

Quelques résultats sur les problèmes de petits diviseurs

Claire Chavaudret

Université Paris-Cité, IMJ-PRG
Mémoire d'habilitation à diriger des recherches

Table des matières

1	Introduction	4
1.1	Un point de départ : la linéarisation du polynôme quadratique	4
1.1.1	La condition de Brjuno	5
1.2	La linéarisation des applications standard et semi-standard	6
1.2.1	Les applications standard et semi-standard	7
1.3	Linéarisation et formes normales des champs de vecteurs autour d'un point fixe ou d'un tore invariant	11
1.3.1	Linéarisation et normalisation de champs de vecteurs autour d'un point fixe	12
1.3.2	Autour d'un tore invariant	14
1.4	La réductibilité des systèmes différentiels quasi-périodiques et ses applications	16
1.4.1	Systèmes quasi-périodiques et cocycles	16
1.4.2	Invariants dynamiques	17
1.4.3	Réductibilité	19
1.4.4	Applications de la réductibilité	20
1.4.5	La presque réductibilité	21
1.4.6	Applications de la presque réductibilité	21
1.4.7	Réductibilité en classe analytique, dans un cadre perturbatif	24
1.4.8	Résultats de presque réductibilité dans un cadre perturbatif	25
1.5	Directions de recherche	25
1.5.1	Relâchement et optimalité des conditions arithmétiques	25
1.5.2	Extension à d'autres classes de fonctions	26
1.5.3	Formes normales en présence de résonances	26
2	Application semi-standard généralisée : un lien entre la somme de Brjuno et le rayon de convergence de la linéarisation	27
2.1	L'application semi-standard généralisée	27
2.2	Relation entre les coefficients de la linéarisation et étude des petits diviseurs	28
2.3	Un exemple pour lequel le rayon de convergence est majoré	30
2.3.1	Construction d'une sous-suite de dénominateurs	30
2.3.2	Divisions euclidiennes sur les q_{n_k}	30
2.3.3	Construction d'une fonction auxiliaire	31
2.4	Complément : Une minoration en fonction de la somme de Brjuno de α . .	31
2.5	Minoration du rayon de convergence par une fonction de la somme de Brjuno	32
2.5.1	Construction de la fonction de Davie	33
2.6	Complément : Majoration des coefficients de la linéarisation en fonction de la somme de Brjuno de α	34
2.7	Questions ouvertes	35
3	Formes normales	36
3.1	Forme normale pour les cocycles	36
3.1.1	Un lien avec le problème de la dépendance régulière à un paramètre	36
3.1.2	Une condition de Melnikov exacte	37
3.1.3	Enoncé	37
3.1.4	Idée de la preuve	38
3.2	Formes normales pour les champs de vecteurs autour d'un tore invariant . .	40

3.2.1	Forme normale formelle	41
3.2.2	Normalisation analytique	43
4	Cocycles quasi-périodiques : relâchement des conditions arithmétiques et extension à d'autres classes de fonctions	45
4.1	Réductibilité : condition sur la fréquence et le nombre de rotation	45
4.1.1	En classe analytique	46
4.1.2	En classe ultradifférentiable	50
4.2	Presque réductibilité	53
4.2.1	En classe ultradifférentiable	54
4.2.2	En différentiabilité finie	56

Présentation et remerciements

Ce mémoire présenté en vue d'obtenir l'habilitation à diriger des recherches se veut rédigé de manière accessible à un étudiant de M2 spécialisé dans les systèmes dynamiques. Puisque le but était de présenter mes travaux, je me suis focalisée sur les systèmes dynamiques obtenus par perturbation d'un système "simple", et la question sous-jacente est la suivante : à quelles conditions est-ce possible de conjuguer ("réduire") le système perturbé à un système plus simple ? Les applications de cette propriété, quand elle est satisfaite, sont nombreuses et je tente d'en citer quelques unes.

La régularité de la conjugaison a son importance et pour la contrôler, on voit assez naturellement apparaître des conditions de nature arithmétique sur certains paramètres du système (partie linéaire, fréquence, nombre de rotation...). Ce sont des conditions de non résonance, visant à contrôler les petits diviseurs qui apparaissent dans l'analyse de la conjugaison que l'on recherche.

On peut se demander comment formuler des conditions optimales, mais la construction de contre-exemples pour prouver la nécessité d'une condition en particulier est un problème difficile et motivant.

Je souhaite remercier Marie-Claude, Raphaël et Masha qui ont consacré du temps à lire ce qui suit, et encore Bassam et Jacques qui ont accepté de constituer mon jury. Merci à Hakan Eliasson, une fois de plus, pour son soutien et des discussions toujours stimulantes, ainsi qu'à mes co-auteurs cités ici, avec qui j'ai beaucoup aimé travailler, en souhaitant que cela continue.

Plus généralement, merci à tous les collègues de recherche et d'enseignement qui savent créer un cadre serein sans lequel les mathématiques ne peuvent pas émerger - impossible de citer tous ceux qui m'ont encouragée à des moments plus difficiles, accordé une décharge d'enseignement bienvenue, qui m'ont confié des responsabilités, ou tout simplement diffusé la bonne humeur, mais ils se reconnaîtront certainement s'ils lisent ce paragraphe.

On ne devient pas directrice de thèse sans un bon étudiant, c'est pourquoi je remercie Maxime de s'être lancé dans ce projet qui aura été fructueux.

Cela fait respectivement huit et deux ans qu'Aurore et Corentin m'émerveillent. Merci à Martin ! et merci à mes parents pour leur soutien.

1 Introduction

Dans cette section, je ferai un panorama de résultats bien connus, portant sur la linéarisation ou la réduction de différents types de systèmes dynamiques dans un cadre perturbatif, et faisant intervenir des conditions arithmétiques sur les paramètres du système. Je ferai apparaître le lien entre ces conditions et le contrôle des petits diviseurs apparaissant dans les développements en série des applications linéarisantes, contrôle qui doit suffire à assurer la régularité des linéarisations. Je mentionnerai quelques rares résultats d'optimalité de ces conditions qui soient connus pour l'instant. Enfin j'expliquerai les différentes directions de recherche qui ont donné lieu aux publications que je présenterai ici.

Dans la littérature, les théorèmes de linéarisation et de réductibilité en régime perturbatif font généralement intervenir des conditions arithmétiques sur les paramètres du système considéré. Elles servent à obtenir un changement de variables aussi régulier que possible, de préférence dans la même classe de régularité que le système lui-même (historiquement, la classe analytique). Notons qu'une perte de régularité est inévitable en général, i.e. le changement de variables réduisant le système à une forme plus simple sera moins régulier que le système lui-même. Si des résonances exactes sont présentes entre les paramètres du système, on cherchera plutôt la conjugaison à une forme normale.

Le fil directeur de ce mémoire sera donc le rapport de ces conditions arithmétiques avec la régularité du système étudié et de ses propriétés de réductibilité ou de normalisabilité.

1.1 Un point de départ : la linéarisation du polynôme quadratique

Le problème de la linéarisation d'un système d'équations différentielles non linéaires est étudié au moins depuis Poincaré, et notamment A.D.Brjuno a découvert en 1971 une condition arithmétique subtile, portant sur la vitesse d'approximation des paramètres par des rationnels, suffisante pour la linéarisation des champs de vecteurs au voisinage d'un point fixe. Je la présenterai en section 1.3.1 mais pour la clarté de l'exposé, je commence par mentionner un résultat en petite dimension où la condition découverte par Brjuno est nécessaire et suffisante pour la linéarisation analytique.

On considère donc le système dynamique du plan complexe engendré par l'itération du polynôme quadratique : $P_\lambda(z) = \lambda z - z^2$, où $\lambda \in \mathbb{C}^*$ est un paramètre appelé le multiplicateur. L'importance de ce système dynamique est illustrée par la proposition suivante :

Proposition 1. (Yoccoz, [60]) Tout application univalente f du disque unité telle que $f(0) = 0$ est conjuguée au polynôme quadratique de multiplicateur $\lambda = Df(0)$ par un homéomorphisme quasi-conforme.

Ainsi la dynamique topologique du polynôme quadratique est universelle pour les applications univalentes. On se demande s'il existe un changement de variables qui conjugue ce système au système engendré par l'itération de l'application linéaire $z \mapsto \lambda z$ (le paramètre λ est ici un invariant de conjugaison), auquel cas la dynamique sera celle d'une rotation.

L'image des orbites de la rotation sera d'autant plus régulière que le changement de variables sera régulier, ce qui peut motiver à chercher une linéarisation holomorphe (mais l'universalité du polynôme quadratique ne dépasse pas le cadre continu a priori) :

Définition 1. On dit qu'une fonction f holomorphe sur un voisinage de 0 et telle que $f(0) = 0$ est holomorphiquement linéarisable si elle est conjuguée à $z \mapsto \lambda z$ par un difféomorphisme holomorphe.

Je mentionne ici un théorème de Cremer donnant une condition arithmétique nécessaire pour l'existence d'une linéarisation et j'esquisse sa preuve, car la construction d'un contre-exemple dans la publication [21] est fondée sur la même idée. Ce théorème utilise une condition arithmétique de rapide approximation du multiplicateur par des rationnels :

Définition 2. La fonction d'approximation de Rüssmann de $\alpha \in \mathbb{R}$ est la fonction Φ définie sur $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ par $\Phi(n) = \sup\{|k\alpha - p|^{-1}; p \in \mathbb{Z}, 1 \leq k \leq n-1\}$.

On dit que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est très fortement Liouville si sa fonction d'approximation de Rüssmann Φ vérifie

$$\limsup \frac{\Phi(n)}{n} = +\infty$$

Théorème 1. (Cremer) Soit α un nombre très fortement Liouville. Il existe f holomorphe sur un voisinage de 0 telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = e^{2i\pi\alpha}$ qui est non linéarisable holomorphiquement.

Démonstration: Formellement, la linéarisation $h(z) = \sum h_n z^n$ doit vérifier la relation de récurrence

$$h_n = \frac{1}{e^{2i\pi n\alpha} - e^{2i\pi\alpha}} \sum_{j=2}^n f_j \sum_{n_1+\dots+n_j=n} h_{n_1} \dots h_{n_j}$$

où f_j sont les coefficients de Taylor de f . Or pour $n\alpha$ proche d'un entier on a

$$\frac{1}{|e^{2i\pi n\alpha} - e^{2i\pi\alpha}|} \simeq 2\pi\Phi(n)^{-1}$$

Si l'on construit f telle que $|h_n| \geq \frac{1}{|e^{2i\pi n\alpha} - e^{2i\pi\alpha}|}$, et si α est très fortement Liouville, alors $\limsup |h_n|^{\frac{1}{n}} = +\infty$ et donc la linéarisation ne peut être holomorphe autour de 0.

On construit ainsi les coefficients de Taylor de $f : |f_n| = 1$ (donc f est analytique) mais leur argument est donné récursivement par

$$\arg(f_n) = \arg\left(\sum_{j=2}^{n-1} f_j \sum_{n_1+\dots+n_j=n} h_{n_1} \dots h_{n_j}\right)$$

Ainsi h_n vérifie la minoration voulue et f n'est pas holomorphiquement linéarisable. $\square$

1.1.1 La condition de Brjuno

Je cite ici le résultat fondateur de J-C.Yoccoz qui laisse entrevoir une correspondance entre la régularité de la linéarisation et la vitesse d'approximation des paramètres du système par des rationnels.

Etant donné un nombre irrationnel α , on peut considérer son développement en fraction continue donné par l'algorithme suivant : en notant $\{x\}$ la partie fractionnaire d'un nombre x , $[x]$ sa partie entière et $G(x) := \{\frac{1}{x}\}$ l'application de Gauss, on définit

$$\begin{aligned} x_0 &= \{\alpha\}, x_{n+1} = G(x_n), a_n = [x_n], \\ p_{-2} &= q_{-1} = 1, p_{-1} = q_{-2} = 0, p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1}, q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{On a ainsi } \alpha = \lim_n a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}, \frac{p_n}{q_n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}.$$

Définition 3. On dit que α est un nombre de Brjuno si

$$B(\alpha) := \sum_{k \geq 1} \frac{\ln q_{k+1}}{q_k} < +\infty \quad (2)$$

On peut aussi caractériser les nombres de Brjuno à l'aide de la fonction de Brjuno : en posant $\beta_{-1} = 1$ et $\beta_j = |p_j - q_j \alpha|$, puis $\alpha_j = \frac{q_j \alpha - p_j}{q_{j-1} \alpha - p_{j-1}}$, on pose

$$B_f(\alpha) = - \sum_{j \geq 0} \beta_{j-1} \ln \alpha_j \quad (3)$$

La fonction B_f est la fonction de Brjuno.

Proposition 2. [45] Le nombre α est un nombre de Brjuno si et seulement si la somme définissant $B_f(\alpha)$ converge.

Remarque 1. Les nombres diophantiens, c'est-à-dire les nombres α tels qu'il existe $\tau \geq 1$ tel que pour tout k , $q_{k+1} \leq q_k^\tau$, sont des nombres de Brjuno.

Le fait que la condition de Brjuno soit nécessaire et suffisante pour la linéarisation a été prouvé par Yoccoz :

Théorème 2. ([60]) Le polynôme P_λ est holomorphiquement linéarisable si et seulement si le développement en fraction continue de $\arg(\lambda)$ vérifie la condition de Brjuno (2).

Chéritat a donné une nouvelle preuve de ce résultat ([23]).

Il s'agit d'un des très rares systèmes où l'on connaît la condition arithmétique nécessaire et suffisante pour la linéarisation analytique. C'est aussi le cas des applications standard et semi-standard qui seront l'objet de la prochaine section. En revanche dès que la dimension devient plus grande, l'optimalité devient plus difficile à montrer et reste la plupart du temps une question ouverte. De plus, il s'agit du cadre analytique. Il serait intéressant de faire une théorie plus complète du lien entre le cadre fonctionnel choisi et la condition arithmétique nécessaire et suffisante à la réduction d'un système.

1.2 La linéarisation des applications standard et semi-standard

Dans cette section je mentionne un autre exemple de système où l'on a une condition arithmétique nécessaire et suffisante pour la linéarisation. Il s'agit d'ailleurs d'une généralisation à un vecteur de la condition de Brjuno définie à la définition 3.

1.2.1 Les applications standard et semi-standard

L'application standard L'application standard, ou application de Taylor-Chirikov, est l'application :

$$f_K : \mathbb{T} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} \times \mathbb{R}, f_K(x, p) = (x + p + K \sin(2\pi x), p + K \sin(2\pi x))$$

dont les itérations donnent lieu au système dynamique discret suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + p_n + K \sin(2\pi x_n) \\ p_{n+1} = p_n + K \sin(2\pi x_n) \end{cases} \quad (4)$$

Le paramètre $K \in \mathbb{R}^+$ est dit paramètre perturbatif, ou stochastique. La première variable est l'angle, et la deuxième, le moment angulaire. Il s'agit d'un système préservant l'aire, et vérifiant la condition de twist $\frac{d\theta_{n+1}}{dp_n} \neq 0$. De plus, la variable de moment dépend de la variable d'angle, de sorte que l'on peut réécrire le système comme une équation aux différences d'ordre 2 :

$$x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n = K \sin(2\pi x_n)$$

L'application standard est obtenue par projection stroboscopique à partir du système hamiltonien engendré par le hamiltonien dépendant du temps $H(p, x, t) = \frac{p^2}{2} + K \cos(2\pi x) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{t,n}$:

$$\begin{cases} \dot{x} = p \\ \dot{p} = K \sin(2\pi x) \end{cases} \quad (5)$$

Ce hamiltonien classique peut servir à décrire le mouvement d'un pendule soumis à des pics de gravitation périodiques ("kicked rotator"). Notons que vu comme hamiltonien quantique, il peut servir à modéliser le mouvement d'un atome soumis à des impulsions laser ([28]).

Lorsque $K = 0$, on est en présence d'un système intégrable, dont les solutions sont $p_n = \text{constante}$, $\theta_{n+1} = \theta_n + \text{constante}$. Si la constante est un rationnel, il s'agit d'une solution périodique ; si c'est un irrationnel, c'est une solution quasi-périodique.

Ce modèle, bien qu'en petite dimension, a été étudié comme paradigme de la transition du régime intégrable vers le chaos. On observe en effet les phénomènes suivants :

- rupture des cercles invariants non homotopes à un point au fur et à mesure que le paramètre perturbatif augmente
- apparition d'autres cercles invariants autour des points périodiques
- structure fractale de l'espace des phases et apparition de "cantori"
- diffusion de certaines orbites après la rupture du dernier cercle invariant.

Ces phénomènes ont été observés par Chirikov ([24]) qui y voyait une généralisation possible à des systèmes plus généraux (applications twist préservant l'aire).

L'application semi-standard Greene-Percival ([35]) ont introduit une application similaire mais plus simple à étudier, qui permet cependant d'observer numériquement le même genre de phénomènes. Il s'agit de l'application semi-standard, agissant sur $\mathbb{C}/(2\pi\mathbb{Z}) \times \mathbb{C}$ par

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + p_{n+1} \\ p_{n+1} = p_n + e^{ix_n} \end{cases} \quad (6)$$

Celle-ci peut être une première étape dans l'étude de l'application standard. En effet, en partant de l'application standard (4), en effectuant le changement de variable $x_n = i \ln K + \pi + \theta_n$, on est ramené au système

$$\begin{cases} \theta_{n+1} = \theta_n + p_{n+1} \\ p_{n+1} = p_n + \frac{i}{2} e^{i\theta_n} - iK^2 e^{-i\theta_n} \end{cases}$$

où K est toujours le paramètre perturbatif; en le prenant égal à 0 ici, on obtient un système proche de (6).

Le problème de la persistance des cercles invariants Comme on est en petite dimension, la persistance d'un seul cercle invariant suffit à confiner les orbites dans une partie de l'espace des phases, et inversement la rupture du dernier cercle invariant semble liée au phénomène de diffusion des orbites. On est ainsi amené à la définition suivante :

Définition 4. Pour $\alpha \in \mathbb{T}$, on note $K_{sm}(\alpha)$ la borne inférieure de l'ensemble des paramètres K pour lesquels le système (4) ne possède pas de cercle invariant sur lequel la dynamique est topologiquement conjuguée à une rotation d'angle $2\pi\alpha$.

