NORMES p-ADIQUES ET EXTENSIONS QUADRATIQUES

CHRISTOPHE CORNUT

1. Introduction

1.1. On analyse dans cet article l'action de $H \subset G$ sur l'immeuble de Bruhat-Tits de G pour les paires sphériques (G, H) suivantes, associées à une extension quadratique K/F de corps locaux p-adiques :

- $G = GL(V)$ et $H = GL(W)$ où W est un K-espace vectoriel de dimension finie et V est le F-espace vectoriel sous-jacent à W (section 3).
- $G = SO(V, \phi)$ et $H = U(W, \psi)$ où (W, ψ) est un K-espace Hermitien et (V, ϕ) est le F-espace quadratique sous-jacent, avec $\phi = \mathrm{Tr}_{K/F}\psi$ (section 4).
- $G = SO(V, \phi)$ et $H = U(W, \psi)$ où (W, ψ) est un K-espace Hermitien, dont le F-espace quadratique sous-jacent est un F-hyperplan du F-espace quadratique (V, ϕ) (section 5).

Dans un article suivant, on en déduira quelques décompositions explicites de G, similaires aux décompositions de Cartan de [4], dont on espère qu'elles seront utiles à l'analyse harmonique des espaces homogènes sphériques G/H, en lien notamment avec la théorie récemment développée par Y. Sakellaridis [6] et A. Venkatesh.

1.2. On ne s'interesse ici qu'à la classification des orbites de H dans l'ensemble sous-jacent à l'immeuble de G : la très riche structure de cet immeuble ne jouera donc qu'un rôle tout à fait auxiliaire. Les méthodes utilisées sont élémentaires, et s'inspirent largement des techniques d'algèbre linéaire mises en oeuvre par H. Bass dans l'étude des anneaux de Gorenstein [1]. Illustrons ce lien par un bref interlude.

1.3. Soit $\mathcal{O}_F$ un anneau de Dedekind intègre, F son corps des fractions, K une F-algèbre semi-simple de dimension 2 (i.e. $K \simeq F \times F$ ou K est une extension quadratique de F) et $\mathcal{O}_K$ la clôture intégrale de $\mathcal{O}_F$ dans K. L'application qui à I associe $\mathcal{O}_I = \mathcal{O}_F + I\mathcal{O}_K$ induit une bijection entre l'ensemble des ideaux non nuls I de $\mathcal{O}_F$ et l'ensemble des $\mathcal{O}_F$-ordres dans K, et il est bien connu que *tous ces ordres sont des anneaux de Gorenstein*.

1.4. Soit W un K-module libre de rang 1 et V le F-espace vectoriel sous-jacent à W. On note $G = GL_F(V) \simeq GL_2(F)$ et $H = GL_K(W) \simeq K^\times$. Soit $\mathcal{L}$ l'ensemble des $\mathcal{O}_F$-réseaux de V. Si $\mathcal{O}_F$ est local, i.e. un anneau de valuation discrète, $\mathcal{L}$ n'est autre que l'ensemble des sommets de l'immeuble de Bruhat-Tits de G : on s'intéresse donc au quotient de $\mathcal{L}$ par l'action de H, c'est-à-dire à l'ensemble des classes de $K^\times$-homothétie de $\mathcal{O}_F$-réseau de V.

Pour tout réseau L de V, $\mathcal{O}(L) = \{\lambda \in K | \lambda L \subset L\}$ est un $\mathcal{O}_F$-ordre de K et il résulte de [1, 7.2] que L est un $\mathcal{O}(L)$-module projectif de rang 1. Notons $[L] \in \mathrm{Pic}\mathcal{O}(L)$ la classe d'isomorphisme de ce module. Alors :

$$\text{L'application } L \mapsto [L] \text{ induit une bijection } H\backslash\mathcal{L} \xrightarrow{\simeq} \coprod_I \mathrm{Pic}\mathcal{O}_I.$$

1.5. Si $\mathcal{O}_F$ est local d'idéal maximal P_F, chacun des $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_{P_F^n}$ est encore local (sauf $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}_K \simeq \mathcal{O}_F \times \mathcal{O}_F$ si $K \simeq F \times F$, qui est néanmoins semi-local) donc $\mathrm{Pic}\mathcal{O}_n = \{1\}$. Notant $\mathcal{O}(L) = \mathcal{O}_{n(L)}$, on obtient alors :

$$\text{L'application } L \mapsto n(L) \text{ induit une bijection } H\backslash\mathcal{L} \xrightarrow{\simeq} \mathbf{N}.$$

C'est ce résultat élémentaire que nous allons généraliser.

1.6. Prenons $\mathcal{O}_F = \mathbf{Z}$ et $W = K$, une extension quadratique imaginaire de $\mathbf{Q}$. Fixons un plongement $\iota : K \hookrightarrow \mathbf{C}$. Alors $L \mapsto \mathbf{C}/\iota L$ induit une bijection entre $H\backslash\mathcal{L}$ et l'ensemble $\mathcal{E}$ des classes d'isomorphismes de courbes elliptiques de type CM (K, ι). Il est bien connu que ces classes d'isomorphismes sont définies sur l'extension abélienne maximale de ιK dans $\mathbf{C}$ (cf. par exemple [7]), et la décomposition

$$\mathcal{E} \simeq H\backslash\mathcal{L} \simeq \coprod_{n>0} \mathrm{Pic}\mathcal{O}_{\mathbf{Z}n}$$

obtenue ci-dessus n'est autre que la décomposition de $\mathcal{E}$ en orbites Galoisiennes.

1.7. Cette remarque est à l'origine de ce travail et justifie de l'attention que l'on porte au troisième cas de 1.1. En effet, les cycles associés aux sous-variétés de type $U(n-1,1)$ dans les variétés de Shimura de type $SO(2n-1,2)$ se comportent à bien des égards comme les points CM dans les courbes de Shimura, qui correspondent au cas où $n = 1$. Les résultats de cet article sont alors le prérequis nécessaire à l'analyse des *relations de distributions* qui entrelacent l'action Galoisienne et l'action de Hecke sur ces cycles, et font de ceux-ci la base d'un nouveau système Eulérien, pour les représentations Galoisiennes symplectiques de dimension $2n$ qui apparaissent dans la cohomologie médiane de ces variétés de Shimura. Ce thème sera développé dans un autre article.

1.8. **Notations.**

1.8.1. On fixe dans toute la suite de l'article un corps local p-adique[1] F et une extension quadratique K de F. On note $x \mapsto \overline{x}$ l'automorphisme non trivial de K/F, $\mathrm{Tr} : K \to F$ la trace, $\mathcal{O}_F$ l'anneau des entiers de F, P_F son idéal maximal, $\mathbf{F} = \mathcal{O}_F/P_F$ son corps résiduel, q le cardinal de $\mathbf{F}$, $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de K, $\mathcal{D}_K = \{\lambda \in K | \mathrm{Tr}(\mathcal{O}_K\lambda) \subset \mathcal{O}_F\}$ la codifférente de K/F, $\mathcal{D}_K^0$ le sous-$\mathcal{O}_F$-module des éléments de trace nulle dans $\mathcal{D}_K$, $v_F : F \twoheadrightarrow \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ la valuation de F et $|x| = q^{-v_F(z)}$ la norme de $x \in F$. On note π_F une uniformisante de F.

1.8.2. Pour tout $n \geq 0$, on note $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_F + P_F^n\mathcal{O}_K$ l'ordre de conducteur n dans K et $\mathcal{R}_n$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_n$, de sorte que $\mathcal{O}_0 = \mathcal{O}_K$ et $\mathcal{R}_n = P_F\mathcal{O}_{n-1}$ si $n > 0$. Le conducteur d'un $\mathcal{O}_F$-réseau L dans un K-espace vectoriel V est le plus petit entier $n \geq 0$ tel que $\mathcal{O}_nL = L$. Si $\dim_K V = 1$, L est un $\mathcal{O}_n$-module libre de rang 1.

1.8.3. Pour tout objet X d'une catégorie $\mathcal{C}$, on note $[X]$ la classe d'isomorphisme de X dans $\mathcal{C}$ et $[\mathcal{C}]$ l'ensemble de ces classes d'isomorphisme. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie additive, la somme directe munit $[\mathcal{C}]$ d'une structure de monoïde commutatif et le groupe de Grothendieck $K_0\mathcal{C}$ de $\mathcal{C}$ est le groupe abélien associé à ce monoïde.

1.8.4. Pour tout $x \in \mathbf{R}$, on note $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor = \min\{k \in \mathbf{Z} : x \leq k\}$.

[1] I.e. une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ ou bien un corps de fonction $\mathbf{F}_q((T))$ avec $q = p^n$.

2. Quelques Rappels

Références : [2, 3, 5].

2.1. Les F-normes.

2.1.1. Soit V un F-espace vectoriel de dimension finie. Une F-norme α sur V est une application $\alpha : V \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ telle que (1) $\alpha(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$, (2) $\alpha(x+y) \leq \max\{\alpha(x), \alpha(y)\}$ et (3) $\alpha(\lambda x) = |\lambda|\,\alpha(x)$ pour tout $x, y \in V$ et $\lambda \in F$. On note $\mathcal{N}(V)$ l'ensemble des F-normes sur V : c'est l'immeuble de Bruhat-Tits du groupe linéaire $GL(V)$, cf. [2, Théorème 2.11]. On munit cet immeuble de la distance notée d dans [2, Remarque 2.12].

2.1.2. Si $V = F \cdot v$ est de F-dimension 1, l'application qui à $\rho \in \mathbf{R}$ associe l'unique norme $\alpha \in \mathcal{N}(V)$ telle que $\alpha(v) = q^{\rho}$ est une isométrie $\mathbf{R} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{N}(V)$.

2.1.3. On dit d'une F-décomposition $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ qu'elle est adaptée à α, ou encore que α se décompose selon $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ lorsque

$$\forall (v_1, \cdots, v_k) \in V_1 \times \cdots \times V_k : \quad \alpha(v_1 + \cdots + v_k) = \sup\{\alpha(v_1), \cdots, \alpha(v_k)\}.$$

L'application $\alpha \mapsto (\alpha|V_i)_{i=1}^k$ est une isométrie de l'ensemble des F-normes α de $\mathcal{N}(V)$ qui se décomposent selon $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ sur l'ensemble $\mathcal{N}(V_1) \times \cdots \times \mathcal{N}(V_k)$. On note $(\alpha_i) \mapsto \sup\{\alpha_i\}$ la réciproque de cette bijection.

2.1.4. On dit d'une F-base $\mathcal{B} = (e_i)$ de V qu'elle est adaptée à α, ou encore que α se décompose selon $\mathcal{B}$ lorsque α se décompose selon $V = \oplus F e_i$. Pour tout $\alpha \in \mathcal{N}(V)$, il existe une F-base de V qui est adaptée à α [5, Proposition 1.1].

2.1.5. On note $\mathcal{C}$ la catégorie des F-espaces vectoriels F-normés (V, α). Un morphisme $f : (V_1, \alpha_1) \to (V_2, \alpha_2)$ est une application F-linéaire $f : V_1 \to V_2$ telle que pour tout $x \in V_1$, $\alpha_2(f(x)) \leq \alpha_1(x)$. On dit que

$$\begin{aligned} f \text{ est une cofibration} \quad &\iff \quad \forall x \in V_1 : \quad \alpha_1(x) = \alpha_2(f(x)), \\ f \text{ est une fibration} \quad &\iff \quad \forall y \in V_2 : \quad \alpha_2(y) = \inf_{f(x)=y} \alpha_1(x). \end{aligned}$$

L'application linéaire sous-jacente à une cofibration (resp. fibration) est injective (resp. surjective). Une fibration ou cofibration bijective est un isomorphisme. On note $\hookrightarrow$ les cofibrations et $\twoheadrightarrow$ les fibrations. Les constructions de 2.1.3 munissent $\mathcal{C}$ d'une structure additive (et $\mathcal{O}_F$-linéaire).

2.1.6. Pour tout $(V, \alpha) \in \mathcal{C}$, on note $(V, \alpha)^\vee = (V^\vee, \alpha^\vee) \in \mathcal{C}$ l'objet défini par

$$V^\vee = \mathrm{Hom}_F(V, F) \quad \text{et} \quad \alpha^\vee(f) = \sup_{x \in V,\, x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\alpha(x)}.$$

On obtient un endofoncteur $J : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{opp}$ qui échange fibration et cofibration. C'est une dualité : les isomorphismes de bidualité $\delta_{F,V} : V \to V^{\vee\vee}$ pour les F-espaces vectoriels induisent un isomorphisme d'endofoncteur $\delta_F : \mathrm{Id}_{\mathcal{C}} \to J \circ J$ [5, Prop. 1.2].

2.2. Les F-normes auto-duales.

On suppose ici que $2 \in \mathcal{O}_F^\times$ (q est impair).

2.2.1. Soit (V,ϕ) un F-espace quadratique : V est un F-espace vectoriel de dimension finie et $\phi : V \times V \to F$ est une forme F-bilinéaire symétrique et non dégénérée. Notant $\Delta_\phi : V \to V^\vee$ l'isomorphisme $x \mapsto (y \mapsto \phi(x,y))$, la formule

$$\overline{\alpha}(x) = \alpha^\vee(\Delta_\phi(x)) = \sup_{y\in V,\, y\neq 0} \frac{|\phi(x,y)|}{\alpha(y)}$$

définit une involution de $\mathcal{N}(V)$. On dit que α est auto-duale[2] si $\overline{\alpha} = \alpha$ et on note $\mathcal{I}(V,\phi)$ le sous-ensemble ainsi défini de $\mathcal{N}(V)$: c'est l'immeuble de Bruhat-Tits du groupe $SO(V,\phi)$, cf. [3, Théorème 2.12]. On munit cet immeuble de la distance notée d dans [3, §2.14].

2.2.2. Si (V,ϕ) est anisotrope, $\mathcal{I}(V,\phi) = \{|Q|^{1/2}\}$ où $Q(x) = \frac{1}{2}\phi(x,x)$ est la forme quadratique associée à ϕ [5, Th. 4.1]. En particulier, si $V = Fv$ est de dimension 1 et $\alpha \in \mathcal{N}(V)$, alors $\alpha \in \mathcal{I}(V,\phi)$ si et seulement si $\alpha(v)^2 = |Q(v)|$.

2.2.3. Si (V,ϕ) est un F-plan hyperbolique dont les droites isotropes sont Fe_+ et Fe_-, $\mathcal{I}(V,\phi)$ est l'ensemble des normes $\alpha \in \mathcal{N}(V)$ qui se décomposent selon $V = Fe_+ \oplus Fe_-$ avec $\alpha(e_+)\cdot\alpha(e_-) = |\phi(e_+,e_-)|$. L'application qui à $\rho \in \mathbf{R}$ associe l'unique norme $\alpha \in \mathcal{I}(V,\phi)$ telle que $\alpha(e_+) = q^\rho$ est une bijection $\mathbf{R} \xrightarrow{\simeq} \mathcal{I}(V,\phi)$.

