightarrow{\mathrm{cyc}} H^{2n}\left(\mathrm{Sh}|_{E(\star)}, \mathbb{Q}_p(n)\right)$$

L'application d'Abel-Jacobi

Il y a une suite spectrale et une application cycle

$$\begin{array}{rcl} H^p\left(E(\star), H^q\left(\mathrm{Sh}|_{\overline{E}}, \mathbb{Q}_p(n)\right)\right) & \Longrightarrow & H^{p+q}\left(\mathrm{Sh}|_{E(\star)}, \mathbb{Q}_p(n)\right) \\ \mathbb{Z}\left[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})\right]^{\mathrm{Gal}_{E(\star)}} & \xrightarrow{\mathrm{cyc}} & H^{2n}\left(\mathrm{Sh}|_{E(\star)}, \mathbb{Q}_p(n)\right) \end{array}$$

qui donnent une application d'Abel-Jacobi

$$\mathbb{Z}\left[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})\right]_0^{\mathrm{Gal}_{E(\star)}} \longrightarrow H^1\left(E(\star), H^{2n-1}\left(\mathrm{Sh}|_{\overline{E}}, \mathbb{Q}_p(n)\right)\right)$$

L'application d'Abel-Jacobi

Il y a une suite spectrale et une application cycle

$$\begin{array}{rcl} H^p\left(E(\star), H^q\left(\mathrm{Sh}|_{\overline{E}}, \mathbb{Q}_p(n)\right)\right) & \Longrightarrow & H^{p+q}\left(\mathrm{Sh}|_{E(\star)}, \mathbb{Q}_p(n)\right) \\ \mathbb{Z}\left[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})\right]^{\mathrm{Gal}_{E(\star)}} & \xrightarrow{\mathrm{cyc}} & H^{2n}\left(\mathrm{Sh}|_{E(\star)}, \mathbb{Q}_p(n)\right) \end{array}$$

qui donnent une application d'Abel-Jacobi

$$\mathbb{Z}\left[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})\right]_0^{\mathrm{Gal}_{E(\star)}} \longrightarrow H^1\left(E(\star), H^{2n-1}\left(\mathrm{Sh}|_{\overline{E}}, \mathbb{Q}_p(n)\right)\right)$$

où $\mathbb{Z}\left[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})\right]_0^{\mathrm{Gal}_{E(\star)}}$ est le noyau de

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}\left[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})\right]^{\mathrm{Gal}_{E(\star)}} \arrow[r] \arrow[d] & H^0\left(E(\star), H^{2n}\left(\mathrm{Sh}|_{\overline{E}}, \mathbb{Q}_p(n)\right)\right) \arrow[d] \\ \mathbb{Z}\left[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})\right] \arrow[r, "\overline{\mathrm{cyc}}"] & H^{2n}\left(\mathrm{Sh}|_{\overline{E}}, \mathbb{Q}_p(n)\right) \end{tikzcd}$$

Le résultat principal ?

Pour $H = U(W)$ dans $G = SO(V)$:

Théorème (Cornut'18)

$$y^\chi \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad H^1_f(E(z), V_p)^\chi \textit{ est de rang } 1.$$

- *V_p est un quotient de $H^{2n-1}_{et}\left(\overline{\mathrm{Sh}}_K, \mathbb{Q}_p(n)\right)$,*
- *z est un cycle spécial arbitraire dans $\mathbb{Z}[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})]_0$,*
- *$E(z)$ est son corps de définition,*
- *$\chi : \mathrm{Gal}(E(z)/E) \to C^\times$ est un caractère, $[C : \mathbb{Q}_p] < \infty$,*

Le résultat principal ?

Pour $H = U(W)$ dans $G = SO(V)$:

Théorème (Cornut'18)

$$y^\chi \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad H^1_f(E(z), V_p)^\chi \textit{ est de rang } 1.$$

- *V_p est un quotient de $H^{2n-1}_{et}(\overline{\mathrm{Sh}}_K, \mathbb{Q}_p(n))$,*
- *z est un cycle spécial arbitraire dans $\mathbb{Z}[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})]_0$,*
- *$E(z)$ est son corps de définition,*
- *$\chi : \mathrm{Gal}(E(z)/E) \to C^\times$ est un caractère, $[C : \mathbb{Q}_p] < \infty$,*

Le résultat principal ?

Pour $H = U(W)$ dans $G = SO(V)$:

Théorème (Cornut'18)

$$y^{\chi} \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad H^1_f(E(z), V_p)^{\chi} \textit{ est de rang } 1.$$

- *V_p est un quotient de $H^{2n-1}_{et}\left(\overline{\mathrm{Sh}}_K, \mathbb{Q}_p(n)\right)$,*
- *z est un cycle spécial arbitraire dans $\mathbb{Z}[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})]_0$,*
- *$E(z)$ est son corps de définition,*
- *$\chi : \mathrm{Gal}(E(z)/E) \to C^{\times}$ est un caractère, $[C : \mathbb{Q}_p] < \infty$,*
- *y est l'image de z par*

$$\mathbb{Z}[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})]_0^{\mathrm{Gal}_{E(z)}} \to H^1\left(E(z), H^{2n-1}\left(\overline{\mathrm{Sh}}_K, \mathbb{Q}_p(n)\right)\right) \to H^1(E(z), V_p)\,.$$

Le résultat principal ?

Pour $H = U(W)$ dans $G = SO(V)$:

Théorème (Cornut'18)

$$y^{\chi} \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad H^1_f(E(z), V_p)^{\chi} \textit{ est de rang } 1.$$

- *V_p est un quotient de $H^{2n-1}_{et}\left(\overline{\mathrm{Sh}}_K, \mathbb{Q}_p(n)\right)$,*
- *z est un cycle spécial arbitraire dans $\mathbb{Z}[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})]_0$,*
- *$E(z)$ est son corps de définition,*
- *$\chi : \mathrm{Gal}(E(z)/E) \to C^{\times}$ est un caractère, $[C : \mathbb{Q}_p] < \infty$,*
- *y est l'image de z par*

$$\mathbb{Z}[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})]_0^{\mathrm{Gal}_{E(z)}} \to H^1\left(E(z), H^{2n-1}\left(\overline{\mathrm{Sh}}_K, \mathbb{Q}_p(n)\right)\right) \to H^1(E(z), V_p).$$

Le résultat principal ?

Pour $H = U(W)$ dans $G = SO(V)$:

Théorème (Cornut'18)

$$y^\chi \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad H^1_f(E(z), V_p)^\chi \text{ est de rang } 1.$$

- *V_p est un quotient de $H^{2n-1}_{et}(\overline{\mathrm{Sh}}_K, \mathbb{Q}_p(n))$,*
- *z est un cycle spécial arbitraire dans $\mathbb{Z}[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})]_0$,*
- *$E(z)$ est son corps de définition,*
- *$\chi : \mathrm{Gal}(E(z)/E) \to C^\times$ est un caractère, $[C : \mathbb{Q}_p] < \infty$,*
- *y est l'image de z par*

$$\mathbb{Z}[\mathcal{Z}_K(\mathcal{Y})]_0^{\mathrm{Gal}_{E(z)}} \to H^1(E(z), H^{2n-1}(\overline{\mathrm{Sh}}_K, \mathbb{Q}_p(n))) \to H^1(E(z), V_p).$$

Le résultat principal ?

Théorème (♭♭♭)

$$y^{\chi} \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad H^1_f(E(z), V_p)^{\chi} \text{ est de rang } 1.$$

Le résultat principal ?

Théorème (♭♭♭)

$$y^{\chi} \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad H^1_f(E(z), V_p)^{\chi} \textit{ est de rang } 1.$$

Il y a :

- Des hypothèses raisonnables, par ex : V_p est symplectique.

Le résultat principal ?

Théorème (♭♭♭)

$$y^\chi \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad H^1_f(E(z), V_p)^\chi \text{ est de rang } 1.$$

Il y a :

- Des hypothèses raisonnables, par ex : V_p est symplectique.
- Des hypothèses moins raisonnables, par ex : « big image » de

$$\rho : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to GSp(V_p).$$

Le résultat principal ?

Théorème (♭♭♭)

$$y^{\chi} \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad H^1_f(E(z), V_p)^{\chi} \text{ est de rang } 1.$$

Il y a :

- Des hypothèses raisonnables, par ex : V_p est symplectique.
- Des hypothèses moins raisonnables, par ex : « big image » de

$$\rho : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to GSp(V_p).$$

- Une hypothèse gênante, relative à la

réduction des cycles spéciaux.

Le résultat principal ?

Théorème (♭♭♭)

$$y^{\chi} \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad H^1_f(E(z), V_p)^{\chi} \textit{ est de rang } 1.$$

Il y a :

- Des hypothèses raisonnables, par ex : V_p est symplectique.
- Des hypothèses moins raisonnables, par ex : « big image » de

$$\rho : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to GSp(V_p).$$

- Une hypothèse gênante, relative à la

réduction des cycles spéciaux.

L'hypothèse gênante. . .

- . . . généralise la relation de congruence pour les points de Heegner

$$\mathrm{red}_v(z_1) = \mathrm{Fr}_p\left(\mathrm{red}_v(z_p)\right) \quad \text{dans} \quad X_0(N)(\mathbb{F}_{p^2})$$

  pour une place v de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur p inerte dans E.

L'hypothèse gênante...

- ... généralise la relation de congruence pour les points de Heegner

$$\mathrm{red}_v(z_1) = \mathrm{Fr}_p\left(\mathrm{red}_v(z_p)\right) \quad \text{dans} \quad X_0(N)(\mathbb{F}_{p^2})$$

  pour une place v de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur p inerte dans E.

L'hypothèse gênante…

- … généralise la relation de congruence pour les points de Heegner

$$\mathrm{red}_v(z_1) = \mathrm{Fr}_p\left(\mathrm{red}_v(z_p)\right) \quad \text{dans} \quad X_0(N)(\mathbb{F}_{p^2})$$

  pour une place v de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur p inerte dans E.

L'hypothèse gênante...

- ... généralise la relation de congruence pour les points de Heegner

  $$\mathrm{red}_v(z_1) = \mathrm{Fr}_p\left(\mathrm{red}_v(z_p)\right) \quad \text{dans} \quad X_0(N)(\mathbb{F}_{p^2})$$

  pour une place v de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur p inerte dans E.
- ... résulte de la conjecture de Blasius-Rogawski sur la relation de congruence d'Eichler-Shimura :

  $$P_\mu(\mathrm{Fr}_q^\star) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathrm{Sh}_K \times \mathbb{F}_q$$

L'hypothèse gênante...

- ... généralise la relation de congruence pour les points de Heegner

$$\mathrm{red}_v(z_1) = \mathrm{Fr}_p\left(\mathrm{red}_v(z_p)\right) \quad \text{dans} \quad X_0(N)(\mathbb{F}_{p^2})$$

  pour une place v de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur p inerte dans E.

- ... résulte de la conjecture de Blasius-Rogawski sur la relation de congruence d'Eichler-Shimura :

$$P_\mu(\mathrm{Fr}_q^\star) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathrm{Sh}_K \times \mathbb{F}_q$$

L'hypothèse gênante…

- … généralise la relation de congruence pour les points de Heegner

  $$\mathrm{red}_v(z_1) = \mathrm{Fr}_p\left(\mathrm{red}_v(z_p)\right) \quad \text{dans} \quad X_0(N)(\mathbb{F}_{p^2})$$

  pour une place v de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur p inerte dans E.
- … résulte de la conjecture de Blasius-Rogawski sur la relation de congruence d'Eichler-Shimura :

  $$P_\mu(\mathrm{Fr}_q^\star) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathrm{Sh}_K \times \mathbb{F}_q$$

L'hypothèse gênante...

- ... généralise la relation de congruence pour les points de Heegner

  $$\mathrm{red}_v(z_1) = \mathrm{Fr}_p\,(\mathrm{red}_v(z_p)) \quad \text{dans} \quad X_0(N)(\mathbb{F}_{p^2})$$

  pour une place v de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur p inerte dans E.

- ... résulte de la conjecture de Blasius-Rogawski sur la relation de congruence d'Eichler-Shimura :

  $$P_\mu(\mathrm{Fr}_q^\star) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathrm{Sh}_K \times \mathbb{F}_q$$

  ⇒ Faltings-Chai, Bühltel, Wedhorn, Koskivirta, Xiao-Zhu, Lee, Wu ...

L'hypothèse gênante...

- ... généralise la relation de congruence pour les points de Heegner

  $$\mathrm{red}_v(z_1) = \mathrm{Fr}_p\left(\mathrm{red}_v(z_p)\right) \quad \text{dans} \quad X_0(N)(\mathbb{F}_{p^2})$$

  pour une place v de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur p inerte dans E.

- ... résulte d'une version forte de la conjecture de Blasius-Rogawski sur la relation de congruence d'Eichler-Shimura :

  $$P_\mu(\mathrm{Fr}_q^\star) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathrm{Sh}_K \times \mathbb{F}_q$$

  $\Rightarrow$ Faltings-Chai, Bühltel, Wedhorn, Koskivirta, Xiao-Zhu, Lee, Wu ...

L'hypothèse gênante. . .

- . . . généralise la relation de congruence pour les points de Heegner

$$\mathrm{red}_v(z_1) = \mathrm{Fr}_p\left(\mathrm{red}_v(z_p)\right) \quad \text{dans} \quad X_0(N)(\mathbb{F}_{p^2})$$

  pour une place v de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur p inerte dans E.

- . . . résulte d'une version forte de la conjecture de Blasius-Rogawski sur la relation de congruence d'Eichler-Shimura :

$$P_\mu(\mathrm{Fr}_q^\star) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathrm{Sh}_K \times \mathbb{F}_q$$

  ⇒ Faltings-Chai, Bühltel, Wedhorn, Koskivirta, Xiao-Zhu, Lee, Wu . . .

L'hypothèse gênante…

- … généralise la relation de congruence pour les points de Heegner

  $$\mathrm{red}_v(z_1) = \mathrm{Fr}_p\left(\mathrm{red}_v(z_p)\right) \quad \text{dans} \quad X_0(N)(\mathbb{F}_{p^2})$$

  pour une place v de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur p inerte dans E.
- … résulte d'une version forte de la conjecture de Blasius-Rogawski sur la relation de congruence d'Eichler-Shimura :

  $$P_\mu(\mathrm{Fr}_q^\star) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathrm{Sh}_K \times \mathbb{F}_q$$

  ⇒ Faltings-Chai, Bühltel, Wedhorn, Koskivirta, Xiao-Zhu, Lee, Wu …
- … est sans doute contournable en utilisant
  - les relations « verticales » de Ruishen Zhao,
  - le formalisme des « split Euler systems » de Jetchev-Nekovář-Skinner

L'hypothèse gênante...