Définition 5. On note $K_c = \sup_{\alpha} K_{sm}(\alpha)$ la **valeur critique** du paramètre K pour l'application standard.

La valeur critique marque la séparation entre le régime quasi-intégrable et le régime chaotique. Une étude numérique de McKay-Percival ([47]), utilisant le "cone-crossing criterion" de Birkhoff, suggère que $K_c \simeq 0,984$. En revanche Greene ([34]) situe $K_c \simeq 0,97$ en utilisant une méthode dite des "résidus" et suggère que $K_c = K_{sm}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$. Mais l'existence et la valeur de K_c restent à prouver analytiquement.

Paramétrisation des cercles invariants Les séries de Lindstedt fournissent un angle d'attaque pour cette question de la persistance des cercles invariants, et établissent un lien avec les problèmes de linéarisation.

Supposons que α soit tel que $K_{sm}(\alpha) > 0$. Il existe donc $K < K_{sm}(\alpha)$ tel que le système (4) possède un cercle invariant $\mathcal{C}_{K,\alpha}$ sur lequel la dynamique est conjuguée, topologiquement, à une rotation d'angle $2\pi\alpha$ (par abus de langage nous désignons cette conjugaison comme étant une linéarisation topologique). On cherche à paramétrer ce cercle :

$$\mathcal{C}_{K,\alpha} = \{(h_1(t), h_2(t)), t \in \mathbb{R}\}$$

où h_1, h_2 sont des fonctions périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{T} \times \mathbb{R}$. La conjugaison à une rotation est traduite par le fait que $F \circ H = H \circ R$ où R est la rotation $t \mapsto t + \alpha$, autrement dit, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(h_1(t) + h_2(t) + K \sin(2\pi h_1(t)), h_2(t) + K \sin(2\pi h_1(t))) = (h_1(t + \alpha), h_2(t + \alpha))$$

En comparant chaque composante, on a

$$h_2(t) + K \sin(2\pi h_1(t)) = h_2(t + \alpha)$$

et

$$h_1(t) + h_2(t) + K \sin(2\pi h_1(t)) = h_1(t + \alpha)$$

En injectant la première dans la deuxième, on a

$$h_1(t) + h_2(t + \alpha) = h_1(t + \alpha)$$

Mais la deuxième implique aussi

$$h_2(t + \alpha) = h_1(t + 2\alpha) - h_1(t + \alpha) - K \sin(2\pi h_1(t + \alpha))$$

ce qui, avec la précédente, donne

$$h_1(t) + h_1(t + 2\alpha) - 2h_1(t + \alpha) - K \sin(2\pi h_1(t + \alpha)) = 0$$

Finalement, en supposant que h_1 est proche de l'identité, $h_1(t) = t + u(t)$, u "petite",

$$u(t - \alpha) + u(t + \alpha) - 2u(t) = K \sin(2\pi t + 2\pi u(t))$$

Rayon de convergence de la série de Lindstedt pour l'application standard

Plutôt que de se contenter d'une linéarisation topologique, on cherche à ce que la conjugaison soit analytique par rapport au paramètre perturbatif K , de manière à obtenir une déformation régulière des cercles invariants provenant du système intégrable. Ainsi, on doit restreindre la construction du paragraphe précédent aux nombres α tels qu'il existe $K' > 0$ tels que pour tout $K \in [0, K']$, le système (4) possède un cercle invariant sur lequel la dynamique est topologiquement conjuguée à une rotation, puis étudier l'analyticité de la conjugaison par rapport à K . En développant la fonction u , qui dépend de K , en série entière par rapport à K (c'est la série de Lindstedt) :

$$u(t) = \sum_{n \geq 0} K^n u_n(t) \tag{7}$$

on cherche à calculer le rayon de convergence de cette série, que l'on notera $K_{sm}^L(\alpha)$:

$$K_{sm}^L(\alpha) := [\sup_t \limsup_n |u_n(t)|^{\frac{1}{n}}]^{-1}$$

On a ainsi

$$K_{sm}^L(\alpha) \leq K_{sm}(\alpha)$$

De plus, on doit à Moser ([51]) la preuve du fait que $K_{sm}^L(\alpha) > 0$ si α est un nombre diophantien ; ce résultat a été étendu par G.Gentile ([32]) à l'ensemble des nombres de Brjuno.

Davie ([27]) a remarqué que le développement en série de Fourier de (7) est de la forme

$$u(t) = \sum_{n \geq 0} \sum_{m=-n}^n u_{n,m} K^n e^{imt}$$

ce qui permet de définir un rayon de convergence indépendant de t :

Définition 6. On note $\rho_{sm}(\alpha) := [\limsup_n \max_m |u_{n,m}|]^{-1}$.

Proposition 3. [27] Pour tout α , $K_{sm}^L(\alpha) = \rho_{sm}(\alpha)$.

Théorème 3. [27],[5] La fonction $\ln \rho_{sm}(\alpha) + 2B(\alpha)$ est bornée indépendamment de α sur l'ensemble des nombres de Brjuno.

Ainsi l'application standard est linéarisable si et seulement si α est un nombre de Brjuno. Dans la section suivante nous allons voir un résultat analogue pour l'application semi-standard.

Rayon de convergence de la linéarisation pour l'application semi-standard

Dans le cas de l'application semi-standard, un résultat analogue a été montré par Davie ([27]) et Marmi ([44]). La formulation donnée ici de l'application semi-standard ne fait pas apparaître le paramètre perturbatif K , ce qui pourrait laisser penser que les résultats mentionnés sur l'application semi-standard sont de nature non-perturbative ; mais comme on va le voir, la question de la valeur critique revient à complexifier les variables et étudier le rayon de convergence sur un domaine complexe.

Commençons par réécrire le système (6) en posant $z_n = e^{ix_n}$, $\lambda_n = e^{ip_n}$:

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n \lambda_{n+1} \\ \lambda_{n+1} = \lambda_n e^{iz_n} \end{cases} \quad (8)$$

De la même manière, on cherche un changement de variable $H = (h_1, h_2) : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ tel que $F \circ H = H \circ R$ où $R(z, \lambda) = (\lambda z, \lambda)$. On peut montrer que $h_2(z, \lambda) = \frac{h_1(z, \lambda)}{h_1(\lambda^{-1}z, \lambda)}$ et que $h_1(z, \lambda) = iz e^{\phi_\lambda(z)}$ où ϕ_λ doit vérifier

$$\phi_\lambda(\lambda^{-1}z) + \phi_\lambda(\lambda z) - 2\phi_\lambda(z) = -ze^{\phi_\lambda(z)} \quad (9)$$

On cherche à estimer le rayon de convergence de la série entière $\phi_\lambda(z) \sim \sum_{n \geq 0} \phi_n z^n$. Pour vérifier l'équation (9), la fonction ϕ_λ doit avoir des coefficients vérifiant

$$-4 \sin^2(\pi n \alpha) \phi_n = - \sum_p \frac{1}{p!} \sum_{j_1 + \dots + j_p = l-1} \phi_{j_1} \dots \phi_{j_p}$$

Ainsi, on a une obstruction formelle à la linéarisation si $\alpha \in \mathbb{Q}$. Inversement, l'analyticité de ϕ_λ ne peut provenir que d'un bon contrôle des petits diviseurs $\sin(\pi n \alpha)$.

Définition 7. On note $\rho_{ssm}(\alpha)$ le rayon de convergence de la linéarisation de (8), c'est-à-dire le rayon de convergence de la fonction ϕ_λ définie ci-dessus :

$$\rho_{ssm}(\alpha) := [\limsup_n |\phi_n|^{\frac{1}{n}}]^{-1}$$

Dans [27] et [44], Davie et Marmi ont montré un encadrement du rayon de convergence de la linéarisation pour l'application semi-standard, qui s'exprime à l'aide de la somme de Brjuno du paramètre α , de manière similaire à celui concernant l'application standard dans le théorème 3 :

Théorème 4. Pour tout α nombre de Brjuno,

$$\exp(-2B(\alpha) - 100) \leq \rho_{ssm}(\alpha) \leq \exp(-2B(\alpha) + 100) \quad (10)$$

Remarquons qu'il s'agit d'un des très rares résultats d'optimalité d'une condition arithmétique pour la linéarisation ; en revanche les constantes sont trop grandes pour des applications numériques et il serait intéressant d'affiner cet encadrement.

Question ouverte 1. Existe-t-il un prolongement continu de cette fonction sur $\mathbb{T}$?

Une autre question plus naturelle encore est de généraliser ce résultat à des polynômes trigonométriques quelconques :

Question ouverte 2. Peut-on prouver un encadrement similaire à celui du théorème 4 en remplaçant e^{ix_n} dans (8) par un polynôme trigonométrique quelconque ?

La publication [21] qui sera présentée dans la section 2 apporte une réponse partielle à cette question.

L'objet de la publication [21] est d'obtenir un encadrement similaire pour une généralisation de l'application semi-standard :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n + A(x_n) \\ y_{n+1} = y_n + A(x_n) \end{cases}$$

où $A(x) = \sum_{k=1}^N a_k e^{ikx}$.

1.3 Linéarisation et formes normales des champs de vecteurs autour d'un point fixe ou d'un tore invariant

Cette section présente un autre type de système dynamique pour lequel la question de la linéarisation a été très étudiée.

Considérons un champ de vecteurs doté d'un objet invariant compact : point fixe ou tore. On cherche à étudier la dynamique des orbites au voisinage de cet objet invariant. Une approche possible, de type KAM, est d'étudier à quelles conditions le champ de vecteurs sera conjugué à sa partie linéaire (ou quasi-linéaire) au voisinage de cet objet invariant. On voit la non-linéarité comme une perturbation puis on essaie d'augmenter arbitrairement l'ordre de la non-linéarité par une succession de changements de variables. On étudie enfin la convergence de cette suite de changements de variables, qui sera possible à certaines conditions arithmétiques de non résonance (leur version exacte étant nécessaire pour l'existence au moins formelle des changements de variables). En cas de résonances exactes, on sera amené à chercher non pas une linéarisation mais une normalisation, c'est-à-dire un changement de variables (au moins formel) conjuguant le système à une forme normale (en un sens à définir).

Dans certains cas il est possible de prouver l'optimalité d'une condition arithmétique ; c'est par exemple le cas lorsque le système et les changements de variables peuvent être développés en séries entières. En revanche la question de l'optimalité devient plus difficile lorsqu'il y a une série de Fourier à considérer.

Dans cette section j'introduis un formalisme utile à l'étude de ces systèmes puis je fais un panorama (partiel) des résultats connus sur la question, de manière à introduire le rôle des petits diviseurs et faire apparaître des questions naturelles.

1.3.1 Linéarisation et normalisation de champs de vecteurs autour d'un point fixe

Considérons un système non linéaire (mais autonome) doté d'un point fixe que nous supposons égal à l'origine, quitte à traduire. Ce système peut s'écrire

$$\dot{X} = AX + f(X) \quad (11)$$

pour une certaine application $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ suffisamment régulière, telle que $f(0) = 0$ et $Df(0)$ est l'application nulle, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On peut développer f formellement en série de Taylor : $f(X) = \sum_{k \in \mathbb{N}^n, |k| \geq 2} f_k X^k$, où $X^k := \prod_{i=1}^n X_i^{k_i}$ avec $k = (k_1, \dots, k_n)$.

Quitte à conjuguer par un changement de base, on peut supposer que A est en forme normale de Jordan. Je me concentrerai ici sur le cas où A est diagonale de coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On notera

$$L = \sum_j \lambda_j X_j \frac{\partial}{\partial X_j}$$

le champ de vecteurs linéaires engendré par A .

Remarque 2. Pour le cas non-semi-simple, c'est-à-dire où A a une partie nilpotente, on peut se référer à [58]. Dans [43], Lombardi et Stolovitch ont généralisé la théorie au cas des germes de champs de vecteurs quasi-homogènes.

Linéarisation On s'intéresse à l'existence d'une linéarisation, c'est-à-dire d'un changement de variables au moins continu qui conjuguerait le système (11) à un système linéaire, plus précisément :

Définition 8. On dit que (11) est linéarisable dans $\mathcal{C}$ s'il existe un changement de variables de classe $\mathcal{C}$ qui conjugue (11) à sa partie linéaire $\dot{X} = AX$.

Le théorème de Hartman-Grobman donne l'existence d'une linéarisation continue si la matrice A est hyperbolique. La condition d'hyperbolicité n'est pas nécessaire, mais des résonances dans le spectre de A peuvent faire obstruction à l'existence d'une linéarisation.

Définition 9. On dit que le spectre de A , noté $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, est résonant s'il existe un vecteur $k \in \mathbb{N}^n$ avec $|k| \geq 2$ et $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\sum_{i=1}^n k_i \lambda_i - \lambda_j = 0$. Le vecteur k est appelé résonance.

Le théorème de Sternberg dit qu'en l'absence de résonance, un champ de vecteurs C^∞ est linéarisable dans C^∞ ; nous allons voir qu'une condition arithmétique plus forte que la stricte non résonance suffit à construire une linéarisation analytique.

Condition ω Je donne ici la définition d'une condition portant sur un ensemble de nombres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ qui apparaît dans les problèmes de linéarisation d'un champ de vecteurs au voisinage d'un point fixe, et qui généralise la condition de Brjuno pour les nombres :

Définition 10. On dit que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ vérifie la **condition ω de Brjuno** si la suite $\alpha_l : \min_j \min_{k \in \mathbb{N}^n, 2 \leq |k| \leq l} |\sum_{i=1}^n k_i \lambda_i - \lambda_j|$ est telle que

$$\sum_{l \geq 2} \frac{-\ln \alpha_{2^l-1}}{2^l} < +\infty \quad (12)$$

En dimension $n = 2$, cette condition équivaut à une condition de Brjuno sur $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. Une preuve de l'équivalence des deux conditions se trouve dans [33].

En classe analytique, Siegel a montré qu'une condition diophantienne sur $\sigma(A)$ (impliquant l'absence de résonances) suffit à l'existence d'une linéarisation analytique. Brjuno a relâché cette condition à la condition ω donnée en (12) :

Théorème 5. ([9]) Si le spectre de A vérifie la condition ω de Brjuno, et si f est analytique sur un domaine contenant l'origine, alors le système (11) est analytiquement linéarisable.

Forme normale En présence de résonances exactes telles que définies dans la définition 9, on peut néanmoins trouver une conjugaison formelle à une forme normale, c'est-à-dire un système ne comportant que des termes résonants. Une telle conjugaison donne déjà des informations sur la dynamique.

Définition 11. Une conjugaison formelle entre deux champs de vecteurs F, G est la donnée d'une série entière $\sum \phi_k X^k$ telle que pour tout n , $\Phi^n(X) := \sum_{k=0}^n \phi_k X^k$ conjugue F à G à l'ordre n :

$$T^n(D\Phi^n \circ F) = T^n(G \circ \Phi^n) \quad (13)$$

Définition 12. Une forme normale pour le système (11) est un champ de vecteurs $NF = \sum_j NF^j \frac{\partial}{\partial X_j}$ formellement conjugué à (11) dont la dérivée de Lie par rapport à L est nulle.

Remarque 3. Dans la pratique, une forme normale pour le champ de vecteurs (11) est un champ de vecteurs dont le développement en série de Taylor ne comporte que des termes d'indice k où k est une résonance du spectre de A . En effet, $L(NF(X)) - NF(LX) = 0$ si et seulement si $\sum_j \lambda_j X_j \frac{\partial}{\partial X_j} NF(X) - NF(LX) = 0$, et en développant NF en série de Taylor, $NF(X) = \sum_k (NF)_k X^k$, ceci équivaut à

$$\sum_j \lambda_j X_j \sum_k k_j X^{k-e_j} \sum_l (NF)_k^l \frac{\partial}{\partial X_l} - \sum_j \sum_k (NF)_k^j X^k \frac{d}{dX_j} (LX) = 0$$

ou encore

$$\sum_j \lambda_j \sum_k k_j X^k \sum_l (NF)_k^l \frac{\partial}{\partial X_l} - \sum_j \sum_k (NF)_k^j \lambda_j X^k \frac{\partial}{\partial X_j} = 0$$

En isolant le terme homogène de degré k de la l -ième composante, on obtient

$$\sum_j \lambda_j k_j (NF)_k^l - \lambda_l (NF)_k^l = 0$$

Ainsi, les seuls coefficients non nuls sont les $(NF)_k^l$ tels que $\sum_j \lambda_j k_j - \lambda_l = 0$.

La forme normale étant définie ainsi, des questions se posent naturellement :

- La forme normale est-elle unique ?
- A quelles conditions la forme normale converge-t-elle comme série entière ?
- la conjugaison formelle converge-t-elle ?

La première de ces questions a été résolue par Brjuno :

Théorème 6. [9] Pour tout système de la forme (11) analytique, il existe une conjugaison formelle vers une forme normale formelle. La forme normale formelle est unique modulo des monômes résonants.

Quant à la troisième question, en présence de résonances, Brjuno a généralisé la théorie de la linéarisation analytique pour en faire la théorie des formes normales analytiques. Pour cela il formule une condition algébrique, dénommée "condition A de Brjuno" :

Définition 13. On dit que (11) vérifie la condition A de Brjuno s'il possède une forme normale formelle NF qui est proportionnelle à sa partie linéaire :

$$NF(X) = n(X)L \quad (14)$$

Théorème 7. [9] Sous les conditions (12) et (14), le système est analytiquement normalisable si et seulement si toutes les formes normales formelles sont convergentes.

Théorème 8. [9] Si NF est la forme normale formelle d'un système analytique et que ni la condition (12) ni la condition (14) n'est satisfaite, alors il existe un système analytique qui a NF pour forme normale et qui n'est pas analytiquement normalisable.