2.2.4. Si $(V,\phi) = (V_1,\phi_1)\perp(V_2,\phi_2)$ et $\alpha \in \mathcal{I}(V,\phi)$, alors

$$\alpha|V_1 \in \mathcal{I}(V_1,\phi_1) \iff \alpha|V_2 \in \mathcal{I}(V_2,\phi_2) \iff \alpha = \sup\{\alpha|V_1, \alpha|V_2\}.$$

L'application $\alpha \mapsto (\alpha|V_1, \alpha|V_2)$ est une bijection de l'ensemble des normes α de $\mathcal{I}(V,\phi)$ qui se décomposent selon $V = V_1\perp V_2$ sur l'ensemble $\mathcal{I}(V_1,\phi_1)\times\mathcal{I}(V_2,\phi_2)$.

2.2.5. Si $V = V_+ \oplus V_-$ avec $V_\pm$ isotrope, $\alpha \in \mathcal{N}(V)$ et $\alpha_\pm = \alpha|V_\pm$, alors deux quelconques des conditions suivantes impliquent la troisième : (1) $\alpha \in \mathcal{I}(V,\phi)$, (2) $\alpha = \sup\{\alpha_+,\alpha_-\}$, et (3) $\Delta_\phi : (V_-,\alpha_-) \to (V_+,\alpha_+)^\vee$ est un isomorphisme dans $\mathcal{N}$. L'application $\alpha \mapsto \alpha_+$ est une isométrie de l'ensemble des normes $\alpha \in \mathcal{I}(V,\phi)$ qui se décomposent selon $V = V_+ \oplus V_-$ sur l'ensemble $\mathcal{N}(V_+)$.

2.2.6. Pour tout $\alpha \in \mathcal{I}(V,\phi)$, il existe une F-base de Witt de V qui est adaptée à α [3, §2.9-12]. Si $V = V_0\perp(V_+ \oplus V_-)$ est la décomposition de Witt associée, l'application $\alpha \mapsto \alpha|V_+$ est une isométrie de l'ensemble des normes $\alpha \in \mathcal{I}(V,\phi)$ qui se décomposent selon $V = V_0\perp(V_+ \oplus V_-)$ sur l'ensemble $\mathcal{N}(V_+)$.

2.2.7. Soit $\alpha \in \mathcal{I}(V,\phi)$, D une F-droite anisotrope de V, W l'orthogonal de D dans V et ρ le réel défini par $\alpha(v) = q^\rho\,|Q(v)|^{1/2}$ pour tout $v \in D$. Alors $\rho \geq 0$ et

$$\rho = 0 \iff \alpha|D \in \mathcal{I}(D) \iff \alpha|W \in \mathcal{I}(W) \iff V = D\perp W \text{ est adapté à } \alpha$$

d'après 2.2.2 et 2.2.4, où l'on a abrégé $\mathcal{I}(X,\phi|X)$ en $\mathcal{I}(X)$. De plus :

Lemma 2.1. *Si $\rho > 0$ et $D = Fv$, il existe un vecteur $w \in W$ tel que*

$$Q(v) + Q(w) = 0, \quad \alpha(v+w) = q^{+\rho}\,|Q(v)|^{1/2} \quad \textit{et} \quad \alpha(v-w) = q^{-\rho}\,|Q(v)|^{1/2}.$$

Soit w un tel vecteur. Alors $H = Fv\perp Fw$ est un F-plan hyperbolique de V dont les droites isotropes sont $F(v-w)$ et $F(v+w)$, la restriction de α à H est auto-duale et la décomposition $V = H\perp H^\perp$ est adaptée à α.

[2] Ce sont les normes maxi-minorantes pour ϕ de [3, §2] cf. [3, Proposition 2.5].

Démonstration. Soit $V = V_0 \perp \left(\perp_{i\in|I|}(V_i \oplus V_{-i})\right)$ une F-décomposition de Witt adaptée à α : V_0 est anisotrope, $I = \{\pm1, \cdots, \pm r\}$ et $|I| = \{1, \cdots, r\}$ où r est l'indice de Witt de (V, ϕ), et $V_{\pm i}$ sont les droites isotropes du plan hyperbolique $V_i \oplus V_{-i}$. Soit $v = v_0 + \sum_{i\in I} v_i = v_0 + v_+ + v_-$ la décomposition correspondante de v, avec $v_\pm = \sum_{i\in|I|} v_{\pm i}$ de sorte que

$$\alpha(v) = \max\{\alpha(v_0), \alpha(v_i) | i \in I\} \quad \text{et} \quad Q(v) = Q(v_0) + \phi(v_+, v_-).$$

Si $\alpha(v) > \alpha(v_i)$ pour tout $i \in I$, alors $\alpha(v) = \alpha(v_0)$ et

$$|\phi(v_+, v_-)| \leq \alpha(v_+)\alpha(v_-) < \alpha(v_0)^2 = |Q(v_0)|$$

donc $|Q(v)| = |Q(v_0)| = \alpha(v_0)^2 = \alpha(v)^2$ (d'après 2.2.2), ce qui contredit notre hypothèse $\rho > 0$. Il existe donc un indice $i \in I$ tel que $\alpha(v) = \alpha(v_i)$. En particulier, $v_i \neq 0$. Soit d l'unique vecteur de V_{-i} tel que $\phi(v_i, d) = \phi(v, v)$. Si $w = v - d \in V$,

$$\phi(v, w) = \phi(v, v) - \phi(v, d) = \phi(v, v) - \phi(v_i, d) = 0$$

donc $w \in W$ et $Q(v) + Q(w) = Q(v - w) = Q(d) = 0$. D'autre part,

$$\alpha(v)\alpha(v - w) = \alpha(v_i)\alpha(d) = |\phi(v_i, d)| = |Q(v)|$$

car $\alpha|V_i \oplus V_{-i}$ est auto-duale. Puisque $\alpha(v) = q^\rho |Q(v)|^{1/2}$, on en déduit que

$$\alpha(v - w) = q^{-\rho} |Q(v)|^{1/2} < \alpha(v) \quad \text{donc} \quad \alpha(w) = \alpha(v) = \alpha(v + w) = q^\rho |Q(v)|^{1/2}$$

et w convient. La seconde partie de l'énoncé résulte de 2.2.3 et 2.2.4. □

2.2.8. Avec les notations de la section précédente, $\mathcal{I}(W)$ s'identifie au sous-ensemble convexe de $\mathcal{I}(V)$ formé des α pour lesquelles $\rho = 0$. Soit $s \in O(V, \phi)$ la symétrie orthogonale fixant W. Pour tout $\alpha \in \mathcal{I}(V)$, on note $\mathrm{pr}\alpha$ le milieu du segment $[\alpha, s\alpha]$ de $\mathcal{I}(V)$ où $s\alpha = \alpha \circ s \in \mathcal{I}(V)$. Si $\rho = 0$, $s\alpha = \alpha = \mathrm{pr}\alpha$. Sinon, soient v, w et $H = Fv \perp Fw$ comme dans le lemme 2.1. La décomposition $V = H \perp H^\perp$ est alors adaptée à α, $s\alpha$ et $\mathrm{pr}\alpha$, ces trois normes coïncident sur $H^\perp$ et pour $\epsilon \in \{\pm1\}$,

$$\alpha(v + \epsilon w) = q^{r+\epsilon\rho}, \quad s\alpha(v + \epsilon w) = q^{r-\epsilon\rho} \quad \text{et} \quad \mathrm{pr}\alpha(v + \epsilon w) = q^r$$

où $|Q(v)| = q^{2r}$. Dans tous les cas, on a donc $\mathrm{pr}\alpha \in \mathcal{I}(W)$ et $\mathrm{dist}(\alpha, \mathrm{pr}\alpha) = \rho$. Il résulte alors du lemme suivant que $\mathrm{pr}\alpha$ est la *projection convexe* de α sur $\mathcal{I}(W)$.

Lemma 2.2. *Pour $x \in \{1, 2\}$, soient $\alpha_x \in \mathcal{I}(V)$ et $\rho_x \in \mathbf{R}$ tels que $\alpha_x(v) = q^{r+\rho_x}$. Alors :* $\mathrm{dist}(\alpha_1, \alpha_2) \geq |\rho_1 - \rho_2|$.

Démonstration. Soient $V = V_0 \perp \left(\perp_{i\in|I|}(V_i \oplus V_{-i})\right)$ une F-décomposition de Witt simultanément adaptée à α_1 et α_2 (dont l'existence est un corollaire de [3, Th. 2.12]), e_i une F-base de V_i telle que $\phi(e_i, e_{-i}) = 1$, $v = v_0 + \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$ les coordonnées de v dans cette base, ℓ_0 et $\ell_i \in \mathbf{Z} \cup \{\infty\}$ les valuations de $Q(v_0)$ et λ_i, et $\alpha_{x,i} = -\alpha_{x,-i}$ le réel défini par $\alpha_x(e_i) = q^{\alpha_{x,i}}$. Alors

$$\alpha_x(v) = \max\{\alpha_x(v_0), \max\{|\lambda_i| \alpha_x(e_i) : i \in I\}\} \quad \text{avec } \alpha_x(v_0) = |Q(v_0)|^{1/2}$$

donc $r + \rho_x = \max\left\{\frac{-\ell_0}{2}, \max\{\alpha_{x,i} - \ell_i | i \in I\}\right\}$ et

$$|\rho_1 - \rho_2| \leq \max\{|\alpha_{1,i} - \alpha_{2,i}| : i \in I\} \leq \sqrt{\sum_{i\in|I|}(\alpha_{1,i} - \alpha_{2,i})^2}$$

qui n'est autre que la distance $\mathrm{dist}(\alpha_1, \alpha_2)$. □

3. Les K-espaces vectoriels F-normés

3.1. La catégorie $\mathcal{N}$.

3.1.1. *Définition.* Un K-espace vectoriel F-normé est un K-espace vectoriel V, de dimension finie, muni d'une F-norme $\alpha : V \to \mathbf{R}_+$. Un morphisme de K-espace vectoriel F-normé $f : (V_1, \alpha_1) \to (V_2, \alpha_2)$ est une application K-linéaire $f : V_1 \to V_2$ compatible avec les normes : $\alpha_2(f(x)) \leq \alpha_1(x)$ pour tout $x \in V_1$. On note $\mathcal{N}$ la catégorie ainsi définie. C'est une catégorie additive et $\mathcal{O}_F$-linéaire.

3.1.2. *Filtration.* Pour tout $0 \neq (V, \alpha) \in \mathcal{N}$, on note $n(V, \alpha)$ le plus petit entier $n \geq 0$ tel que $\mathcal{O}_n \subset \mathrm{End}(V, \alpha)$: c'est le conducteur de (V, α). On convient de ce que $n(0) = 0$. On note $\mathcal{N}_n$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{N}$ formée des objets de conducteur inférieur ou égal a n. C'est une catégorie additive et $\mathcal{O}_n$-linéaire.

3.1.3. *Hom internes.* Si (V_1, α_1) et (V_2, α_2) sont deux objets de $\mathcal{N}$, on définit

$$\underline{\mathrm{Hom}}\left((V_1, \alpha_1), (V_2, \alpha_2)\right) \quad = \quad (\mathrm{Hom}_K(V_1, V_2), \alpha) \in \mathcal{N}$$

où pour tout $f \in \mathrm{Hom}_K(V_1, V_2)$,

$$\alpha(f) = \sup_{x \in V_1,\, x \neq 0} \frac{\alpha_2(f(x))}{\alpha_1(x)}.$$

Cette construction définit un bifoncteur bi-additif et $\mathcal{O}_F$-bilinéaire

$$\underline{\mathrm{Hom}}(\bullet, \bullet) : \mathcal{N}^{opp} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}.$$

Pour tout $(V, \alpha) \in \mathcal{N}$, le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}\left(\bullet, (V, \alpha)\right)$ transforme les fibrations en cofibrations tandis que le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}\left((V, \alpha), \bullet\right)$ préserve les cofibrations. En effet, soit $\phi : (X_1, \alpha_1) \twoheadrightarrow (X_2, \alpha_2)$ et $f : X_2 \to V$. Alors

$$\alpha_{\mathrm{Hom}(X_2, V)}(f) = \sup_{x_2 \neq 0} \frac{\alpha(f(x_2))}{\alpha_2(x_2)} = \sup_{x_2 \neq 0} \sup_{\phi(x_1) = x_2} \frac{\alpha(f \circ \phi(x_1))}{\alpha_1(x_1)} = \alpha_{\mathrm{Hom}(X_1, V)}(f \circ \phi).$$

De même, si $\phi : (X_1, \alpha_1) \hookrightarrow (X_2, \alpha_2)$ et $f : V \to X_1$,

$$\alpha_{\mathrm{Hom}(V, X_1)}(f) = \sup_{x \in V,\, x \neq 0} \frac{\alpha_1(f(x))}{\alpha(x)} = \sup_{x \in V,\, x \neq 0} \frac{\alpha_2(\phi \circ f(x))}{\alpha(x)} = \alpha_{\mathrm{Hom}(V, X_2)}(\phi \circ f).$$

3.1.4. *Projection.* Pour tout $(V, \alpha) \in \mathcal{N}$ et $n \in \mathbf{N}$, on note $(V, \alpha)_n = (V, \alpha_n)$ l'objet de $\mathcal{N}$ défini par $\alpha_n(v) = \sup_{\lambda \in \mathcal{O}_n^\times} \alpha(\lambda \cdot v)$. Nous verrons plus bas que ce foncteur est une rétraction de l'inclusion $\mathcal{N}_n \hookrightarrow \mathcal{N}$. D'ores et déjà, il est clair que $(V, \alpha)_n = (V, \alpha)$ si $(V, \alpha) \in \mathcal{N}_n$, puisque alors $\mathcal{O}_n^\times \subset \mathrm{Aut}(V, \alpha)$. De même,

$$(W, \beta) \in \mathcal{N}_n \implies \underline{\mathrm{Hom}}\left((W, \beta), (V, \alpha)\right) = \underline{\mathrm{Hom}}\left((W, \beta), (V, \alpha)_n\right)$$

car pour toute application K-linéaire $f : W \to V$,

$$\sup_{w \in W} \frac{\alpha(f(w))}{\beta(w)} = \sup_{\lambda \in \mathcal{O}_n^\times, w \in W} \frac{\alpha(\lambda \cdot f(w))}{\beta(\lambda \cdot w)} = \sup_{w \in W} \frac{\alpha_n(f(w))}{\beta(w)}$$

si $\mathcal{O}_n^\times \subset \mathrm{Aut}(W, \beta)$.

3.2. **Les objets de dimension 1.**

3.2.1. *Analyse.* Soit (L,α) un K-espace vectoriel F-normé de K-dimension 1. Alors l'ensemble des boules fermées centrées en 0 de α est un drapeau de $\mathcal{O}_F$-réseaux dans L qui est la réunion d'une ou deux classes de F-homothétie.