- ... généralise la relation de congruence pour les points de Heegner

$$\mathrm{red}_v(z_1) = \mathrm{Fr}_p\left(\mathrm{red}_v(z_p)\right) \quad \text{dans} \quad X_0(N)(\mathbb{F}_{p^2})$$

  pour une place v de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur p inerte dans E.

- ... résulte d'une version forte de la conjecture de Blasius-Rogawski sur la relation de congruence d'Eichler-Shimura :

$$P_\mu(\mathrm{Fr}_q^\star) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathrm{Sh}_K \times \mathbb{F}_q$$

  ⇒ Faltings-Chai, Bühltel, Wedhorn, Koskivirta, Xiao-Zhu, Lee, Wu ...

- ... est sans doute contournable en utilisant
  - les relations « verticales » de Ruishen Zhao,
  - le formalisme des « split Euler systems » de Jetchev-Nekovář-Skinner

L'hypothèse gênante. . .

- . . . généralise la relation de congruence pour les points de Heegner

$$\mathrm{red}_v(z_1) = \mathrm{Fr}_p\left(\mathrm{red}_v(z_p)\right) \quad \text{dans} \quad X_0(N)(\mathbb{F}_{p^2})$$

  pour une place v de $\overline{\mathbb{Q}}$ sur p inerte dans E.
- . . . résulte d'une version forte de la conjecture de Blasius-Rogawski sur la relation de congruence d'Eichler-Shimura :

$$P_\mu(\mathrm{Fr}_q^\star) = 0 \quad \text{sur} \quad \mathrm{Sh}_K \times \mathbb{F}_q$$

  ⇒ Faltings-Chai, Bühltel, Wedhorn, Koskivirta, Xiao-Zhu, Lee, Wu . . .
- . . . est sans doute contournable en utilisant
  - les relations « verticales » de Ruishen Zhao,
  - le formalisme des « split Euler systems » de Jetchev-Nekovář-Skinner

Réduction

C'est cette hypothèse qui m'a réorienté

$$\text{Systèmes Eulériens} \quad \Longrightarrow \quad \text{Fibres spéciales}$$

Réduction

C'est cette hypothèse qui m'a réorienté

$$\text{Systèmes Eulériens} \quad \Longrightarrow \quad \text{Fibres spéciales}$$

- conjecture de Blasius-Rogawski

Réduction

C'est cette hypothèse qui m'a réorienté

$$\text{Systèmes Eulériens} \quad \Longrightarrow \quad \text{Fibres spéciales}$$

- conjecture de Blasius-Rogawski
- réduction des cycles spéciaux

Réduction

C'est cette hypothèse qui m'a réorienté

$$\text{Systèmes Eulériens} \quad \Longrightarrow \quad \text{Fibres spéciales}$$

- conjecture de Blasius-Rogawski
- réduction des points spéciaux

Réduction

$$\mathrm{Sh}_K(\mathbb{C})$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}_K \arrow[d, dash] \\
\mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Réduction

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}_K^{cm} \arrow[r] & \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) \\
& \mathrm{Sh}_K \arrow[d, dash] \\
& \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Réduction

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}_K^{cm} \arrow[rr] & & \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) & \\
& & & \mathrm{Sh}_K \arrow[d, dash] \\
& & \mathbb{C} & E \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Réduction

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}_K^{cm} \arrow[r] & \mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[r] & \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) & \\
 & & & \mathrm{Sh}_K \arrow[d, dash] \\
 & & \mathbb{C} & E \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Réduction

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}_K^{cm} \arrow[r] & \mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[r] \arrow[dd] & \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) & \\
 & & & \mathrm{Sh}_K \arrow[d, dash] \\
 & \mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{Q}}_p) & \mathbb{C} & E \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Réduction

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}_K^{cm} \arrow[r] & \mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) \\
& \mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{Q}}_p) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Sh}_K \arrow[d, dash] & \\
\mathbb{C} & E \arrow[l] \arrow[d] & \mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}} \arrow[l] \arrow[d] \\
& \overline{\mathbb{Q}}_p & \overline{\mathbb{Z}}_p \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Réduction

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}_K^{cm} \arrow[r] & \mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) \\
& \mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{Q}}_p) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& & \mathrm{Sh}_K \arrow[d, dash] \\
\mathbb{C} & E \arrow[l] \arrow[d] & \mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}} \arrow[l] \arrow[d] \\
& \overline{\mathbb{Q}}_p & \overline{\mathbb{Z}}_p \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Réduction

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}_K^{cm} \arrow[r] & \mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) \\
\mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{Z}}_p) \arrow[r] & \mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{Q}}_p) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Sh}_K \arrow[d, dash] \\
\mathbb{C} & E \arrow[l] \arrow[d] & \mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}} \arrow[l] \arrow[d] \\
 & \overline{\mathbb{Q}}_p & \overline{\mathbb{Z}}_p \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Réduction

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}_K^{cm} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) \\
\mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{Z}}_p) \arrow[r] & \mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{Q}}_p) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Sh}_K \arrow[d, dash] \\
\mathbb{C} & E \arrow[l] \arrow[d] & \mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}} \arrow[l] \arrow[d] \\
 & \overline{\mathbb{Q}}_p & \overline{\mathbb{Z}}_p \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Réduction

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}_K^{cm} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) \\
\mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{Z}}_p) \arrow[r] & \mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{Q}}_p) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Sh}_K \arrow[d, dash] \\
\mathbb{C} & E \arrow[l] \arrow[d] & \mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}} \arrow[l] \arrow[d] \\
 & \overline{\mathbb{Q}}_p & \overline{\mathbb{Z}}_p \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Théorème (Kisin, Vasiu)

*Les modèles canoniques **entiers** existent quand K_p est hyperspécial.*

Réduction

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}_K^{cm} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) \\
\mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{Z}}_p) \arrow[r] & \mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{Q}}_p) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& & & \mathrm{Sh}_K \arrow[d, dash] \\
\mathbb{C} & E \arrow[l] \arrow[d] & \mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{F}_q \arrow[d] \\
& \overline{\mathbb{Q}}_p & \overline{\mathbb{Z}}_p \arrow[l] \arrow[r] & \overline{\mathbb{F}}_p
\end{tikzcd}$$

Réduction

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}_K^{cm} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) \\
\mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{Z}}_p) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{Q}}_p) & \\
\mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{F}}_p) & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathrm{Sh}_K \arrow[d, dash] \\
\mathbb{C} & E \arrow[l] \arrow[d] & \mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{F}_q \arrow[d] \\
 & \overline{\mathbb{Q}}_p & \overline{\mathbb{Z}}_p \arrow[l] \arrow[r] & \overline{\mathbb{F}}_p
\end{tikzcd}$$

Réduction

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Sh}_K^{cm} \arrow[d, "\mathrm{red}"'] \\ \mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{F}}_p)\end{tikzcd}$$

Réduction

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}_K^{cm} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{red}"'] & \mathrm{Sh}_K(\mathbb{C}) \\
\mathrm{Sh}_K(\overline{\mathbb{F}}_p) &
\end{tikzcd}$$

Réduction

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}_K^{cm} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{red}"'] & \mathrm{Sh}_K^{an} \\
\mathrm{Sh}_K^{sp} &
\end{tikzcd}$$

Description Uniforme

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}_K^{an} & \mathrm{Sh}_K^{cm} \arrow[l] \arrow[r, "\mathrm{red}"] & \mathrm{Sh}_K^{sp}
\end{tikzcd}$$

Les $\mathrm{Sh}_K^{?}$ sont des classes d'isomorphismes de paires $(\star, \kappa)$ où $\star$ est

Description Uniforme

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Sh}_K^{an} & \mathrm{Sh}_K^{cm} \arrow[l] \arrow[r, "\mathrm{red}"] & \mathrm{Sh}_K^{sp}\end{tikzcd}$$

Les $\mathrm{Sh}_K^?$ sont des classes d'isomorphismes de paires $(\star, \kappa)$ où $\star$ est

Description Uniforme

$$\begin{tikzcd} \color{red}{\mathrm{Sh}_K^{an}} & \mathrm{Sh}_K^{cm} \arrow[l] \arrow[r, "\mathrm{red}"] & \mathrm{Sh}_K^{sp} \end{tikzcd}$$

Les $\mathrm{Sh}_K^{?}$ sont des classes d'isomorphismes de paires $(\star, \kappa)$ où $\star$ est

- une G-structure de Hodge

$$H : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}} G \to \mathsf{Hdg}_{\mathbb{Q}}$$

Description Uniforme

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Sh}_K^{an} & \textcolor{red}{\mathrm{Sh}_K^{cm}} \arrow[l] \arrow[r, "\mathrm{red}"] & \mathrm{Sh}_K^{sp}\end{tikzcd}$$

Les $\mathrm{Sh}_K^?$ sont des classes d'isomorphismes de paires $(\star, \kappa)$ où $\star$ est

- une G-structure de Hodge

$$H : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}} G \to \mathsf{Hdg}_{\mathbb{Q}}$$

- un G-motif CM sur $\overline{\mathbb{Q}}$

$$A : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}} G \to \mathsf{CM}(\overline{\mathbb{Q}})$$

Description Uniforme

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Sh}_K^{an} & \mathrm{Sh}_K^{cm} \arrow[l] \arrow[r, "\mathrm{red}"] & \color{red}{\mathrm{Sh}_K^{sp}}\end{tikzcd}$$

Les $\mathrm{Sh}_K^?$ sont des classes d'isomorphismes de paires $(\star, \kappa)$ où $\star$ est

- une G-structure de Hodge

$$H : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}} G \to \mathsf{Hdg}_{\mathbb{Q}}$$

- un G-motif CM sur $\overline{\mathbb{Q}}$

$$A : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}} G \to \mathsf{CM}(\overline{\mathbb{Q}})$$

- un G-motif sur $\overline{\mathbb{F}}_p$

$$M : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}} G \to \mathsf{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

Description Uniforme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sh}_K^{an} & \mathrm{Sh}_K^{cm} \arrow[l] \arrow[r, "\mathrm{red}"] & \mathrm{Sh}_K^{sp} \end{tikzcd}$$

Les $\mathrm{Sh}_K^?$ sont des classes d'isomorphismes de paires $(\star, \kappa)$ où $\star$ est

- une G-structure de Hodge

$$H : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}} G \to \mathsf{Hdg}_{\mathbb{Q}}$$

- un G-motif CM sur $\overline{\mathbb{Q}}$

$$A : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}} G \to \mathsf{CM}(\overline{\mathbb{Q}})$$

- un G-motif sur $\overline{\mathbb{F}}_p$

$$M : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}} G \to \mathsf{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

- et où κ est une structure de niveau K sur $\star$

Description Uniforme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Sh}_K^{an} & \mathrm{Sh}_K^{cm} \arrow[l] \arrow[r, "\mathrm{red}"] & \mathrm{Sh}_K^{sp} \end{tikzcd}$$

Les $\mathrm{Sh}_K^?$ sont des classes d'isomorphismes de paires $(\star, \kappa)$ où $\star$ est

- une G-structure de Hodge

$$H : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}} G \to \mathsf{Hdg}_{\mathbb{Q}}$$

- un G-motif CM sur $\overline{\mathbb{Q}}$

$$A : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}} G \to \mathsf{CM}(\overline{\mathbb{Q}})$$

- un G-motif sur $\overline{\mathbb{F}}_p$

$$M : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}} G \to \mathsf{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

- et où $\kappa = (\kappa^p, \kappa_p)$ est une structure de niveau $K = K^p \times K_p$ sur $\star$,

$$\kappa^p \in \mathcal{X}^p(\star) \quad \text{et} \quad \kappa_p \in \mathcal{X}_p(\star).$$

Description Uniforme

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Sh}_K^{an} & \mathrm{Sh}_K^{cm} \arrow[l] \arrow[r, "\mathrm{red}"] & \mathrm{Sh}_K^{sp}\end{tikzcd}$$

Les $\mathrm{Sh}_K^?$ sont des classes d'isomorphismes de paires $(\star, \kappa)$ où $\star$ est

- une G-structure de Hodge admissible
$$H : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}} G \to \mathsf{Hdg}_{\mathbb{Q}}$$
- un G-motif CM sur $\overline{\mathbb{Q}}$ admissible
$$A : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}} G \to \mathsf{CM}(\overline{\mathbb{Q}})$$
- un G-motif sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ admissible
$$M : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}} G \to \mathsf{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p)$$
- et où κ est une structure de niveau K sur $\star$

G-Structures

$\mathrm{CM}(\overline{\mathbb{Q}})$

G-Structures

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hdg}_{\mathbb{Q}} \\
\mathrm{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"]
\end{tikzcd}$$

G-Structures

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hdg}_{\mathbb{Q}} \\
\mathrm{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"] \arrow[d, "red"'] \\
\mathrm{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p)
\end{tikzcd}$$

G-Structures

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hdg}_{\mathbb{Q}} \\
\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[r, "A"] & \mathrm{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"] \arrow[d, "red"'] \\
 & \mathrm{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p)
\end{tikzcd}$$

G-Structures

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hdg}_{\mathbb{Q}} \\
\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[ur, bend left, "H"] \arrow[r, "A"] & \mathrm{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"'] \arrow[d, "red"'] \\
 & \mathrm{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p)
\end{tikzcd}$$

G-Structures

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hdg}_{\mathbb{Q}} \\
\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[ur, bend left, "H"] \arrow[r, "A"] \arrow[dr, bend right, "M"] & \mathrm{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"] \arrow[d, "red"'] \\
 & \mathrm{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p)
\end{tikzcd}$$

Admissibilité

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hdg}_{\mathbb{Q}} \\
\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[ur, bend left, "H_x"] & \mathrm{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"'] \arrow[d, "red"'] \\
 & \mathrm{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p)
\end{tikzcd}$$

Définition

Tout $x \in \mathcal{X}$ définit une G-structure de Hodge H_x avec

$$H_x(\tau) = \left(\mathbb{S} \xrightarrow{h_x} G_{\mathbb{R}} \xrightarrow{\tau_{\mathbb{R}}} GL\left(V(\tau)\right)_{\mathbb{R}}\right).$$

Admissibilité

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hdg}_{\mathbb{Q}} \\
\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[ur, bend left, "H"] & \mathrm{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"] \arrow[d, "red"'] \\
 & \mathrm{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p)
\end{tikzcd}$$

Définition

$$H \text{ est admissible } \iff \exists x \in \mathcal{X} : \qquad H \simeq H_x.$$

Admissibilité

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Hdg}_{\mathbb{Q}} \\
\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[ur, bend left, "H"] \arrow[r, "A"] & \mathrm{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"] \arrow[d, "red"] \\
 & \mathrm{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p)
\end{tikzcd}$$

Définition

A est admissible $\iff$ $H_B(A)$ est admissible.