1.3.2 Autour d'un tore invariant

Les mêmes questions se posent pour un champ de vecteurs au voisinage d'un tore invariant porteur d'une dynamique quasi-périodique, que l'on peut décrire en coordonnées action-angle de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{X} = \omega + f(X, Y) \\ \dot{Y} = AY + g(X, Y) \end{cases} \quad (15)$$

où $\omega \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur rationnellement indépendant, de sorte que le tore où évolue X est porteur d'une dynamique quasi-périodique. L'application $g : \mathbb{T}^d \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ s'annule en $Y = 0$ pour tout X , ainsi que sa différentielle. On a aussi $f(X, 0) = 0$.

On notera $\mathcal{L}$ le champ de vecteur correspondant à la partie quasi-linéaire du système : $\mathcal{L} = \omega \frac{\partial}{\partial X} + AY \frac{\partial}{\partial Y}$, et $\mathcal{F}$ le champ de vecteurs qui engendre (15) : $\mathcal{F} = (\omega + f(X, Y)) \frac{\partial}{\partial X} + (AY + g(X, Y)) \frac{\partial}{\partial Y}$. Pour $k \geq 1$, on dira que $\mathcal{F}$ est de quasi-ordre k si f est d'ordre $k - 1$ et g est d'ordre k .

On cherche à conjuguer le système (15) au système quasi-linéaire

$$\dot{Z} = \omega, \dot{W} = AW$$

par un changement de variables aussi régulier que possible.

La stratégie adoptée par A.D.Brjuno pour les champs de vecteurs à point fixe, et qui peut être étendue ici, est de définir d'abord formellement les changements de variables, avant de voir s'ils convergent. Donnons donc d'abord la définition de la linéarisation formelle telle qu'elle a été reprise par Aurouet ([2]) :

Définition 14. Une linéarisation formelle pour (15) est une suite de changements de variables analytiques (Φ_k) tels que pour tout k , Φ_k linéarise (15) à l'ordre k , c'est-à-dire $\Phi_k^* \mathcal{F} = \mathcal{L} + \mathcal{R}_k$ où $\mathcal{R}_k$ est de quasi-ordre k .

Cette définition de la conjugaison formelle est différente de celle donnée dans le cas du point fixe, de manière à tenir compte de la dépendance sur le tore.

De manière similaire au cas du point fixe, la présence de résonances peut faire obstruction à la linéarisation au voisinage du tore invariant. On recherche alors la conjugaison à une forme normale formelle, ce qui sera décrit en section 3.2. Pour l'instant nous excluons les résonances exactes, ce qui est une conséquence des conditions arithmétiques énoncées ci-après :

Conditions de Melnikov Ce genre de condition arithmétique porte sur un ensemble de nombres $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ dans leur rapport avec $\omega \in \mathbb{R}^d$. Elle est souvent utilisée dans l'étude des systèmes sur le produit d'un tore avec un espace, pour exclure les résonances qui impliquent à la fois la fréquence sur le tore et le spectre de la partie linéaire sur l'espace. Ici je présente la condition de Melnikov formulée par Brjuno et utilisée par Aurouet dans [2] :

Définition 15. Soit $\omega \in \mathbb{R}^d$ et $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$. On dit que (ω, Λ) vérifie la **condition ω de Brjuno-Melnikov** s'il existe une suite (ω_l) vérifiant

$$\sum_{l \geq 1} \frac{-\ln \omega_l}{2^l} < +\infty$$

et telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$, tout $m \in \mathbb{N}^n$ tel que $|m| \geq 2$ et tout $j \in \{1, \dots, n\}$, si $|k| + |m| \leq 2^l$, alors

$$|\langle k, \omega \rangle + \langle m, \Lambda \rangle - \lambda_j| \geq \omega_l$$

Définition 16. On dit que (ω, Λ) vérifient la **condition γ de Brjuno-Melnikov** si pour tout $m \in \mathbb{N}^n$ tel que $|m| \geq 2$, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, et tout $\varepsilon \geq 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \in \mathbb{Z}^d$ avec $|p| \geq N$, on ait

$$|\langle k, \omega \rangle + \langle m, \Lambda \rangle - \lambda_j| \geq e^{-\varepsilon|p|} \quad (16)$$

Brjuno avait énoncé sans le prouver qu'un système de la forme (15) sans résonances est linéarisable sous les conditions ω et γ de Brjuno-Melnikov. Une démonstration a été donnée par Aurouet dans [2], sous une condition légèrement plus restrictive que la condition γ qu'il note γ^* :

Définition 17. On dit que (ω, Λ) vérifient la condition γ^* de Brjuno s'ils vérifient la condition γ avec N, ε tels que

$$\varepsilon = \frac{1}{8} \left(1 - \left(\frac{N}{2}\right)^{-\frac{2}{N}}\right).$$

Théorème 9. [2] Sous les conditions γ^* (définition 17) et ω (définition 15), le système (15) est analytiquement linéarisable.

La condition γ^* paraît technique mais il semble difficile de ne pas demander un certain contrôle sur la décroissance des petits diviseurs en fonction de l'indice de Fourier.

Une preuve de la linéarisation analytique sous une condition de Siegel (plus forte que les conditions de Brjuno-Melnikov) est due à Chow-Lu-Shen ([25]); Meziani ([49]) étend la théorie au cas C^∞ .

L'objet de la publication [18], présentée en section 3.2, est de donner une preuve de la conjugaison analytique à la forme normale formelle sous la condition ω , la condition A de Brjuno (redéfinie en section 3.2) et une condition légèrement plus forte que la condition γ .

1.4 La réductibilité des systèmes différentiels quasi-périodiques et ses applications

Je présente dans cette section les systèmes différentiels à coefficients quasi-périodiques et certains résultats bien connus, qui sont le cadre des publications [19], [6], [12] et [14].

1.4.1 Systèmes quasi-périodiques et cocycles

Considérons un système différentiel linéaire dont les coefficients dépendent du temps de manière quasi-périodique :

$$\frac{d}{dt}X(t, \theta) = A(\theta + t\omega)X(t, \theta) \quad (17)$$

où θ est un paramètre de phase, ω est le vecteur des fréquences (dont on suppose en général qu'il est rationnellement indépendant), A est une fonction continue sur un tore $\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$, à valeurs matricielles.

La solution fondamentale $t \mapsto X(t, \theta)$ de (17) (i.e la solution à valeurs matricielles, qui prend la valeur I en $t = 0$) vérifie la relation suivante :

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, \forall \theta \in \mathbb{T}^d, X^{t+s}(\theta) = X^t(\theta + s\omega)X^s(\theta). \quad (18)$$

Pour cette raison on l'appelle aussi **cocycle quasi-périodique** associé à l'application A .

Cocycles à temps discret Le parti pris de ce mémoire est de se focaliser sur les cocycles à temps continu (c'est-à-dire pour t variant dans $\mathbb{R}$, ce qui convient aux solutions du système (17)); mais une littérature importante concerne les cocycles à temps discret, c'est-à-dire les applications $X : \mathbb{Z} \times \mathbb{T}^d \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ définies par une certaine application $A : \mathbb{T}^d \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ puis

$$X(n, \theta) = A(\theta + (n-1)\omega) \dots A(\theta)$$

Une telle application vérifie également la relation de cocycle (18) (avec $s, t \in \mathbb{Z}$).

Si X est un cocycle à temps continu, sa discrétisation aux temps entiers coïncide avec un cocycle à temps discret. Inversement si X est un cocycle à temps discret au-dessus de ω sur $\mathbb{T}^d$, on peut construire un cocycle à temps continu $\tilde{X}$ au-dessus de $\tilde{\omega}$ sur $\mathbb{T}^{d+1}$, où $\tilde{\omega}$ est la concaténation de ω avec (1), tel que la discrétisation de $\tilde{X}$ coïncide avec X (ceci est décrit, entre autres, dans [15]).

Exemples de systèmes quasi-périodiques Un tel système peut provenir de l'approximation linéaire d'un système hamiltonien (mécanique céleste par exemple) au voisinage d'un tore invariant :

$$\begin{cases} \dot{X} = \omega + f(X, Y) \\ \dot{Y} = A(X)Y + g(X, Y) \end{cases} \quad (19)$$

où $f(X, 0) = 0$, $g(X, 0) = 0$, $d_Y g(X, 0) = 0$. Pour $Y = 0$, on est sur le tore invariant $\mathcal{T} = \{(X, 0), X \in \mathbb{T}^d\}$, qui porte une dynamique quasi-périodique : $\dot{X} = \omega$, qui implique $X(t) = X_0 + t\omega$, ce qui s'enroule de manière dense sur le tore si ω est rationnellement indépendant.

Le cas où A est constant coïncide avec un système de la forme (15).

Pour Y petit, c'est-à-dire (X, Y) proche du tore invariant, si f et g sont régulières, la dynamique peut être approchée par le système

$$\begin{cases} \dot{X} = \omega \\ \dot{Y} = A(X)Y \end{cases} \quad (20)$$

qui est une autre écriture de (17).

Un autre exemple d'apparition du système (17) se trouve en mécanique quantique, lorsque l'on considère l'équation de Schrödinger indépendante du temps, avec un potentiel quasi-périodique :

$$-x''(t) + V(\theta + t\omega)x(t) = Ex(t) \quad (21)$$

où θ est un paramètre de phase, $E \in \mathbb{R}$. On peut réécrire ceci comme

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ x(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & V(\theta + t\omega) - E \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ x(t) \end{pmatrix} \quad (22)$$

ce qui est de la forme de (17).

1.4.2 Invariants dynamiques

Etant donné deux cocycles X et Y de fréquence $\omega \in \mathbb{R}^d$, on définit une relation de conjugaison dynamique entre eux : étant donnée une classe de régularité $\mathcal{C}$, on dit que X et Y sont $\mathcal{C}$ -conjugués s'il existe une application Z de classe $\mathcal{C}$ sur $\mathbb{T}^d$, à valeurs dans les matrices inversibles, telle que pour tous $t \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{T}^d$,

$$X(t, \theta) = Z(\theta + t\omega)Y(t, \theta)Z(\theta)^{-1}$$

Ceci équivaut à demander que, si X est le cocycle associé à l'application A et Y à l'application B ,

$$\partial_\omega Z(\theta) = A(\theta)Z(\theta) - Z(\theta)B(\theta)$$

Cette définition de la conjugaison entre systèmes provient du fait qu'on cherche à les conjuguer par un changement de variables linéaires, et préservant le caractère quasi-périodique et la relation de cocycles.

Dans les sections suivantes, je vais mentionner certains invariants de conjugaison, notamment les exposants de Lyapunov qui déterminent la vitesse de croissance exponentielle des cocycles, les sous-fibrés invariants qui sont une version dynamique des sous-espaces invariants, et, en dimension 2, le nombre de rotation.

Exposant de Lyapunov maximal

Définition 18. L'exposant de Lyapunov maximal du cocycle X associé à A est la quantité

$$L(A) := \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{T}^d} \ln \|X(t, \theta)\| d\theta$$

Remarque 4. L'exposant de Lyapunov maximal est un invariant de conjugaison car si Y est un cocycle conjugué à X , alors il existe $Z : \mathbb{T}^d \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ continue telle que pour tout θ, t , $Y(t, \theta) = Z(\theta + t\omega)X(t, \theta)Z(\theta)^{-1}$; ainsi (en notant B l'application qui génère Y),

$$L(B) \leq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_{\mathbb{T}^d} \ln \|Z(\theta + t\omega)\| + \ln \|X(t, \theta)\| + \ln \|Z(\theta)^{-1}\| d\theta$$

et puisque Z est bornée on obtient $L(B) \leq L(A)$, l'autre inégalité s'obtenant par symétrie.

Sous-fibrés invariants

Définition 19. Un sous-fibré invariant de régularité $\mathcal{C}$ pour le cocycle X est une application W de classe $\mathcal{C}$ de $\mathbb{T}^d$ dans la grassmannienne de $\mathbb{C}^n$ telle que pour tout $\theta \in \mathbb{T}^d$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X(t, \theta)W(\theta) = W(\theta + t\omega)$.

Remarque 5. Dans le cas où W est au moins différentiable, si X est associé à l'application A , on a la relation

$$\partial_\omega W(\theta) = A(\theta)W(\theta) \tag{23}$$

En effet on a pour tout θ, t ,

$$X(t, \theta)W(\theta) = W(\theta + t\omega)$$

et en dérivant par rapport à t ,

$$\frac{d}{dt} X(t, \theta)W(\theta) = \frac{d}{dt} W(\theta + t\omega)$$

ou encore

$$A(\theta + t\omega)X(t, \theta)W(\theta) = \frac{d}{dt} W(\theta + t\omega)$$

et en prenant ici $t = 0$, on obtient la relation (23).

Remarque 6. Le théorème d'Oseledets donne une subdivision de l'espace en sous-fibrés invariants mesurables sur lesquels la croissance des solutions est quantifiée. Les exposants donnant la croissance des solutions sur chaque sous-fibré séparément sont les exposants de Lyapunov et le plus grand d'entre eux est l'exposant de Lyapunov maximal tel que défini dans la définition 18. Pour les cocycles à valeurs dans $SL(2, \mathbb{R})$ (comme les cocycles de Schrödinger), le théorème d'Oseledets donne donc une décomposition en deux sous-fibrés invariants mesurables sur lesquels la croissance des solutions est donnée par l'exposant de Lyapunov maximal (et son opposé).

Nombre de rotation Je rappelle ici la définition du nombre de rotation de Johnson-Moser ([38]).

Définition 20. Soit X un cocycle à valeurs dans $SL(2, \mathbb{R})$. Soit $u \in \mathbb{R}^2$ et soit χ un relèvement de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de l'argument de la fonction à valeurs complexes $u_1(t) + iu_2(t)$ où $u_1(t), u_2(t)$ sont les composantes du vecteur $X(t, \theta)u$. Le nombre de rotation fibré de X est la quantité

$$\rho(X) := \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\chi(t)}{t}$$

indépendante de u et définie de manière unique pour presque tout θ .

L'existence de la limite définissant $\rho(X)$ est prouvée dans [38]. On a la propriété importante suivante :

Proposition 4. Le nombre de rotation est un invariant de conjugaison modulo l'ensemble $\{2\pi\langle k, \omega \rangle, k \in \mathbb{Z}^d\}$, et il est préservé par des changements de variables homotopes à l'identité.

Dans [36], M.Herman définit le nombre de rotation fibré qui a l'avantage d'être calculable à partir de l'expression du système lui-même, mais qui n'est défini que modulo π . Ainsi son sens dynamique est moins évident, mais il sert tout aussi bien comme outil pour définir des conditions arithmétiques suffisantes à la réductibilité, dont je parlerai dans la section 1.4.3.

Par ailleurs le nombre de rotation, comme le nombre de rotation fibré, est continu par rapport à l'application qui engendre le cocycle.

1.4.3 Réductibilité

On s'intéresse à la question de l'existence d'un changement de variables adéquat qui conjuguera ce système à un système à coefficients constants. Un tel changement de variables sera donné par une application assez régulière $Z : k\mathbb{T}^d \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ où $k = 1$ ou 2 et $2\mathbb{T}^d := \mathbb{R}^d / (2\mathbb{Z}^d)$ (le doublement de période peut être souhaitable pour obtenir des valeurs réelles) telle que pour tous $\theta \in \mathbb{T}^d, t \in \mathbb{R}$,

$$Z(\theta + t\omega)X(t, \theta)Z(\theta)^{-1} = e^{tA}$$

où A serait la matrice des coefficients constants du système auquel on pourrait conjuguer le système initial.

Si le changement de variables Z est de classe $\mathcal{C}$, on dit que le cocycle solution de (17) (ou le système lui-même) est réductible dans $\mathcal{C}$ modulo k .

En général les cocycles ne sont pas tous topologiquement réductibles, c'est-à-dire réductibles dans C^0 , mais un doublement de période peut suffire à lever certaines obstructions topologiques à la réductibilité.

La réductibilité s'oppose à l'ergodicité du flot dans l'espace projectif, ce qui fournit des exemples de cocycles non réductibles ([31]).

1.4.4 Applications de la réductibilité

Si X est un cocycle topologiquement réductible au cocycle constant (par rapport à θ) défini comme $(\theta, t) \mapsto e^{tB}$, la matrice B indique les invariants de conjugaison définis ci-dessus : la partie réelle des valeurs propres de B coïncide avec les exposants de Lyapunov ; si $B \in sl(2, \mathbb{R})$, leur partie imaginaire correspond au nombre de rotation modulo $2\pi \langle \mathbb{Z}^d, \omega \rangle$ et en dimension plus grande, elle donne le comportement rotationnel des solutions (ce sont les exposants de Floquet). Les sous-fibrés invariants de X sont l'image par Z des sous-espaces invariants de B .

On s'intéresse également à la régularité qu'il est possible d'obtenir pour le changement de variables Z . Plus Z est régulière, plus les sous-fibrés invariants seront réguliers.

Par ailleurs, si l'on considère un système de la forme (19) et que sa partie linéaire est réductible, c'est qu'il existe un changement de variables linéaires conjuguant (19) à un système de la forme de (15), et on peut dans un deuxième temps se demander si le système est linéarisable.

La réductibilité a également des liens avec la régularité des exposants de Lyapunov, qui est elle-même liée à la régularité de la densité d'états intégrée, fournissant donc un outil pour l'analyse spectrale des opérateurs de Schrödinger (voir par exemple [3]) :

Proposition 5. Si le cocycle associé à A est conjugué dans C^0 à e^{tB} où B est elliptique, alors il existe $C > 0$ telle que pour tout A' on ait $|L(A) - L(A')| \leq C \|A - A'\|_{C^0}$.