Considérons d'abord le second cas, celui d'un drapeau de la forme

$$\cdots \subsetneq P_F^{i+1}B_1 \subsetneq P_F^{i+1}B_0 \subsetneq P_F^iB_1 \subsetneq P_F^iB_0 \subsetneq \cdots \quad (i\in\mathbf{Z}).$$

Soit n_0 et n_1 les conducteurs de B_0 et B_1, et $\delta_0>\delta_1>\delta_0-1$ les réels définis par $q^{\delta_0}=\alpha(B_0-B_1)$ et $q^{\delta_1}=\alpha(B_1-P_FB_0)$. Quitte à changer $B_1\subset B_0$ en $P_FB_0\subset B_1$, on peut supposer que $(n_0>n_1)$ ou $(n_0=n_1$ et $\delta_0-\delta_1\leq\frac{1}{2})$. Alors $B_1=\mathcal{R}_{n_0}B_0$ et

$$(n_0=n_1+1) \quad \text{ou} \quad (n_0=n_1=0 \text{ et } K/F \text{ est ramifiée}).$$

Ces conditions déterminent uniquement la classe de F-homothétie de B_0, sauf dans le cas où $n_0=n_1(=0)$ et $\delta_0-\delta_1=\frac{1}{2}$. Posant

$$\begin{cases}\rho &= n_0+\delta_1\\ c &= n_0-\delta_0+\delta_1\end{cases} \iff \begin{cases} n_0 &= \lceil c\rceil\\ \delta_0 &= \rho-c\\ \delta_1 &= \rho-\lceil c\rceil\end{cases}$$

on dira d'un $\mathcal{O}_{n_0}$-générateur e de $B_0=\mathcal{O}_{n_0}\cdot e$ qu'il est *typique de type* (ρ,c).

Dans le premier cas, le drapeau de boules est de la forme

$$\cdots \subsetneq P_F^{i+1}B \subsetneq P_F^iB \subsetneq \cdots \quad (i\in\mathbf{Z})$$

Soit n le conducteur de B, et ρ le réel défini par $q^{\rho-n}=\alpha(B-P_FB)$. On dira d'un $\mathcal{O}_n$-générateur e de $B=\mathcal{O}_n\cdot e$ qu'il *est typique de type* (ρ,n).

3.2.2. *Définitions.* Soit $\widetilde{\mathcal{L}}$ l'ensemble des *types* : les couples $(\rho,c)\in\mathbf{R}^2$ tels que

$$c\geq\delta=\begin{cases}0 & \text{si } K/F \text{ n'est pas ramifiée,}\\ -\frac{1}{2} & \text{si } K/F \text{ est ramifiée.}\end{cases}$$

A un tel type, on associe la F-norme $q^\rho\left\|\cdot\right\|_c$ sur K telle que

$$q^\rho\left\|\lambda\right\|_c=q^{\rho+k}\begin{cases}q^{-c} & \text{si } \pi_F^k\lambda\in\mathcal{O}_n-\mathcal{R}_n\\ q^{-\lceil c\rceil} & \text{si } \pi_F^k\lambda\in\mathcal{R}_n-P_F\mathcal{O}_n\end{cases} \quad \text{où } n=\lceil c\rceil\,.$$

On dit d'un vecteur non nul e d'un K-espace vectoriel F-normé (V,α) qu'il est typique de type $(\rho,c)\in\widetilde{\mathcal{L}}$ si et seulement si pour tout $\lambda\in K$, $\alpha(\lambda\cdot e)=q^\rho\left\|\lambda\right\|_c$. Lorsque $\dim_K V=1$, les vecteurs e de type (ρ,c) dans V sont en bijection avec les isomorphismes $f:(K,q^\rho\left\|\cdot\right\|_c)\to(V,\alpha)$ via $f\mapsto e=f(1)$. Le réel $c=c(V,\alpha)$ est un invariant de (V,α) qui est plus fin que le conducteur : $n(V,\alpha)=\lceil c(V,\alpha)\rceil$.

3.2.3. *Synthèse.* On note $(\mathcal{L},\prec)$ l'ensemble des classes d'isomorphismes de K-espace vectoriel F-normé de K-dimension 1, muni du préordre total défini par

$$[L,\alpha]\prec[L',\alpha'] \iff c(L,\alpha)\leq c(L',\alpha').$$

Proposition 3.1. *L'application qui à $[L,\alpha]\in\mathcal{L}$ associe l'ensemble des types des vecteurs typiques de (L,α) induit une bijection de $\mathcal{L}$ sur l'ensemble quotient de $\widetilde{\mathcal{L}}$ pour la relation d'équivalence engendrée par les relations $(\rho,c)\sim(\rho+1,c)$ ainsi que $(\rho,-\frac{1}{2})\sim(\rho+\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ si K/F est ramifiée.*

3.2.4. *Propriétés.* Soit $(1, \gamma_K)$ une $\mathcal{O}_F$-base de $\mathcal{O}_K$ telle que γ_K soit une uniformisante de $\mathcal{O}_K$ si K/F est ramifiée.

Lemma 3.2. *Soit (L, α) un K-espace vectoriel F-normé de K-dimension 1 et $0 \neq e \in L$. Pour tout $(\rho, c) \in \widetilde{\mathcal{L}}$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) *(L, α) est de type (ρ, c) relativement à la K-base e de L.*

(2) *La F-base $(e, \gamma_K e)$ de L est adaptée à α, $\alpha(e) = q^{\rho - c}$ et $\alpha(\gamma_K e) = q^\rho$.*

Démonstration. Cela résulte des décompositions

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_n - P_F\mathcal{O}_n & = & (\mathcal{O}_F \oplus P_F^n\gamma_K) - \big(P_F \oplus P_F^{n+1}\gamma_K\big) \\ \text{ainsi que} \quad \mathcal{R}_n - P_F\mathcal{O}_n & = & (P_F \oplus P_F^n\gamma_K) - \big(P_F \oplus P_F^{n+1}\gamma_K\big) \end{array}$$

si $n \geq 1$, ou si K/F est ramifiée. □

Lemma 3.3. *Soit (L, α) un K-espace vectoriel F-normé de K-dimension 1 et de conducteur inférieur ou égal à $n \in \mathbf{N}$. Soit e un vecteur non nul de L. Si*

(1) *$n = 0$ et K/F n'est pas ramifiée, ou*

(2) *$n = 0$, K/F est ramifiée et $\alpha(\mu e) \geq q^{-\frac{1}{2}}\alpha(e)$ pour un $\mu \in \mathcal{R}_0 - P_F\mathcal{O}_0$, ou*

(3) *$n > 0$ et $\alpha(\mu e) > q^{-1}\alpha(e)$ pour un $\mu \in \mathcal{R}_n - P_F\mathcal{O}_n$,*

alors e est un vecteur typique de (L, α) et $n(L, \alpha) = n$.

Démonstration. Les cas (1) et (2) sont immédiats. Supposons donc que la condition (3) est vérifiée. Soit B la boule fermée de rayon $\alpha(e)$ dans (L, α), de sorte que $e \in B$ mais $\mu e \notin P_F B$. On sait que le conducteur de B est inférieur ou égal à n. Mais d'autre part, B n'est pas stable par $\mathcal{O}_{n-1}$, car sinon $\mu e \in \mathcal{R}_n B$ serait contenu dans $P_F B$ puisque $\mathcal{R}_n = P_F\mathcal{O}_{n-1}$. Donc B est de conducteur n. Enfin, e est un $\mathcal{O}_n$-générateur de B (i.e. $e \notin \mathcal{R}_n B$) car sinon $\mu e \in \mathcal{R}_n^2 B$ serait contenu dans $P_F B$ puisque $\mathcal{R}_n^2 = P_F^2\mathcal{O}_{n-1} = P_F\mathcal{R}_n \subset P_F\mathcal{O}_n$. □

Corollary 3.4. *Soit $f : (L_1, \alpha_1) \to (L_2, \alpha_2)$ un morphisme entre deux K-espaces vectoriels F-normés de K-dimension 1. On suppose que $c(L_1, \alpha_1) \leq c(L_2, \alpha_2)$. Alors f est un isomorphisme si et seulement si il existe un vecteur e_1 de L_1 tel que $e_2 = f(e_1)$ soit un vecteur typique de (L_2, α_2) avec $\alpha_1(e_1) = \alpha_2(e_2)$.*

Démonstration. Soit e_1 un vecteur de L_1 tel que $e_2 = f(e_1)$ est un vecteur typique de (L_2, α_2), disons de type (ρ_2, c_2). Soit $n = \lceil c_2 \rceil$ le conducteur de (L_2, α_2), qui est par hypothèse supérieur ou égal à celui de (L_1, α_1). Si f est un isomorphisme, $\alpha_1(e_1) = \alpha_2(e_2)$. Inversement, supposons que $\alpha_1(e_1) = \alpha_2(e_2)$. Alors

$$\forall \mu \in \mathcal{R}_n - P_F\mathcal{O}_n : \qquad \alpha_1(\mu e_1) \geq \alpha_2(\mu e_2) > q^{-1}\alpha_2(e_2) = q^{-1}\alpha_1(e_1).$$

D'après le lemme 3.3, e_1 est donc un vecteur typique de (L_1, α_1) et $n(L_1, \alpha_1) = n$. Soit (ρ_1, c_1) le type de e_1, de sorte que $c_1 \leq c_2$ et $n = \lceil c_1 \rceil$. Mais alors

$$\begin{array}{rlcl} & \alpha_1(e_1) = \alpha_2(e_1) & \text{et} & \alpha_1(\mu e_1) \geq \alpha_2(\mu e_2) \quad (\forall \mu \in \mathcal{R}_n - P_F\mathcal{O}_n) \\ \Longrightarrow & q^{\rho_1 - c_1} = q^{\rho_2 - c_2} & \text{et} & q^{\rho_1 - n} \geq q^{\rho_2 - n} \end{array}$$

donc $0 \leq \rho_1 - \rho_2 = c_2 - c_1 \leq 0$ et finalement $(\rho_1, c_1) = (\rho_2, c_2)$. □

Corollary 3.5. *Soit $I \neq \emptyset$ un ensemble fini et $(L, \alpha) \hookrightarrow \oplus_{i \in I}(L_i, \alpha_i)$ une cofibration avec $\dim_K L = \dim_K L_i = 1$ et $c(L, \alpha) \geq c(L_i, \alpha_i)$ pour tout $i \in I$. Il existe alors $j \in I$ tel que $(L, \alpha) \hookrightarrow \oplus_{i \in I}(L_i, \alpha_i) \twoheadrightarrow (L_j, \alpha_j)$ est un isomorphisme dans $\mathcal{N}$.*

Démonstration. Soient e un vecteur de type (ρ, c) dans (L, α) et $n = \lceil c \rceil$ le conducteur de (L, α), de sorte que $(L_i, \alpha_i) \in \mathcal{N}_n$ pour tout $i \in I$ par hypothèse. Identifiant L à son image par la cofibration, on écrit $e = \sum e_i$ avec $e_i \in L_i$, donc $\alpha(\mu e) = \sup \alpha_i(\mu e_i)$ pour tout $\mu \in K$. Supposons d'abord que $P_F \mathcal{O}_n \subsetneq \mathcal{R}_n$ et choisissons $\mu \in \mathcal{R}_n - P_F\mathcal{O}_n$ et $j \in I$ tel que $\alpha_j(\mu e_j) = \alpha(\mu e)$. Alors

$$\alpha_j(\mu e_j) = \alpha(\mu e) > q^{-1}\alpha(e) \geq q^{-1}\alpha_j(e_j).$$

D'après le lemme 3.3, e_j est donc un vecteur typique de (L_j, α_j) et $n(L_j, \alpha_j) = n$. Soit (ρ', c') le type de e_j, de sorte que $c' \leq c$ et $n = \lceil c' \rceil$. Alors

$$\begin{array}{rlcl} & \alpha(e) \geq \alpha_j(e_j) & \text{et} & \alpha(\mu e) = \alpha_j(\mu e_j) \\ \Longrightarrow & q^{\rho - c} \geq q^{\rho' - c'} & \text{et} & q^{\rho - n} = q^{\rho' - n} \end{array}$$

donc $\rho = \rho'$, $c = c'$ et $(L, \alpha) \to (L_j, \alpha_j)$ est un isomorphisme dans $\mathcal{N}$. Lorsque enfin $P_F\mathcal{O}_n = \mathcal{R}_n$, on a $n = 0 = c$ et K/F n'est pas ramifiée. Alors $(L, \alpha) \to (L_j, \alpha_j)$ est un isomorphisme dans $\mathcal{N}$ pour tout $j \in I$ tel que $\alpha_j(e_j) = \alpha(e)$. $\square$

Lemma 3.6. *Pour $i \in \{1, 2\}$, soit (L_i, α_i) un K-espace vectoriel F-normé de K-dimension 1 et de type (ρ_i, c_i) relativement à une K-base e_i de L_i. On suppose que (L_1, α_1) et (L_2, α_2) ont le même conducteur $n = \lceil c_1 \rceil = \lceil c_2 \rceil$ et on note $e : L_1 \to L_2$ l'application K-linéaire qui envoit e_1 sur e_2. Alors $(L, \alpha) = \underline{\mathrm{Hom}}((L_1, \alpha_1), (L_2, \alpha_2))$ est de type $(\rho_2 - \rho_1 + c_1, \min(c_1, c_2))$ relativement à la K-base e de L.*

Démonstration. Pour tout $\lambda \in \mathcal{O}_n - P_F\mathcal{O}_n$,

$$\begin{aligned} \alpha(\lambda \cdot e) &= \sup_{\mu \in K - \{0\}} \frac{\alpha_2(\lambda\mu \cdot e_2)}{\alpha_1(\mu \cdot e_1)} \\ &= q^{\rho_2 - \rho_1} \sup_{\mu \in \mathcal{O}_n - P_F\mathcal{O}_n} \frac{\|\lambda\mu\|_{c_2}}{\|\mu\|_{c_1}} \\ &= q^{\rho_2 - \rho_1} \max\left\{ q^{c_1} \sup_{\mu \in \mathcal{O}_n - \mathcal{R}_n} \|\lambda\mu\|_{c_2}, q^{\lceil c_1 \rceil} \sup_{\mu \in \mathcal{R}_n - P_F\mathcal{O}_n} \|\lambda\mu\|_{c_2} \right\} \\ &= q^{\rho_2 - \rho_1 + c_1} \begin{cases} q^{-\min(c_1, c_2)} & \text{si } \lambda \in \mathcal{O}_n - \mathcal{R}_n \\ q^{-\lceil \min(c_1, c_2) \rceil} & \text{si } \lambda \in \mathcal{R}_n - P_F\mathcal{O}_n \end{cases} \end{aligned}$$

puisque $\mathcal{O}_n - \mathcal{R}_n = \mathcal{O}_n^\times$, $\mathcal{O}_n^\times \cdot \mathcal{O}_n^\times = \mathcal{O}_n^\times$, $\mathcal{O}_n^\times \cdot (\mathcal{R}_n - P_F\mathcal{O}_n) = \mathcal{R}_n - P_F\mathcal{O}_n$ et

$$(\mathcal{R}_n - P_F\mathcal{O}_n) \cdot (\mathcal{R}_n - P_F\mathcal{O}_n) \subset \begin{cases} P_F^2\mathcal{O}_n & \text{si } n > 0, \\ P_F\mathcal{O}_K & \text{si } n = 0 \text{ et } K/F \text{ est ramifiée,} \\ \emptyset & \text{si } n = 0 \text{ et } K/F \text{ est inerte.} \end{cases}$$