Admissibilité

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{Hdg}_{\mathbb{Q}} \\
\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[ur, bend left, "H"] \arrow[r, "A"] \arrow[dr, bend right, "M"'] & \mathsf{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"'] \arrow[d, "red"'] \\
 & \mathsf{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p)
\end{tikzcd}$$

Définition

M est admissible $\iff$ $M \simeq \mathrm{red}(A)$ avec A admissible.

Structures hors p

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hdg}_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\omega"] & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}} \\
\mathsf{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"] \arrow[d, "red"'] & \\
\mathsf{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p) &
\end{tikzcd}$$

Structures hors p

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hdg}_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\omega"] & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\otimes \mathbb{A}_f^p"] & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p} \\
\mathsf{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"] \arrow[d, "red"'] & & \\
\mathsf{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p) & &
\end{tikzcd}$$

Structures hors p

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hdg}_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "V_f^p"] & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p} \\
\mathrm{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"] \arrow[d, "red"'] & \\
\mathrm{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p) &
\end{tikzcd}$$

Structures hors p

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hdg}_{\mathbb{Q}} \arrow[rr, "V_f^p"] & & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p} \\
\mathsf{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"] \arrow[d, "red"'] \arrow[rr, "V_f^p"] & & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p} \\
\mathsf{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p) \arrow[rr, "V_f^p"] & & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p}
\end{tikzcd}$$

Structures hors p

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hdg}_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "V_f^p"] & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p} \\
\mathsf{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"] \arrow[d, "red"'] \arrow[r, "V_f^p"] & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p} \arrow[u, "\simeq"'] \\
\mathsf{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p) \arrow[r, "V_f^p"] & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p}
\end{tikzcd}$$

Structures hors p

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hdg}_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "V_f^p"] & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p} \\
\mathsf{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"] \arrow[d, "red"'] \arrow[r, "V_f^p"] & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p} \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[d, "\simeq"] \\
\mathsf{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p) \arrow[r, "V_f^p"] & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p}
\end{tikzcd}$$

Structures hors p

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{Hdg}_{\mathbb{Q}} \arrow[rr, "V_f^p"] & & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p} \\
\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[ur, bend left, "H"] \arrow[r, "A"] \arrow[dr, bend right, "M"'] & \mathsf{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"] \arrow[d, "red"'] \arrow[rr, "V_f^p"] & & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p} \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[d, "\simeq"'] \\
 & \mathsf{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p) \arrow[rr, "V_f^p"] & & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p}
\end{tikzcd}$$

Structures hors p

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p} \\
\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[ur, bend left, "V_f^p(H)"] \arrow[r, "V_f^p(A)"] \arrow[dr, bend right, "V_f^p(M)"] & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p} \arrow[u, "\simeq"] \arrow[d, "\simeq"] \\
 & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p}
\end{tikzcd}$$

Structures hors p

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[r, "V_f^p"] & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p}
\end{tikzcd}$$

Structures hors p

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p} \\
\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[ur, bend left, "V_f^p(H)"] \arrow[r, "V_f^p(A)"] \arrow[dr, bend right, "V_f^p(M)"] & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p} \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[d, "\simeq"] \\
 & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p}
\end{tikzcd}$$

Définition

Une structure de niveau K^p sur $\star \in \{H, A, M\}$ est une K^p-orbite dans

$$\mathrm{Iso}^{\otimes}(V_f^p, V_f^p(\star))$$

Structures hors p

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p} \\
\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[urr, bend left, "V_f^p(H)"] \arrow[rr, "V_f^p(A)"] \arrow[drr, bend right, "V_f^p(M)"] & & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p} \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[d, "\simeq"] \\
 & & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p}
\end{tikzcd}$$

Définition

Une structure de niveau K^p sur $\star \in \{H, A, M\}$ est une K^p-orbite dans

$$\mathrm{Iso}^{\otimes}(V_f^p, V_f^p(\star)) \circlearrowleft \mathrm{Aut}^{\otimes}(V_f^p)$$

Structures hors p

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p} \\
\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[ru, bend left, "V_f^p(H)"] \arrow[r, "V_f^p(A)"] \arrow[rd, bend right, "V_f^p(M)"] & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p} \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[d, "\simeq"] \\
 & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p}
\end{tikzcd}$$

Définition

Une structure de niveau K^p sur $\star \in \{H, A, M\}$ est une K^p-orbite dans

$$\mathrm{Iso}^{\otimes}(V_f^p, V_f^p(\star)) \quad \circlearrowleft \quad \mathrm{Aut}^{\otimes}(V_f^p) = G(\mathbb{A}_f^p)$$

Structures hors p

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p} \\
\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[ru, bend left, "V_f^p(H)"] \arrow[r, "V_f^p(A)"] \arrow[rd, bend right, "V_f^p(M)"] & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p} \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[d, "\simeq"] \\
 & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p}
\end{tikzcd}$$

Définition

Une structure de niveau K^p sur $\star \in \{H, A, M\}$ est une K^p-orbite dans

$$\mathrm{Iso}^{\otimes}(V_f^p, V_f^p(\star)) \quad \circlearrowleft \quad \mathrm{Aut}^{\otimes}(V_f^p) = G(\mathbb{A}_f^p) \supset K^p$$

Structures hors p

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p} \\
\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[ur, bend left, "V_f^p(H)"] \arrow[r, "V_f^p(A)"] \arrow[dr, bend right, "V_f^p(M)"] & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p} \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[d, "\simeq"] \\
 & \mathrm{Bun}_{\mathbb{A}_f^p}
\end{tikzcd}$$

Définition

Une structure de niveau K^p sur $\star \in \{H, A, M\}$ est un élément de

$$\mathcal{X}^p(\star) = \mathrm{Iso}^{\otimes}(V_f^p, V_f^p(\star))/K^p$$

Motifs et structures en p

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hdg}_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "V_p"] & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \\
\mathrm{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"] \arrow[r, "V_p"] \arrow[d, "red"] & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \arrow[u, "\simeq"'] \\
\mathrm{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p) &
\end{tikzcd}$$

Motifs et structures en p

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hdg}_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "V_p"] & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \\
\mathsf{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"] \arrow[r, "V_p"] \arrow[d, "red"'] & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \arrow[u, "\simeq"'] \\
\mathsf{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p) \arrow[r, "V_{cr}"] & \mathrm{Vect}_L
\end{tikzcd}$$

$$L = \mathrm{Frac}\, W(\overline{\mathbb{F}}_p)$$

Motifs et structures en p

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hdg}_{\mathbb{Q}} \arrow[r, "V_p"] & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \\
\mathsf{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"] \arrow[r, "V_p"] \arrow[d, "red"'] & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \arrow[u, "\simeq"'] \arrow[d, "\times" marking] \\
\mathsf{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p) \arrow[r, "V_{cr}"] & \mathrm{Vect}_L
\end{tikzcd}$$

Motifs et structures en p

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hdg}_{\mathbb{Q}} \arrow[rr, "V_p"] & & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \\
\mathrm{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"] \arrow[d, "red"'] \arrow[rr, "V_p"] & & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \arrow[u, "\simeq"'] \\
\mathrm{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p) \arrow[r, "H_{cr}"] & \mathrm{Vect}_L^{\sigma} \arrow[r, "\omega"] & \mathrm{Vect}_L
\end{tikzcd}$$

Vect_L^{σ} : $V + \varphi_V$ σ-linéaire, $\sigma = \mathrm{Fr}_p$

Motifs et structures en p

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hdg}_{\mathbb{Q}} \arrow[rr, "V_p"] & & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \\
\mathsf{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"] \arrow[r, "H_p"] \arrow[d, "red"'] & \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/-) \arrow[r, "\omega"] & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \arrow[u, "\simeq"'] \\
\mathsf{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p) \arrow[r, "H_{cr}"] & \mathrm{Vect}_L^{\sigma} \arrow[r, "\omega"] & \mathrm{Vect}_L
\end{tikzcd}$$

$\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/-)$: germes de représentations galoisiennes

Motifs et structures en p

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hdg}_{\mathbb{Q}} \arrow[rr, "V_p"] & & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \\
\mathsf{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"] \arrow[r, "H_p"] \arrow[d, "red"'] & \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/-) \arrow[r, "\omega"] & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \arrow[u, "\simeq"'] \\
\mathsf{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p) \arrow[r, "H_{cr}"] & \mathrm{Vect}_L^{\sigma} \arrow[r, "\omega"] & \mathrm{Vect}_L
\end{tikzcd}$$

Motifs et structures en p

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hdg}_{\mathbb{Q}} \arrow[rr, "V_p"] & & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \\
\mathsf{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"] \arrow[r, "H_p"] \arrow[d, "red"'] & \mathrm{Rep}^{cr}_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/-) \arrow[r, "\omega"] & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \arrow[u, "\simeq"'] \\
\mathsf{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p) \arrow[r, "H_{cr}"] & \mathrm{Vect}^{\sigma}_{L} \arrow[r, "\omega"] & \mathrm{Vect}_L
\end{tikzcd}$$

Motifs et structures en p

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{Hdg}_{\mathbb{Q}} \arrow[rr, "V_p"] & & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \\
\mathsf{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"] \arrow[d, "red"'] \arrow[r, "H_p"] & \mathrm{Rep}^{cr}_{\mathbb{Q}_p}\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/-) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "D_{cr}"] & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \arrow[u, "\simeq"'] \\
\mathsf{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p) \arrow[r, "H_{cr}"] & \mathrm{Vect}^{\sigma}_L \arrow[r, "\omega"] & \mathrm{Vect}_L
\end{tikzcd}$$

Motifs et structures en p

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Rep}^{cr}_{\mathbb{Z}_p}\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/-) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "D_{cr}"] & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Z}_p} \\
\mathrm{Vect}^{\sigma}_{\mathcal{O}_L} \arrow[r, "\omega"] & \mathrm{Vect}_{\mathcal{O}_L}
\end{tikzcd}$$

Breuil, Kisin, Bhatt-Morrow-Scholze

Motifs et structures en p

$$\begin{tikzcd}
 & \mathsf{Hdg}_{\mathbb{Q}} \arrow[rr, "V_p"] & & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \\
\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[ur, bend left, "H"] \arrow[r, "A"] \arrow[dr, bend right, "M"'] & \mathsf{CM}(\overline{\mathbb{Q}}) \arrow[u, "H_B"] \arrow[d, "red"'] \arrow[rr, "V_p"] & & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \arrow[u, "\simeq"'] \\
 & \mathsf{Mot}(\overline{\mathbb{F}}_p) \arrow[rr, "V_{cr}"] & & \mathrm{Vect}_L
\end{tikzcd}$$

Motifs et structures en p

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \\
\mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}}(G) \arrow[ru, bend left, "V_p(H)"] \arrow[r, "V_p(A)"] \arrow[rd, bend right, "V_{cr}(M)"] & \mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \arrow[u, "\simeq"'] \\
 & \mathrm{Vect}_L
\end{tikzcd}$$

Structures de niveau en p

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_p(H) & \mathcal{X}_p(A) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r] & \mathcal{X}_p(M) \end{tikzcd}$$

Définition

Structures de niveau en p

$$\begin{tikzcd} \mathcal{X}_p(H) & \mathcal{X}_p(A) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r] & \mathcal{X}_p(M) \end{tikzcd}$$

Définition

- Une structure de niveau K_p sur H est un élément de

$$\mathcal{X}_p(H) = \mathrm{Iso}^{\otimes}\left(V_p, V_p(H)\right)/K_p$$

- Une structure de niveau K_p sur A est un élément de

$$\mathcal{X}_p(A) = \mathrm{Iso}^{\otimes}\left(V_p, V_p(A)\right)/K_p$$

Structures de niveau en p

$$\begin{tikzcd}\mathcal{X}_p(H) & \mathcal{X}_p(A) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r] & \mathcal{X}_p(M)\end{tikzcd}$$

Définition

- Une structure de niveau K_p sur H est un élément de

$$\mathcal{X}_p(H) = \mathrm{Iso}^{\otimes}\left(V_p, V_p(H)\right)/K_p = \mathcal{L}\left(V_p(H)\right)$$

- Une structure de niveau K_p sur A est un élément de

$$\mathcal{X}_p(A) = \mathrm{Iso}^{\otimes}\left(V_p, V_p(A)\right)/K_p = \mathcal{L}\left(V_p(A)\right)$$

Structures de niveau en p

$$\begin{tikzcd}\mathcal{X}_p(H) & \mathcal{X}_p(A) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r, "D_{cr}"] & \mathcal{L}(V_{cr}(M))\end{tikzcd}$$

Définition

- Une structure de niveau K_p sur H est un élément de

$$\mathcal{X}_p(H) = \mathrm{Iso}^{\otimes}\left(V_p, V_p(H)\right)/K_p = \mathcal{L}\left(V_p(H)\right)$$

- Une structure de niveau K_p sur A est un élément de

$$\mathcal{X}_p(A) = \mathrm{Iso}^{\otimes}\left(V_p, V_p(A)\right)/K_p = \mathcal{L}\left(V_p(A)\right)$$

Structures de niveau en p

$$\begin{tikzcd}\mathcal{X}_p(H) & \mathcal{X}_p(A) \arrow[l, "\simeq"'] \arrow[r, "D_{cr}"] & \mathcal{X}_p(M) \arrow[r, hook] & \mathcal{L}(V_{cr}(M))\end{tikzcd}$$

Définition

- Une structure de niveau K_p sur H est un élément de

$$\mathcal{X}_p(H) = \mathrm{Iso}^{\otimes}\left(V_p, V_p(H)\right)/K_p = \mathcal{L}\left(V_p(H)\right)$$

- Une structure de niveau K_p sur A est un élément de

$$\mathcal{X}_p(A) = \mathrm{Iso}^{\otimes}\left(V_p, V_p(A)\right)/K_p = \mathcal{L}\left(V_p(A)\right)$$

- Une structure de niveau K_p sur M est un élément de

$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathcal{L}(V_{cr}(M)) : \mathbf{d}(x, \varphi_M(x)) = \mu\}$$