Démonstration: Il existe une matrice B , dont la partie réelle des valeurs propres est nulle, et une application $Z : \mathbb{T}^d \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ continue, telles que $\partial_\omega Z = AZ - ZB$. Soit A' une application du tore dans les matrices (on s'intéresse au cas où A' est proche de A). On cherche à majorer $|L(A') - L(A)|$, c'est-à-dire $|L(A')|$, en fonction de $A' - A$. Or A' est conjugué par Z à $B + Z^{-1}(A' - A)Z$ d'où par invariance,

$$L(A') = L(B + Z^{-1}(A' - A)Z)$$

Soit Y le cocycle associé à $B + Z^{-1}(A' - A)Z$ et $W(t, \theta) = e^{-tB}Y(t, \theta)$. On a pour tous t, θ ,

$$\frac{d}{dt}W(t, \theta) = e^{-tB}Z(\theta)^{-1}(A'(\theta) - A(\theta))Z(\theta)e^{tB}W(t, \theta)$$

d'où par le lemme de Grönwall,

$$\|W(t, \theta)\| \leq \exp(t\|e^{-tB}\| \|Z(\theta)^{-1}\| \|A'(\theta) - A(\theta)\| \|Z(\theta)\| \|e^{tB}\|)$$

ce qui implique

$$\|Y(t, \theta)\| \leq \|e^{tB}\| \exp(t\|e^{-tB}\| \|Z(\theta)^{-1}\| \|A'(\theta) - A(\theta)\| \|Z(\theta)\| \|e^{tB}\|).$$

Or par ellipticité de B , $\|e^{tB}\|$ est borné indépendamment de t . Ainsi il existe $C' > 0$ telle que pour tout θ ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|Y(t, \theta)\| \leq C' \|Z(\theta)^{-1}\| \|A'(\theta) - A(\theta)\| \|Z(\theta)\|.$$

La proposition suit du caractère borné de Z sur $\mathbb{T}^d$. $\square$

1.4.5 La presque réductibilité

La réductibilité est une propriété rare et il est utile de définir une notion s'en rapprochant mais qui sera vérifiée par davantage de cocycles, celle de presque-réductibilité. On travaille dans une classe de fonctions graduée : $\mathcal{C} = \cup_{r>0} \mathcal{C}_r$ où $r < r' \Rightarrow \mathcal{C}_{r'} \subset \mathcal{C}_r$ et chaque $\mathcal{C}_r$ a la structure d'espace vectoriel (par exemple $\mathcal{C}$ peut désigner la classe analytique, la classe Gevrey...).

On notera $\|\cdot\|_{\mathcal{C}_r}$ la norme de référence pour les applications de classe $\mathcal{C}_r$ à valeurs matricielles. Par exemple en classe analytique, on utilise soit la norme $\|A\|_{\mathcal{C}_r^\omega} = \sup_{|Im\theta|<r} \|A(\theta)\|$, soit la norme pondérée $\|A\|_{\mathcal{C}_r^\omega} = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \|\hat{A}(k)\| e^{2\pi|k|r}$ (notons que les deux ne sont pas équivalentes pour un même $r > 0$).

Définition 21. On dit que le cocycle X associé à A est **presque réductible dans $\mathcal{C}$** si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $r_\epsilon > 0$, une conjugaison dynamique Z_ϵ de classe $\mathcal{C}_{r_\epsilon}$, une matrice A_ϵ et une application B_ϵ telles que $\|B_\epsilon\|_{\mathcal{C}_{r_\epsilon}} \leq \epsilon$ et Z_ϵ conjugue A à $A_\epsilon + B_\epsilon$.

Remarque 7. L'application A est alors elle-même de classe $\mathcal{C}_{r_\epsilon}$. En revanche une perte de régularité est en général observée entre A et Z_ϵ . On peut alors donner une définition plus forte de la presque réductibilité.

Définition 22. On dit que X est **fortement presque réductible dans $\mathcal{C}$** s'il existe $r > 0$ tel que X est presque réductible dans $\mathcal{C}_r$ et s'il existe $\chi \in (0, \frac{1}{2})$ tels que pour tout ϵ on ait l'estimation

$$\|Z_\epsilon\|_{\mathcal{C}_r} \leq \epsilon^{-\chi}$$

Une définition encore plus forte se révèlera utile pour les applications de la presque réductibilité :

Définition 23. On dit que X est **quantitativement presque réductible (QPR) dans $\mathcal{C}$** s'il est fortement presque réductible dans $\mathcal{C}$ et si dans le cas où X est non réductible, la suite A_ϵ vérifie : il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, $\|A_\epsilon\| \leq \epsilon^\delta$.

1.4.6 Applications de la presque réductibilité

Remarque 8. La propriété que $\|Z_\epsilon\|_{\mathcal{C}_r} \|Z_\epsilon^{-1}\|_{\mathcal{C}_r} \|A_\epsilon\| \leq C$ pour tout ϵ , pour un certain $C > 0$, n'est pas assez forte pour les applications présentées ici, c'est pourquoi je donne une définition de la presque réductibilité quantitative qui mesure exactement la convergence de A_ϵ dans le cas non réductible. Notons qu'une telle estimation de A_ϵ peut être facilement obtenue dans le cas des cocycles à valeurs dans $SL(2, \mathbb{R})$ grâce à la méthode d'Eliasson, mais pas en dimension plus grande.

Approximation par des cocycles réductibles

Proposition 6. Un cocycle fortement presque réductible dans $\mathcal{C}$ est limite dans $\mathcal{C}_r$ de cocycles réductibles pour un certain $r > 0$.

Démonstration: Soit X le cocycle associé à A et supposons que X soit fortement presque réductible dans $\mathcal{C}$. Il existe donc $r > 0$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un cocycle réductible associé à une fonction A' qui est ϵ -proche de A dans $\mathcal{C}_r$. En effet, puisque A est QPR, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $Z_\epsilon \in \mathcal{C}_r(\mathbb{T}^d, GL(n, \mathbb{C}))$, une matrice A_ϵ et une application $F_\epsilon \in \mathcal{C}_r(\mathbb{T}^d, gl(n, \mathbb{C}))$ vérifiant $\|F_\epsilon\|_{\mathcal{C}_r} \leq \epsilon$ telles que

$$\partial_\omega Z_\epsilon = AZ_\epsilon - Z_\epsilon(A_\epsilon + F_\epsilon)$$

ce qui se réécrit

$$\partial_\omega Z_\epsilon = (A - Z_\epsilon F_\epsilon Z_\epsilon^{-1})Z_\epsilon - Z_\epsilon A_\epsilon$$

et ainsi le cocycle associé à $A - Z_\epsilon F_\epsilon Z_\epsilon^{-1}$ est réductible. De plus cette dernière application est proche de A dans $\mathcal{C}_r$ car

$$\|Z_\epsilon F_\epsilon Z_\epsilon^{-1}\|_{\mathcal{C}_r} \leq \epsilon^{1-2\chi}$$

et ainsi A est limite dans $\mathcal{C}_r$ de cocycles réductibles. $\square$

Estimation des solutions sur un temps long Si le cocycle associé à A est fortement presque réductible dans $\mathcal{C}$, l'estimation provenant du lemme de Grönwall peut être suffisamment bonne. Soit $\epsilon > 0$, et soit $A_\epsilon \in gl(n, \mathbb{C})$, $F_\epsilon \in \mathcal{C}_{r_\epsilon}(\mathbb{T}^d, gl(n, \mathbb{C}))$, $Z_\epsilon \in \mathcal{C}_{r_\epsilon}(\mathbb{T}^d, GL(n, \mathbb{C}))$ telles que $\|F_\epsilon\|_{\mathcal{C}_{r_\epsilon}} \leq \epsilon$ et

$$\partial_\omega Z_\epsilon = AZ_\epsilon - Z_\epsilon(A_\epsilon + F_\epsilon)$$

Notons $Y(t, \theta)$ le cocycle associé à $A_\epsilon + F_\epsilon$, puis $W(t, \theta) = e^{-tA_\epsilon}Y(t, \theta)$, qui est alors le cocycle associé à $e^{-tA_\epsilon}F_\epsilon e^{tA_\epsilon}$. Le lemme de Grönwall nous dit que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\|W(t, \cdot)\|_{\mathcal{C}_{r_\epsilon}} \leq \exp\left(\sup_{s_1, s_2 \in [0, t]} t\epsilon \|e^{-s_1 A_\epsilon}\| \|e^{s_2 A_\epsilon}\|\right)$$

ce qui implique que

$$\|Y(t, \cdot)\|_{\mathcal{C}_{r_\epsilon}} \leq \|e^{tA_\epsilon}\| \exp\left(\sup_{s_1, s_2 \in [0, t]} t\epsilon \|e^{-s_1 A_\epsilon}\| \|e^{s_2 A_\epsilon}\|\right)$$

et finalement

$$\|X(t, \cdot)\|_{\mathcal{C}_{r_\epsilon}} \leq \|Z_\epsilon\|_{\mathcal{C}_{r_\epsilon}} \|Z_\epsilon^{-1}\|_{\mathcal{C}_{r_\epsilon}} \|e^{tA_\epsilon}\| \exp\left(\sup_{s_1, s_2 \in [0, t]} t\epsilon \|e^{-s_1 A_\epsilon}\| \|e^{s_2 A_\epsilon}\|\right)$$

Deux cas particuliers donnent une bonne estimation de Y : si A_ϵ est elliptique, auquel cas on a simplement

$$\|X(t, \cdot)\|_{\mathcal{C}_{r_\epsilon}} \leq C \|Z_\epsilon\|_{\mathcal{C}_{r_\epsilon}} \|Z_\epsilon^{-1}\|_{\mathcal{C}_{r_\epsilon}} e^{C't\epsilon},$$

où C, C' ne dépendent pas de t , et celui où A_ϵ tend vers 0 à une vitesse connue. Dans les deux cas il faut néanmoins un certain contrôle sur $\|Z_\epsilon^{-1}\|_{\mathcal{C}_{r_\epsilon}}$ et $\|Z_\epsilon\|_{\mathcal{C}_{r_\epsilon}}$.

Une application à la théorie spectrale Notons X_E le cocycle associé à l'équation de Schrödinger quasi-périodique, c'est-à-dire à la fonction

$$A_E : \mathbb{T}^d \rightarrow sl(2, \mathbb{R}), \theta \mapsto \begin{pmatrix} 0 & V(\theta) - E \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

où $E \in \mathbb{R}$ et $V \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^d, \mathbb{R})$ avec $\mathcal{C} \subset C^0$.

Définition 24. On dit que X_E est uniformément hyperbolique s'il existe deux sous-fibrés invariants continus U, V et des réels $C, \alpha > 0$ tel que pour tout $\theta \in \mathbb{T}^d$, tous $u(\theta) \in U(\theta)$, $v(\theta) \in V(\theta)$ et tout $t \in \mathbb{R}^+$,

$$\|X_E(t, \theta)u(\theta)\| \leq Ce^{-t\alpha}, \|X_E(-t, \theta)v(\theta)\| \leq Ce^{-t\alpha}$$

Proposition 7. Si X_E est presque réductible dans $\mathcal{C} \subset C^0$ et que son exposant de Lyapunov est non nul, alors X_E est uniformément hyperbolique.

Les deux énoncés suivants découlent des résultats de R.A.Johnson ([37]).

Théorème 10. ([37]) Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

- Le cocycle X_E n'est pas uniformément hyperbolique,
- L'énergie E est dans le spectre.

Corollaire 1. Si X_E est presque réductible alors E n'est pas dans le spectre.

Ce corollaire permet de rattacher la théorie de la réductibilité à l'étude des gaps du spectre et à la construction d'exemples de spectres Cantor.

Régularité des exposants de Lyapunov et de la densité d'états intégrée La régularité Hölder du nombre de rotation et de la densité d'états intégrée a été prouvée par S.Hadj Amor ([1]) et peut être rattachée à celle des exposants de Lyapunov ; je donne ici une preuve simple du fait que l'exposant de Lyapunov maximal est ponctuellement Hölder en un cocycle QPR, si les estimations caractérisant la presque réductibilité quantitative sont suffisantes. On pourra aussi se référer à [42].

Proposition 8. Si le cocycle associé à A est quantitativement presque réductible avec $\chi \leq \frac{\delta}{2}$, alors il existe $C > 0$ telle que pour toute application A' , on a l'estimation

$$|L(A') - L(A)| \leq C \|A' - A\|_{\mathcal{C}}^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

Démonstration: Le cas où A est réductible a déjà été traité dans la proposition 5 (on a alors un exposant de Lyapunov ponctuellement Lipschitz en A). Supposons maintenant que A soit non réductible mais QPR. Soit A' fixé. Soit $\epsilon = \|A' - A\|^{\frac{1}{4\chi}}$ où χ est donné par la presque réductibilité forte et A_ϵ une matrice, $F_\epsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^d, \mathcal{G})$ et $Z_\epsilon \in \mathcal{C}(\mathbb{T}^d, G)$ tels que A soit conjugué par Z_ϵ à $A_\epsilon + F_\epsilon$. L'application A' est alors conjuguée à $A_\epsilon + F_\epsilon - Z_\epsilon^{-1}(A' - A)Z_\epsilon$. Soit Y le cocycle associé à cette dernière application.

On a alors par le lemme de Grönwall

$$\|Y(t, \theta)\| \leq \exp(t\|A_\epsilon\| + t\epsilon + t\|Z_\epsilon\| \|Z_\epsilon^{-1}\| \|A' - A\|)$$

d'où

$$\frac{1}{t} \ln \|Y(t, \theta)\| \leq \|A_\epsilon\| + \epsilon + \|Z_\epsilon\| \|Z_\epsilon^{-1}\| \|A' - A\|. \quad (26)$$

La presque réductibilité quantitative dans le cas non réductible implique que $\|A_\epsilon\| \leq \epsilon^\delta$, d'où

$$L(A') \leq \|A' - A\|^{\frac{\delta}{4\chi}} + \|A' - A\|^{\frac{1}{4\chi}} + \epsilon^{-2\chi} \|A' - A\| \leq C \|A' - A\|^{\frac{1}{2}}$$

où C ne dépend pas de A' . $\square$

1.4.7 Réductibilité en classe analytique, dans un cadre perturbatif

Je mentionnerai ici quelques résultats historiques sur la réductibilité des cocycles de classe analytique. On peut distinguer le cas $d = 2$, où une théorie globale est possible, et le cas $d > 2$, où l'essentiel des résultats sont dans un cadre perturbatif, c'est-à-dire que le vecteur des fréquences satisfait une condition arithmétique (le plus souvent diophantienne) et que le système considéré est proche d'un système à coefficients constants, avec une condition de proximité qui dépend de la condition arithmétique vérifiée par les fréquences.

Question ouverte 3. Des résultats non perturbatifs sont-ils possibles avec $d > 2$?

Commençons par définir les conditions arithmétiques qui concernent le vecteur des fréquences.

Définition 25. Soit $\omega \in \mathbb{R}^d$, on dit que ω est diophantien de constante κ et d'exposant τ , noté $\omega \in DC(\kappa, \tau)$, si pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$, on a

$$|\langle k, \omega \rangle| \geq \frac{\kappa}{|k|^\tau} \quad (27)$$

On dit aussi que ω vérifie une condition de Siegel.

Remarque 9. La mesure de $\cup_{\kappa>0} DC(\kappa, \tau)$ est pleine si $\tau \geq d - 1$ (avec $d \geq 2$), mais topologiquement il s'agit d'un "petit" ensemble.

Dans les résultats de réductibilité des cocycles quasi-périodiques, la convergence de l'algorithme KAM est facilitée par une condition de Melnikov liant les couples de valeurs propres à la fréquence. Dans le cas particulier de $SL(2, \mathbb{R})$, cette condition est persistante par conjugaison (on ne sait pas si c'est le cas en dimension plus grande) grâce à l'invariance du nombre de rotation, et s'énonce comme suit :

Définition 26. Soit $\rho \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}^d$, on dit que ρ est diophantien par rapport à ω , de constante κ et d'exposant τ , noté $\rho \in DC_\omega(\kappa, \tau)$, si pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$, on a

$$|\rho - \langle k, \omega \rangle| \geq \frac{\kappa}{|k|^\tau}.$$

On note $DC_\omega = \cup_{\kappa>0, \tau \geq d-1} DC_\omega(\kappa, \tau)$.

Théorème 11. ([29]) On considère le cocycle de Schrödinger associé à la fonction A_E définie en (24). Soit $r > 0$ et supposons $A_E \in C_r^\omega$. Soit $\kappa > 0$, $\tau > d - 1$, $\omega \in DC(\kappa, \tau)$. Notons ρ le nombre de rotation de X_E et supposons que $\rho \in DC_\omega$ ou que $\rho = \pi \langle k, \omega \rangle$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}^d$. Alors il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que si $|V - \hat{V}(0)|_r \leq \epsilon_0$, le cocycle X_E est réductible dans C^ω .

Des généralisations de ce résultat feront l'objet de la section 4.

1.4.8 Résultats de presque réductibilité dans un cadre perturbatif

La réductibilité est une propriété forte qui entraîne que la dynamique du cocycle est relativement facile à connaître, du moins en théorie. En contrepartie, les résultats connus nécessitent des hypothèses assez fortes : cadre perturbatif, ou peu de fréquences, et surtout une propriété sur la partie constante qui soit assez robuste pour passer à l'itération, comme

la condition de Siegel dans le théorème 11. Mais, comme on l'a vu dans la section 1.4.6, certaines des propriétés intéressantes qui découlent de la réductibilité sont en fait déjà présentes dans la classe des cocycles presque réductibles.

Le théorème suivant concerne aussi le cadre perturbatif mais montre que la presque réductibilité nécessite moins d'hypothèses que la réductibilité, en particulier il n'y a pas besoin de condition de Melnikov robuste.

Théorème 12. ([30]) Soient $r > 0, \kappa > 0, \tau > d - 1$. Soit $\omega \in DC(\kappa, \tau)$. Soit $A \in C_r^\omega(\mathbb{T}^d, gl(n, \mathbb{R}))$. Il existe ϵ_0 ne dépendant que de $n, d, \kappa, \tau, \hat{A}(0), r$ tel que si $|A - \hat{A}(0)|_r \leq \epsilon_0$, alors le cocycle associé à A est presque réductible.

Il s'agit ici de presque réductibilité au sens de la définition 21. Dans [17], je montre sous ces hypothèses, que le cocycle est en fait fortement presque réductible au sens de la définition 22.

La méthode mise au point par Eliasson dans [30] est un algorithme itératif de type KAM : on itère un changement de variable qui a la propriété de réduire la taille de la perturbation, c'est-à-dire de la partie non constante du système. Un tel changement de variables peut être proche de l'identité s'il n'y a pas de petits diviseurs, c'est-à-dire de résonances (approchées) entre les valeurs propres et la fréquence, autrement dit si une condition de Melnikov est vérifiée ; autrement, il faut auparavant enlever les résonances par un changement de variables qui aura pour effet de décaler les valeurs propres pour les rendre non résonantes.