Donc e est bien un vecteur typique du type indiqué dans (L, α). $\square$

Lemma 3.7. *Soit (L, α) un K-espace vectoriel F-normé de K-dimension 1 et de type (ρ, c) relativement à une K-base e de L. Alors pour tout entier $n < c$, $(L, \alpha)_n$ est de type (ρ, n) relativement à cette même K-base e de L.*

Démonstration. Soit $m = \lceil c \rceil > n$. On doit calculer $\sup \|\mathcal{O}_n^\times \lambda\|_c$ pour $\lambda \in \mathcal{O}_n - P_F\mathcal{O}_n$. Posons $\kappa_i = \mathcal{O}_i^\times - \mathcal{O}_{i+1}^\times$ pour $i \geq 0$, et

$$\kappa_{-1} = \begin{cases} \pi_F^{-1}(\mathcal{R}_0 - P_F\mathcal{O}_0) & \text{si } K/F \text{ est ramifiée,} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_m - P_F\mathcal{O}_m &= \mathcal{O}_m^\times \coprod \coprod_{i=1}^{m+1} \pi_F^i \kappa_{m-i} \\ \mathcal{O}_n - P_F\mathcal{O}_n &= \mathcal{O}_n^\times \coprod \coprod_{i=1}^{n+1} \pi_F^i \kappa_{n-i} \\ \text{et} \qquad \mathcal{O}_n^\times &= \mathcal{O}_m^\times \coprod \coprod_{i=1}^{m-n} \kappa_{m-i} \end{aligned}$$

D'après la première de ces trois formules, $\|\kappa_{m-i}\|_c = q^{i-m}$ pour tout $i \leq m+1$. D'après la troisième, $\sup \|\mathcal{O}_n^\times\|_c = q^{-n}$. Enfin, la seconde montre que $\lambda \in \mathcal{O}_n^\times$ ou $\lambda \in \pi_F^i \kappa_{n-i}$ pour un certain indice $1 \leq i \leq n+1$. Dans le premier cas,

$$\sup \left\|\mathcal{O}_n^\times \lambda\right\|_c = \sup \left\|\mathcal{O}_n^\times\right\|_c = q^{-n}.$$

Dans le second cas, on peut écrire $n - i = m - j$ avec $j = m - n + i \leq m + 1$. Comme $\mathcal{O}_n^\times \kappa_{n-i} \subset \kappa_{n-i}$ (puisque $i \geq 1$) on obtient

$$\left\|\mathcal{O}_n^\times \lambda\right\|_c = \left\|\pi_F^i \kappa_{n-i}\right\|_c = q^{-i} \left\|\kappa_{m-j}\right\|_c = q^{j-m-i} = q^{-n}.$$

Donc $\sup \|\mathcal{O}_n^\times \lambda\|_c = q^{-n}$ pour tout $\lambda \in \mathcal{O}_n - P_F\mathcal{O}_n$. □

3.3. **Dualité.** Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on note $\mathbf{1}_n$ l'objet $(K, \|\bullet\|_n)$ de $\mathcal{N}_n$, où l'on rappelle que $\|\bullet\|_n$ est l'unique F-norme sur K telle que $\|\mathcal{O}_n - P_F\mathcal{O}_n\|_n = q^{-n}$. D'après le lemme 3.7, $(\mathbf{1}_n)_m = \mathbf{1}_m$ si $m \leq n$. Il résulte alors de 3.1.4 que la formule

$$(V, \alpha)^\star = (V^\star, \alpha^\star) = \underline{\mathrm{Hom}}\left((V, \alpha), \mathbf{1}_n\right) \quad \text{si } n \geq n(V, \alpha)$$

définit un *foncteur* $\mathcal{N}^{opp} \to \mathcal{N}$. On dit que $(V, \alpha)^\star$ est le *dual* de (V, α).

Proposition 3.8. *Ce foncteur est exact : il échange fibration et cofibration.*

Démonstration. Compte tenu des résultats de 3.1.3, il suffit de vérifier que le dual d'une cofibration $\phi : (V_1, \alpha_1) \hookrightarrow (V_2, \alpha_2)$ est une fibration, c'est-à-dire que pour tout $\lambda > 0$, l'application induite sur les boules

$$\phi^\star_{\leq \lambda} : B(\alpha_2^\star \leq \lambda) \to B(\alpha_1^\star \leq \lambda)$$

est *surjective*. Le lemme suivant identifie $\phi^\star_{\leq\lambda}$ au $\mathcal{O}_n$-dual de l'injection

$$\phi_{<\mu} : B(\alpha_1 < \mu) \hookrightarrow B(\alpha_2 < \mu)$$

avec $\mu = q^{1-n}\lambda^{-1}$, pour un entier n suffisament grand. Puisque ϕ est une cofibration, le conoyau M de $\phi_{<\mu}$ est un $\mathcal{O}_n$-module de type fini sans torsion, qui s'injecte donc dans un $\mathcal{O}_n$-module libre L. Alors

$$\mathrm{coker}\phi^\star_{\leq\lambda} \subset \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_n}(M, \mathcal{O}_n) \subset \mathrm{Ext}^2_{\mathcal{O}_n}(L/M, \mathcal{O}_n) = 0$$

car $\dim \mathrm{inj}_{\mathcal{O}_n} \mathcal{O}_n = \dim \mathcal{O}_n = 1$, cf. [1]. □

Lemma 3.9. *Pour tout* $(V, \alpha) \in \mathcal{N}_n$ *et* $\lambda \in \mathbf{R}_{>0}$,

$$B(\alpha^\star \leq \lambda) \simeq \mathrm{Hom}\left(B(\alpha < q^{1-n}\lambda^{-1}), \mathcal{O}_n\right).$$

Démonstration. Pour toute forme linéaire $f : V \to K$,

$$\alpha^\star(f) \leq \lambda \iff \forall x : \quad \|f(x)\|_n \leq \lambda\alpha(x).$$

Donc $\alpha^\star(f) \leq \lambda$ implique que $f(x) \in \mathcal{O}_n$ pour tout $x \in V$ tel que $\lambda\alpha(x) < q^{1-n}$. Inversement, supposons que f vérifie cette condition. Soit $L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_k \subset V$ les boules fermées de rayon compris dans $[q^{-n}\lambda^{-1}, q^{1-n}\lambda^{-1}[$ et $L_0 = P_F L_k$, de sorte que $L_k = B(\alpha < q^{1-n}\lambda^{-1})$ et $f(L_i) \subset \mathcal{O}_n$ pour tout i. Pour tout $x \in V - \{0\}$, il existe $k \in \mathbf{Z}$ et $1 \leq i \leq k$ tels que $\pi_F^k x \in L_i - L_{i-1}$, donc

$$\alpha(x) = q^k \alpha(L_i - L_{i-1}) \in [q^{k-n}\lambda^{-1}, q^{k+1-n}\lambda^{-1}[$$

tandis que $f(x) \in \pi^{-k} f(L_i) \subset \pi^{-k}\mathcal{O}_n$, donc

$$\|f(x)\|_n \leq q^{k-n} \leq \lambda\alpha(x)$$

et finalement $\alpha^\star(f) \leq \lambda$. □

Lemma 3.10. *Soit (L, α) un K-espace vectoriel F-normé de K-dimension 1 et de type (ρ, c) relativement à une K-base e de L. Alors $(L^\star, \alpha^\star)$ est de type $(c - \rho, c)$ relativement à la K-base duale $e^\star$ de $L^\star$.*

Démonstration. Cela résulte immédiatement du lemme 3.6. □

Theorem 3.11. *Le foncteur $(V, \alpha) \mapsto I(V, \alpha) = (V, \alpha)^\star$ est une dualité sur $\mathcal{N}$. Plus précisément, les isomorphismes de bidualité $\delta_{K,V} : V \to V^{\star\star}$ pour les K-espaces vectoriels induisent un isomorphisme d'endofoncteur $\delta_K : \mathbf{Id}_{\mathcal{N}} \to I \circ I$.*

Démonstration. On vérifie d'abord aisément que l'endofoncteur δ_K est bien défini : pour tout $(V, \alpha) \in \mathcal{N}$, $\delta_{K,V} : (V, \alpha) \to (V, \alpha)^{\star\star}$ est un morphisme de $\mathcal{N}$. Si $\dim_K V = 1$ et (V, α) est de type (ρ, c) relativement à une K-base e de V, $(V^\star, \alpha^\star)$ est de type $(c - \rho, c)$ relativement à la K-base duale $e^\star$ de $V^\star$ et $(V^{\star\star}, \alpha^{\star\star})$ est à nouveau de type (ρ, c) relativement à la K-base biduale $e^{\star\star} = \delta_{K,V}(e)$ de $V^{\star\star}$. Donc $\delta_{K,V}$ est un isomorphisme dans $\mathcal{N}$ lorsque V est de dimension 1, ou plus généralement lorsque (V, α) est une somme directe d'objets de dimension 1. Or d'après le lemme suivant, tout objet (V, α) de $\mathcal{N}$ est le but d'une fibration $(E, \gamma) \twoheadrightarrow (V, \alpha)$ dont la source est une telle somme directe. On obtient alors un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} (E, \gamma) & \twoheadrightarrow & (V, \alpha) \\ \delta_{K,E} \downarrow\simeq & & \downarrow \delta_{K,V} \\ (E, \gamma)^{\star\star} & \twoheadrightarrow & (V, \alpha)^{\star\star} \end{array}$$

où la deuxième ligne est encore une fibration par exactitude de $\star$. On en déduit que la bijection $\delta_{K,V}$ est une fibration, donc un isomorphisme dans $\mathcal{N}$. □

Lemma 3.12. *Pour tout $(V, \alpha) \in \mathcal{N}$, il existe une fibration*

$$(W, \beta) = \oplus_{i=1}^{\dim_F V} (L_i, \alpha_i) \twoheadrightarrow (V, \alpha)$$

avec $(L_i, \alpha_i) \hookrightarrow (V, \alpha)$ et $\dim_K L_i = 1$ pour tout $1 \leq i \leq \dim_F V$.

Démonstration. Soit (e_i) une F-base de V adaptée à α (2.1.4), α_i la restriction de α à Ke_i, $W = \oplus Ke_i$ et $\beta = \sup\{\alpha_i\} \in \mathcal{N}(W)$. L'application qui envoie l'élément $\sum \lambda_i e_i$ de W sur $\sum \lambda_i e_i \in V$ est alors une fibration, car pour tout $v = \sum \lambda_i e_i \in V$ (avec les $\lambda_i \in F$), on a $\alpha(v) = \sup\{\alpha(\lambda_i e_i)\} = \sup\{\alpha_i(\lambda_i e_i)\} = \beta(\sum \lambda_i e_i)$. □

3.4. **Théorème de structure.** Soit $x = (V, \alpha)$ un K-espace vectoriel F-normé. On note $\mathcal{S}(x)$ l'ensemble des K-droites de V et on plonge $\mathcal{S}(x)$ dans $\mathcal{N}$ en munissant chacune de ces droites $L \subset V$ de la norme α_L induite par α, qui donne donc une cofibration $(L, \alpha_L) \hookrightarrow (V, \alpha)$. De même, on note $\mathcal{Q}(x)$ l'ensemble des quotients de K-dimension 1 de V, plongé dans $\mathcal{N}$ en munissant chacun de ces quotients $V \twoheadrightarrow L$ de la norme α_L induite par α, de sorte que $(V, \alpha) \twoheadrightarrow (L, \alpha_L)$ est une fibration. On note $\overline{\mathcal{S}}(x)$ et $\overline{\mathcal{Q}}(x)$ les images de $\mathcal{S}(x)$ et $\mathcal{Q}(x)$ dans l'ensemble $\mathcal{L}$ des classes d'isomorphisme de K-droites F-normées. Pour $\mathcal{Z} \in \{\mathcal{S}, \mathcal{Q}\}$ et $\theta \in \overline{\mathcal{Z}}(x)$, on note enfin $\mathcal{Z}(x, \theta)$ la fibre de $\mathcal{Z}(x) \to \overline{\mathcal{Z}}(x)$ au-dessus de θ.