Réduction

$$\mathrm{Sh}_K^{an} \quad = \quad \coprod_{[H]} \mathrm{Aut}^{\otimes}(H)\backslash\mathcal{X}^p(H) \times \mathcal{X}_p(H)$$

Réduction

$$\mathrm{Sh}_K^{an} = \coprod_{[H]} \mathrm{Aut}^{\otimes}(H)\backslash\mathcal{X}^p(H) \times \mathcal{X}_p(H)$$

$$\mathrm{Sh}_K^{cm} = \coprod_{[A]} \mathrm{Aut}^{\otimes}(A)\backslash\mathcal{X}^p(A) \times \mathcal{X}_p(A)$$

Réduction

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}_K^{an} \arrow[r, phantom, "="] & \coprod_{[H]} \mathrm{Aut}^{\otimes}(H) & \backslash \mathcal{X}^p(H) & \times \mathcal{X}_p(H) \\
\mathrm{Sh}_K^{cm} \arrow[u, "H_B"] \arrow[r, phantom, "="] & \coprod_{[A]} \mathrm{Aut}^{\otimes}(A) \arrow[u] & \backslash \mathcal{X}^p(A) \arrow[u] & \times \mathcal{X}_p(A) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Réduction

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}_K^{an} \arrow[r, phantom, "="] & \coprod_{[H]} \mathrm{Aut}^{\otimes}(H) \arrow[r, phantom, "\backslash"] & \mathcal{X}^p(H) \arrow[r, phantom, "\times"] & \mathcal{X}_p(H) \\
\mathrm{Sh}_K^{cm} \arrow[u, "H_B"] \arrow[r, phantom, "="] & \coprod_{[A]} \mathrm{Aut}^{\otimes}(A) \arrow[u] \arrow[r, phantom, "\backslash"] & \mathcal{X}^p(A) \arrow[u] \arrow[r, phantom, "\times"] & \mathcal{X}_p(A) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Sh}_K^{sp} = \coprod_{[M]} \mathrm{Aut}^{\otimes}(M)\backslash\mathcal{X}^p(M) \times \mathcal{X}_p(M)$$

Réduction

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sh}_K^{an} & = & \coprod_{[H]} \mathrm{Aut}^{\otimes}(H)\backslash & \mathcal{X}^p(H) \times & \mathcal{X}_p(H) \\
\mathrm{Sh}_K^{cm} \arrow[u, "H_B"] \arrow[d, "\mathrm{red}"'] & = & \coprod_{[A]} \mathrm{Aut}^{\otimes}(A)\backslash \arrow[u] \arrow[d] & \mathcal{X}^p(A) \times \arrow[u] \arrow[d] & \mathcal{X}_p(A) \arrow[u] \arrow[d] \\
\mathrm{Sh}_K^{sp} & = & \coprod_{[M]} \mathrm{Aut}^{\otimes}(M)\backslash & \mathcal{X}^p(M) \times & \mathcal{X}_p(M)
\end{tikzcd}$$

Les ensembles de classes d'isogénie ($G = GL_2$)

$$\begin{tikzcd}
{[A]} \arrow[d, "\mathrm{red}"'] \\
{[M]}
\end{tikzcd}$$

Les ensembles de classes d'isogénie ($G = GL_2$)

$$\begin{tikzcd}
{[A]} \arrow[d, "\mathrm{red}"'] & = & \{E : \text{corps quadratique imaginaire}\} \\
{[M]} & &
\end{tikzcd}$$

Les ensembles de classes d'isogénie ($G = GL_2$)

$$\begin{tikzcd} {[A]} \arrow[dd, "\mathrm{red}"'] & = & \{E : \text{corps quadratique imaginaire}\} \\ & = & \{E : p\mathcal{O} = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}}\} \cup \{E : p\mathcal{O} = \mathfrak{p} \text{ ou } \mathfrak{p}^2\} \\ {[M]} & & \end{tikzcd}$$

Les ensembles de classes d'isogénie ($G = GL_2$)

$$\begin{tikzcd}
{[A]} \arrow[dd, "\mathrm{red}"'] & = & \{E : \text{corps quadratique imaginaire}\} & & \\
 & = & \{E : p\mathcal{O} = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}\} \arrow[d] & \cup & \underline{\{E : p\mathcal{O} = \mathfrak{p} \text{ ou } \mathfrak{p}^2\}} \arrow[d] \\
{[M]} & = & \{E : p\mathcal{O} = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}\} & \cup & \{\star\}
\end{tikzcd}$$

Les ensembles de classes d'isogénie ($G = GL_2$)

$$\begin{tikzcd}
{[A]} \arrow[dd, "\mathrm{red}"'] & = & \{E : \text{corps quadratique imaginaire}\} & & \\
 & = & \{E : p\mathcal{O} = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}\} \arrow[d] & \cup & \{E : p\mathcal{O} = \mathfrak{p} \text{ ou } \mathfrak{p}^2\} \arrow[d] \\
{[M]} & = & \{E : p\mathcal{O} = \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{p}}\} \arrow[d, dash] & \cup & \{\star\} \arrow[d, dash] \\
 & & \text{ordinaire} & & \text{supersingulier}
\end{tikzcd}$$

Le cas supersingulier ($G = GL_2$)

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Aut}^{\otimes}(A) \backslash & \mathcal{X}^p(A) \arrow[d, "\mathrm{red}"'] & \times & \mathcal{X}_p(A) \\
\mathrm{Aut}^{\otimes}(M) \backslash & \mathcal{X}^p(M) & \times & \mathcal{X}_p(M)
\end{tikzcd}$$

Le cas supersingulier ($G = GL_2$)

Si $\mathrm{red}(A) = M$ est supersingulier (p inerte ou ramifié) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Aut}^{\otimes}(A) \backslash & \mathcal{X}^p(A) \arrow[d, "\mathrm{red}"'] & \times & \mathcal{X}_p(A) \\
\mathrm{Aut}^{\otimes}(M) \backslash & \mathcal{X}^p(M) & \times & \mathcal{X}_p(M)
\end{tikzcd}$$

Le cas supersingulier ($G = GL_2$)

Si $\mathrm{red}(A) = M$ est supersingulier (p inerte ou ramifié) :

$$\begin{tikzcd}
T(\mathbb{Q}) & \backslash & \mathcal{X}^p(A) \arrow[d, "\mathrm{red}"'] & \times & \mathcal{X}_p(A) \\
\mathrm{Aut}^{\otimes}(M) & \backslash & \mathcal{X}^p(M) & \times & \mathcal{X}_p(M)
\end{tikzcd}$$

- $\mathrm{Aut}^{\otimes}(A) = T(\mathbb{Q}) = E^{\times}$

Le cas supersingulier ($G = GL_2$)

Si $\mathrm{red}(A) = M$ est supersingulier (p inerte ou ramifié) :

$$\begin{tikzcd}
T(\mathbb{Q}) & \backslash & \mathcal{X}^p(A) \arrow[d, "\mathrm{red}"'] & \times & \mathcal{X}_p(A) \\
G'(\mathbb{Q}) & \backslash & \mathcal{X}^p(M) & \times & \mathcal{X}_p(M)
\end{tikzcd}$$

- $\mathrm{Aut}^{\otimes}(A) = T(\mathbb{Q}) = E^{\times}$
- $\mathrm{Aut}^{\otimes}(M) = G'(\mathbb{Q}) = B^{\times}$
- B corps de quaternions

$$\mathrm{Ram}(B) = \{p, \infty\}$$

Le cas supersingulier ($G = GL_2$)

Si $\mathrm{red}(A) = M$ est supersingulier (p inerte ou ramifié) :

$$\begin{tikzcd}
T(\mathbb{Q}) \arrow[d, "\mathrm{red}"'] & \backslash & \mathcal{X}^p(A) & \times & \mathcal{X}_p(A) \\
G'(\mathbb{Q}) & \backslash & \mathcal{X}^p(M) & \times & \mathcal{X}_p(M)
\end{tikzcd}$$

- $\mathrm{Aut}^{\otimes}(A) = T(\mathbb{Q}) = E^{\times}$
- $\mathrm{Aut}^{\otimes}(M) = G'(\mathbb{Q}) = B^{\times}$
- B corps de quaternions

  $$\mathrm{Ram}(B) = \{p, \infty\}$$

- $E \hookrightarrow B$

Le cas supersingulier ($G = GL_2$)

Si $\mathrm{red}(A) = M$ est supersingulier (p inerte ou ramifié) :

$$\begin{tikzcd}
T(\mathbb{Q}) \setminus G(\mathbb{A}_f^p)/K^p \times \quad \mathcal{X}_p(A) \arrow[d, "\mathrm{red}"'] \\
G'(\mathbb{Q}) \setminus G'(\mathbb{A}_f^p)/K'^p \times \quad \mathcal{X}_p(M)
\end{tikzcd}$$

- $\mathrm{Aut}^{\otimes}(A) = T(\mathbb{Q}) = E^{\times}$
- $\mathrm{Aut}^{\otimes}(M) = G'(\mathbb{Q}) = B^{\times}$
- B corps de quaternions

  $$\mathrm{Ram}(B) = \{p, \infty\}$$

- $E \hookrightarrow B$

Le cas supersingulier ($G = GL_2$)

Si $\mathrm{red}(A) = M$ est supersingulier (p inerte ou ramifié) :

$$\begin{tikzcd}
T(\mathbb{Q}) \backslash \arrow[d, "\mathrm{red}"'] & G(\mathbb{A}_f^p)/K^p \arrow[d, "\simeq"] & \times & \mathcal{X}_p(A) \\
G'(\mathbb{Q}) \backslash & G'(\mathbb{A}_f^p)/K'^p & \times & \mathcal{X}_p(M)
\end{tikzcd}$$

- $\mathrm{Aut}^{\otimes}(A) = T(\mathbb{Q}) = E^{\times}$
- $\mathrm{Aut}^{\otimes}(M) = G'(\mathbb{Q}) = B^{\times}$
- B corps de quaternions

$$\mathrm{Ram}(B) = \{p, \infty\}$$

- $E \hookrightarrow B$
- $G(\mathbb{A}_f^p) \simeq G'(\mathbb{A}_f^p)$

Le cas supersingulier ($G = GL_2$)

Si $\mathrm{red}(A) = M$ est supersingulier (p inerte ou ramifié) :

$$\begin{tikzcd}
T(\mathbb{Q}) \arrow[d, "\mathrm{red}"'] & \backslash & G(\mathbb{A}_f^p)/K^p \arrow[d, "\simeq"] & \times & \mathcal{X}_p(A) \arrow[d, "?"] \\
G'(\mathbb{Q}) & \backslash & G'(\mathbb{A}_f^p)/K'^p & \times & \mathcal{X}_p(M)
\end{tikzcd}$$

- $\mathrm{Aut}^{\otimes}(A) = T(\mathbb{Q}) = E^{\times}$
- $\mathrm{Aut}^{\otimes}(M) = G'(\mathbb{Q}) = B^{\times}$
- B corps de quaternions

$$\mathrm{Ram}(B) = \{p, \infty\}$$

- $E \hookrightarrow B$
- $G(\mathbb{A}_f^p) \simeq G'(\mathbb{A}_f^p)$

Le cas supersingulier ($G = PGL_2$)

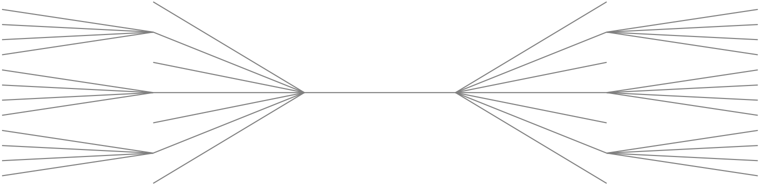
$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G, L) : \mathbf{d}(x, \varphi_M(x)) = \mu\} .$$

Le cas supersingulier ($G = PGL_2$)

$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G, L) : d(x, \varphi_M(x)) = 1\}\,.$$

Le cas supersingulier ($G = PGL_2$)

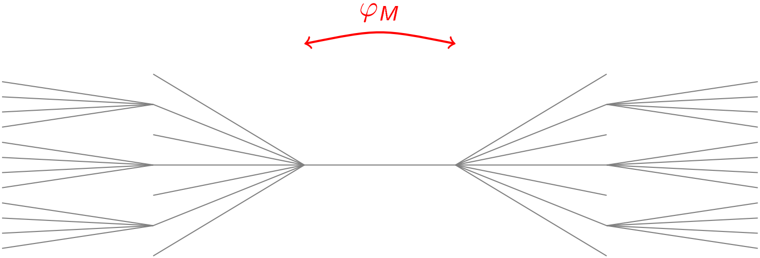
$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G, L) : d(x, \varphi_M(x)) = 1\}.$$



$\mathbf{BT}(G, L)$

Le cas supersingulier ($G = PGL_2$)

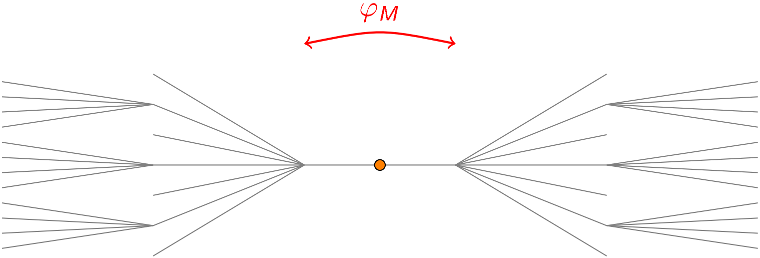
$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G, L) : d(x, \varphi_M(x)) = 1\}.$$



$\mathbf{BT}(G, L)$

Le cas supersingulier ($G = PGL_2$)

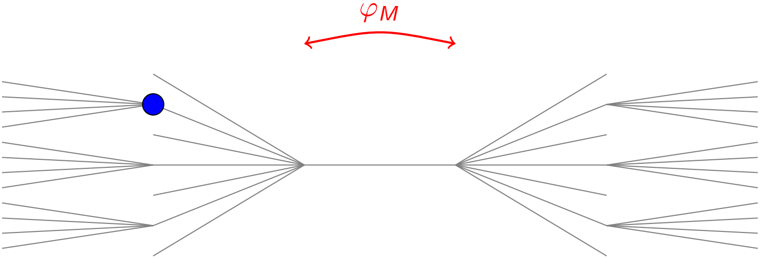
$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G, L) : d(x, \varphi_M(x)) = 1\}.$$



$\mathbf{BT}(G, L)$

Le cas supersingulier ($G = PGL_2$)