En raffinant l'élimination des résonances, on peut arriver à la presque réductibilité forte (c'est l'objet de la publication [17]). Ce raffinement sera à nouveau utilisé dans la publication [14] présentée dans la section 4.1.2.

1.5 Directions de recherche

Les publications présentées dans ce mémoire visent à étendre les résultats connus présentés ci-dessus dans plusieurs directions :

- Relâchement des conditions arithmétiques utilisées auparavant ;
- Preuves d'optimalité des conditions arithmétiques ;
- Extension à des classes de fonctions non encore étudiées ;
- Résultats de formes normales en présence de résonances exactes.

Je discute ici de l'intérêt de chacune de ces questions.

1.5.1 Relâchement et optimalité des conditions arithmétiques

Bien que les nombres diophantiens soient déjà de mesure pleine, leur topologie est maigre et il peut être intéressant d'obtenir des résultats de réductibilité pour des paramètres qui sont topologiquement plus épais, de manière à raisonner par approximations.

D'un point de vue purement théorique, il est intéressant d'étendre la question à laquelle le théorème de Yoccoz (théorème 2) avait répondu, voire d'étendre le théorème de Buff-Chéritat ([11]), à des systèmes dynamiques plus généraux. Le relâchement des conditions arithmétiques est une partie du problème, celle pour laquelle la théorie KAM offre des outils.

Cependant la théorie KAM est un algorithme convergeant lentement et rien ne dit qu'elle suffira à atteindre des résultats optimaux en ce qui concerne les conditions suffisantes de réductibilité. Néanmoins elle débouche naturellement sur la condition de Brjuno-Rüssmann, une généralisation de la condition de Brjuno qui sera présentée dans les sections suivantes.

L'autre partie de la question posée par le théorème de Yoccoz, à savoir l'optimalité des conditions arithmétiques, semble naturellement plus difficile à atteindre par des méthodes analytiques.

1.5.2 Extension à d'autres classes de fonctions

Les résultats mentionnés ci-dessus concernent essentiellement les classes analytiques. D'autres résultats existent en classe Gevrey et en classe C^∞ . Les régularités intermédiaires ont été peu étudiées et je présente dans les sections 4.1.2 et 4.2.1 des résultats en classe ultra-différentiable. Les fonctions quasi-analytiques en particulier représentent une classe intéressante de fonctions ultradifférentiables, par leur propriété d'être déterminées totalement par un ensemble restreint de valeurs.

Je présenterai aussi dans la section 4.2.2 un résultat en différentiabilité finie obtenu par approximation analytique des fonctions différentiables.

1.5.3 Formes normales en présence de résonances

La présence de résonances exactes dans les paramètres du système est une source d'instabilité, notamment c'est une obstruction à la linéarisation ou à la réductibilité en quelque régularité que ce soit. La théorie des formes normales permet de mieux comprendre ce qui se passe aux résonances et d'avoir malgré tout une certaine information sur la dynamique en présence de résonances. Inversement, il serait intéressant de savoir si on peut construire des exemples de systèmes non normalisables et donc fortement chaotiques (soit parce que leur forme normale diverge, soit parce qu'aucun changement de variables régulier ne les y conjugue).

2 Application semi-standard généralisée : un lien entre la somme de Brjuno et le rayon de convergence de la linéarisation

Je présente dans ce chapitre le résultat obtenu dans [21]. Il s'agit d'un résultat d'optimalité de la condition de Brjuno en classe analytique, pour un système un peu plus général que l'application semi-standard.

2.1 L'application semi-standard généralisée

On considère le système en temps discret suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n + A(x_n) \\ y_{n+1} = y_n + A(x_n) \end{cases} \quad (28)$$

où A est de la forme $A(x) = \sum_{k=1}^N a_k e^{ikx}$. Ce modèle ne contient pas l'application standard comme cas particulier car on ne s'autorise que des modes de Fourier dont l'indice est positif. Par le changement de variables $z_n = e^{ix_n}$, $\lambda_n = e^{iy_n}$, on se ramène à

$$\begin{cases} z_{n+1} = z_n \lambda_n e^{i \sum_{k=1}^N a_k z_n^k} \\ \lambda_{n+1} = \lambda_n e^{i \sum_{k=1}^N a_k z_n^k} \end{cases} \quad (29)$$

Notons $\kappa_0 < \dots < \kappa_N$ les indices k tels que $a_k \neq 0$. Si $d \in \mathbb{N}$ est le plus grand commun diviseur de $\{\kappa_0, \dots, \kappa_N\}$, le changement de variable $Z_n = z_n^d$, $\Lambda_n = \lambda_n^d$ ramène le système à

$$\begin{cases} Z_{n+1} = Z_n \Lambda_n e^{id \sum_{k'=1}^{\frac{N}{d}} a_{dk'} Z_n^{k'}} \\ \Lambda_{n+1} = \Lambda_n e^{id \sum_{k'=1}^{\frac{N}{d}} a_{dk'} Z_n^{k'}} \end{cases} \quad (30)$$

Il semblerait donc que l'on puisse se ramener au cas où les indices k sont premiers entre eux, à ceci près qu'il ne s'agit pas d'un changement de variables inversible au voisinage de l'origine.

De la même manière que pour l'application semi-standard, le système (29) n'a aucune chance d'être linéarisable pour les deux variables conjointement, puisque c'est la valeur (si elle est constante) prise par la deuxième variable qui va déterminer l'existence d'une linéarisation par rapport à la première variable. Ainsi, on définit une linéarisation du système (29) pour $\lambda \in \mathbb{C}$ fixé de module 1 comme étant un changement de variables $H = (h_1, h_2)$ tel que $F \circ H = H \circ R$ où R est la rotation $R(z, \lambda) = (\lambda z, \lambda)$. On réduit de la même manière le problème à la recherche de $h_1(z, \lambda) = i z e^{\phi_\lambda(z)}$ où cette fois ϕ_λ doit vérifier

$$\phi_\lambda(\lambda^{-1}z) + \phi_\lambda(\lambda z) - 2\phi_\lambda(z) = \sum_{k=1}^N i a_k (iz)^k e^{k\phi_\lambda(z)} \quad (31)$$

Voici l'encadrement montré dans [21] :

Théorème 13. En notant $\lambda = e^{i\alpha}$, soit $\rho(\alpha)$ le rayon de convergence de la linéarisation ϕ_λ définie ci-dessus. On a la minoration

$$\rho(\alpha) \geq C \exp\left(-\frac{2}{d} B(d\alpha)\right) \quad (32)$$

où C ne dépend pas de α . De plus, il existe un choix de coefficients $(a_1, \dots, a_N)$ tel que

$$\rho(\alpha) \leq C' \exp\left(-\frac{2}{d}B(d\alpha)\right) \quad (33)$$

où C' ne dépend pas de α .

2.2 Relation entre les coefficients de la linéarisation et étude des petits diviseurs

La relation (31) se réécrit, en notant ϕ_l les coefficients de Taylor de ϕ_λ ,

$$\phi_l = \frac{1}{D_l} \sum_{K \leq l} i^{K+1} a_K [\delta_{K,l} + \sum_{m \leq K, m \leq l-K} \binom{K}{m} \sum_{p_1 \leq l-K} \dots \sum_{p_m \leq l-K} \frac{1}{p_1! \dots p_m!} \sum \phi_{j_1^1} \dots \phi_{j_{p_1}^1} \dots \phi_{j_1^m} \dots \phi_{j_{p_m}^m}] \quad (34)$$

où la dernière somme porte sur $j_1^1, \dots, j_{p_1}^1, \dots, j_1^m, \dots, j_{p_m}^m$ tels que

$$j_1^1 + \dots + j_{p_1}^1 + \dots + j_1^m + \dots + j_{p_m}^m = l - K$$

et où $D_l = -4 \sin^2(\pi l \alpha)$. Il devient clair que les petits diviseurs D_l vont influencer directement sur le rayon ρ d'une éventuelle linéarisation analytique via la formule

$$\rho^{-1} = \limsup_l |\phi_l|^{\frac{1}{l}} \quad (35)$$

Or pour α proche d'un rationnel de dénominateur l , on a $D_l \simeq \|l\alpha\|_{\mathbb{Z}}^2$ (où $\|\cdot\|_{\mathbb{Z}}$ désigne la distance au plus proche entier), au sens où l'un est encadré par un multiple de l'autre :

$$\|l\alpha\|_{\mathbb{Z}} \leq |D_l|^{\frac{1}{2}} \leq 3\|l\alpha\|_{\mathbb{Z}}$$

La relation de récurrence (34) montre aussi que les seuls coefficients ϕ_l non nuls seront ceux dont l'indice l est dans le semi-groupe additif $\mathcal{M}$ engendré par les modes de Fourier effectivement présents dans l'application A , c'est-à-dire les indices des coefficients a_j non nuls. Notons

$$d = \text{pgcd}(i \in \{1, \dots, n\}, a_i \neq 0) \quad (36)$$

On peut montrer que $\mathcal{M}$ contient tous les multiples de d suffisamment grands ([21], lemme 4). Ainsi, en notant (q_k) la suite des meilleures approximations rationnelles de $d\alpha$, pour k assez grand, cela a du sens d'étudier ϕ_{dq_k} (il faut néanmoins une hypothèse supplémentaire pour montrer qu'il est non nul). On peut montrer que D_{dq_k} est encadré par des multiples de $\frac{1}{q_{k+1}}$. En effet on a

$$\frac{1}{2q_k q_{k+1}} \leq |d\alpha - \frac{p_k}{q_k}| \leq \frac{1}{q_k q_{k+1}} \quad (37)$$

(voir [45]) d'où

$$\frac{1}{2q_{k+1}} \leq |D_{dq_k}|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{3}{q_{k+1}} \quad (38)$$

et l'on voit ici qu'une croissance trop rapide des dénominateurs q_{k+1} (c'est-à-dire une trop bonne approximation de α , ou de $d\alpha$, par des rationnels) sera défavorable à l'existence d'une linéarisation analytique, puisque D_{dq_k} décroît alors très vite.

Remarque 10. On voit grâce à l'encadrement (37) que les dénominateurs pour $d\alpha$ ne sont pas les mêmes que pour α ; en effet si $(\frac{p'_k}{q'_k})$ est la suite des meilleures approximations de α , alors

$$\frac{1}{2q'_k q'_{k+1}} \leq |\alpha - \frac{p'_k}{q'_k}| \leq \frac{1}{q'_k q'_{k+1}} \quad (39)$$

d'où

$$\frac{d}{2q'_k q'_{k+1}} \leq |d\alpha - \frac{dp'_k}{q'_k}| \leq \frac{d}{q'_k q'_{k+1}} \quad (40)$$

et si $d \geq 2$, cet encadrement est incompatible avec (37), donc la suite (q'_k) ne peut pas coïncider avec q_k .

L'encadrement (40) permet néanmoins d'encadrer les petits diviseurs en fonction des dénominateurs de la meilleure approximation rationnelle de α :

Lemme 1. Pour tout $k \geq 1$, on a

$$\frac{d}{2q'_{k+1}} \leq |D_{dq'_k}|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{3d}{q'_{k+1}}.$$

Démonstration: On a encore pour tout $l \geq 1$, l'encadrement

$$||l\alpha|| \leq |D_l|^{\frac{1}{2}} \leq ||3\alpha||$$

L'encadrement (40) donne donc

$$|D_{dq'_k}|^{\frac{1}{2}} \leq 3||dq'_k \alpha|| \leq 3|dq'_k \alpha - dp'_k| \leq \frac{3d}{q'_{k+1}}$$

Par ailleurs si $q'_{k+1} > 6d$, si $p \in \mathbb{Z}, p \neq dp'_k$, on a

$$|dq'_k \alpha - p| \geq |p - dp'_k| - |dq'_k \alpha - dp'_k| \geq 1 - \frac{d}{q'_{k+1}} \geq \frac{1}{2} > \frac{d}{q'_{k+1}} \geq ||dq'_k \alpha||$$

donc dp'_k est l'entier qui réalise le min dans $||dq'_k \alpha||$. On a donc

$$|D_{dq'_k}|^{\frac{1}{2}} \geq ||dq'_k \alpha|| = |dq'_k \alpha - dp'_k| \geq \frac{d}{2q'_{k+1}}. \square$$

Remarque 11. Comme on le voit dans l'analyse des petits diviseurs, la quantité pertinente dans le problème traité ici est la somme de Brjuno de $d\alpha$, où d est le plus grand commun diviseur des indices des modes de Fourier. Notons que α et $d\alpha$ sont probablement simultanément des nombres de Brjuno (pour α rationnel ceci découle de [48]) et pour α quadratique, de [26]), mais que, d'après la remarque (10), il n'y a pas de lien simple entre leurs deux sommes de Brjuno.

Remarque 12. Dans le théorème de Yoccoz ([60]), c'est la somme de Brjuno $B(\alpha)$ (définie en (2)) de l'argument du multiplicateur $\lambda = e^{i\alpha}$ qui détermine la réductibilité du système dynamique engendré par le polynôme quadratique. Buff et Chéritat ([11]) ont montré que la fonction de Brjuno $B_f(\alpha)$ (définie en (3)) approche continûment le logarithme de

l'inverse du rayon de convergence (c'est-à-dire que la différence des deux est continue). En revanche dans les travaux mentionnés en section 1.2, c'est son double qui approche le logarithme de l'inverse du rayon de convergence (voir (3) et (4)). Ici, nous montrons que l'application semi-standard n'est pas archétypale pour les polynômes trigonométriques puisque le rayon de convergence dépend du degré des termes de la perturbation.

2.3 Un exemple pour lequel le rayon de convergence est majoré

La majoration du rayon de convergence revient à la minoration de la série linéarisante, via la relation (35). La condition forte sur les coefficients du système étudié (c'est-à-dire le contrôle de leurs arguments) se justifie par la nécessité, pour obtenir une minoration relativement simple d'un coefficient déterminé par la récurrence (34), d'éviter que les termes dans le membre de droite ne se compensent.

C'est aussi l'esprit du contre-exemple de Cremer détaillé dans la section 1.1.

Nous supposons ici que les coefficients a_k du système (28) vérifient la condition suivante sur leurs arguments complexes :

Hypothèse 1. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour tout k , le nombre a_k a pour argument $k\theta + \pi$.

Lemme 2. Sous l'hypothèse 1, les coefficients ϕ_l de la linéarisation ont pour argument $l(\theta + \frac{\pi}{2})$.

Ainsi, tous les termes du membre de droite dans la relation de récurrence (34) ont le même argument, ce qui permet de minorer $|\phi_l|$ par le module d'un terme bien choisi dans le membre de droite.

2.3.1 Construction d'une sous-suite de dénominateurs

L'idée est de construire une sous-suite de dénominateurs (q_{n_k}) qui auront la propriété de croître très vite dans le cas où α n'est pas un nombre de Brjuno, puis de montrer que $(|\phi_{q_{n_k}}|)$ fait obstacle à la positivité du rayon de convergence car ils croissent trop vite.

On définit la sous-suite (q_{n_k}) par la condition $q_{n_{k+1}} \geq q_{n_k}^2 + Aq_{n_k} + B$ où A, B sont des réels positifs bien choisis (et par une condition initiale sur q_{n_0}). Il existe ainsi une constante $C > 0$ telle que pour tout k , $q_{n_k} \geq C^{2^k}$.

2.3.2 Divisions euclidiennes sur les q_{n_k}

On choisira ensuite de minorer $\phi_{dq_{n_{k+1}}}$ par le terme contenant le plus d'indices qui sont des multiples des dénominateurs $q_{n_0}, \dots, q_{n_k}$, avec le plus possible d'indices plus grands parmi les q_{n_i} ; autrement dit on réalise des divisions euclidiennes successives.

Etant donné $k \geq 1$, on note p_i^k les entiers donnés par les divisions euclidiennes suivantes :

$$\begin{aligned} dq_{n_k} - \kappa_{max} &= p_{k-1}^k dq_{n_{k-1}} + r_{k-1}, r_{k-1} < dq_{n_{k-1}}; \\ \forall i \in \{1, \dots, k-1\}, r_i &= p_{i-1}^k dq_{n_{i-1}} + r_{i-1}, r_{i-1} < dq_{n_{i-1}} \end{aligned} \quad (41)$$

2.3.3 Construction d'une fonction auxiliaire

On cherche à minorer $\limsup \frac{\ln |\phi_{dq_{n_k}}|}{dq_{n_k}}$ en fonction de $B(d\alpha)$.

Pour cela, on définit récursivement une fonction auxiliaire F sur l'ensemble $\{q_{n_k}, k \geq 0\}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} F(q_{n_0}) &= 0 \\ \forall k \geq 1, F(q_{n_k}) &= \sum_{i=0}^{k-1} p_i^k (|\ln |D_{dq_{n_i}}|| + F(q_{n_i})) \end{aligned} \quad (42)$$

Erratum 1. La définition donnée dans [21] avait omis le d qui est pourtant nécessaire dans les lemmes 3 et 4 ci-dessous.

Il reste deux lemmes à montrer pour obtenir la majoration du rayon de convergence énoncée en (33) :

Lemme 3. Il existe $C > 0$ telle que $\limsup_k \frac{F(q_{n_k})}{q_{n_k}} \geq 2B(d\alpha) - C$

La démonstration du lemme 3 est basée sur la preuve par récurrence du fait que

$$\frac{F(q_{n_k})}{q_{n_k} + \frac{\kappa_{max}}{d}} \geq \sum_{l=0}^{k-1} |\ln |D_{dq_{n_l}}|| \left(\frac{1}{q_{n_l}} - \frac{2}{q_{n_{l+1}}} \right)$$

ce qui justifie la définition de F rectifiée dans le présent document, et par le fait, provenant de (38), que

$$2B(d\alpha) - C \leq \limsup \sum_{l \leq k} \frac{|\ln |D_{dq_{n_l}}||}{q_{n_l}} \quad (43)$$

où $C > 0$ est indépendante de α .