Proposition 3.13. *Soit $x \neq 0$ un K-espace vectoriel F-normé et $\mathcal{Z} \in \{\mathcal{S}, \mathcal{Q}\}$. Alors $\overline{\mathcal{Z}}(x)$ est fini et pour tout élément* maximal *θ de $\overline{\mathcal{Z}}(x)$ (pour l'ordre induit par $\prec$ sur $\overline{\mathcal{Z}}(x) \subset \mathcal{L}$), tout élément $y \in \mathcal{Z}(x, \theta)$ est un facteur direct de x.*

Démonstration. Soit $x = (V, \alpha)$. Pour tout $y = (L, \alpha_L) \in \mathcal{Z}(x)$, l'image de la norme $\alpha_L : L \to \mathbf{R}_{\geq 0}$ est incluse dans celle de $\alpha : V \to \mathbf{R}_{\geq 0}$, qui est elle-même une réunion finie d'ensembles de la forme $\{0\} \cup q^{\rho+\mathbf{Z}}$ avec $\rho \in \mathbf{R}$. De plus, le conducteur de y est inférieur ou égal à celui de x. Au regard de la classification établie en 3.2.3, il est donc clair que $\overline{\mathcal{Z}}(x)$ est fini. Soit θ un élément maximal de $\overline{\mathcal{S}}(x) \cup \overline{\mathcal{Q}}(x)$ et supposons d'abord que $\theta \in \overline{\mathcal{Q}}(x)$. D'après le lemme 3.12, il existe une fibration $\oplus y_i \twoheadrightarrow x$ avec $y_i \in \mathcal{S}(x)$. Pour tout $y \in \mathcal{Q}(x, \theta)$, on obtient donc une fibration $\oplus y_i \twoheadrightarrow x \twoheadrightarrow y$ dont le dual est une cofibration $y^\star \hookrightarrow \oplus y_i^\star$ (proposition 3.8). Puisque $c(y^\star) = c(y) \geq c(y_i) = c(y_i^\star)$, il résulte du lemme 3.5 qu'il existe un indice i tel que cette cofibration induit un isomorphisme $y_i^\star \simeq y^\star$. Appliquant à nouveau le foncteur de dualité, on en déduit que le sous-objet y_i de x scinde la cofibration $x \twoheadrightarrow y$, donc y est un facteur direct de x. Si $\theta \in \overline{\mathcal{S}}(x)$ et $y = (L, \alpha) \in \mathcal{S}(x, \theta)$ on démontre de même que y est un facteur direct de x, en utilisant le dual du lemme 3.12 pour produire une cofibration $x \hookrightarrow \oplus y_i$ (il suffit d'appliquer ce lemme à $x^\star$, puis de redualiser). On peut aussi appliquer le résultat précédent à $y^\star \in \mathcal{Q}(x^\star, \theta^\star)$, puisque $\theta^\star$ est encore un élément maximal de $\overline{\mathcal{S}}(x^\star) \cup \overline{\mathcal{Q}}(x^\star)$. On a ainsi démontré que pour tout élément maximal θ de $\overline{\mathcal{S}}(x) \cup \overline{\mathcal{Q}}(x)$, les éléments correspondants de $\mathcal{S}(x, \theta)$ ou $\mathcal{Q}(x, \theta)$ sont des facteurs directs de x. Donc $\theta \in \overline{\mathcal{S}}(x) \cap \overline{\mathcal{Q}}(x)$ et $\overline{\mathcal{S}}(x)$ et $\overline{\mathcal{Q}}(x)$ ont les mêmes éléments maximaux, ce qui achève la démonstration de la proposition. $\square$

Theorem 3.14. (1) *Tout objet de $\mathcal{N}$ est une somme directe de sous-objets de dimension* 1. (2) *Si $\oplus_{i \in I}(L_i, \alpha_i) \simeq \oplus_{j \in J}(M_j, \beta_j)$ avec $\dim_K L_i = \dim_K M_j = 1$, il existe une bijection $\sigma : I \to J$ telle que pour tout $i \in I$, $(L_i, \alpha_i) \simeq (M_{\sigma(i)}, \beta_{\sigma(i)})$.*

Démonstration. Pour (1), cela résulte de la proposition précédente par récurrence sur la dimension des objets. Pour (2), soit $c = \max\{c(L_i, \alpha_i), c(M_j, \beta_j); i \in I, j \in J\}$ et supposons par exemple que $c = c(L_{i_0}, \alpha_{i_0})$. Si $f : \oplus_{i \in I}(L_i, \alpha_i) \to \oplus_{j \in J}(M_j, \beta_j)$ est un isomorphisme, il résulte du corollaire 3.5 qu'existe un indice $j_0 \in J$ tel que f induit un isomorphisme

$$(L_{i_0}, \alpha_{i_0}) \hookrightarrow \oplus_{i \in I}(L_i, \alpha_i) \xrightarrow{f} \oplus_{j \in J}(M_j, \beta_j) \twoheadrightarrow (M_{j_0}, \beta_{j_0}).$$

On conclut par récurrence sur la dimension $|I| = |J|$ grace au lemme suivant. $\square$

Lemma 3.15. *Soit $a : x \to x'$, $b : x \to y'$, $c : y \to x'$ et $d : y \to y'$ des morphismes de $\mathcal{N}$. Si $f = \left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) : x \oplus y \to x' \oplus y'$ et $a : x \to x'$ sont des isomorphismes, alors $e = (-ba^{-1}c + d)$ est un isomorphisme $e : y \to y'$.*

Démonstration. Notant $g = \left(\begin{smallmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{smallmatrix}\right) : x' \oplus y' \to x \oplus y$ l'inverse de f, on a

$$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{x'} & \\ & \mathbf{1}_{y'} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right) \circ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{x} & \\ & \mathbf{1}_{y} \end{pmatrix}$$

d'où l'on déduit que $e \circ d' = \mathbf{1}_{y'}$ et $d' \circ e = \mathbf{1}_y$. $\square$

3.5. **Produit tensoriel.** Soient (V_1, α_1) et (V_2, α_2) deux K-espaces vectoriels F-normés. On vérifie facilement que la transposition

$$t : \underline{\mathrm{Hom}}\left((V_1, \alpha_1), (V_2, \alpha_2)\right) \to \underline{\mathrm{Hom}}\left((V_2, \alpha_2)^\star, (V_1, \alpha_1)^\star\right)$$

est un morphisme dans $\mathcal{N}$. Comme $t \circ t$ est un isomorphisme dans $\mathcal{N}$ d'après le théorème 3.11, t est une cofibration bijective, donc un isomorphisme dans $\mathcal{N}$. On peut donc définir un produit tensoriel

$$(V_1, \alpha_1) \otimes (V_2, \alpha_2) = (V_1 \otimes_K V_2, \alpha_1 \otimes \alpha_2)$$

où $\alpha_1 \otimes \alpha_2$ est la norme sur l'espace sous-jacent $V_1 \otimes_K V_2$ de

$$\underline{\mathrm{Hom}}\left((V_1,\alpha_1)^\star,(V_2,\alpha_2)\right) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}\left((V_2,\alpha_2)^\star,(V_1,\alpha_1)\right).$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier les formules d'adjonction entre $\underline{\mathrm{Hom}}$ et $\otimes$.

Ce produit tensoriel envoie $\mathcal{N}_n \times \mathcal{N}_m$ dans $\mathcal{N}_{\min(n,m)}$. En particulier, il munit $\mathcal{N}_n$ d'un produit tensoriel $\mathcal{O}_n$ -bilinéaire $\mathcal{N}_n \times \mathcal{N}_n \to \mathcal{N}_n$ qui admet $\mathbf{1}_n$ pour objet neutre. En fait, l'isomorphisme évident entre l'endofoncteur $V \mapsto K \otimes V$ et l'identité $V \mapsto V$ de la catégorie des K-espaces vectoriels induit un isomorphisme entre les foncteurs $\mathcal{N} \to \mathcal{N}_n$ qui envoient respectivement $x = (V,\alpha)$ sur $\mathbf{1}_n \otimes x$ et $x_n = (V,\alpha_n)$. Il suffit de le vérifier pour les objets de K-dimension 1 (d'après le théorème 3.14), pour lesquels cela résulte du lemme 3.7 et du formulaire ci-dessous.

Lemma 3.16. *Pour $i=1,2$, soit (L_i,α_i) un K-espace vectoriel F-normé de K-dimension 1 et de type (ρ_i,c_i) relativement à une K-base e_i de L_i. Alors $e_1 \otimes e_2$ est un vecteur typique de type $(\rho_1+\rho_2,\min(c_1,c_2))$ de $(L_1,\alpha_1)\otimes(L_2,\alpha_2)$.*

Démonstration. Compte tenu de 3.1.4, cela résulte des lemmes 3.6 et 3.7. □

3.6. **Groupe de Grothendieck.** Le théorème 3.14 montre que $K_0\mathcal{N}$ s'identifie au groupe abélien libre $\mathbf{Z}[\mathcal{L}]$ engendré par l'ensemble $\mathcal{L}$ qui est décrit dans la proposition 3.1. Le produit tensoriel et le conducteur munissent ce groupe libre d'une structure d'anneau commutatif (non unitaire) et d'une filtration. Le lemme 3.16 montre que le n-ième étage de cette filtration est l'idéal principal engendré par l'idempotent $[\mathbf{1}_n]$ de $K_0\mathcal{N}$; c'est un sous-anneau unitaire de $K_0\mathcal{N}$ qui s'identifie au groupe de Grothendieck $K_0\mathcal{N}_n$ de la sous-catégorie $\mathcal{N}_n$ de $\mathcal{N}$.

3.7. ***F*-dualité et *K*-dualité.** On dispose maintenant de deux dualités sur $\mathcal{N}$:

$$J(V,\alpha) = (V^\vee,\alpha^\vee) \quad \text{et} \quad I(V,\alpha) = (V^\star,\alpha^\star)$$

où $V^\star = \mathrm{Hom}_K(V,K)$ et $V^\vee = \mathrm{Hom}_F(V,F)$ est muni de la structure de K-espace vectoriel définie par $(\lambda\phi)(v) = \phi(\lambda v)$. Pour comparer ces dualités, nous aurons besoin de l'endofoncteur S de $\mathcal{N}$ qui à (V,α) associe $(V, v \mapsto \alpha(\omega_K v))$ où ω_K^{-1} est un $\mathcal{O}_F$-générateur de $\mathcal{D}_K^0$. Ce foncteur est bien défini puisque $\mathcal{O}_F^\times \omega_K$ l'est.

Proposition 3.17. *Les isomorphismes de K-espaces vectoriels*

$$\mathrm{Tr} : V^\star = \mathrm{Hom}_K(V,K) \xrightarrow{\simeq} V^\vee = \mathrm{Hom}_F(V,F)$$

induisent un isomorphisme d'endofoncteur $\mathrm{Tr} : S \circ I \xrightarrow{\simeq} J$. Concrètement, cela signifie que pour tout $(V,\alpha) \in \mathcal{N}$ et $\phi \in V^\star$, $\alpha^\vee(\mathrm{Tr}\phi) = \alpha^\star(\omega_K\phi)$.

Démonstration. Soit $(1,\gamma_K)$ une $\mathcal{O}_F$-base de $\mathcal{O}_K$ telle que γ_K soit une uniformisante de $\mathcal{O}_K$ si K/F est ramifiée. On note $(1^\vee,\gamma_K^\vee)$ la $\mathcal{O}_F$-base duale de $\mathcal{D}_K$ relativement à $\mathrm{Tr} : \mathcal{O}_K \otimes \mathcal{D}_K \to \mathcal{O}_F$, de sorte que $\mathcal{D}_K^0 = \mathcal{O}_F\gamma_K^\vee$. On prend $\omega_K^{-1} = \gamma_K^\vee$.

D'après le théorème 3.14, il suffit de démontrer la proposition lorsque (V,α) est de K-dimension 1 et de type (ρ,c) relativement à une K-base e de V. Soient β_1 et β_2 les normes sur $V^\star$ définies par $\beta_1(\phi) = \alpha^\star(\omega_K\phi)$ et $\beta_2(\phi) = \alpha^\vee(\mathrm{Tr}(\phi))$. D'après le lemme 3.10, $(V^\star,\alpha^\star)$ est de type $(c-\rho,c)$ relativement à la K-base duale $e^\star$ de $V^\star$, donc $(V^\star,\beta_1)$ est de type $(c-\rho,c)$ relativement à $e' = \gamma_K^\vee e^\star$. D'autre part, le lemme 3.2 montre que $(e,\gamma_K e)$ est une F-base de V adaptée à α avec $\alpha(e) = q^{\rho-c}$ et $\alpha(\gamma_K e) = q^\rho$. La F-base duale $(e^\vee,(\gamma_K e)^\vee)$ est donc adaptée à $\alpha^\vee$ avec $\alpha^\vee(e^\vee) = q^{c-\rho}$ et $\alpha^\vee((\gamma_K e)^\vee) = q^{-\rho}$. Puisque

$$(e^\vee,(\gamma_K e)^\vee) = (\mathrm{Tr}(1^\vee e^\star),\mathrm{Tr}(\gamma_K^\vee e^\star)) = (\mathrm{Tr}(-\overline{\gamma}_K \cdot e'),\mathrm{Tr}(e')),$$

on en déduit que $(e', -\overline{\gamma}_K e')$ est une F-base de $V^\star$ adaptée à $\beta_2 = \alpha^\vee \circ \mathrm{Tr}$ avec $\beta_2(e') = q^{-\rho}$ et $\beta_2(-\overline{\gamma}_K e') = q^{c-\rho}$. Une nouvelle application du lemme 3.2 montre enfin que $(V^\star, \beta_2)$ est de type $(c-\rho, c)$ relativement à e', donc $\beta_1 = \beta_2$ sur $V^\star$. $\square$

4. Les K-espaces Hermitiens F-normés

On suppose dorénavant que $2 \in \mathcal{O}_F^\times$. On fixe une $\mathcal{O}_F$-base $(1, \eta)$ de $\mathcal{O}_K$ telle que $\mathrm{Tr}\eta = 0$. Alors η est une uniformisante de $\mathcal{O}_K$ si K/F est ramifiée et η^{-1} est un $\mathcal{O}_F$-générateur de $\mathcal{D}_K^0$. On peut donc prendre $\gamma_K = \eta$ dans le lemme 3.2 et $\omega_K = \eta$ dans la proposition 3.17. On note $\mu = \eta^{-2}$ et $|\mu| = q^{2\delta}$, de sorte que $\delta = 0$ si K/F est inerte et $\delta = \frac{1}{2}$ si K/F est ramifiée.

Pour tout K-espace vectoriel V, on note V^ι le K-espace vectoriel d'espace sous-jacent V muni de l'action de K tordue par l'automorphisme $\lambda \mapsto \overline{\lambda}$ de K/F. On étend cela en un endofoncteur de $\mathcal{N}$ en posant $(V, \alpha)^\iota = (V^\iota, \alpha)$. On vérifie aisément que $(V, \alpha) \simeq (V, \alpha)^\iota$ lorsque $\dim_K V = 1$, donc aussi pour tout $(V, \alpha) \in \mathcal{N}$ d'après le théorème 3.14.

4.1. **La catégorie $\mathcal{M}$.**

4.1.1. *Définition.* Un K-espace Hermitien F-normé est un K-espace Hermitien (V, ψ)[3] muni d'une F-norme $\alpha \in \mathcal{I}(V, \phi)$, où $\phi = \mathrm{Tr}\psi$ est la forme F-bilinéaire symétrique et non dégénérée associée à ψ. Un morphisme de K-espace Hermitien F-normé $f : (V_1, \psi_1, \alpha_1) \to (V_2, \psi_2, \alpha_2)$ est une application K-linéaire $f : V_1 \to V_2$ telle que

$$\forall x, y \in V_1 : \qquad \psi_2(f(x), f(y)) = \psi_1(x, y) \quad \text{et} \quad \alpha_2(f(x)) \leq \alpha_1(x).$$

On note $\mathcal{M}$ la catégorie ainsi définie. C'est une catégorie additive :

$$(V_1, \psi_1, \alpha_1) \oplus (V_2, \psi_2, \alpha_2) = (V_1 \perp V_2, \psi_1 \perp \psi_2, \sup\{\alpha_1, \alpha_2\}).$$

4.1.2. Soit (V, ψ) un K-espace hermitien et $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ l'involution de $\mathcal{N}(V)$ définie par $\phi = \mathrm{Tr}\psi$. Soient $\Delta_\phi : V \to V^{\vee\iota}$ et $\Delta_\psi : V \to V^{\star\iota}$ les K-isomorphismes définis par $\Delta_\phi(x)(y) = \phi(x)(y)$ et $\Delta_\psi(x)(y) = \psi(x)(y)$. Pour tout $\alpha \in \mathcal{N}(V)$, $\overline{\alpha}$ est l'image inverse de la norme $\alpha^\vee$ de $V^{\vee\iota}$ par la flèche Δ_ϕ du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\Delta_\psi"'] \arrow[dr, "\Delta_\phi"] & \\ V^{\star\iota} = \mathrm{Hom}_K(V, K)^\iota \arrow[rr, "\mathrm{Tr}"] & & V^{\vee\iota} = \mathrm{Hom}_F(V, F)^\iota. \end{tikzcd}$$

D'après la proposition 3.17, c'est aussi l'image inverse par Δ_ψ de la norme $\alpha^\star(\eta\bullet)$ de $V^{\star\iota}$, ou encore l'image inverse par $\Delta_{\eta\psi}$ de la norme $\alpha^\star$ de $V^{\star\iota}$. En particulier,

$$\alpha \in \mathcal{I}(V, \phi) \iff \Delta_{\eta\psi} : (V, \alpha) \to (V^\star, \alpha^\star)^\iota \quad \text{est un isomorphisme de } \mathcal{N}.$$

[3]Par convention : V est de dimension finie, ψ est non dégénérée et pour tout $x, y \in V$ et $\lambda \in K$, $\psi(\lambda x, y) = \overline{\lambda}\psi(x, y)$, $\psi(x, \lambda y) = \lambda\psi(x, y)$ et $\psi(y, x) = \overline{\psi(x, y)}$.