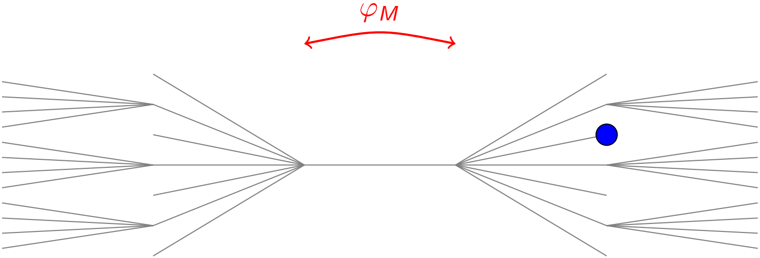
$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G, L) : d(x, \varphi_M(x)) = 1\}.$$



$\mathbf{BT}(G, L)$

Le cas supersingulier ($G = PGL_2$)

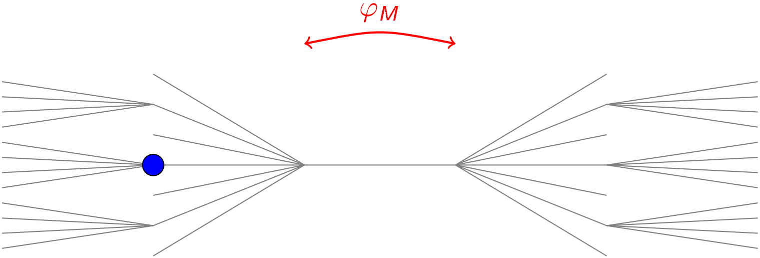
$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G, L) : d(x, \varphi_M(x)) = 1\}\,.$$



$\mathbf{BT}(G, L)$

Le cas supersingulier ($G = PGL_2$)

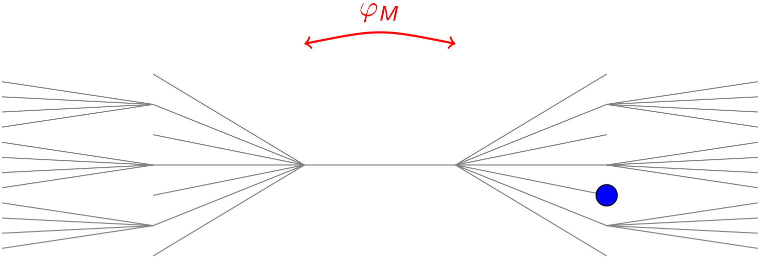
$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G, L) : d(x, \varphi_M(x)) = 1\}\,.$$



$\mathbf{BT}(G, L)$

Le cas supersingulier ($G = PGL_2$)

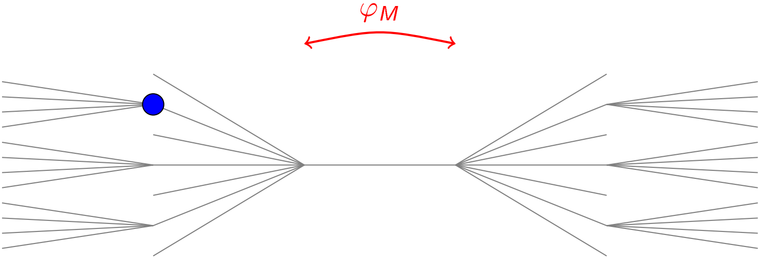
$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G, L) : d(x, \varphi_M(x)) = 1\} .$$



$\mathbf{BT}(G, L)$

Le cas supersingulier ($G = PGL_2$)

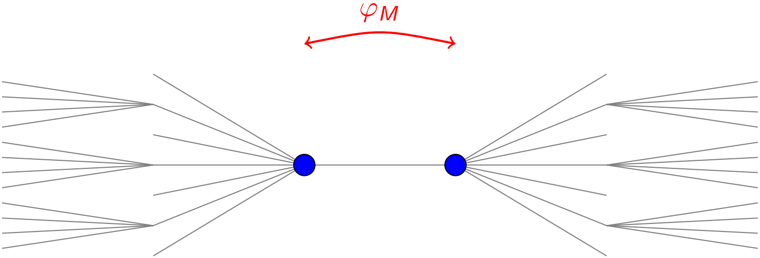
$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G, L) : d(x, \varphi_M(x)) = 1\}.$$



$\mathbf{BT}(G, L)$

Le cas supersingulier ($G = PGL_2$)

$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G, L) : d(x, \varphi_M(x)) = 1\}.$$



$\mathbf{BT}(G, L)$

Le cas supersingulier ($G = PGL_2$)

$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G, L) : d(x, \varphi_M(x)) = 1\}.$$

$\mathcal{X}_p(M)$

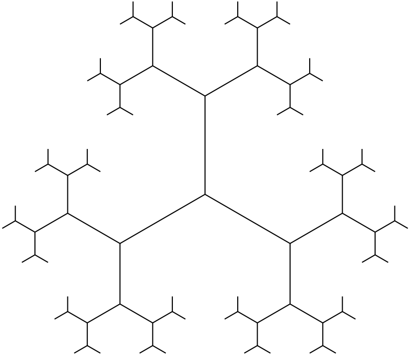
Le cas supersingulier ($G = PGL_2$)

L'application de réduction $\mathcal{X}_p(A) \to \mathcal{X}_p(M)$:

- $\mathcal{X}_p(A)$
- $\mathcal{X}_p(M)$
- Les fibres

Le cas supersingulier ($G = PGL_2$)

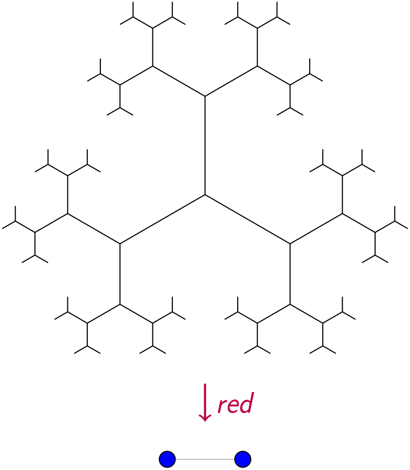
L'application de réduction $\mathcal{X}_p(A) \to \mathcal{X}_p(M)$:



- $\mathcal{X}_p(A)$
- $\mathcal{X}_p(M)$
- Les fibres

Le cas supersingulier ($G = PGL_2$)

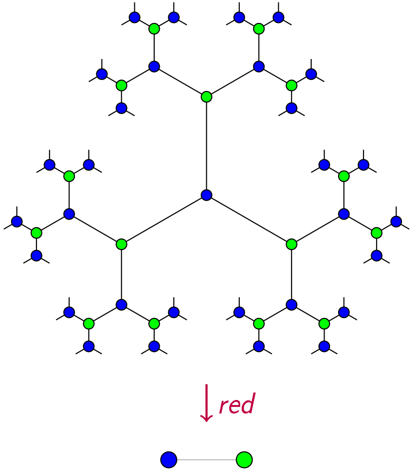
L'application de réduction $\mathcal{X}_p(A) \to \mathcal{X}_p(M)$:



- $\mathcal{X}_p(A)$
- $\mathcal{X}_p(M)$
- Les fibres

Le cas supersingulier ($G = PGL_2$)

L'application de réduction $\mathcal{X}_p(A) \to \mathcal{X}_p(M)$:



- $\mathcal{X}_p(A)$
- $\mathcal{X}_p(M)$
- Les fibres

Le cas supersingulier ($G = GL_2$)

Description adélique de la réduction supersingulière :

$$\begin{tikzcd}
T(\mathbb{Q}) \backslash \arrow[d, "\mathrm{red}"'] & G(\mathbb{A}_f^p)/K^p \arrow[d, "\simeq"] & \times\, G(\mathbb{Q}_p)/K_p \arrow[d] \\
G'(\mathbb{Q}) \backslash & G'(\mathbb{A}_f^p)/K'^p & \times\, G'(\mathbb{Q}_p)/K'_p
\end{tikzcd}$$

- $K'_p = R_p^\times$
- $R_p \subset B_p$ ordre maximal
- $K' = K'^p K'_p$

Le cas supersingulier ($G = GL_2$)

Description adélique de la réduction supersingulière :

$$\begin{tikzcd}
T(\mathbb{Q}) \backslash \arrow[d, "\mathrm{red}"'] & G(\mathbb{A}_f)/K \arrow[d] \\
G'(\mathbb{Q}) \backslash & G'(\mathbb{A}_f)/K'
\end{tikzcd}$$

- $K'_p = R_p^\times$
- $R_p \subset B_p$ ordre maximal
- $K' = K'^p K'_p$

Le cas supersingulier ($G = GL_2$)

Description adélique de la réduction supersingulière :

$$\begin{tikzcd}
T(\mathbb{Q}) \backslash \arrow[d, "\mathrm{red}"'] & G(\mathbb{A}_f)/K \arrow[d] \\
G'(\mathbb{Q}) \backslash & G'(\mathbb{A}_f)/K'
\end{tikzcd}$$

- $K'_p = R_p^\times$
- $R_p \subset B_p$ ordre maximal
- $K' = K'^p K'_p$
- Description adélique utilisée dans ma (première) preuve de la conjecture de Mazur !

Le cas ordinaire ($G = GL_2$)

Si $\mathrm{red}(A) = M$ est ordinaire (p décomposé) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Aut}^{\otimes}(A) \backslash & \mathcal{X}^{p}(A) \arrow[d, "\mathrm{red}"'] & \times & \mathcal{X}_{p}(A) \\
\mathrm{Aut}^{\otimes}(M) \backslash & \mathcal{X}^{p}(M) & \times & \mathcal{X}_{p}(M)
\end{tikzcd}$$

Le cas ordinaire ($G = GL_2$)

Si $\mathrm{red}(A) = M$ est ordinaire (p décomposé) :

$$\begin{tikzcd}
T(\mathbb{Q}) \quad \backslash \quad \mathcal{X}^p(A) \arrow[d, "\mathrm{red}"'] \times \mathcal{X}_p(A) \\
\mathrm{Aut}^{\otimes}(M) \backslash \mathcal{X}^p(M) \times \mathcal{X}_p(M)
\end{tikzcd}$$

- $\mathrm{Aut}^{\otimes}(A) = T(\mathbb{Q}) = E^{\times}$

Le cas ordinaire ($G = GL_2$)

Si $\mathrm{red}(A) = M$ est ordinaire (p décomposé) :

$$\begin{tikzcd}
T(\mathbb{Q}) & \backslash & \mathcal{X}^p(A) \arrow[d, "\mathrm{red}"'] & \times & \mathcal{X}_p(A) \\
T(\mathbb{Q}) & \backslash & \mathcal{X}^p(M) & \times & \mathcal{X}_p(M)
\end{tikzcd}$$

- $\mathrm{Aut}^{\otimes}(A) = T(\mathbb{Q}) = E^{\times}$
- $\mathrm{Aut}^{\otimes}(M) = T(\mathbb{Q}) = E^{\times}$

Le cas ordinaire ($G = GL_2$)

Si $\mathrm{red}(A) = M$ est ordinaire (p décomposé) :

$$\begin{tikzcd}
T(\mathbb{Q}) \arrow[d, "\mathrm{red}"'] & \backslash & \mathcal{X}^p(A) & \times & \mathcal{X}_p(A) \\
T(\mathbb{Q}) & \backslash & \mathcal{X}^p(M) & \times & \mathcal{X}_p(M)
\end{tikzcd}$$

- $\mathrm{Aut}^{\otimes}(A) = T(\mathbb{Q}) = E^{\times}$
- $\mathrm{Aut}^{\otimes}(M) = T(\mathbb{Q}) = E^{\times}$

Le cas ordinaire ($G = GL_2$)

Si $\mathrm{red}(A) = M$ est ordinaire (p décomposé) :

$$\begin{tikzcd}
T(\mathbb{Q}) \backslash & G(\mathbb{A}_f^p)/K^p \times \mathcal{X}_p(A) \arrow[d, "\simeq"] \\
T(\mathbb{Q}) \backslash \arrow[u, phantom] & G(\mathbb{A}_f^p)/K^p \times \mathcal{X}_p(M)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
T(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}_f^p)/K^p \times \mathcal{X}_p(A) \arrow[d, "\mathrm{red}"'] \\
T(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}_f^p)/K^p \times \mathcal{X}_p(M)
\end{tikzcd}$$

- $\mathrm{Aut}^{\otimes}(A) = T(\mathbb{Q}) = E^{\times}$
- $\mathrm{Aut}^{\otimes}(M) = T(\mathbb{Q}) = E^{\times}$

Le cas ordinaire ($G = GL_2$)

Si $\mathrm{red}(A) = M$ est ordinaire (p décomposé) :

$$\begin{tikzcd}
T(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}_f^p)/K^p \arrow[d, "\mathrm{red}"'] & \times & \mathcal{X}_p(A) \arrow[d, "?"] \\
T(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}_f^p)/K^p & \times & \mathcal{X}_p(M)
\end{tikzcd}$$

$$G(\mathbb{A}_f^p)/K^p \xrightarrow{\simeq} G(\mathbb{A}_f^p)/K^p$$

- $\mathrm{Aut}^{\otimes}(A) = T(\mathbb{Q}) = E^{\times}$
- $\mathrm{Aut}^{\otimes}(M) = T(\mathbb{Q}) = E^{\times}$

Le cas ordinaire ($G = PGL_2$)

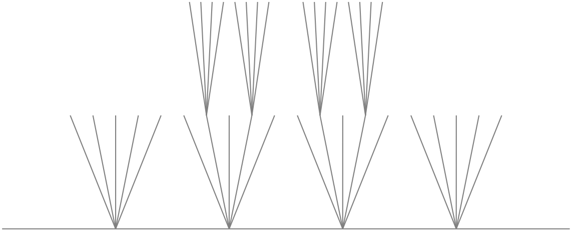
On a

$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G, L) : d(x, \varphi_M(x)) = 1\} .$$

Le cas ordinaire ($G = PGL_2$)

On a

$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G, L) : d(x, \varphi_M(x)) = 1\}.$$

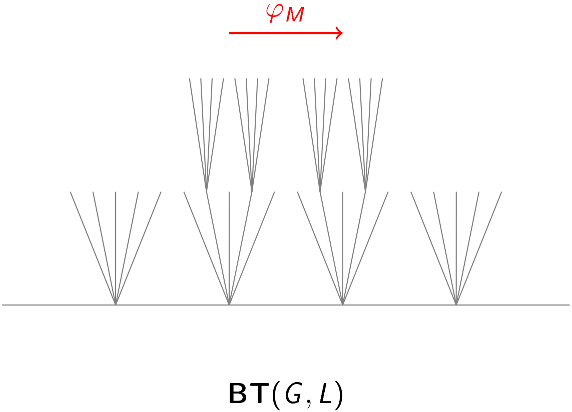


$\mathbf{BT}(G, L)$

Le cas ordinaire ($G = PGL_2$)