Lemme 4. Il existe $C' > 0$ telle que pour tout $k \geq 0$,

$$\frac{F(q_{n_k})}{dq_{n_k}} \leq C' + \frac{\ln |D_{dq_{n_k}} \phi_{dq_{n_k}}|}{dq_{n_k}} \quad (44)$$

Dans le lemme 4, on voit que l'entier d est nécessaire dans la définition de F car il n'y a que les multiples de d qui sont certainement dans $\mathcal{M}$ s'ils sont assez grands ; ainsi on ne pourrait pas obtenir, a priori, de minoration pour $\phi_{q_{n_k}}$, mais seulement pour $\phi_{dq_{n_k}}$.

Cette dernière proposition implique évidemment que $\frac{F(q_{n_k})}{dq_{n_k}} \leq C' + \frac{\ln |\phi_{dq_{n_k}}|}{dq_{n_k}}$. On obtient alors, en prenant la limite supérieure dans (44) puis en appliquant le lemme 3, la majoration (33) via la relation (35).

2.4 Complément : Une minoration en fonction de la somme de Brjuno de α

Je donne ici une observation qui ne figure pas explicitement dans [21]. Il est intéressant de remarquer que si l'on utilisait l'encadrement (40) au lieu de l'encadrement (37), la minoration obtenue à partir de (43) ferait intervenir $B(\alpha)$ et non pas $B(d\alpha)$, avec une constante moins bonne mais toujours indépendante de α . Pour le prouver, j'adapte ici la preuve de [21] puisque cela n'a pas été fait dans [21].

Dans cette section, (q'_k) désigne les dénominateurs des meilleures approximations rationnelles de α .

On construit une nouvelle sous-suite de dénominateurs à partir de la suite (q'_k) , de la même manière que dans [21] à ceci près que $N_{\mathcal{M}} = d = 1$. Le lemme 10 et le corollaire 11 dans [21] sont inchangés mais portent sur q'_{n_k} . Le lemme 12 devient le suivant :

Lemme 5.

$$2B(\alpha) - C(d) \leq \sum_{l \geq 0} \frac{|\ln |D_{dq'_{n_l}}||}{q'_{n_l}} \leq C'(d) + 2B(\alpha)$$

Démonstration: On montre de manière similaire que

$$\begin{aligned} \frac{1}{d}B(\alpha) - C(d) &\leq \sum_l \frac{\ln q'_{n_{l+1}} - \ln(3d)}{dq'_{n_l}} \\ &\leq \sum_{l \geq 0} \frac{|\ln |D_{dq'_{n_l}}||}{2dq'_{n_l}} \leq \sum_l \frac{\ln q'_{n_{l+1}} + \ln 2 - \ln d}{dq'_{n_l}} \\ &\leq C'(d) + \frac{1}{d}B(\alpha). \quad \square \end{aligned} \tag{45}$$

Par la suite, c'est les coefficients $\phi_{dq'_{n_k}}$ qui seront minorés de manière à réduire à 0 le rayon de convergence. On définit la fonction F sur les dq'_{n_k} par les mêmes formules (41) et (42), où l'on a remplacé les q_{n_i} par les q'_{n_i} .

Le nouveau lemme 3 s'énonce comme suit :

Lemme 6. Il existe $C > 0$ telle que $\limsup_k \frac{F(q'_{n_k})}{q'_{n_k}} \geq \frac{2}{d}B(\alpha) - C$

Le lemme 4 s'énonce de la même manière en remplaçant q_{n_k} par q'_{n_k} . Ainsi on obtient la majoration du rayon de convergence

$$\rho(\alpha) \leq C' \exp\left(-\frac{2}{d}B(\alpha)\right) \tag{46}$$

2.5 Minoration du rayon de convergence par une fonction de la somme de Brjuno

On prouve ici l'autre inégalité du théorème, c'est-à-dire la minoration du rayon de convergence. On utilise à nouveau la relation (35) et on cherche ici à majorer les coefficients de Taylor de la linéarisation. La difficulté de cette partie de l'encadrement (donné par (32)) est de devoir tenir compte de tous les termes du membre de droite dans la récurrence (34).

On définit la fonction w qui est solution analytique (donnée par exemple par le théorème des fonctions implicites holomorphes) de l'équation

$$w(z) = \sum_{k \in \{\kappa_0, \dots, \kappa_N\}} (ze^{w(z)})^k$$

Ses coefficients de Taylor σ_l vérifient une relation de récurrence similaire à ceux de la linéarisation (34), mais sans les petits diviseurs.

2.5.1 Construction de la fonction de Davie

On reprend ensuite la fonction construite par Davie dans [27] (lemme 2.3) qui est sous-additive, bornée par une fonction des dénominateurs, et dont la croissance indique la présence d'un petit diviseur. Elle sert à majorer assez facilement, par récurrence, les coefficients de Taylor de ϕ_λ en fonction de la somme de Brjuno de $d\alpha$, puis de minorer le rayon de convergence via la relation (35).

Erratum 2. Je corrige ici une petite erreur numérique faite dans [21] au moment de la construction de la fonction de Davie. Le lemme 2.2 de Davie devrait être appliqué avec $\omega = d\alpha$, mais la conclusion vaut avec une hypothèse un peu moins forte, ce qui donne l'énoncé ci-dessous :

Lemme 7. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ tel que

$$\|nd\alpha\| < \frac{1}{2q_k} \quad (47)$$

Alors $n \geq q_k$ et soit q_k divise n soit $n \geq \frac{q_{k+1}}{4}$.

On a alors le corollaire immédiat suivant :

Lemme 8. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n' \in \mathbb{N}, n' = dn, n \neq 0$ tel que

$$|D_{n'}|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2q_k} \quad (48)$$

Alors $n \geq q_k$ et soit q_k divise n soit $n \geq \frac{q_{k+1}}{4}$.

Ce corollaire est possible car $\|n'\alpha\| \leq |D_{n'}|^{\frac{1}{2}}$ et donc l'hypothèse (48) implique l'hypothèse (47). Ici, l'énoncé donné dans [21], lemme 7 omet le 2 au dénominateur dans (48).

Le lemme 8 permet ensuite d'appliquer le lemme 2.3 de [27] avec $q = dq_k, E = \max(dq_k, \frac{dq_{k+1}}{4})$ et $A = \{j \in \mathbb{N}, dq_k \leq j, d|j, \frac{1}{12q_{k+1}} \leq |D_j|^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{12q_k}\}$, de la manière suivante (corrigée par rapport à la version écrite dans [21]) :

Lemme 9. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $g_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sur-additive, telle que $g_k(0) = 0$ et

1. $g_k(n) \leq (1 + \frac{2dq_k}{E})\frac{n}{dq_k}$,
2. si $n \in A$, alors $g_k(n) \geq g_k(n-1) + 1$.

Pour pouvoir appliquer le lemme 2.3 de Davie de cette manière, il faut vérifier que pour tous $j_1 > j_2 \in A$, soit dq_k divise $j_1 - j_2$ soit $j_1 - j_2 \geq E$, et soit dq_k divise j_1 soit $j_1 \geq E$. Pour cela on peut appliquer le lemme 8 avec $n' = j_1$ car $j_1 \in A$ implique que D_{j_1} vérifie l'hypothèse (48), puis avec $n' = j_1 - j_2$ car

$$|D_{j_1-j_2}|^{\frac{1}{2}} \leq 3\|(j_1 - j_2)\alpha\| \leq 3(\|j_1\alpha\| + \|j_2\alpha\|) \leq 3(|D_{j_1}|^{\frac{1}{2}} + |D_{j_2}|^{\frac{1}{2}})$$

ce qui, du fait que $j_1, j_2 \in A$, implique que

$$|D_{j_1-j_2}|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2q_k}$$

et l'hypothèse (48) est vérifiée pour $j_1 - j_2$.

A partir du lemme 9, on peut construire une fonction majorante pour les coefficients de Taylor de la linéarisation :

Lemme 10. Il existe une fonction g sur-additive telle que pour tout $l \geq 1$,

$$|\phi_l| \leq |D_l|^{-1} |a_{\kappa_{max}}| e^{g(l-\kappa_0)} \sigma_l.$$

et $g(j) \leq \sum_{l=0}^k \frac{2 \ln q_{l+1}}{dq_l} + \text{const.}$ où k est le plus grand indice tel que $dq_k \leq j$ et la constante ne dépend pas de j .

Démonstration: La construction de cette fonction est basée sur le lemme 9. On a donc pour tout $k \geq 0$, une fonction g_k définie sur $\mathbb{N}$ qui est sur-additive, et telle que $g_k(n) \geq g_k(n-1) + 1$ si $\frac{1}{12q_{k+1}} \leq |D_n|^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{12q_k}$. On pose ensuite

$$g(j) = \sum_{l=0}^k 2g_l(j) \ln q_{l+1} + jC$$

où k est le plus grand indice tel que $dq_k \leq j$ et C est une constante ne dépendant que des coefficients du système. La fonction g est évidemment sur-additive puisque les g_l le sont. La sur-additivité de g permet de l'utiliser pour majorer facilement ϕ_l par récurrence à partir de la relation (34).

Afin de justifier l'utilisation de la fonction de Davie comme fonction majorante, remarquons qu'il est naturel de chercher l'exponentielle d'une fonction sur-additive pour majorer les coefficients ϕ_l . Le majorant qui vient le plus naturellement à partir de la récurrence (34) serait celui qui intégrerait chaque petit diviseur successivement ; mais cela ne donne pas une fonction sur-additive.

2.6 Complément : Majoration des coefficients de la linéarisation en fonction de la somme de Brjuno de α

Même si cela ne figure pas dans [21], voyons maintenant comment on pourrait majorer les coefficients de Taylor (et minorer le rayon de convergence) en fonction de la somme de Brjuno de α (et non pas celle de $d\alpha$). On rappelle que $(\frac{p'_k}{q'_k})$ est la suite des meilleures approximations rationnelles de α .

On doit alors appliquer le lemme 2.2 de Davie avec $\omega = \alpha$ et on obtient l'énoncé suivant :

Lemme 11. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ tel que

$$||n\alpha|| < \frac{1}{2q'_k} \quad (49)$$

Alors $n \geq q'_k$ et soit q'_k divise n soit $n \geq \frac{q'_{k+1}}{4}$.

Ceci a le corollaire suivant :

Lemme 12. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n' \in \mathbb{N}, n' = dn, n \neq 0$ tel que

$$|D_{n'}|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2q'_k} \quad (50)$$

Alors $n' \geq q'_k$ et soit q'_k divise n' soit $n' \geq \frac{q'_{k+1}}{4}$.

On applique ensuite le lemme 2.3 de [27] avec $q = q'_k$, $E = \max(q'_k, \frac{q'_{k+1}}{4})$ et $A = \{j \in \mathbb{N}, q'_k \leq j, d|j, \frac{1}{12q'_{k+1}} \leq |D_j|^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{12q'_k}\}$:

Lemme 13. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $g_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sur-additive, telle que $g_k(0) = 0$ et

1. $g_k(n) \leq (1 + \frac{2q'_k}{E}) \frac{n}{q'_k}$,
2. si $n \in A$, alors $g_k(n) \geq g_k(n-1) + 1$.

Pour obtenir ceci à partir du lemme 12, il faut là encore vérifier que pour tous $j_1 > j_2 \in A$, soit q'_k divise $j_1 - j_2$ soit $j_1 - j_2 \geq E$, et soit q'_k divise j_1 soit $j_1 \geq E$. Pour cela on peut appliquer le lemme 12 avec $n' = j_1$ car $j_1 \in A$ implique que D_{j_1} vérifie l'hypothèse (50), puis avec $n' = j_1 - j_2$ car

$$|D_{j_1-j_2}|^{\frac{1}{2}} \leq 3||j_1 - j_2\alpha|| \leq 3(||j_1\alpha|| + ||j_2\alpha||) \leq 3(|D_{j_1}|^{\frac{1}{2}} + |D_{j_2}|^{\frac{1}{2}})$$

ce qui, du fait que $j_1, j_2 \in A$, implique que

$$|D_{j_1-j_2}|^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2q'_k}$$

et l'hypothèse (48) est vérifiée pour $j_1 - j_2$.

Remarque 13. Cette application du lemme de Davie donne une minoration du rayon par un multiple de $\exp(-2B(\alpha))$:

$$\rho \geq C' \exp(-2B(\alpha)) \quad (51)$$

Il n'y a pas de moyen immédiat pour arriver à une majoration aussi bonne que la minoration, à savoir par un multiple de $\exp(-\frac{2}{d}B(\alpha))$. En effet pour cela il faudrait appliquer le lemme 2.3 de Davie avec $q = dq'_k$, $E = \max(dq'_k, \frac{dq'_{k+1}}{4})$. On aurait alors besoin, dans le lemme 12, de la conclusion : "Alors $n \geq q'_k$ et soit q'_k divise n soit $n \geq \frac{q'_{k+1}}{4}$." Mais pour obtenir cette conclusion, il faudrait pouvoir majorer $||dn\alpha||$ par un multiple de $\frac{1}{q'_k}$, ce qui n'est pas possible a priori.

Cependant, ces observations ont la conséquence intéressante suivante : α et $d\alpha$ sont simultanément des nombres de Brjuno. En effet, si $d\alpha$ est un nombre de Brjuno, le rayon de convergence est positif, et alors l'estimation (46) implique que $B(\alpha)$ doit converger, donc α est un nombre de Brjuno. Inversement, si α est un nombre de Brjuno, alors l'estimation (51) implique que le rayon de convergence ρ est positif, donc $d\alpha$ est un nombre de Brjuno (il est important de remarquer que la linéarisation est définie indépendamment du développement en fraction continue que l'on choisit).

2.7 Questions ouvertes

L'énoncé précédent implique que le rayon de convergence est réduit à 0 si $d\alpha$ (ou α) n'est pas un nombre de Brjuno. Mais la fonction d'erreur $\ln \rho(\alpha) + \frac{2}{d}B(d\alpha)$ n'est pas définie si $d\alpha$ n'est pas un nombre de Brjuno, ni la fonction $\ln \rho(\alpha) + \frac{2}{d}B_f(d\alpha)$ qui serait l'analogue de celle apparaissant dans [11]. Ainsi se pose la question naturelle suivante, qui est similaire à celle résolue par Buff et Chéritat dans [11] :

Question ouverte 4. La fonction d'erreur $\alpha \mapsto \ln \rho(\alpha) + \frac{2}{d}B_f(d\alpha)$, définie sur l'ensemble des nombres α vérifiant la condition de Brjuno, possède-t-elle un prolongement continu sur $\mathbb{R}$?

3 Formes normales

Les résultats mentionnés dans les sections 4 et 2 ont en commun de présupposer l'absence de résonances exactes dans les paramètres du système. Dans la section 4, on suppose que la fréquence $\omega \in \mathbb{R}^d$ des cocycles considérés est rationnellement indépendante (ce qui est une conséquence des conditions arithmétiques demandées), et dans la section 2, le paramètre α est irrationnel.

Je présente dans cette section les résultats obtenus dans [22] et [18], qui tentent de généraliser la théorie de la réduction des systèmes au cas où des résonances exactes sont présentes. Deux types de systèmes sont considérés, les cocycles quasi-périodiques et les champs de vecteurs au voisinage d'un tore.

3.1 Forme normale pour les cocycles

Dans [22], nous considérons des cocycles quasi-périodiques de la forme (17), mais dont la fréquence ω comporte une résonance exacte : $k \in \mathbb{Z}^d$ non nul tel que $\langle k, \omega \rangle = 0$.

3.1.1 Un lien avec le problème de la dépendance régulière à un paramètre

Quitte à effectuer un changement de base sur $\mathbb{T}^d$, c'est-à-dire à remplacer ω par $A\omega$ pour une certaine matrice A inversible et à coefficients entiers, on peut se ramener au cas où $\omega_1, \dots, \omega_r = 0$ et $(\omega_{r+1}, \dots, \omega_d)$ rationnellement indépendant. Le système (20) se réécrit alors

$$\begin{cases} \dot{\theta} = 0 \\ (\dot{X}_{r+1}, \dots, \dot{X}_d) = (\omega_{r+1}, \dots, \omega_d) \\ \dot{Y} = A_\theta(X_{r+1}, \dots, X_d)Y \end{cases}$$

où θ varie dans $\mathbb{T}^r$ et est un paramètre non dynamique du système. L'approche de la réductibilité décrite précédemment ne dit rien sur la dépendance par rapport à ce paramètre. En général, la dépendance analytique d'un système par rapport à un paramètre non dynamique n'implique pas que les invariants dynamiques dépendront eux aussi analytiquement du paramètre (par exemple ce n'est pas le cas des exposants de Lyapunov) ; si la dépendance à ce paramètre est périodique, on ne sait pas en général si les invariants dynamiques seront eux aussi périodiques par rapport à ce paramètre.

Le théorème prouvé dans [22] donne certaines conditions sous lesquelles les invariants dynamiques d'un système dépendent périodiquement et analytiquement des paramètres non dynamiques, si le système lui-même en dépend périodiquement et analytiquement.

Le changement de base mentionné ci-dessus permet de donner une définition pratique de la condition de Brjuno adaptée à notre problème :

Définition 27. On dit que ω vérifie une condition de Brjuno-Rüssmann en-dehors des résonances si, avec les notations ci-dessus, le vecteur $(\omega_{r+1}, \dots, \omega_d)$ vérifie une condition de Brjuno-Rüssmann.

Remarque 14. Ceci équivaut à une condition de Brjuno-Rüssmann (définition 37) où on exclut les vecteurs d'entiers k tels que $\langle k, \omega \rangle = 0$. En effet, remplacer ω par $A\omega$ puis ne garder que les $d - r$ dernières composantes peut changer la valeur de $\Phi(n)$ pour n fixé mais ne change pas la convergence de la somme.

3.1.2 Une condition de Melnikov exacte

Cet article prend aussi en compte le cas où des résonances peuvent impliquer les valeurs propres de la moyenne de la partie linéaire du système (20), y compris s'il n'y en a pas dans la fréquence ω . Via un changement de variables quasi-périodique, ceci correspond au cas de valeurs propres multiples dans la moyenne de la partie linéaire, où une partie nilpotente est admise.