4.1.3. Conservant les notations ci-dessus, supposons que $V = V_+ \oplus V_-$ est la somme directe de deux sous-K-espaces vectoriels totalement isotropes (maximaux). Soient $\alpha \in \mathcal{N}(V)$, $\alpha_+ = \alpha|V_+$ et $\alpha_- = \alpha|V_-$. Alors deux quelconques des trois conditions suivantes impliquent la troisième : (1) $\alpha \in \mathcal{I}(V,\phi)$, (2) $\alpha = \sup\{\alpha_+, \alpha_-\}$ (i.e. α se décompose selon $V = V_+ \oplus V_-$), et (3) $\Delta_{\eta\psi} : (V_-, \alpha_-) \to (V_+, \alpha_+)^{\star\iota}$ est un isomorphisme dans $\mathcal{N}$. Cela résulte en effet de 2.2.5, compte tenu de la proposition 3.17. L'application $\alpha \mapsto \alpha_+$ est une isométrie de l'ensemble des normes $\alpha \in \mathcal{I}(V,\phi)$ qui se décomposent selon $V = V_+ \oplus V_-$ sur l'ensemble $\mathcal{N}(V_+)$.

4.1.4. Si (V,ψ) est anisotrope, $\mathcal{I}(V,\phi) = \{|Q(\bullet)|^{1/2}\}$ où $Q(x) = \psi(x,x)$ est la forme quadratique associée à ψ (cf. 2.2.2). Il y a exactement quatre classes d'isomorphismes de K-espaces Hermitiens anisotropes, représentées par 0,

$$A_1 = (K, \overline{x}y), \quad A_\nu = (K, \nu\overline{x}y) \quad \text{et} \quad B = \begin{cases} A_1 \perp A_\nu & \text{si } -1 \in NK^\times \\ A_1^2 \simeq A_\nu^2 & \text{si } -1 \notin NK^\times \end{cases}$$

où ν est un élément quelconque de $F^\times - NK^\times$. Les classes d'isomorphismes des K-espaces vectoriels F-normés sous-jacents sont donc 0, a_1, a_ν et $b = a_1 + a_\nu$ ou $b = 2a_1 = 2a_\nu$ dans $\mathbf{N}[\mathcal{L}]$, où pour tout $f \in F$, on note a_f l'image dans $\mathcal{L}$ du type $(r-\delta, -\delta) \in \widetilde{\mathcal{L}}$ déterminé par $|f| = q^{2r}$.

4.1.5. Une K-décomposition de Witt de (V,ψ) est une décomposition

$$(V,\psi) = (V_0,\psi_0) \perp \left(\perp_{i=1}^r (D_i \oplus D_{-i}, \psi_i)\right) \tag{4.1}$$

où (V_0,ψ_0) est anisotrope et $H_i = D_i \oplus D_{-i}$ est une décomposition du K-plan hyperbolique H_i de V en somme directe de deux K-droites isotropes. La classe d'isomorphisme de (V_0,ψ_0) est uniquement determinée par celle de (V,ψ) et r est le K-indice de Witt de (V,ψ). L'application $\alpha \mapsto (\alpha|D_1, \cdots, \alpha|D_r)$ est une bijection de l'ensemble des normes $\alpha \in \mathcal{I}(V,\phi)$ qui se décomposent selon (4.1) sur l'ensemble $\mathcal{N}(D_1) \times \cdots \times \mathcal{N}(D_r)$.

4.2. **Théorème de structure.**

Theorem 4.1. *Soit (V,ψ) un K-espace Hermitien et $\phi = \mathrm{Tr}\psi$. Pour toute norme $\alpha \in \mathcal{I}(V,\phi)$, il existe une K-décomposition de Witt adaptée à α.*

Démonstration. On fixe $\alpha \in \mathcal{I}(V,\phi)$. Pour des sous-$K$-espaces vectoriels $W_2 \subset W_1$ de V, on munit $X = W_1/W_2$ de la norme induite $\alpha_X(w_1 + W_2) = \inf \alpha(w_1 + W_2)$, et le K-dual $X^\star$ de ce sous-quotient de la norme duale $\alpha_X^\star$. Si $X = W_1/W_2$ et $Y = W_2^\perp/W_1^\perp$, on sait donc d'après 4.1.2 que $\Delta_{\eta\psi} : (X, \alpha_X) \to (Y, \alpha_Y)^{\star\iota}$ est un isomorphisme dans $\mathcal{N}$.

Si (V,ψ) est anisotrope, il n'y a rien à démontrer. Sinon, il existe dans V des K-droites isotropes. Soit D une telle droite, choisie grâce à la première partie de la proposition 3.13 parmi celles dont la classe d'isomorphisme $[D, \alpha_D]$ dans $\mathcal{L}$ est maximale pour le préordre $\prec$.

Soit (ρ, c) le type de (D, α_D) relativement à une K-base e de D. Alors $(D^\star, \alpha_D^\star)$ est de type $(c-\rho, c)$ relativement à la K-base duale $e^\star$ de $D^\star$, donc $(V/D^\perp, \alpha_{V/D^\perp})$ est de type $(c-\rho, c)$ relativement à la K-base $\epsilon = e' + D^\perp$ de $V/D^\perp$, et cela pour tout vecteur e' de V tel que $\eta\psi(e', e) = 1$. Comme $\inf \alpha(e' + D^\perp) = q^{-\rho}$, on peut de plus supposer que $\alpha(e') = q^{-\rho}$. Mais alors

$$|\psi(e', e')| = \left|\tfrac{1}{2}\phi(e', e')\right| \le \alpha(e')^2 = q^{-2\rho}$$

puisque $\alpha \in \mathcal{I}(V,\phi)$, donc

$$\alpha(\tfrac{\eta}{2}\psi(e',e')e) = |\psi(e',e')|\,\alpha(\eta e) \leq q^{-\rho}$$

puisque $\alpha(\eta e) = q^{\rho}$ d'après le lemme 3.2, de sorte que

$$q^{-\rho} \leq \alpha(e' - \tfrac{\eta}{2}\psi(e',e')e) \leq \sup\left\{\alpha(e'), \alpha\left(\tfrac{\eta}{2}\psi(e',e')e\right)\right\} \leq q^{-\rho}$$

et finalement $\alpha(e' - \frac{\eta}{2}\psi(e',e')e) = q^{-\rho}$: quitte à changer e' en $e - \frac{\eta}{2}\psi(e',e')e$, on peut donc également supposer que e' est un vecteur *isotrope* de V.

Soit D' la K-droite isotrope de V engendrée par e'. Compte tenu des hypothèses sur D, il résulte du corollaire 3.4 que $(D',\alpha_{D'}) \hookrightarrow (V,\alpha) \twoheadrightarrow (V/D^{\perp},\alpha_{V/D^{\perp}})$ est un isomorphisme de $\mathcal{N}$. On obtient donc une K-décomposition $D^{\perp}\oplus D'$ de V qui est adaptée à α. A fortiori, la K-décomposition $H = D\oplus D'$ du K-plan hyperbolique H de V est adaptée à $\alpha|H$. Puisque $\Delta_{\eta\psi} : (D',\alpha_{D'}) \to (D,\alpha_D)^{\star\iota}$ est le composé des isomorphismes $(D',\alpha_{D'}) \to (V/D^{\perp},\alpha_{V/D^{\perp}})$ et $\Delta_{\eta\psi} : (V/D^{\perp},\alpha_{V/D^{\perp}}) \to (D,\alpha_D)^{\star\iota}$, c'est encore un isomorphisme dans $\mathcal{N}$. Donc $\alpha|H \in \mathcal{I}(H,\phi|H)$ d'après 4.1.3 et $V = H\perp H^{\perp}$ est adaptée à α d'après 2.2.4. Finalement, $V = (D\oplus D')\perp H^{\perp}$ est une K-décomposition de V qui est adaptée à α, et le théorème en résulte par récurrence sur l'indice de Witt de (V,ψ). $\square$

4.3. **Invariants.**

4.3.1. On note $\star$ l'involution de $\mathcal{L}$ ou $\mathbf{Z}[\mathcal{L}] \simeq K_0\mathcal{N}$ induite par la dualité $\star$ de $\mathcal{N}$, $\overline{\mathcal{L}}$ le quotient de $\mathcal{L}$ par cette involution, $\mathcal{I}$ l'image de l'endomorphisme $(\mathrm{Id}+\star)$ de $\mathbf{Z}[\mathcal{L}]$ et $s : \mathbf{Z}[\overline{\mathcal{L}}] \to \mathcal{I}$ l'isomorphisme défini par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Z}[\mathcal{L}] \arrow[r, "\mathrm{Id}+\star"] \arrow[d, "\mathrm{can}"'] & \mathbf{Z}[\mathcal{L}] \\ \mathbf{Z}[\overline{\mathcal{L}}] \arrow[r, "s"] & \mathcal{I} \arrow[u, hook, "\mathrm{incl}"'] \end{tikzcd}$$

On peut bien sûr décrire $\overline{\mathcal{L}}$ comme un quotient de l'ensemble $\widetilde{\mathcal{L}}$ de 3.2.3, mais il est préférable ici d'appliquer aux coordonnées (ρ,c) de $\widetilde{\mathcal{L}}$ la transformation linéaire

$$\begin{pmatrix}\theta\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\rho\\ c\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}\rho\\ c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\ c\end{pmatrix}$$

Dans ces nouvelles coordonnées (θ,c), les relations de la proposition 3.10 deviennent $(\theta,c)\sim(\theta+2,c)$ et $(\theta,\frac{-1}{2})\sim(\theta+1,\frac{-1}{2})$ (si K/F est ramifiée), tandis que la formule du lemme 3.10 qui décrit l'action de $\star$ sur $\mathcal{L}$ s'écrit plus simplement $[\theta,c]^{\star} = [-\theta,c]$. Un système de représentants pour $\overline{\mathcal{L}}$ est donc

- $(\theta,c) \in [0,1]\times[0,\infty[$ si K/F est non ramifiée,
- $(\theta,c) \in \big([0,1]\times]-\frac{1}{2},\infty[\big) \cup \big([0,\frac{1}{2}]\times\{\frac{-1}{2}\}\big)$ si K/F est ramifiée.

4.3.2. A tout K-espace Hermitien F-normé (V,ψ,α), on peut attacher les deux invariants que sont (1) la classe d'isomorphisme $[V,\psi]$ du K-espace Hermitien (V,ψ), et (2) la classe d'isomorphisme $[V,\alpha]$ du K-espace F-normé (V,α). Soit d'autre part $(V,\psi) = (V_0,\psi_0)\perp(\perp_{i=1}^{r}(V_i\oplus V_{-i},\psi_i))$ une K-décomposition de Witt adaptée à α et $\alpha_i = \alpha|V_i$. Alors $[V,\psi]$ détermine la classe d'isomorphisme $[V_0,\psi_0]$ du K-espace Hermitien anisotrope (V_0,ψ_0), qui à son tour détermine (d'après 4.1.4) la classe d'isomorphisme $[V_0,\alpha_0]$ du K-espace F-normé (V_0,α_0). On sait aussi que $\Delta_{\eta\psi_i}$ induit un isomorphisme dans $\mathcal{N}$ entre (V_{-i}, α_{-i}) et $(V_i, \alpha_i)^{\star\iota}$. On obtient donc un nouvel invariant $\omega[V, \psi, \alpha] \in \mathbf{N}[\overline{\mathcal{L}}]$ défini par

$$\omega[V, \psi, \alpha] = s^{-1}([V, \alpha] - [V_0, \alpha_0]) = \mathrm{can}\left(\sum_{i=1}^{r}[V_i, \alpha_i]\right).$$

Il est clair que le couple $([V_0, \psi_0], \omega[V, \psi, \alpha])$ détermine uniquement la classe d'isomorphisme $[V, \psi, \alpha]$ de (V, ψ, α) dans $\mathcal{M}$. On obtient ainsi une bijection de $[\mathcal{M}]$ sur $[\mathcal{A}] \times \mathbf{N}[\overline{\mathcal{L}}]$, où $[\mathcal{A}]$ est l'ensemble à quatre éléments des classes d'isomorphismes de K-espaces Hermitiens anisotropes.

4.3.3. La discussion qui précède montre également que les invariants $[V, \psi]$ et $[V, \alpha]$ déterminent uniquement $[V, \psi, \alpha]$. On sait d'autre part que les K-espaces Hermitiens sont classifiés par deux invariants : le déterminant $\det(V, \psi) \in F^\times/NK^\times$ et la K-dimension de V. Donc $\det(V, \psi)$ et $[V, \alpha]$ suffisent encore à déterminer $[V, \psi, \alpha]$, puisque $\dim_K V$ est aussi le degré de $[V, \alpha] \in \mathbf{Z}[\mathcal{L}]$. Ces deux invariants induisent un plongement de $K_0\mathcal{M}$ dans $F^\times/NK^\times \times \mathbf{Z}[\mathcal{L}]$ dont on laisse au lecteur le soin d'expliciter l'image. Mentionnons en revanche deux conséquences immédiates de cette classification : (1) si $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{I}(V, \phi)$ sont conjuguées par un élément de $GL_K(V)$, elles le sont aussi par un élément de $U(V, \psi)$; (2) si X, Y et Z sont trois objets de $\mathcal{M}$, alors $X \oplus Z \simeq Y \oplus Z \implies X \simeq Y$.

4.3.4. Lorsque K/F n'est pas ramifiée, les classes d'isomorphisme des K-espaces F-normés sous-jacents aux quatre classes d'isomorphisme de K-espaces Hermitiens anisotropes sont distinctes modulo le sous-groupe $\mathcal{I}$ de $\mathbf{Z}[\mathcal{L}] \simeq K_0\mathcal{N}$, cf. 4.1.4. On en déduit que l'invariant $[V, \alpha] \in \mathbf{N}[\mathcal{L}]$ suffit alors à determiner $[V, \psi, \alpha]$.