On a

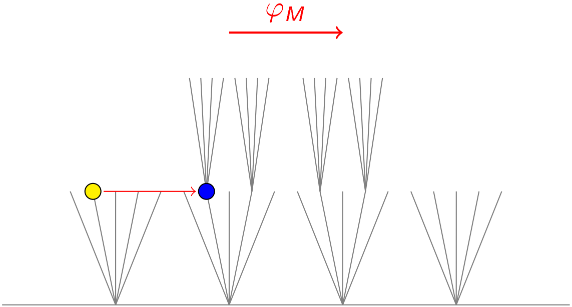
$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G, L) : d(x, \varphi_M(x)) = 1\}.$$



Le cas ordinaire ($G = PGL_2$)

On a

$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G, L) : d(x, \varphi_M(x)) = 1\} .$$

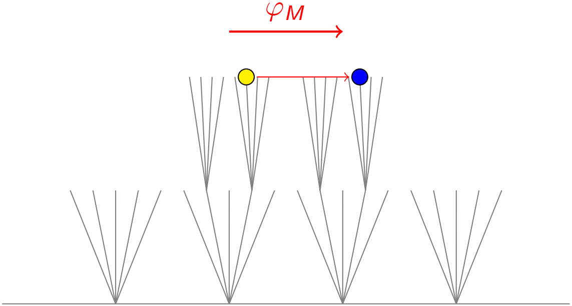


$\mathbf{BT}(G, L)$

Le cas ordinaire ($G = PGL_2$)

On a

$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G,L) : d(x, \varphi_M(x)) = 1\}.$$

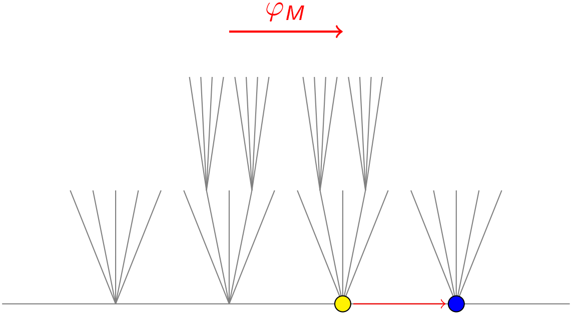


$\mathbf{BT}(G,L)$

Le cas ordinaire ($G = PGL_2$)

On a

$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G, L) : d(x, \varphi_M(x)) = 1\}.$$

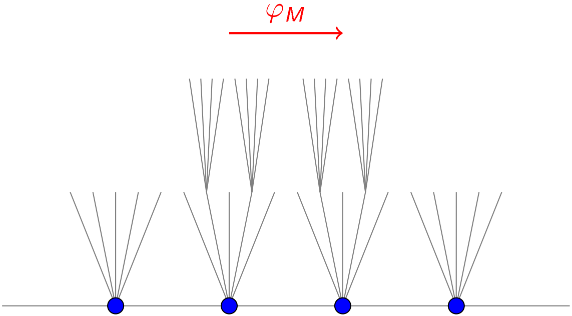


$\mathbf{BT}(G, L)$

Le cas ordinaire ($G = PGL_2$)

On a

$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G, L) : d(x, \varphi_M(x)) = 1\}.$$



$$\mathbf{BT}(G, L)$$

Le cas ordinaire ($G = PGL_2$)

On a

$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G, L) : d(x, \varphi_M(x)) = 1\}\,.$$

$\mathcal{X}_p(M)$

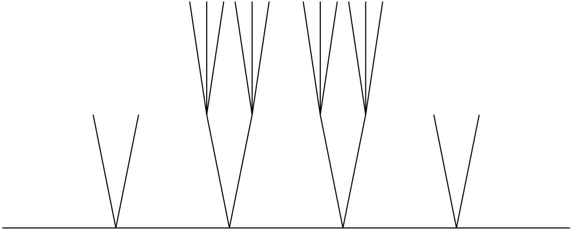
Le cas ordinaire ($G = PGL_2$)

L'application de réduction $\mathcal{X}_p(A) \to \mathcal{X}_p(M)$:

- $\mathcal{X}_p(A)$
- $\mathcal{X}_p(M)$
- $c = 0$ relève $\mathcal{X}_p(M)$
- Fibres = horocycles

Le cas ordinaire ($G = PGL_2$)

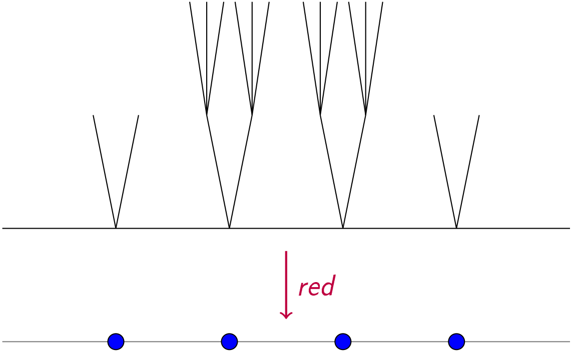
L'application de réduction $\mathcal{X}_p(A) \to \mathcal{X}_p(M)$:



- $\mathcal{X}_p(A)$
- $\mathcal{X}_p(M)$
- $c = 0$ relève $\mathcal{X}_p(M)$
- Fibres = horocycles

Le cas ordinaire ($G = PGL_2$)

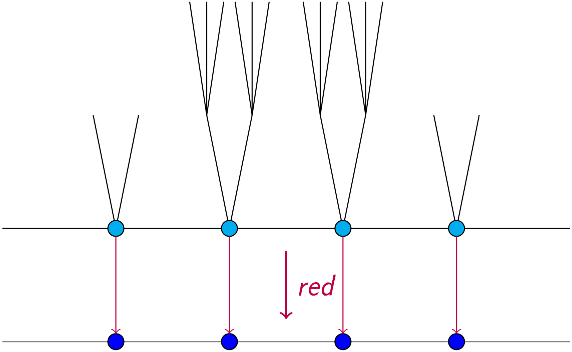
L'application de réduction $\mathcal{X}_p(A) \to \mathcal{X}_p(M)$:



- $\mathcal{X}_p(A)$
- $\mathcal{X}_p(M)$
- $c = 0$ relève $\mathcal{X}_p(M)$
- Fibres = horocycles

Le cas ordinaire ($G = PGL_2$)

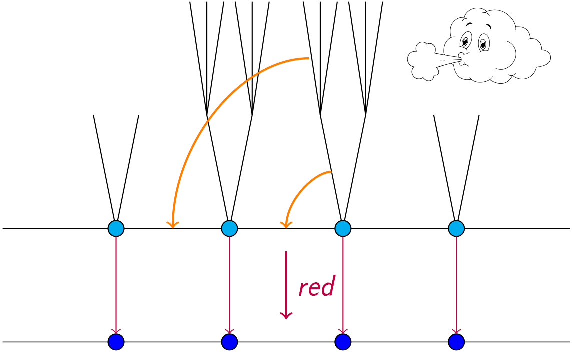
L'application de réduction $\mathcal{X}_p(A) \to \mathcal{X}_p(M)$:



- $\mathcal{X}_p(A)$
- $\mathcal{X}_p(M)$
- $c = 0$ relève $\mathcal{X}_p(M)$
- Fibres = horocycles

Le cas ordinaire ($G = PGL_2$)

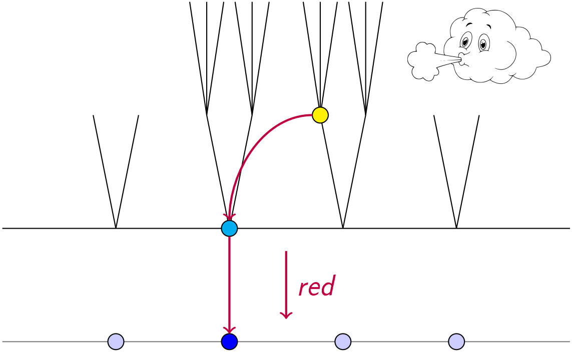
L'application de réduction $\mathcal{X}_p(A) \to \mathcal{X}_p(M)$:



- $\mathcal{X}_p(A)$
- $\mathcal{X}_p(M)$
- $c = 0$ relève $\mathcal{X}_p(M)$
- Fibres = horocycles

Le cas ordinaire ($G = PGL_2$)

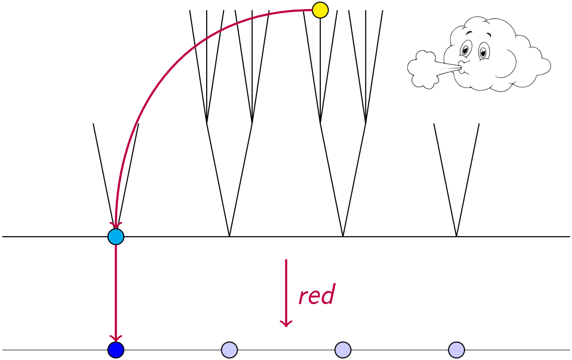
L'application de réduction $\mathcal{X}_p(A) \to \mathcal{X}_p(M)$:



- $\mathcal{X}_p(A)$
- $\mathcal{X}_p(M)$
- $c = 0$ relève $\mathcal{X}_p(M)$
- Fibres = horocycles

Le cas ordinaire ($G = PGL_2$)

L'application de réduction $\mathcal{X}_p(A) \to \mathcal{X}_p(M)$:



- $\mathcal{X}_p(A)$
- $\mathcal{X}_p(M)$
- $c = 0$ relève $\mathcal{X}_p(M)$
- Fibres = horocycles

Le cas ordinaire ($G = GL_2$)

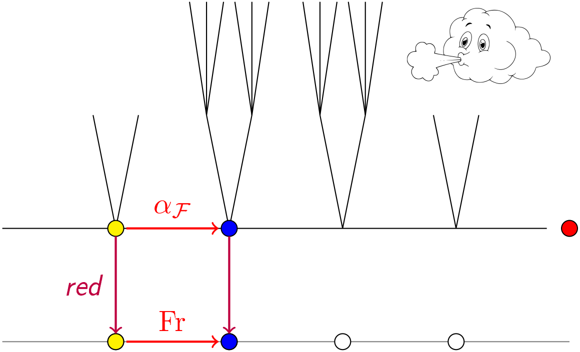
Description adélique de la réduction ordinaire :

$$\begin{tikzcd}
T(\mathbb{Q}) \arrow[d, "\mathrm{red}"'] & \backslash & G(\mathbb{A}_f^p)/K^p \arrow[d, "\simeq"] & \times & G(\mathbb{Q}_p)/K_p \arrow[d, "\mathrm{can}"] \\
T(\mathbb{Q}) & \backslash & G(\mathbb{A}_f^p)/K^p & \times & U(\mathbb{Q}_p)\backslash G(\mathbb{Q}_p)/K_p
\end{tikzcd}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & \star \\ & 1 \end{pmatrix}$$

Le cas ordinaire ($G = PGL_2$)

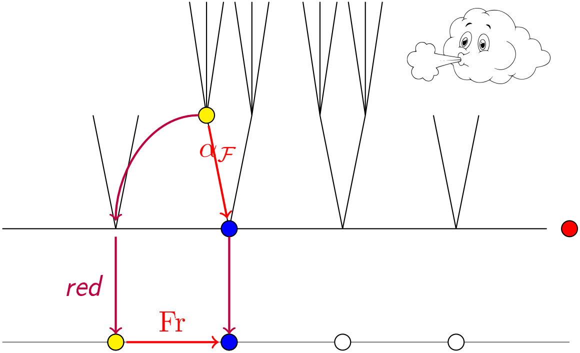
L'application de réduction $\mathcal{X}_p(A) \to \mathcal{X}_p(M)$:



- $c = 0$ relève $\mathcal{X}_p(M)$
- $\alpha_{\mathcal{F}}$ relève Fr
- $\beta_{\mathcal{F}}$ relève Fr^*
- $P(\beta_{\mathcal{F}}) = 0$ relève $P(\mathrm{Fr}^*) = 0$

Le cas ordinaire ($G = PGL_2$)

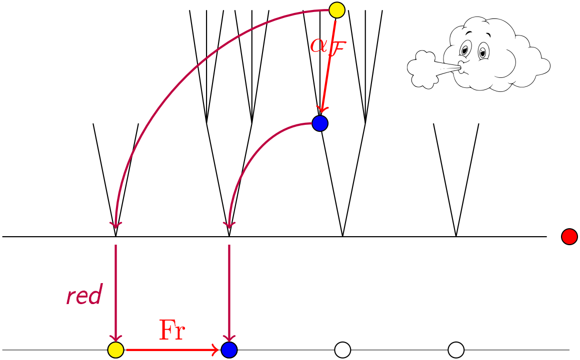
L'application de réduction $\mathcal{X}_p(A) \to \mathcal{X}_p(M)$:



- $c = 0$ relève $\mathcal{X}_p(M)$
- $\alpha_{\mathcal{F}}$ relève Fr
- $\beta_{\mathcal{F}}$ relève Fr^*
- $P(\beta_{\mathcal{F}}) = 0$ relève $P(\mathrm{Fr}^*) = 0$

Le cas ordinaire ($G = PGL_2$)

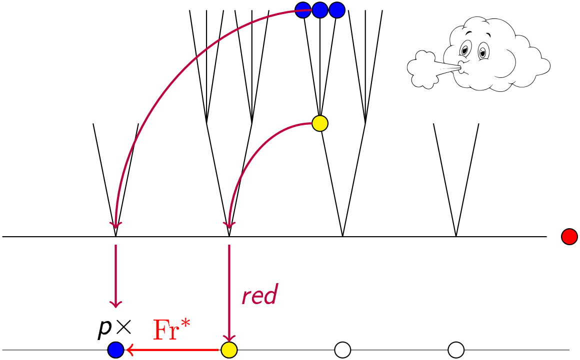
L'application de réduction $\mathcal{X}_p(A) \to \mathcal{X}_p(M)$:



- $c = 0$ relève $\mathcal{X}_p(M)$
- $\alpha_{\mathcal{F}}$ relève Fr
- $\beta_{\mathcal{F}}$ relève Fr^*
- $P(\beta_{\mathcal{F}}) = 0$ relève $P(\mathrm{Fr}^*) = 0$

Le cas ordinaire ($G = PGL_2$)