En effet, supposons maintenant que les r premières composantes de ω sont nulles et que $\omega' := (\omega_{r+1}, \dots, \omega_d)$ est rationnellement indépendant. Posons P telle que $P^{-1}\hat{A}(0)P$ est triangulaire et notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres avec multiplicité. S'il existe $\lambda_i, \lambda_j, k \in \mathbb{Z}^{d-r}$ tels que $\lambda_i - \lambda_j - 2i\pi\langle k, \omega' \rangle = 0$, notons $\tilde{k}$ le vecteur d'entiers dont les r premières composantes sont nulles et les $d-r$ dernières coïncident avec k , et $Z(\theta)$ la matrice diagonale dont le j -ième coefficient diagonal est $e^{2i\pi\langle k, \theta \rangle}$, puis $B(\theta)$ tel que $\partial_\omega Z(\theta) = A(\theta)Z(\theta) - Z(\theta)B(\theta)$. Alors $\hat{B}(0)$ a les mêmes valeurs propres que $\hat{A}(0)$, à l'exception de la j -ième qui vaut $\lambda'_j := \lambda_j - 2i\pi\langle k, \omega \rangle$; ainsi pour tout k' dont les $d-r$ dernières composantes ne sont pas toutes nulles,

$$\lambda_i - \lambda'_j - 2i\pi\langle k', \omega \rangle = \lambda_i - \lambda_j - 2i\pi\langle k' + k, \omega \rangle = 2i\pi\langle k', \omega \rangle \neq 0$$

(puisque k' est rationnellement indépendant). On peut donc se ramener au cas où il n'y a pas de résonance entre deux valeurs propres (ce qu'on peut appeler une condition de Melnikov exacte) quitte à décaler des valeurs propres via un changement de variables quasi-périodique, pour qu'elles deviennent identiques.

3.1.3 Enoncé

Par commodité, je présente le résultat tel que formulé dans [22] (donc sans appliquer les remarques qui précèdent). Commençons par définir les classes d'équivalence des modes de Fourier modulo les résonances :

Définition 28. Soient $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}^d$, on dit que $k_1 \sim k_2$ si $\langle k_1 - k_2, \omega \rangle = 0$ (c'est une relation d'équivalence dont on note $\langle k \rangle$ les classes d'équivalence).

Soit f continue sur $\mathbb{T}^d$ et $k \in \mathbb{Z}^d$, on note $f_{\langle k \rangle}(\theta) := \sum_{k' \sim k} \hat{f}(k') e^{2i\pi\langle k', \theta \rangle}$.

On dit que f est **résonante** si $f = f_{\langle 0 \rangle}$.

On note $T^N f$ la **troncation** de f à l'ordre N modulo résonances, c'est-à-dire la somme de tous les modes de Fourier de f dont la classe d'équivalence de l'indice a un représentant inférieur à N :

$$T^N f(\theta) = \sum_{|k| \leq N} f_{\langle k \rangle}(\theta)$$

Nous aurons aussi besoin de définir la condition de Melnikov adaptée à ce problème (elle diffère de celle donnée en (15) car seulement deux valeurs propres de la partie linéaire sont impliquées) :

Définition 29. Soit A une matrice, on dit qu'elle vérifie la **seconde condition de Melnikov en-dehors des résonances** s'il existe une fonction g croissante positive sur $\mathbb{R}^+$ vérifiant

$$\int_1^\infty \frac{\ln g(t)}{t^2} dt < +\infty$$

et pour toutes valeurs propres α, β et tout $k \in \mathbb{Z}^d$,

$$\alpha - \beta - 2i\pi\langle k, \omega \rangle \neq 0 \Rightarrow |\alpha - \beta - 2i\pi\langle k, \omega \rangle| \geq \frac{1}{g(|k|)}.$$

Théorème 14. ([22]) Considérons un système de la forme

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \omega \\ \dot{Y} = A(\theta)Y \end{cases}$$

où $\theta \in \mathbb{T}^d$, $\omega \in \mathbb{R}^d$ vérifie la condition de Brjuno-Rüssmann en dehors des résonances et $A \in C_r^\omega(\mathbb{T}^d, gl(n, \mathbb{C}))$. Supposons que A vérifie l'une des trois hypothèses suivantes :

- $\hat{A}(0)$ est diagonale à valeurs propres toutes distinctes, et il existe $C > 0$ tel que pour tous $i \neq j$ et tout $k \in \mathbb{Z}^d$,

$$\lambda_i - \lambda_j - 2i\pi\langle k, \omega \rangle \neq 0 \Rightarrow |\lambda_i - \lambda_j - 2i\pi\langle k, \omega \rangle| \geq C,$$

- ou A est à valeurs triangulaires et $\hat{A}(0)$ vérifie la seconde condition de Melnikov en-dehors des résonances,
- ou pour tout θ et tous $k, k' \in \mathbb{Z}^d$, $[A_{\langle k \rangle}(\theta), A_{\langle k' \rangle}(\theta)] = [A_{\langle k \rangle}(\theta), \hat{A}(0)] = 0$.

Il existe ϵ_0 ne dépendant que de $r, \omega, n, d, \hat{A}(0)$ tel que si $|A - \hat{A}(0)|_r \leq \epsilon_0$, alors le cocycle associé à A est analytiquement réductible.

Remarque 15. Le but de cet article était d'explorer comment adapter un algorithme KAM standard à la présence de résonances, d'où les restrictions dans l'énoncé du théorème, qui permettent de gérer assez facilement les petits diviseurs. C'est un résultat dans l'esprit de [50], [40] ou de [39] (ces résultats ne concernent néanmoins que le cas où la fréquence du cocycle est rationnellement indépendante) dans lequel la réductibilité est garantie non pas par une seconde condition de Melnikov seule (car celle-ci est fragile et ne passe à l'itération qu'en présence d'un nombre de rotation qui est un invariant de conjugaison), mais par une condition de nature algébrique (qui dans le deuxième cas, s'ajoute à la condition de Melnikov). On retrouvera cette idée d'une condition algébrique permettant de gérer les résonances exactes dans la section 3.2.

3.1.4 Idée de la preuve

Pour simplifier l'exposé, je me contente, dans cette section, d'évoquer la résolution de l'équation cohomologique qui donne la linéarisation d'un changement de variables qui va réduire la perturbation, et qui a vocation à être itéré. Je donne davantage de détails sur la méthode KAM pour les cocycles dans la section 4 de manière à faire ressortir les divergences avec la méthode KAM standard. L'équation cohomologique à résoudre dépend du cas étudié :

1. Si $\hat{A}(0)$ est diagonale à spectre séparé, on doit résoudre à chaque étape une équation de la forme

$$\partial_\omega X(\theta) = [\bar{A}(\theta), X(\theta)] + F(\theta) - F_{diag}(\theta) \quad (52)$$

où $\bar{A}, F_{diag}$ sont à valeurs diagonales et résonantes. En effet, l'étape initiale consiste (schématiquement) à résoudre

$$\partial_\omega X(\theta) = [\hat{A}(0), X(\theta)] + \bar{A}(\theta) - \hat{A}(0) \quad (53)$$

où $\bar{A}$ contient une partie de A qui reste à définir, d'où en série de Fourier

$$2i\pi\langle k, \omega \rangle \hat{X}(k) = [\hat{A}(0), \hat{X}(k)] + \hat{\bar{A}}(k)$$

L'opérateur $X \mapsto 2i\pi\langle k, \omega \rangle X - [\hat{A}(0), X]$ n'est surjectif que si k est non résonant ; si k est résonant, son image n'atteint que les matrices à diagonale nulle. Ainsi, $\bar{A}$ devra contenir les modes non résonants de A et la partie non diagonale des modes résonants. La partie diagonale résonante de A restera donc dans l'itération, d'où la forme (52) pour l'équation cohomologique à résoudre dans l'itération.

Dans (52), les petits diviseurs sont facilement contrôlés par la condition de séparation du spectre.

2. Si A est à valeurs triangulaires (disons triangulaires supérieures) et $\hat{A}(0)$ vérifie la seconde condition de Melnikov en-dehors des résonances, l'équation cohomologique à résoudre est de la forme

$$\partial_\omega X(\theta) = [R(\theta), X(\theta)] + T^N F(\theta) - F_{res}(\theta) \quad (54)$$

où R et $T^N F$ sont à valeurs triangulaires supérieures, R est résonante ainsi que F_{res} , et $T^N F$ est sans partie résonante.

En effet, à l'étape initiale, on doit résoudre une équation de la forme (53) avec $\hat{A}(0)$ qu'on peut supposer en forme normale de Jordan et sans résonances entre les valeurs propres (quitte à effectuer un changement de variables, voir l'explication dans la section 3.1.2) ; pour k non résonant, l'opérateur $X \mapsto 2i\pi\langle k, \omega \rangle X - [\hat{A}(0), X]$ est alors la somme d'un opérateur inversible et d'un opérateur nilpotent, il est donc inversible, et borné sur les polynômes à degré borné, avec une estimation donnée par la seconde condition de Melnikov. On ne peut éliminer qu'une troncation de la partie non constante pour avoir une estimation suffisante, et le reste ira dans la nouvelle perturbation. De plus, les termes résonants ne pourront être éliminés et iront dans le pivot de l'équation cohomologique à l'itération, d'où la forme (54).

3. Si toutes les classes d'équivalence de coefficients de Fourier de A commutent, il faut résoudre

$$\partial_\omega X(\theta) = [A(\theta), X(\theta)] + T^N F(\theta) - F_{res}(\theta)$$

où A est résonante, $T^N F$ est sans partie résonante et commute avec $A(\theta)$ et F_{res} est résonante. En effet, pour $0 < |k| \leq N$, une telle équation peut être résolue par $X_{\langle k \rangle}(\theta) = \frac{1}{2i\pi\langle k, \omega \rangle} F_{\langle k \rangle}(\theta)$ si $[A(\theta), F_{\langle k \rangle}(\theta)] = 0$, ce qui est supposé au départ et qui passe à l'itération. Les petits diviseurs sont alors contrôlés par la condition de Brjuno-Rüssmann en-dehors des résonances, qui porte sur ω .

Dans cet algorithme de type KAM, il n'y a pas de résonance à éliminer et à chaque étape, le changement de variable est $I + X$ où X est solution de l'équation linéarisée étudiée ci-dessus, avec un bon contrôle sur X qui assure la convergence analytique à l'itération avec un rayon d'analyticité qui reste positif à la limite.

Question ouverte 5. Peut-on généraliser ou unifier ces conditions algébriques ?

3.2 Formes normales pour les champs de vecteurs autour d'un tore invariant

Dans [18], je considère un système au voisinage d'un tore invariant $\mathcal{T} := \mathbb{T}^d \times \{0\}_{\mathbb{C}^n}$, de la forme (15), où la fréquence de rotation ω et les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de la partie linéaire peuvent avoir des résonances. On considère donc le système (15) :

$$\begin{cases} \dot{X} = \omega + f(X, Y) \\ \dot{Y} = AY + g(X, Y) \end{cases} \quad (55)$$

où $X \in \mathbb{T}^d, Y \in \mathbb{C}^n$. On note $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ le vecteur des valeurs propres de A , F le champ de vecteurs engendrant (55) :

$$F(X, Y) = (\omega + f(X, Y)) \frac{\partial}{\partial X} + (AY + g(X, Y)) \frac{\partial}{\partial Y} \quad (56)$$

et S le champ de vecteurs correspondant à la partie quasi-linéaire de F :

$$S(Y) = \omega \cdot \frac{\partial}{\partial X} + AY \frac{\partial}{\partial Y} \quad (57)$$

Définition 30. On dit que (ω, Λ) est **résonant** s'il existe $k \in \mathbb{N}^n, j \in \{1, \dots, n\}, |k| \geq 2$ et $m \in \mathbb{Z}^d$ tels que $\sum_{i=1}^n k_i \lambda_i - \lambda_j + 2\pi \langle m, \omega \rangle = 0$. Le couple (m, k) est alors une **résonance**.

Remarque 16. Si (m, k) est une résonance, alors le monôme $e^{2i\pi \langle m, X \rangle} Y^k$ est dans le noyau de la dérivée de Lie de S .

Remarque 17. On peut facilement supposer qu'il n'y a pas de résonances de la forme $\lambda_i - \lambda_j - 2\pi \langle m, \omega \rangle = 0$. En effet si A (qu'on peut supposer en forme normale de Jordan) possède une telle résonance, on peut effectuer le changement de variables $Z = W(X)Y$, où $W(X)$ est diagonale avec le i -ième coefficient égal à $e^{-2i\pi \langle m, X \rangle}$ et les autres à 1 (cette matrice commute avec A). Alors

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= DW(X) \cdot (\omega + f(X, Y)) \cdot Y + W(X)(AY + g(X, Y)) \\ &= \partial_\omega W(X)Y + DW(X)f(X, Y)Y + W(X)AY + W(X)g(X, Y) \\ &= A'Z + \tilde{g}(X, Z) \end{aligned} \quad (58)$$

où A' est non résonante et $\tilde{g}$ est d'ordre 2 en Z .

En revanche on ne peut a priori pas supposer que le système est non résonant et se ramener à une étude de régularité par rapport à des paramètres.

Définition 31. On dit qu'un monôme $f_{p,q} e^{2i\pi \langle p, X \rangle} Y^q$ est **résonant** si (p, q) est une résonance.

Définition 32. Le système (55) est **normalisable dans $\mathcal{C}$** s'il existe un changement de variables de classe $\mathcal{C}$ qui le conjugue à une forme normale

$$\begin{cases} \dot{W} = \omega' + \tilde{f}(W, Z) \\ \dot{Z} = AZ + \tilde{g}(W, Z) \end{cases} \quad (59)$$

où $\tilde{f}, \tilde{g}$ n'ont que des monômes résonants.

On cherche à quelles conditions le système est analytiquement normalisable. De même que pour le résultat présenté en section 3.1, il semble qu'une condition algébrique facilite la construction d'une normalisation. La question de sa nécessité est ouverte.

3.2.1 Forme normale formelle

Cette condition algébrique nécessite la définition d'une forme normale formelle, dans un cadre où il faut prendre en compte une série de Fourier. Je détaille ici la construction de cette notion dans ce cadre. Notons que la présence de coefficients de Fourier oblige à donner une condition de convergence car on ne peut pas tronquer la série de Fourier pour définir la forme normale étant donné que la troncation de la série de Fourier n'est pas robuste par changement de variables.

Définition 33. Une **série de Fourier-Taylor formelle** est une série de la forme

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}^d, q \in \mathbb{N}^n} f_{p,q} e^{2i\pi \langle p, X \rangle} Y^q$$

telle que pour tout q ,

$$\sum_p |f_{p,q}|^2 < +\infty.$$

Un **champ de vecteurs formel** est un $d + n$ -uplet de séries de Fourier-Taylor formelles.

Etant donné une série de Fourier-Taylor formelle $f \simeq \sum_{p,q} f_{p,q} e^{2i\pi \langle p, X \rangle} Y^q$ et $N \in \mathbb{N}$, sa **troncation à l'ordre N** est la série

$$T^N f = \sum_{p \in \mathbb{Z}^d, |q| \leq N} f_{p,q} e^{2i\pi \langle p, X \rangle} Y^q$$

Etant donné un champ de vecteurs formel $\Phi = (\Phi^1, \dots, \Phi^{n+d})$, où $\Phi^j \simeq \sum_{p,q} \Phi_{p,q}^j e^{2i\pi \langle p, X \rangle} Y^q$, sa **troncation à l'ordre N** est le champ de vecteurs $(T^N \Phi^1, \dots, T^N \Phi_d, T^{N+1} \Phi_{d+1}, \dots, T^{N+1} \Phi_{d+n})$.

On dit que Φ est **polynomial** si $T^N \Phi = \Phi$ pour un certain N . Si N est minimal, c'est alors son **degré**. Notons que le degré des d premières composantes est inférieur ou égal à N alors que celui des n dernières est seulement inférieur ou égal à $N + 1$.

Un **difféomorphisme formel** est une suite de difféomorphismes analytiques (Φ_k) sur une suite de domaines décroissante au sens de l'inclusion, tels que Φ_k est de degré k et pour tout $j \leq k$, $T^j \Phi_k = \Phi_j$.

Remarque 18. Dans cette définition des objets formels, on inclut l'ensemble de la série de Fourier sans la tronquer.

Deux champs de vecteurs formels F, G sont **formellement conjugués** s'il existe un difféomorphisme formel $\Phi = (\Phi_k)$ tel que $G \circ \Phi_k$ est un difféomorphisme formel et que pour tout $k \geq 0$,

$$T^k(D\Phi_k \cdot F) = T^k(G \circ \Phi_k)$$

Notons qu'on étend ici la définition de la conjugaison formelle au cas où F, G sont formels tous les deux (dans [18], on supposait que l'un d'eux était analytique mais cette restriction ne semble pas essentielle).

Remarque 19. Si F et G sont formellement conjugués via un difféomorphisme formel (Φ_k) et si G et H sont formellement conjugués via un difféomorphisme formel (Ψ_k) , alors F et H sont formellement conjugués via (χ_k) défini par $\chi_k = T^k(\Psi_k \circ \Phi_k)$. En effet on a

$$T^k(D\Phi_k \cdot F) = T^k(G \circ \Phi_k)$$

et

$$T^k(D\Psi_k \cdot F) = T^k(G \circ \Psi_k)$$

donc

$$\begin{aligned} T^k(D\chi_k \cdot F) &= T^k(D\Psi_k \circ \Phi_k \cdot D\Phi_k \cdot F) \\ &= T^k(D\Psi_k \circ \Phi_k \cdot T^k(D\Phi_k \cdot F)) \\ &= T^k(D\Psi_k \circ \Phi_k \cdot T^k(G \circ \Phi_k)) \\ &= T^k(D\Psi_k \circ \Phi_k \cdot G \circ \Phi_k) \\ &= T^k(H \circ \Psi_k \circ \Phi_k) = T^k(H \circ \chi_k) \end{aligned} \tag{60}$$

Définition 34. On dit que le système (15) engendré par le champ de vecteurs F est **formellement normalisable** s'il existe un champ de vecteurs formel

$$NF(X, Y) \sim \sum_{p \in \mathbb{Z}^d, q \in \mathbb{N}^n} NF_{p,q} e^{2i\pi \langle p, X \rangle} Y^q$$

où n'apparaissent que des monômes résonants, et qui est formellement conjugué à F .