4.4. **Un exemple.**

4.4.1. Soit $n \in \mathbf{N}$, (V, ψ) un K-espace Hermitien de K-dimension $n+1$ et $\phi = \mathrm{Tr}\psi$. On suppose qu'il existe dans (V, ϕ) une F-base orthogonale

$$\mathcal{B} = (v_0, w_1, v_1, w_2, \cdots, v_n, w_{n+1}) \quad \text{avec} \begin{cases} v_i = \eta w_{i+1} & (i = 0, \cdots, n) \\ Q(v_i) + Q(w_i) = 0 & (i = 1, \cdots, n) \end{cases}$$

Une telle base nous fournit donc deux décompositions orthogonales de (V, ϕ) :

$$V = Kw_1 \perp \cdots \perp Kw_{n+1} = Fv_0 \perp H_1 \perp \cdots \cdot \perp H_n \perp Fw_{n+1}$$

où $H_i = Fw_i \oplus Fv_i$ est un F-plan hyperbolique de V, dont les droites isotropes sont engendrées par les vecteurs $e_{\pm i} = \frac{1}{2}(v_i \pm w_i)$. On considère sur V une norme auto-duale $\alpha \in \mathcal{I}(V, \phi)$ qui est adaptée à cette seconde décomposition. Alors $\alpha|Fv_0$, $\alpha|Fw_{n+1}$ et chacune des $\alpha|H_i$ sont auto-duales. Pour $i \in \{1, \cdots, n\}$, on note s_i et r_i les nombres réels définis par

$$\alpha(e_{\pm i}) = q^{r_i \pm s_i} \quad \text{où} \quad |Q(v_i)| = |Q(w_i)| = |\phi(e_i, e_{-i})| = q^{2r_i}$$

(donc $r_{i+1} = r_i + \delta$) et on suppose que

$$0 \leq s_1 \leq s_3 \leq \cdots \leq s_{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} \quad \text{et} \quad 0 \leq s_2 \leq s_4 \leq \cdots \leq s_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

On note alors que $\alpha(v_i) = q^{r_i + s_i} = \alpha(w_i)$ pour tout i, où l'on a posé $s_0 = s_{n+1} = 0$, $|Q(w_{n+1})| = q^{2r_{n+1}}$ et $|Q(v_0)| = q^{2r_0}$ (donc $r_i = r_0 + i\delta$ pour tout i).

4.4.2. La classe d'isomorphisme $[V,\psi]$ du K-espace Hermitien (V,ψ) est uniquement déterminée par la K-dimension $n+1$ de V et le déterminant

$$\det_K(V,\psi) = \prod_{i=1}^{n+1} Q(w_i) \in F^\times/NK^\times.$$

Or $Q(w_i) = -Q(v_i) = -N(\eta)Q(w_{i+1})$ donc

$$\det_K(V,\psi) \equiv (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} Q(v_n)^{n+1} \in F^\times/NK^\times.$$

Le F-indice de Witt de (V,ϕ) est n ou $n+1$, et le K-indice de Witt de (V,ψ) est donc exactement $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, qui est congru à $\frac{n(n+1)}{2}$ modulo 2. On en déduit que la "partie anisotrope" de (V,ψ) est triviale si n est impair, et isomorphe à $A_{Q(v_n)} = (K, Q(v_n)\overline{x}y)$ sinon. La "partie anisotrope" de (V,α) est donc triviale si n est impair, de type $(r_n - \delta, -\delta) \sim (-r_0, -\delta)$ sinon.

4.4.3. Pour $i = 0, \cdots, n$, on note x_i l'élément de $\mathcal{L}$ ou $\overline{\mathcal{L}}$ représenté par

$$(\rho_i, c_i) \in \widetilde{\mathcal{L}} \quad \text{avec} \quad \rho_i = s_i - r_i \quad \text{et} \quad c_i = s_i + s_{i-1} - \delta$$

où $s_{-1} = s_0 = 0$, donc $(\rho_0, c_0) = (-r_0, -\delta)$.

Proposition 4.2. *Avec ces notations,*

$$[V,\alpha] = \left\{ \begin{array}{lcll} x_0 & + & (Id+\star)(x_2 + x_4 + \cdots + x_n) & \textit{si } n \textit{ est pair} \\ & & (Id+\star)(x_1 + x_3 + \cdots + x_n) & \textit{si } n \textit{ est impair} \end{array} \right. \quad \textit{dans } \mathbf{N}[\mathcal{L}]$$

tandis que

$$\omega(V,\psi,\alpha) = \begin{cases} x_2 + x_4 + \cdots + x_n & \textit{si } n \textit{ est pair,} \\ x_1 + x_3 + \cdots + x_n & \textit{si } n \textit{ est impair} \end{cases} \quad \textit{dans } \mathbf{N}[\overline{\mathcal{L}}]$$

Démonstration. Compte tenu des calculs de la section précédente, il suffit de démontrer la seconde formule. Si $n = 0$, V est anisotrope donc $\omega[V,\psi,\alpha] = 0$. Si $n = 1$, on pose

$$E_+ = w_1 - v_1 \quad \text{et} \quad E_- = \tfrac{1}{2Q(w_1)}(\mu v_0 + w_2).$$

Alors $Q(E_+) = Q(E_-) = 0$, $\eta\psi(E_+, E_-) = 1$ et

$$\left\{ \begin{array}{lcllcl} \alpha(E_+) & = & q^{r_1 - s_1} & \text{et} & \alpha(\eta E_+) & = & q^{r_0}, \\ \alpha(E_-) & = & q^{\delta - r_1} & \text{et} & \alpha(\eta E_-) & = & q^{s_1 - r_1}. \end{array} \right.$$

On vérifie facilement que $(E_\pm, \eta E_\pm)$ est une F-base de $KE_\pm$ qui est adaptée à la restriction $\alpha_\pm = \alpha | KE_\pm$ de α. Le lemme 3.2 montre alors que

$$\begin{cases} \alpha_+ & \text{est de type } (r_0, s_1 - \delta) = (\rho_1, c_1)^\star \text{ relativement à } E_+, \\ \alpha_- & \text{est de type } (s_1 - r_1, s_1 - \delta) = (\rho_1, c_1) \text{ relativement à } E_-. \end{cases}$$

D'après 4.1.3 (et le lemme 3.10), la décomposition hyperbolique $V = KE_+ \oplus KE_-$ est donc adaptée à α et $\omega[V,\psi,\alpha] = x_1$ dans $\mathbf{N}[\overline{\mathcal{L}}]$. Supposons maintenant que $n \geq 2$. On pose

$$E_+ = w_n - v_n \quad \text{et} \quad E_- = \tfrac{1}{Q(v_{n-1})}(w_{n-1} - v_{n-1}).$$

Alors $Q(E_+) = Q(E_-) = 0$, $\eta\psi(E_+, E_-) = 1$ et

$$\left\{ \begin{array}{lcllcl} \alpha(E_+) & = & q^{r_n - s_n} & \text{et} & \alpha(\eta E_+) & = & q^{r_{n-1} + s_{n-1}} \\ \alpha(E_-) & = & q^{-r_{n-1} - s_{n-1}} & \text{et} & \alpha(\eta E_-) & = & q^{s_n - r_n} \end{array} \right.$$

Soit $\beta_\pm$ la restriction de α à $KE_\pm$ et β la norme $\sup \beta_\pm$ sur le K-plan hyperbolique $H = KE_+ \oplus KE_-$ de V. Comme précédemment, on voit que

$$\begin{cases} \beta_+ \text{ est de type } (r_{n-1}+s_{n-1}, s_{n-1}+s_n-\delta) = (\rho_n, c_n)^\star \text{ relativement à } E_+, \\ \beta_- \text{ est de type } (s_n - r_n, s_{n-1}+s_n-\delta) = (\rho_n, c_n) \text{ relativement à } E_-, \end{cases}$$

donc $\beta \in \mathcal{I}(H, \phi|H)$ d'après 4.1.3. On en déduit que $\beta = \alpha|H$: on sait déjà que $\beta(x) \geq \alpha(x)$ pour tout $x \in H$, donc aussi

$$\alpha(x) = \sup_{y \in V} \frac{|\phi(x,y)|}{\alpha(y)} \geq \sup_{y \in H} \frac{|\phi(x,y)|}{\alpha(y)} \geq \sup_{x \in H} \frac{|\phi(x,y)|}{\beta(y)} = \beta(x).$$

En particulier, $V = H^\perp \perp H$ est une K-décomposition orthogonale adaptée à α. Si $n = 2$, $H^\perp$ est anisotrope et $\omega[V, \psi, \alpha] = x_2$ dans $\mathbf{N}[\overline{\mathcal{L}}]$. Si $n \geq 3$, on obtient une décomposition

$$V = Fv_0 \perp H_1 \perp \cdots \perp H_{n-3} \perp V' \perp H$$

qui est adaptée à α, avec $V' = Fw_{n-2} \perp W'$ où W' est une K-droite anisotrope, à savoir le complémentaire orthogonal du K-plan hyperbolique H dans le K-espace Hermitien $Kw_{n-1} \perp Kw_n \perp Kw_{n+1}$. D'après le lemme 2.2.7, on peut trouver un vecteur v'_{n-2} dans W' tel que $Q(w_{n-2}) + Q(v'_{n-2}) = 0$ et $\alpha(v'_{n-2} \pm w_{n-2}) = q^{r_{n-2} \pm s_{n-2}}$. Alors $H'_{n-2} = Fw_{n-2} \oplus Fv'_{n-2}$ est un F-plan hyperbolique de V' dont les droites isotropes sont $F(v'_{n-2} \pm w_{n-2})$, l'orthogonal de H'_{n-2} dans V' est la F-droite engendrée par $w'_{n-1} = \eta^{-1} v'_{n-2}$ et la décomposition

$$V = Fv_0 \perp H_1 \perp \cdots \perp H_{n-3} \perp H'_{n-2} \perp Fw'_{n-1} \perp H$$

est adaptée à α, ce qui nous permet enfin de conclure par récurrence. □

5. Les K-espaces quasi-Hermitiens F-normés

On conserve les hypothèses et les notations de la section 4.

5.1. La catégorie $\mathcal{M}'$.

5.1.1. *Définition.* Un K-espace quasi-Hermitien est un F-espace quadratique muni d'un F-hyperplan qui est un K-espace Hermitien. Concrètement, se donner un K-espace quasi-Hermitien x revient à se donner un F-espace quadratique non dégénéré (V_x, ϕ_x) de F-dimension impaire, une F-droite anisotrope D_x de V_x et une structure de K-espace Hermitien (W_x, ψ_x) sur l'orthogonal W_x de D_x dans V_x telle que $\mathrm{Tr}_{K/F} \circ \psi_x = \phi_x | W_x$. Un K-espace quasi-Hermitien F-normé est un K-espace quasi-Hermitien x muni d'une norme auto-duale $\alpha_x \in \mathcal{I}(V_x, \phi_x)$. Un morphisme de K-espace quasi-Hermitien F-normés $f : x \to y$ est une application F-linéaire $f : V_x \to V_y$ qui préserve toutes les structures. On note $\mathcal{M}'$ la catégorie ainsi définie.

5.1.2. La somme directe $z = x \oplus y$ d'un K-espace Hermitien F-normé x et d'un K-espace quasi-Hermitien F-normé y est le K-espace quasi-Hermitien F-normé z defini par les relations suivantes, où $x = (W_x, \psi_x, \alpha_x)$:

$$(V_z, \phi_z, \alpha_z) = (W_x, \mathrm{Tr}\psi_x, \alpha_x) \perp (V_y, \phi_y, \alpha_y) \quad \text{et} \quad (W_z, \psi_z) = (W_x, \psi_x) \perp (W_y, \psi_y).$$

On obtient ainsi un bifoncteur $\oplus : \mathcal{M} \times \mathcal{M}' \to \mathcal{M}'$.

5.1.3. Si l'on fixe un K-espace quasi-Hermitien z, l'ensemble des décompositions de z en somme directe $z = x \oplus y$ avec $x \in \mathcal{M}$ et $y \in \mathcal{M}'$ est en bijection avec l'ensemble des K-sous-espaces W_x de W_z qui sont réguliers (i.e. $\psi_z | W_z$ est non-dégénérée) et tels que $\alpha_z | W_x \in \mathcal{I}(W_x, \phi_z | W_x)$. On dit de z que c'est un objet essentiel de $\mathcal{M}'$, ou encore que la norme auto-duale α_z du K-espace quasi-Hermitien sous-jacent à z est essentielle lorsque $W_x = 0$ est l'unique tel sous-espace, c'est-à-dire lorsque l'équation $z = x \oplus y$ implique $x = 0$.

5.1.4. La projection $y = \mathrm{pr} x$ d'un K-espace quasi-Hermitien F-normé x est le K-espace Hermitien F-normé y défini par

$$y = (W_x, \psi_x, \mathrm{pr}_{W_x} \alpha_x)$$

où $\mathrm{pr}_{W_x} \alpha_x$ est la projection convexe de $\alpha_x \in \mathcal{I}(V_x, \phi_x)$ sur $\mathcal{I}(W_x, \phi_x | W_x)$, cf. 2.2.8. On obtient ainsi un foncteur $\mathrm{pr} : \mathcal{M}' \to \mathcal{M}$ que l'on note aussi $x \mapsto \underline{x}$.

5.1.5. L'extension $y = \mathrm{ex} x$ d'un K-espace quasi-Hermitien F-normé x est le K-espace Hermitien F-normé $y = (W_y, \psi_y, \alpha_y)$ défini par

$$(W_y, \psi_y) = (W_x, \psi_x) \perp (K \otimes_F D_x, \psi) \quad \text{et} \quad (W_y, \alpha_y) = (V_x, \alpha_x) \perp (\eta D_x, \alpha)$$

où pour tout $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, $d_1, d_2 \in D_x$ et $d \in \eta D_x$,

$$\psi(\lambda_1 \otimes d_1, \lambda_2 \otimes d_2) = \frac{1}{2} \overline{\lambda}_1 \lambda_2 \phi_x(d_1, d_2) \quad \text{et} \quad \alpha(d) = |Q(d)|^{1/2}$$

si $Q(\ell) = \psi(\ell, \ell)$ (pour $\ell \in K \otimes_F D_x$) est la forme quadratique (anisotrope) associée à ψ. On obtient ainsi un foncteur $\mathrm{ex} : \mathcal{M}' \to \mathcal{M}$ que l'on note aussi $x \mapsto \overline{x}$.