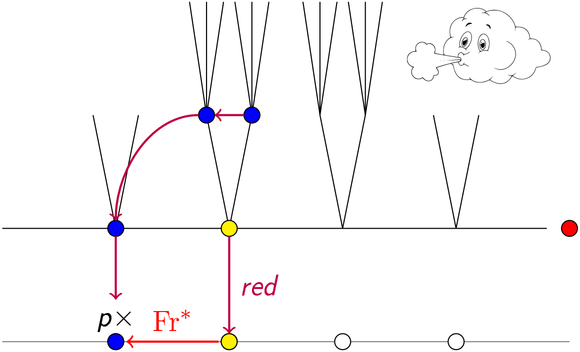
L'application de réduction $\mathcal{X}_p(A) \to \mathcal{X}_p(M)$:



- $c = 0$ relève $\mathcal{X}_p(M)$
- $\alpha_{\mathcal{F}}$ relève Fr
- $\beta_{\mathcal{F}}$ relève Fr^*
- $P(\beta_{\mathcal{F}}) = 0$ relève $P(\mathrm{Fr}^*) = 0$

Le cas ordinaire ($G = PGL_2$)

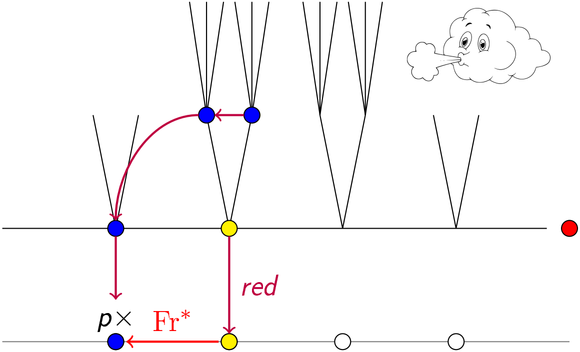
L'application de réduction $\mathcal{X}_p(A) \to \mathcal{X}_p(M)$:



- $c = 0$ relève $\mathcal{X}_p(M)$
- $\alpha_{\mathcal{F}}$ relève Fr
- $\beta_{\mathcal{F}}$ relève Fr^*
- $P(\beta_{\mathcal{F}}) = 0$ relève $P(\mathrm{Fr}^*) = 0$

Le cas ordinaire ($G = PGL_2$)

L'application de réduction $\mathcal{X}_p(A) \to \mathcal{X}_p(M)$:



- $c = 0$ relève $\mathcal{X}_p(M)$
- $\alpha_{\mathcal{F}}$ relève Fr
- $\beta_{\mathcal{F}}$ relève Fr^*
- $P(\beta_{\mathcal{F}}) = 0$ relève $P(\mathrm{Fr}^*) = 0$

Le cas μ-ordinaire

Mon étudiante Macarena Peche Irissarry

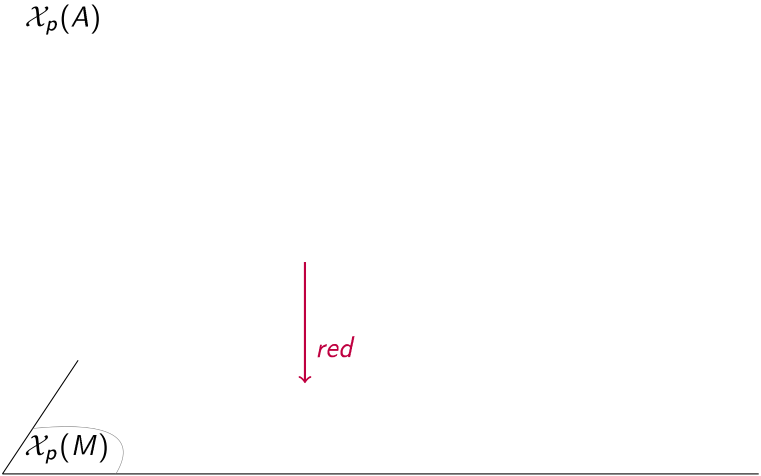
a généralisé tout cela au cas de réduction μ-ordinaire.

Le cas μ-ordinaire

Mon étudiante Macarena Peche Irissarry

a généralisé tout cela au cas de réduction μ-ordinaire.

Le cas μ-ordinaire



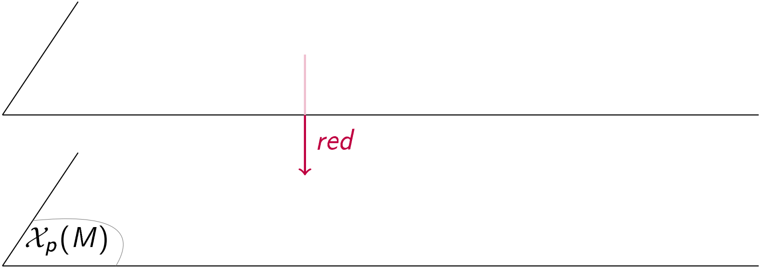
$\mathcal{X}_p(A)$

$\downarrow$ *red*

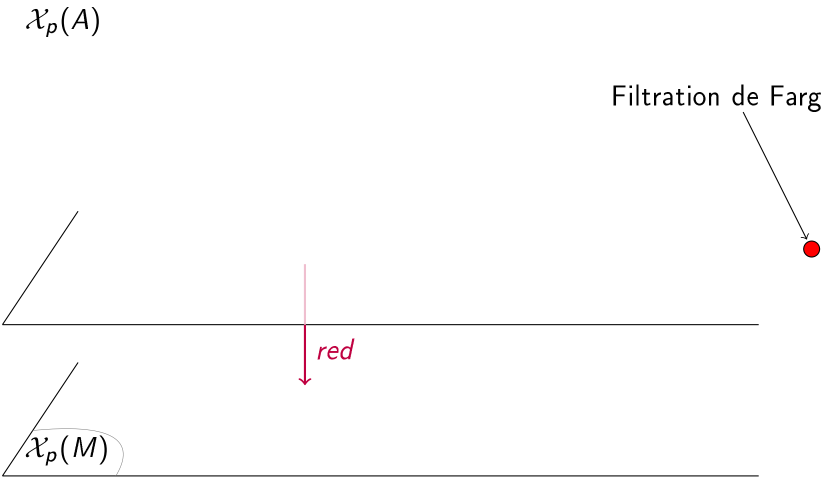
$\mathcal{X}_p(M)$

Le cas μ-ordinaire

$\mathcal{X}_p(A)$



Le cas μ-ordinaire



$\mathcal{X}_p(A)$

Filtration de Fargues

red

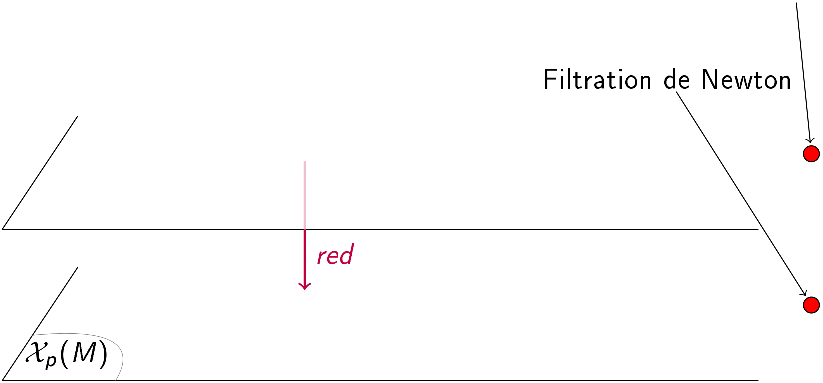
$\mathcal{X}_p(M)$

Le cas μ-ordinaire

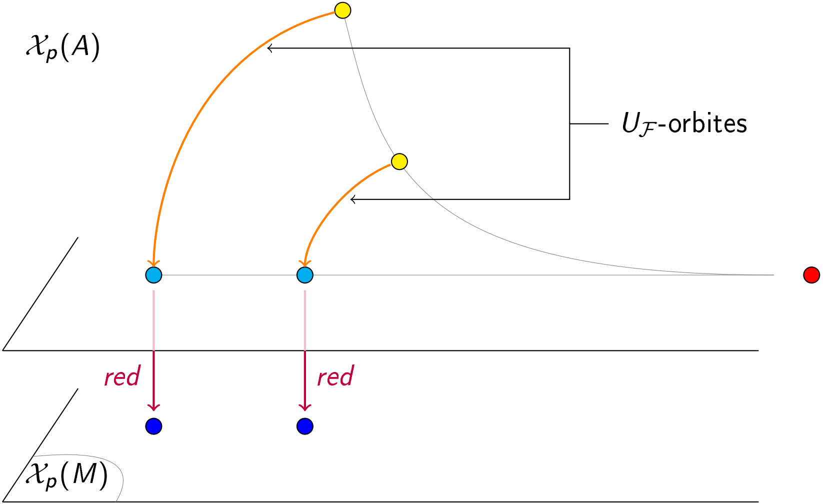
$\mathcal{X}_p(A)$

Filtration de Fargues

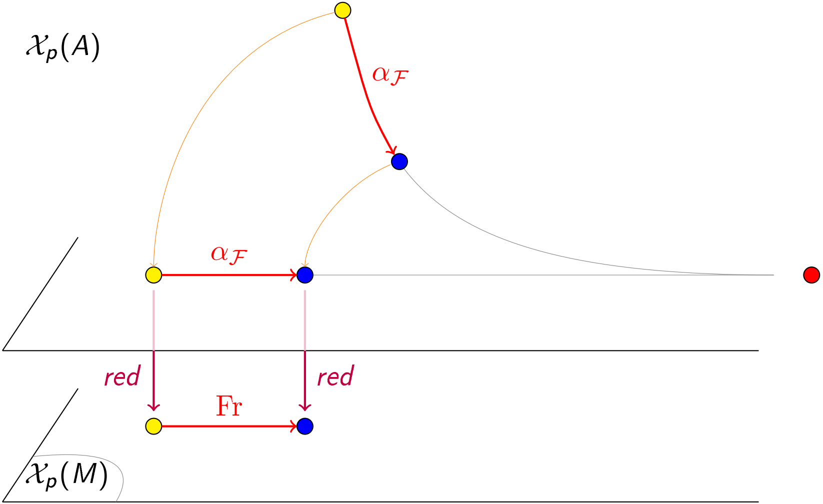
Filtration de Newton



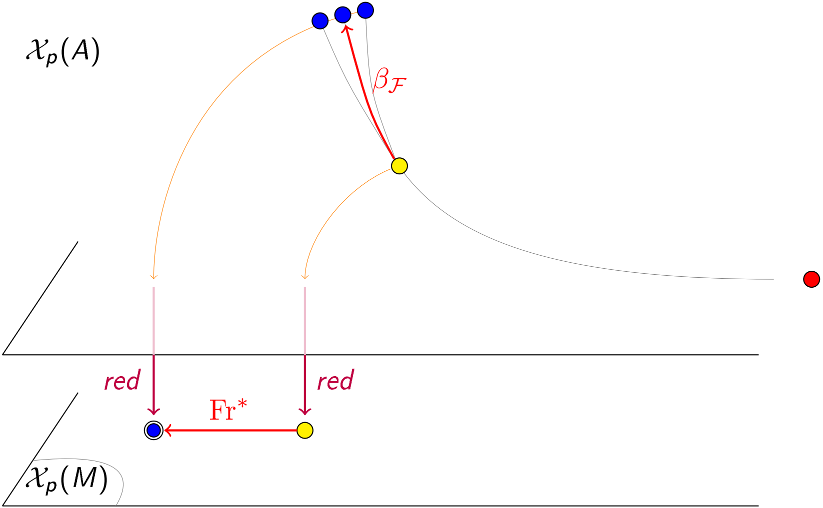
Le cas μ-ordinaire



Le cas μ-ordinaire



Le cas μ-ordinaire



Généralisation (G-isocristaux)

- $\mathcal{X}_p(M)$ ne dépend que du G-isocristal

$$H_{cr}(M) : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G \to \mathrm{Vect}_L^{\sigma}$$

Généralisation (G-isocristaux)

- $\mathcal{X}_p(M)$ ne dépend que du G-isocristal

$$H_{cr}(M) : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G \to \mathrm{Vect}_L^{\sigma}$$

- $\mathbf{B}(G)$ = classes d'iso. de G-isocristaux, décrit par Kottwitz

$$(\nu_N, \kappa) : \mathbf{B}(G) \hookrightarrow \mathbf{C}(G_L)^{\sigma} \times \pi_1(G_L)_{\sigma}$$

Généralisation (G-isocristaux)

- $\mathcal{X}_p(M)$ ne dépend que du G-isocristal

$$H_{cr}(M) : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G \to \mathrm{Vect}_L^{\sigma}$$

- $\mathbf{B}(G)$ = classes d'iso. de G-isocristaux, décrit par Kottwitz

$$(\nu_N, \kappa) : \mathbf{B}(G) \hookrightarrow \mathbf{C}(G_L)^{\sigma} \times \pi_1(G_L)_{\sigma}$$

- L'invariant ν_N est le type de la filtration de Newton

$$\mathcal{F}_N(M) : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G \to \mathrm{Fil}_L$$

Généralisation (G-isocristaux)

- $\mathcal{X}_p(M)$ ne dépend que du G-isocristal

$$H_{cr}(M) : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G \to \mathrm{Vect}_L^\sigma$$

- $\mathbf{B}(G)$ = classes d'iso. de G-isocristaux, décrit par Kottwitz

$$(\nu_N, \kappa) : \mathbf{B}(G) \hookrightarrow \mathbf{C}(G_L)^\sigma \times \pi_1(G_L)_\sigma$$

- L'invariant ν_N est le type de la filtration de Newton

$$\mathcal{F}_N(M)\,,\, \mathcal{F}_N^\iota(M) : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G \to \mathrm{Fil}_L$$

Généralisation (G-isocristaux)

- $\mathcal{X}_p(M)$ ne dépend que du G-isocristal

$$H_{cr}(M) : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G \to \mathrm{Vect}_L^\sigma$$

- $\mathbf{B}(G)$ = classes d'iso. de G-isocristaux, décrit par Kottwitz

$$(\nu_N, \kappa) : \mathbf{B}(G) \hookrightarrow \mathbf{C}(G_L)^\sigma \times \pi_1(G_L)_\sigma$$

- L'invariant ν_N est le type de la filtration de Newton

$$\mathcal{F}_N(M)\,,\ \mathcal{F}_N^\iota(M) : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G \to \mathrm{Fil}_L$$

- $\mathbf{B}(G, \mu)$ = G-isocristaux admissibles, caractérisés par

$$\nu_N^\iota \leq \mu^\sharp \qquad \text{et} \qquad \kappa = [\mu].$$

Généralisation (G-isocristaux)

- $\mathcal{X}_p(M)$ ne dépend que du G-isocristal
$$H_{cr}(M) : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G \to \mathrm{Vect}_L^\sigma$$
- $\mathbf{B}(G)$ = classes d'iso. de G-isocristaux, décrit par Kottwitz
$$(\nu_N, \kappa) : \mathbf{B}(G) \hookrightarrow \mathbf{C}(G_L)^\sigma \times \pi_1(G_L)_\sigma$$
- L'invariant ν_N est le type de la filtration de Newton
$$\mathcal{F}_N(M)\,,\,\mathcal{F}_N^\iota(M) : \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p} G \to \mathrm{Fil}_L$$
- $\mathbf{B}(G,\mu)$ = G-isocristaux admissibles, caractérisés par
$$\nu_N^\iota \leq \mu^\sharp \qquad \text{et} \qquad \kappa = [\mu].$$
- $\mathbf{B}(G,\mu)$ est un ensemble fini ordonné
$$\min = \mu - \text{basique} \qquad \max = \mu - \text{ordinaire}.$$

Géométrie de $\mathcal{X}_p(M)$

$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G, L) : \mathbf{d}(x, \varphi_M(x)) = \mu\}$$

Géométrie de $\mathcal{X}_p(M)$

$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G, L) : \mathbf{d}(x, \varphi_M(x)) = \mu\}$$

$\mathbf{BT}(G, L)$

Géométrie de $\mathcal{X}_p(M)$

$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G, L) : \mathbf{d}(x, \varphi_M(x)) = \mu\}$$

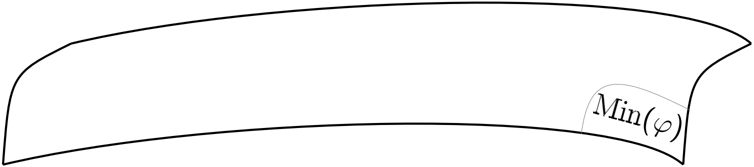
$$\mathrm{Min}(\varphi_M) = \{y \in \mathbf{BT}(G, L) : d(y, \varphi_M(y)) = \min\}$$

$\mathbf{BT}(G, L)$

Géométrie de $\mathcal{X}_p(M)$

$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G,L) : \mathbf{d}(x, \varphi_M(x)) = \mu\}$$

$$\mathrm{Min}(\varphi_M) = \{y \in \mathbf{BT}(G,L) : d(y, \varphi_M(y)) = \min\}$$

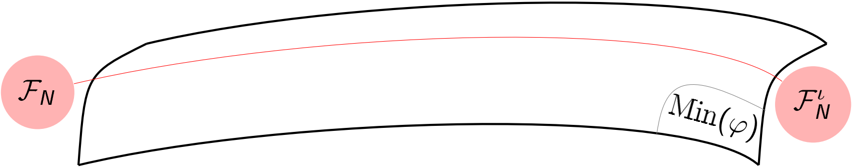


$\mathbf{BT}(G,L)$

Géométrie de $\mathcal{X}_p(M)$

$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G,L) : \mathbf{d}(x, \varphi_M(x)) = \mu\}$$

$$\mathrm{Min}(\varphi_M) = \{y \in \mathbf{BT}(G,L) : d(y, \varphi_M(y)) = \min\}$$

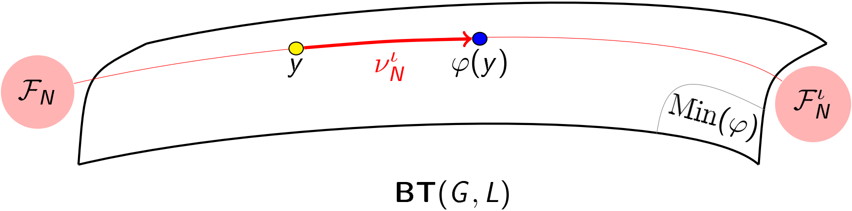


$\mathbf{BT}(G,L)$

Géométrie de $\mathcal{X}_p(M)$

$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G, L) : \mathbf{d}(x, \varphi_M(x)) = \mu\}$$

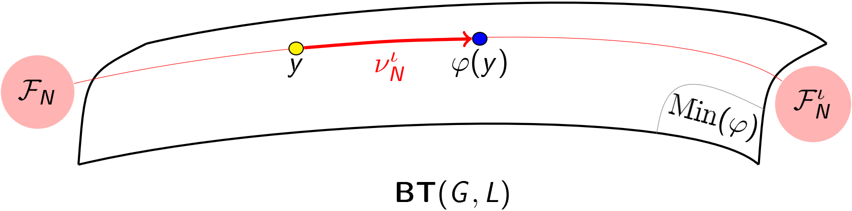
$$\mathrm{Min}(\varphi_M) = \{y \in \mathbf{BT}(G, L) : d(y, \varphi_M(y)) = \min\}$$



Géométrie de $\mathcal{X}_p(M)$

$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G,L) : \mathbf{d}(x, \varphi_M(x)) = \mu\}$$

$$\mathrm{Min}(\varphi_M) = \{y \in \mathbf{BT}(G,L) : \varphi_M(y) = y + \mathcal{F}_N^\iota\}$$



Géométrie de $\mathcal{X}_p(M)$

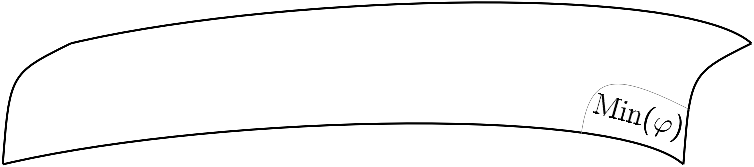
$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G, L) : \mathbf{d}(x, \varphi_M(x)) = \mu\}$$

$$\mathrm{Min}(\varphi_M) = \{y \in \mathbf{BT}(G, L) : d(y, \varphi_M(y)) = \min\}$$

Théorème (C + M-H. Nicole, 2016)

$$\mathrm{Min}(\varphi_M) = \mathbf{BT}(J_M, \mathbb{Q}_p) \subset \mathbf{BT}(G, L)$$

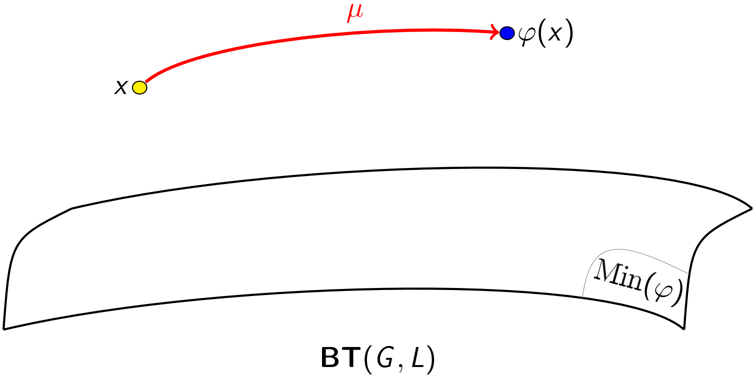
où $$J_M = \mathrm{Aut}^{\otimes}(H_{cr}(M))$$



$\mathbf{BT}(G, L)$

Géométrie de $\mathcal{X}_p(M)$

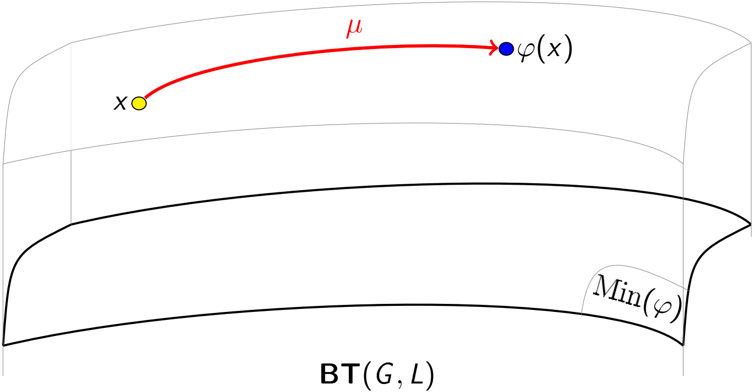
$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G,L) : \mathbf{d}(x, \varphi_M(x)) = \mu\}$$



Géométrie de $\mathcal{X}_p(M)$

$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G,L) : \mathbf{d}(x, \varphi_M(x)) = \mu\}$$

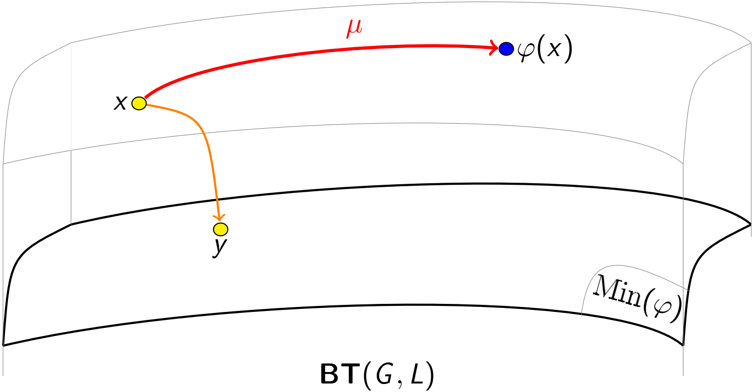
$$\subset \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G,L) : d(x, \mathrm{Min}(\varphi_M)) \leq C_\mu\}$$



Géométrie de $\mathcal{X}_p(M)$

$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G,L) : \mathbf{d}(x, \varphi_M(x)) = \mu\}$$

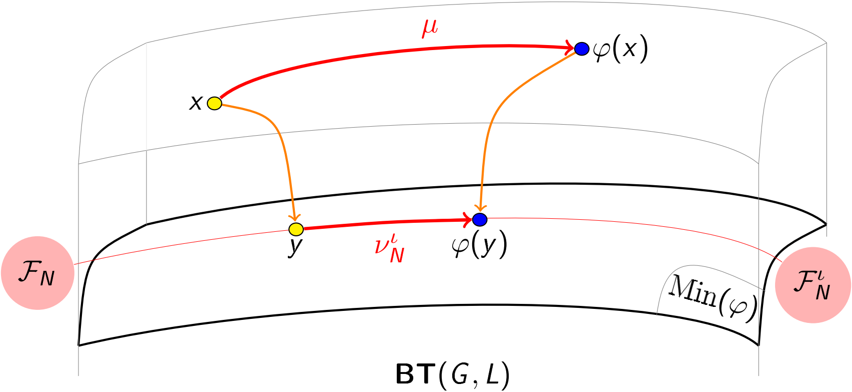
$$\subset \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G,L) : d(x, \mathrm{Min}(\varphi_M)) \le C_\mu\}$$



Géométrie de $\mathcal{X}_p(M)$

$$\mathcal{X}_p(M) = \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G,L) : \mathbf{d}(x, \varphi_M(x)) = \mu\}$$

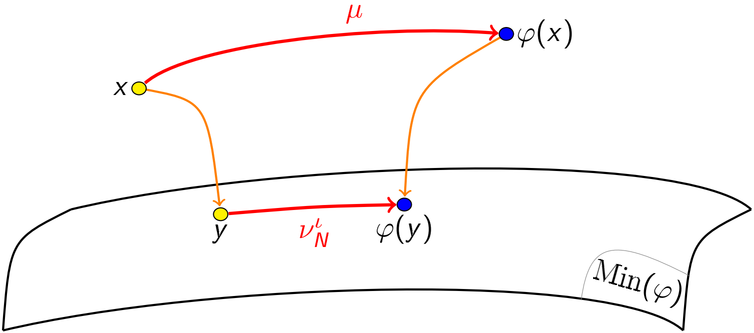
$$\subset \{x \in \mathbf{BT}^\circ(G,L) : d(x, \mathrm{Min}(\varphi_M)) \leq C_\mu\}$$



Stratifications de Bruhat-Tits

$$\mathcal{X}_p(M) = \coprod_{y \in \mathrm{Min}(\varphi_M)} \mathcal{X}_p(y)$$

$$\mathcal{X}_p(y) = \{x \in \mathcal{X}_p(M) : \mathrm{pr}(x) = y\}$$

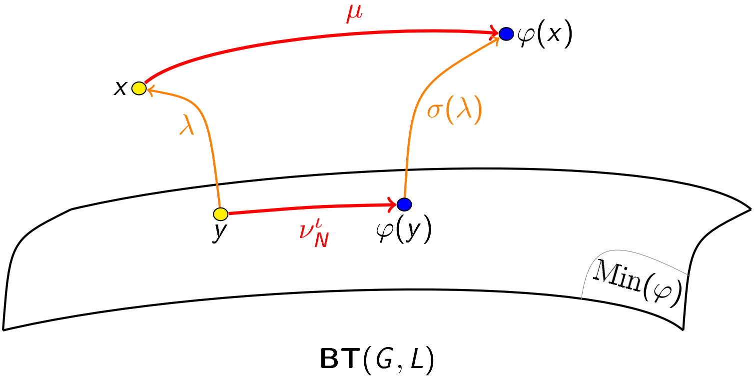


$\mathbf{BT}(G, L)$

Stratifications de Bruhat-Tits

$$\mathcal{X}_p(M) = \coprod_{y \in \mathrm{Min}(\varphi_M)} \coprod_{\lambda \in \mathbf{C}(G)} \mathcal{X}_p(y, \lambda)$$

$$\mathcal{X}_p(y, \lambda) = \{x \in \mathcal{X}_p(M) : \mathrm{pr}(x) = y \text{ et } \mathbf{d}(y, x) = \lambda\}$$



Stratifications de Bruhat-Tits

$$\mathcal{X}_p(M) = \coprod_{y \in \mathrm{Min}(\varphi_M)} \coprod_{\lambda \in \mathbf{C}(G)} \mathcal{X}_p(y, \lambda)$$

$$\mathcal{X}_p(y, \lambda) = \{x \in \mathcal{X}_p(M) : \mathrm{pr}(x) = y \text{ et } \mathbf{d}(y, x) = \lambda\}$$

Equivariance

$$\forall j \in J_M : \qquad j \cdot \mathcal{X}_p(y, \lambda) = \mathcal{X}_p(j \cdot y, \lambda)$$

Théorème

*Il y a une structure de $\mathbb{F}_q$-variété **irréductible** lisse sur $\mathcal{X}_p(y, \lambda)$.*