5.1.6. Pour tout $x_1, x_2 \in \mathcal{M}$ et $y \in \mathcal{M}'$,

$$(x_1 \oplus x_2) \oplus y = x_1 \oplus (x_2 \oplus y) \quad \text{dans } \mathcal{M}'.$$

Pour tout $x \in \mathcal{M}$ et $y \in \mathcal{M}'$,

$$\mathrm{pr}(x \oplus y) = x \oplus \mathrm{pr}(y) \quad \text{et} \quad \mathrm{ex}(x \oplus y) = x \oplus \mathrm{ex}(y) \quad \text{dans } \mathcal{M}.$$

5.2. **Objets spéciaux.** On fixe dans cette section un K-espace quasi-Hermitien F-normé y dont on note (V, ϕ) l'espace quadratique, (W, ψ) le K-espace Hermitien, $D = W^{\perp} \subset V$ la droite anisotrope, α la norme et $2n+1$ la F-dimension.

5.2.1. Une base *spéciale* de V est une F-base orthogonale de V,

$$\mathcal{B} = (v_0, w_1, v_1, w_2, \cdots, w_n, v_n)$$

telle que $F v_n = D$, $v_{i-1} = \eta w_i$ et $Q(v_i) + Q(w_i) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq n$. Une telle base fournit donc deux décompositions orthogonales de V,

$$V = K w_1 \perp \cdots \perp K w_n \perp D = F v_0 \perp H_1 \perp \cdots \perp H_n$$

où $H_i = F w_i \perp F v_i$ est un F-plan hyperbolique de V dont les droites isotropes sont engendrées par les vecteurs $e_{\pm i} = \frac{1}{2}(v_i \pm w_i)$.

5.2.2. On dit que y (ou α) est spécial s'il existe une base spéciale $\mathcal{B}$ de V comme ci-dessus qui est *strictement adaptée* à α, c'est-a-dire telle que (1) la décomposition $V = Fv_0 \perp H_1 \perp \cdots \perp H_n$ définie par $\mathcal{B}$ est adaptée à α, et (2) les réels s_i définis comme dans la section 4.4.1 par

$$\alpha(e_{\pm i}) = q^{r_i \pm s_i} \quad \text{où} \quad |Q(v_i)| = |Q(w_i)| = |\phi(e_i, e_{-i})| = q^{2r_i}$$

vérifient les inégalités *strictes*

$$0 < s_1 < s_3 < \cdots < s_{2\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1} \quad \text{et} \quad 0 < s_2 < s_4 < \cdots < s_{2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Si tel est le cas, $\alpha(v_i) = q^{r_i + s_i} = \alpha(w_i)$ pour tout i, avec $s_0 = 0$ et $|Q(v_0)| = q^{2r_0}$ (donc $r_i = r_0 + i\delta$). On dit que $(s_1, \cdots, s_n)$ est le *type* de α relativement à $\mathcal{B}$.

5.2.3. Conservant les hypothèses et notations ci-dessus, notons

$$\underline{y} = \text{pr}y = (W, \psi, \underline{\alpha}) \quad \text{et} \quad \overline{y} = \text{ex}y = (\overline{W}, \overline{\psi}, \overline{\alpha}).$$

Il résulte de 2.2.8 que la norme auto-duale $\underline{\alpha}$ de W se décompose selon

$$W = H_n^{\perp} \perp Fw_n = Fv_0 \perp H_1 \perp \cdots \perp H_{n-1} \perp Fw_n$$

avec $\underline{\alpha}|H_i = \alpha|H_i$ pour $i = 1, \cdots, n-1$. De même, notant w_{n+1} l'élément de $\overline{W} = W \perp K \otimes_F D$ défini par $\eta w_{n+1} = v_n$, on vérifie immédiatement que la norme auto-duale $\overline{\alpha}$ de $\overline{W}$ se décompose selon

$$\overline{W} = V \perp Fw_{n+1} = Fv_0 \perp H_1 \perp \cdots \perp H_n \perp Fw_{n+1}$$

avec $\overline{\alpha}|H_i = \alpha|H_i$ pour $i = 1, \cdots, n$.

Proposition 5.1. *Pour tout $0 \leq i \leq n$, on note y_i l'élément de $\mathcal{L}$ ou $\overline{\mathcal{L}}$ representé par $(\rho_i, c_i) \in \widetilde{\mathcal{L}}$ avec $c_i = s_i + s_{i-1} - \delta$ et $\rho_i = s_i - r_i$ (où $s_{-1} = 0$). Alors*

$$\omega(\overline{y}) = \sum_{i \equiv n \bmod 2} y_i \quad \textit{et} \quad \omega(\underline{y}) = \sum_{i \not\equiv n \bmod 2} y_i \quad \textit{dans } \mathbf{N}[\overline{\mathcal{L}}]$$

où les sommes portent sur $i \in \{1, \cdots, n\}$, et les K-espaces F-normés sous-jacents aux "parties anisotropes" de $\overline{y}$ et $\underline{y}$ sont respectivement de type y_0 et 0 ou 0 et y_0 selon que n est pair ou impair.

Démonstration. Cela résulte immédiatement de la proposition 4.2. □

5.2.4. Puisque $c(y_1) < \cdots < c(y_n)$, les invariants $\omega(\overline{y})$ et $\omega(\underline{y})$ déterminent le n-uplet $(y_1, \cdots, y_n) \in \overline{\mathcal{L}}$, qui à son tour détermine les $c_i = c(y_i)$, qui enfin déterminent le n-uplet $(s_1, \cdots, s_n)$ d'après les formules de récurrence $s_0 = 0$ et $s_i = c_i + \delta - s_{i-1}$. Ce n-uplet ne dépend donc pas du choix de la base $\mathcal{B}$ strictement adaptée à α : on l'appelle le *type* de l'objet spécial y (ou de la norme spéciale $\alpha \in \mathcal{I}(V, \phi)$).

5.2.5. A tout objet spécial y de $\mathcal{M}'$, on peut associer les deux invariants que sont (1) le déterminant (= la classe d'isomorphisme) de $(D_y, \phi_y|D_y)$ et (2) le type de y tel qu'on vient de le définir. On obtient ainsi une bijection de l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets spéciaux de $\mathcal{M}'$ sur le produit de $F^{\times}/(F^{\times})^2$ et de $\mathcal{S} = \coprod_{n \in \mathbf{N}} \mathcal{S}_n$ où $\mathcal{S}_n$ est l'ensemble des suites $(s_1, \cdots, s_n) \in \mathbf{R}^n_{>0}$ telles que $s_i < s_{i+2}$ pour tout $1 \leq i \leq n-2$ (par convention : $\mathcal{S}_0 = \{\emptyset\} \neq \emptyset$ correspond aux objets spéciaux de F-dimension 1).

5.3. Théorème de structure.

Theorem 5.2. *Pour tout objet y de $\mathcal{M}'$, les conditions suivantes sont équivalentes : (1) y est essentiel, (2) y est spécial, (3) les supports des images de $\overline{y}$ et $\underline{y}$ dans $K_0\mathcal{N} \simeq \mathbf{Z}[\mathcal{L}]$ sont disjoints.*

Démonstration. (2) $\Rightarrow$ (3) résulte facilement de la proposition 5.1 et (3) $\Rightarrow$ (1) est trivial. Montrons (1) $\Rightarrow$ (2). Soit donc y un K-espace quasi-Hermitien F-normé dont on note (V, ϕ) l'espace quadratique, (W, ψ) le K-espace Hermitien, $D = W^{\perp}$ la droite anisotrope distinguée et α la norme. On suppose que α est essentielle et on raisonne par récurrence sur l'entier n tel que $2n+1 = \dim V$. Si $n = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc que $n > 0$. Soit v_n un vecteur non nul de la F-droite anisotrope D de V et r_n et s_n les réels définis respectivement par $|Q(v_n)| = q^{2r_n}$ et $\alpha(v_n) = q^{r_n+s_n}$. Alors $s_n > 0$ et l'ensemble

$$\mathcal{W}_n := \left\{w_n \in W | Q(v_n) + Q(w_n) = 0 \text{ et } \alpha(v_n \pm w_n) = q^{r_n \pm s_n}\right\}$$

est non vide d'après le lemme 2.1. Notant que la fonction $w \mapsto \alpha(\eta w)$ est minorée sur $\mathcal{W}_n$ par la constante $q^{r_n-\delta} > 0$, on choisit dans $\mathcal{W}_n$ un élément w_n tel que $\alpha(\eta w_n) = \inf \alpha(\eta \mathcal{W}_n)$. Soit V' l'orthogonal dans V du F-plan hyperbolique $H_n = Fw_n \oplus Fv_n$, D' la F-droite de V' engendrée par ηw_n et W' l'orthogonal de D' dans V'. Alors W' est aussi l'orthogonal de Kw_n dans W, et c'est donc un F-hyperplan K-Hermitien de V'. Puisque $w_n \in \mathcal{W}_n$, la décomposition $V = V' \perp H_n$ est adaptée à α et la restriction α' de α à V' est donc une norme auto-duale de V', dont on vérifie immédiatement qu'elle est encore essentielle. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base spéciale $\mathcal{B}' = (v_0, w_1, v_1, w_2, \cdots, v_{n-1})$ de V' qui est strictement adaptée à α'. Quitte à multiplier cette base par un scalaire convenable, on peut supposer que $v_{n-1} = \eta w_n$. Alors $\mathcal{B} = (v_0, w_1, v_1, w_2, \cdots, v_{n-1}, w_n, v_n)$ vérifie toutes les conditions de la section 5.2.2 (dont on reprend les notations), sauf peut-être l'inégalité $s_{n-2} < s_n$. Supposons donc que $n \geq 3$ et $s_{n-2} \geq s_n$. Soit $w'_n = w_n - \mu v_{n-2} + \mu w_{n-2}$ (où $\mu = \eta^{-2} \in F$). Alors

$$Q(v_n) + Q(w'_n) = Q(v_n) + Q(w_n) + \mu^2 \left(Q(v_{n-2}) + Q(w_{n-2})\right) = 0$$

car $Q(v_n) + Q(w_n) = 0 = Q(v_{n-2}) + Q(w_{n-2})$ et pour $\epsilon \in \{\pm 1\}$

$$\begin{aligned}
\alpha(v_n + \epsilon w'_n) &= \alpha\left(v_n + \epsilon w_n - \epsilon\mu(v_{n-2} - w_{n-2})\right) \\
&= \max\left\{\alpha(v_n + \epsilon w_n), |\mu|\, \alpha(v_{n-2} - w_{n-2})\right\} \\
&= \max\left\{q^{r_n+\epsilon s_n}, q^{2\delta} q^{r_{n-2}-s_{n-2}}\right\} \\
&= q^{r_n+\epsilon s_n}
\end{aligned}$$

car $r_n = r_{n-2} + 2\delta$ et $s_n \leq s_{n-2}$, donc $w'_n \in \mathcal{W}_n$. Mais

$$\begin{aligned}
\alpha(\eta w'_n) &= \alpha(v_{n-1} - w_{n-1} + \mu v_{n-3}) \\
&= \max\left\{\alpha(v_{n-1} - w_{n-1}), |\mu|\, \alpha(v_{n-3})\right\} \\
&= \max\left\{q^{r_{n-1}-s_{n-1}}, q^{2\delta} q^{r_{n-3}+s_{n-3}}\right\} \\
&= q^{r_{n-1}+s_{n-3}}
\end{aligned}$$

car $r_{n-1} = r_{n-3} + 2\delta$ (avec $s_0 = 0$ si $n = 3$), donc

$$\alpha(\eta w'_n) = q^{r_{n-1}+s_{n-3}} < q^{r_{n-1}+s_{n-1}} = \alpha(v_{n-1}) = \alpha(\eta w_n)$$

car $s_{n-3} < s_{n-1}$. Cette derniere inégalité contredit la minimalité de $\alpha(\eta w_n)$, donc $s_{n-2} < s_n$, la base $\mathcal{B}$ est strictement adaptée à α, et y est spécial. □

Theorem 5.3. *Tout objet z de $\mathcal{M}'$ admet une décomposition $z = x \oplus y$ avec $x \in \mathcal{M}$ et $y \in \mathcal{M}'$ essentiel, et cette décomposition est essentiellement unique : si $x \oplus y \simeq x' \oplus y'$ dans $\mathcal{M}'$ avec $x, x' \in \mathcal{M}$ et $y, y' \in \mathcal{M}'$ essentiels, alors $x \simeq x'$ dans $\mathcal{M}$ et $y \simeq y'$ dans $\mathcal{M}'$.*

Démonstration. L'existence d'une décomposition $z = x \oplus y$ avec $x \in \mathcal{M}$ et $y \in \mathcal{M}'$ essentiel résulte immédiatement des définitions : si z n'est pas déjà essentiel, il s'écrit $z = x_1 \oplus z_1$ avec $x_1 \in \mathcal{M}$ non nul et $z_1 \in \mathcal{M}'$, et on conclut par récurrence sur la dimension de z, en affirmant l'existence d'une telle décomposition pour z_1.

Fixons une telle décomposition $z = x \oplus y$ avec y essentiel, donc spécial d'après le théorème 5.2. Formons la différence $\Delta(z) = \overline{z} - \underline{z}$ dans le groupe de Grothendieck $K_0\mathcal{N} \simeq \mathbf{Z}[\mathcal{L}]$. C'est aussi la différence $\Delta(y) = \overline{y} - \underline{y}$, dont on voit comme dans la section 5.2.4 qu'elle détermine le type (dans $\mathcal{S}$) de y. Puisque d'autre part $(D_y, \phi_y|D_y) = (D_z, \phi_z|D_z)$, il résulte donc de 5.2.5 que z détermine uniquement la classe d'isomorphisme de y dans $\mathcal{M}'$. Si $x \oplus y \simeq z \simeq x' \oplus y'$ dans $\mathcal{M}'$ avec y et y' essentiels, on a donc $y \simeq y'$ dans $\mathcal{M}'$. Mais alors $\overline{y} \simeq \overline{y}'$ dans $\mathcal{M}$, donc $x \oplus \overline{y} \simeq \overline{z} \simeq x' \oplus \overline{y}' \simeq x' \oplus \overline{y}$ dans $\mathcal{M}$, et finalement $x \simeq x'$ dans $\mathcal{M}$ d'après la remarque finale de 4.3.3. □

Références

[1] H. Bass, *On the ubiquity of Gorenstein rings.* Math. Zeit. **82** (1963), 8–28.

[2] F. Bruhat et J. Tits, *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local.* Bull. Soc. Math. France **112** (1984), n^o **2**, 259–301.

[3] F. Bruhat et J. Tits, *Schémas en groupes et immeubles des groupes classiques sur un corps local. II. Groupes unitaires.* Bull. Soc. Math. France **115** (1987), n^o **2**, 141–195.

[4] P. Delorme et V. Secherre, *An analogue of the Cartan decomposition for p-adic reductive symmetric spaces.* Prépublication.

[5] O. Goldman et N. Iwahori, *The space of p-adic norms.* Acta Math. **109** (1963), 137–177.

[6] Y. Sakellaridis, *On the unramified spectrum of spherical varieties over p-adic fields.* Compositio Math. **144** (2008), n^o **4**, 978–1016.

[7] J-P. Serre, *Complex Multiplication.* In Algebraic Number Theory, édité par J.W.S. Cassels et A. Fröhlich, Academic Press (1967).