Si tel est le cas, on dit que NF est une **forme normale formelle** pour F .

Proposition 9. Si F est analytique et vérifie la condition γ , alors F est formellement normalisable via un difféomorphisme tangent à l'identité.

Idée de la preuve: On cherche à construire un difféomorphisme formel (Φ_k) tangent à l'identité, c'est-à-dire $\Phi_k = Id + \tilde{\Phi}_k$ où $T^0 \tilde{\Phi}_k = 0$, tel que

$$T^k(D\Phi_k NF) = T^k(F \circ \Phi_k) \tag{61}$$

On a supposé F analytique et on peut développer F en série pour (X, Y) dans le domaine de convergence :

$$F(X, Y) = S(Y) + R(X, Y) = S(Y) + \sum_{p,q} R_{p,q} e^{2i\pi \langle p, X \rangle} Y^q$$

On procède par récurrence en supposant que F est conjugué par Φ_k à un champ de vecteurs $N_k + R_k$, où N_k est résonant et R_k est d'ordre k . On cherche donc $\Phi_{k+1} = Id + \tilde{\Phi}_{k+1}$ avec $\tilde{\Phi}_{k+1}$ d'ordre 2, tel que $T^k \Phi_{k+1} = \Phi_k$, N_{k+1} résonant tel que $T^k N_{k+1} = N_k$, et R_{k+1} d'ordre $k+1$ tels que

$$T^{k+1}(D\Phi_{k+1} \cdot (N_{k+1} + R_{k+1})) = T^{k+1}((S + R) \circ \Phi_{k+1}) \tag{62}$$

ou encore

$$N_{k+1} + T^{k+1}(D\tilde{\Phi}_{k+1} \cdot (N_{k+1} + R_{k+1})) = T^{k+1}((S + R) \circ (Id + \tilde{\Phi}_{k+1})) \quad (63)$$

Ainsi le membre de droite dans (62) s'écrit

$$S(Y) + T^{k+1}(R)(X, Y) + T^{k+1}\left[\sum_{m \geq 1} \frac{D^m(S + R)(X, Y)\tilde{\Phi}_{k+1}(X, Y)^m}{m!}\right]$$

Notons ([18], lemme 4.1) que $D^m R(X, Y)\tilde{\Phi}_{k+1}(X, Y)^m$ est d'ordre $|m| + 1$, ainsi la somme dans le membre de droite est finie.

Par ailleurs le membre de gauche dans (62) vaut

$$N_{k+1} + T^{k+1}(D\tilde{\Phi}_{k+1} \cdot N_{k+1})$$

On cherche à construire la partie de Φ_{k+1} qui est homogène de degré $k + 1$, qu'on note Ψ_{k+1} . La seule quantité inconnue dans le membre de droite est $DS \cdot \Psi_{k+1}$, et dans le membre de gauche, la seule inconnue est $\tilde{N}_{k+1} + D\Psi_{k+1}S$, où $\tilde{N}_{k+1}$ désigne la partie homogène de degré $k + 1$ de N_{k+1} . Ainsi l'équation à résoudre est de la forme

$$\tilde{N}_{k+1} + [\Psi_{k+1}, S] = \dots$$

où ... désigne une quantité déjà connue dont les termes résonants de degré k iront dans N_{k+1} car ils ne sont pas dans l'image de $[S, \cdot]$. Pour les termes non résonants dans le membre de droite, on peut inverser l'opérateur $[S, \cdot]$. Mais la condition γ (définition 16) permet d'obtenir des séries de Fourier convergentes.

3.2.2 Normalisation analytique

Définition 35. On dit que le système (55) vérifie la condition A de Brjuno s'il possède une forme normale formelle proportionnelle à sa partie quasi-linéaire.

Cette propriété est un invariant de conjugaison au sens suivant :

Proposition 10. ([18], proposition 5.4) Si F a une forme normale formelle NF telle que $T^k NF$ est proportionnelle à S et si $T^k F$ est résonant, alors $T^k F$ est proportionnel à S .

Ainsi la condition de A est robuste à l'itération et peut servir au contrôle des petits diviseurs.

Dans [10], Brjuno avait énoncé, sans publier de démonstration, un théorème similaire à celui concernant les champs de vecteurs au voisinage d'un point fixe :

Théorème 15. (Brjuno ; pas de démonstration disponible) Supposons que (ω, Λ) vérifient les conditions ω et γ de Brjuno et que (55) vérifie la condition A. Alors (55) est analytiquement normalisable.

L'objet de la publication [18] est de donner une démonstration de ce théorème sous une hypothèse légèrement plus forte que γ :

Définition 36. On dit que (ω, Λ) vérifient une condition $\tilde{\gamma}$ de Brjuno s'ils vérifient la condition γ (définition 16) avec ε, N tels que

$$\varepsilon \geq \frac{1}{N} - Cg(N)^{-\beta}$$

où $C > 0, \beta \in (0, 1)$.

Théorème 16. ([18]) Sous les conditions ω et $\tilde{\gamma}$ et la condition A , le système (55) est analytiquement normalisable.

Idée de la preuve: La preuve utilise la forme normale formelle donnée par la proposition 9 et se fait par itération : on suppose que F vérifie la condition A et qu'il est holomorphiquement normalisable à l'ordre 2^k , et on montre qu'il est holomorphiquement normalisable à l'ordre 2^{k+1} , avec un rayon de convergence bien contrôlé. Puis on vérifie la convergence du rayon vers une valeur positive.

Expliquons d'abord l'étape d'itération : si F est analytiquement normalisable à l'ordre 2^k , la proposition 10 assure qu'à l'ordre 2^k il est conjugué à $a_k S$ où a_k est analytique sur un voisinage D_k de $\mathcal{T} := \mathbb{T}^d \times \{0\}$, et résonante ; ainsi il existe un difféomorphisme Φ_k analytique sur un voisinage de $\mathcal{T}$ et R_k d'ordre 2^k tels que

$$D\Phi(a_k S + R_k) = F \circ \Phi$$

On cherche maintenant à construire une conjugaison analytique de $a_k S + R_k$ vers un champ de vecteurs $N_{k+1} + R_{k+1}$ où N_{k+1} est résonant et R_{k+1} est d'ordre 2^{k+1} . Pour cela, il faut résoudre l'équation cohomologique $[X_k, a_k S] = \bar{R}_k$, où $\bar{R}_k$ désigne les termes non résonants de R_k de degré situé entre 2^k et $2^{k+1} - 1$. Les termes résonants ne peuvent pas être inclus car ils ne sont pas dans l'image de $[\cdot, S]$.

On estime ensuite la solution X_k en la séparant en deux parties : les basses fréquences et les hautes fréquences. Pour les basses fréquences, les petits diviseurs seront minorés puisqu'on est sur un ensemble fini. Pour les hautes fréquences, on utilise la condition γ^* .

Question ouverte 6. La condition γ de Brjuno est-elle suffisante ?

Question ouverte 7. La condition A est-elle nécessaire ?

4 Cocycles quasi-périodiques : relâchement des conditions arithmétiques et extension à d'autres classes de fonctions

Dans cette section, je présente les résultats publiés dans [19],[6],[14],[12]. Ces quatre publications concernent les cocycles quasi-périodiques à valeurs dans $SL(2, \mathbb{R})$, i.e les systèmes de la forme (17) :

$$\frac{d}{dt}X(t, \theta) = A(\theta + t\omega)X(t, \theta)$$

où A est à valeurs dans $sl(2, \mathbb{R})$. La régularité de A est supposée analytique dans la publication [19], ultradifférentiable dans les publications [6] et [14] et de différentiabilité finie dans [12].

4.1 Réductibilité : condition sur la fréquence et le nombre de rotation

On note ρ le nombre de rotation fibré de ce système. Les résultats dans [19] et [6] font intervenir des conditions arithmétiques sur ω et sur ρ , de manière similaire à ce qui avait été prouvé par Eliasson dans [29].

On aura aussi besoin d'une condition de proximité à un système à coefficients constants : l'application A étant de régularité $\mathcal{C}$, en notant A_0 la moyenne de A sur le tore, on supposera que $\|A - A_0\|_{\mathcal{C}}$ est en-deçà d'un seuil qui sera fonction des conditions arithmétiques portant sur ω, ρ .

Je commence par présenter la condition arithmétique adaptée à ce problème.

La condition de Brjuno-Rüssmann Dans le cas où il y a un vecteur de fréquences à traiter (cas des cocycles quasi-périodiques, champs de vecteurs en dimension quelconque), il est pratique de généraliser la condition de Brjuno en définissant les fonctions d'approximation de Brjuno-Rüssmann.

Dans ce paragraphe, nous considérons un vecteur $\omega \in \mathbb{T}^d$ rationnellement indépendant, c'est-à-dire tel que pour tout $k \in \mathbb{Z}^d, k \neq 0$ on ait $\langle k, \omega \rangle \neq 0$, et nous cherchons à quantifier son approximation par des vecteurs d'entiers.

Définition 37. La fonction d'approximation de Rüssmann pour le vecteur ω est la fonction

$$\Phi_{\omega} : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^+, \Phi_{\omega}(n) = \min_{|k| \leq n} |\langle k, \omega \rangle|$$

On dit que ω vérifie une condition de Brjuno-Rüssmann, noté $\omega \in BR$, si

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln \Phi_{\omega}(n)}{n^2} < +\infty$$

Remarque 20. La fonction Φ_{ω} ne s'annule pas si et seulement si ω est rationnellement indépendant.

Remarque 21. Ceci équivaut à dire qu'il existe une fonction $\tilde{\Phi}_\omega$ de classe C^1 et croissante sur $[1, +\infty[$ telle que pour tout $k \in \mathbb{Z}^d, k \neq 0$,

$$|\langle k, \omega \rangle| \geq \frac{1}{\tilde{\Phi}_\omega(|k|)}$$

et

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln \tilde{\Phi}_\omega(t)}{t^2} dt < +\infty \quad (64)$$

Cette deuxième formulation apparaît parfois naturellement à la fin d'une itération de type KAM.

Des exemples de fonctions d'approximation vérifiant (64) sont donnés par $t \mapsto e^{\frac{t}{\ln t}^\beta}$ avec $\beta > 1$ ou $t \mapsto e^{(\ln t)^\alpha}$ avec $\alpha > 0$.

Proposition 11. Si $d = 2$, $\omega \in BR$ si et seulement si $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ est un nombre de Brjuno.

Démonstration: Si $d = 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Phi_\omega(n) = \min_{|k| \leq n} |k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2| = \omega_2 \min_{|k| \leq n} |k_1 \frac{\omega_1}{\omega_2} + k_2|$$

La présence de la constante ω_2 ne change pas la convergence. $\square$

4.1.1 En classe analytique

Dans cette section on suppose que $A \in C_r^\omega(\mathbb{T}^d, sl(2, \mathbb{R}))$ pour un certain $r > 0$.

Conditions arithmétiques On suppose ici que la fréquence ω du cocycle vérifie une condition de Brjuno-Rüssmann (voir la définition 37). La condition portant sur le nombre de rotation est une généralisation de celle utilisée par Eliasson dans [29].

Définition 38. Soit $\rho \in \mathbb{R}$, la fonction de Brjuno-Rüssmann de ρ par rapport à ω est la fonction croissante $\Psi_{\rho, \omega} : \mathbb{N} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $k \geq 1$ par

$$\Psi_{\rho, \omega}(k)^{-1} = \min\{|\rho - 2\pi \langle m, \omega \rangle|, m \in \mathbb{Z}^d, 0 < |m| \leq k\}$$

Définition 39. Soit $\alpha \in (0, 1]$. On dit que $\rho \in \mathbb{R}$ vérifie la condition de Brjuno d'exposant α par rapport à ω si

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln \Psi_{\rho, \omega}(t)}{t^{1+\alpha}} dt < +\infty \quad (65)$$

Remarque 22. Des exemples de fonctions vérifiant (65) sont $t \mapsto e^{t^\beta}$ avec $\beta < \alpha$ ou $e^{\frac{t^\alpha}{\ln t}}$. Si $\alpha = 1$, on retombe sur la condition de Brjuno.

Résultat Le résultat démontré dans [19] s'énonce comme suit :

Théorème 17. Supposons que ω vérifie la condition de Brjuno. Soit ρ le nombre de rotation fibré du cocycle associé à A et supposons que ρ vérifie la condition de Brjuno d'exposant $\frac{1}{2}$ par rapport à ω .
Supposons également que

$$\sup_t \frac{\Psi_{\rho,\omega}(t^2)}{\Phi_\omega(t)} < +\infty \quad (66)$$

Il existe ϵ_0 ne dépendant que de ω, ρ, r tel que si

$$\|A - \hat{A}(0)\|_r \leq \epsilon_0 \quad (67)$$

alors il existe $r' \in (0, r)$ tel que A est réductible dans $C_{r'}^\omega$.

Technique utilisée Dans [19], nous avons suivi la démarche d'Eliasson ([29]) qui adapte la méthode KAM aux cocycles quasi-périodiques : nous avons construit un algorithme itératif pour définir une suite de changements de variables à composer les uns aux autres de manière à arriver à un système dont la perturbation est arbitrairement petite ; l'algorithme permet d'éliminer les résonances à chaque étape, s'il y en a. Si l'on élimine des résonances à une certaine étape, soit la perte de régularité sera plus grande à cette étape, soit les estimées seront moins bonnes.

On obtient la convergence de l'algorithme en classe analytique dans le cas où le nombre de rotation vérifie la condition de Brjuno d'exposant $\frac{1}{2}$ par rapport à ω , car (de manière similaire à ce qui avait été observé dans [29]) ceci implique que les résonances à éliminer n'apparaissent qu'un nombre fini de fois, et ainsi le rayon de convergence analytique converge vers une valeur positive.

Ainsi, comme dans [29], nous obtenons en réalité un résultat de presque réductibilité analytique, avec convergence si les conditions arithmétiques sont vérifiées.

Remarque 23. La condition de Brjuno-Rüssmann d'exposant $\frac{1}{2}$ sur le nombre de rotation provient du fait que l'algorithme construit dans cet article est un algorithme de presque réductibilité. C'est seulement a posteriori que l'on regarde s'il y a des résonances, et cette condition, plus restrictive que la condition de Brjuno, permet de vérifier que les résonances n'arrivent qu'un nombre fini de fois. Dans la publication [6], qui sera l'objet de la section 4.1.2, on part d'une condition de Brjuno sur le nombre de rotation, pour montrer qu'à aucune étape il n'y a de résonances, et donc le nombre de rotation est préservé à chaque étape. Ainsi le résultat dans [6] dépasse celui dans [19], mais il ne construit pas d'algorithme de presque réductibilité ; en revanche dans [19] on prouve en réalité la presque réductibilité (faible car a priori le rayon de convergence tend vers 0), et dans [14] la presque réductibilité quantitative.

Je précise un peu la construction de cette suite de changements de variables de manière à faire apparaître le rôle des petits diviseurs et de la condition arithmétique. Il s'agit de construire un changement de variables Z conjuguant un système de la forme $\bar{A} + \bar{F}$ où $\bar{A}$ est constante et $\bar{F}$ suffisamment petit, à un système $A' + F'$ où A' est constante et F' de l'ordre de $\frac{1}{4}\|F\|_r$.

Remarque 24. Ainsi, contrairement à l'algorithme construit par Eliasson dans [29], il n'y a pas de convergence quadratique pour la perturbation : la décroissance de la perturbation vers 0 est seulement linéaire, ce qui permet de composer avec des petits diviseurs plus grands (c'est-à-dire une condition arithmétique plus faible).

La conjugaison s'écrit

$$\partial_\omega Z = (\bar{A} + \bar{F})Z - Z(A' + F') \quad (68)$$

Définition 40. On appelle résonance une relation entre les deux valeurs propres $i\alpha, -i\alpha$ de $\bar{A}$ de la forme $|2\alpha - 2\pi\langle k, \omega \rangle| \leq \frac{\kappa}{4\Phi_\omega(N)\Psi_{\rho,\omega}(k)}$ (rappelons que Φ_ω est la fonction de Brjuno-Rüssmann de ω et $\Psi_{\rho,\omega}$ celle de ρ).

Notons que si les deux valeurs propres sont réelles, il n'y a pas de résonance.

Deux cas sont à considérer.

- Si la partie constante $\bar{A}$ ne contient pas de résonances, on peut chercher un changement de variables proche de l'identité, de la forme $Z = e^X$; il suffit que X soit solution de l'équation cohomologique

$$\partial_\omega X = [\bar{A}, X] + \bar{F}^N - \hat{\bar{F}}(0), \quad (69)$$

où $\bar{F}^N$ est la troncation de la série de Fourier de $\bar{F}$ à un ordre N bien choisi. On définit alors $A' = \bar{A} + \hat{\bar{F}}(0)$ et

$$F' = Z^{-1}(\bar{A} + \bar{F})Z - A' - Z^{-1}\partial_\omega Z \quad (70)$$

pour résoudre (68). Je détaillerai les estimations ci-dessous pour montrer que la perturbation a effectivement été réduite. Notons pour l'instant que la solution X de (69) vérifie

$$|X|_r \leq \text{const.} \Phi_\omega(N)^3 |F|_r \quad (71)$$

car $\bar{A}$ ne contient pas de résonances au sens de la définition 40.

Remarque 25. L'estimation (71) ne correspond pas tout à fait à ce qui figure dans la publication [19] ; nous avons omis le cas où $\bar{A}$ est nilpotente. Je corrige l'estimation ici en tenant aussi compte de l'hypothèse (66).

- Inversement, si la partie constante $\bar{A}$ contient des résonances, il faut d'abord les éliminer avant de chercher à résoudre l'équation cohomologique. Éliminer les résonances veut dire conjuguer $\bar{A} + \bar{F}$ à un système $\tilde{A} + \tilde{F}$ où les valeurs propres de $\tilde{A}$ sont celles de $\bar{A}$ translatées de $2\pi\langle k, \omega \rangle$: plus précisément, si P est telle que $P^{-1}\bar{A}P$ est en forme normale de Jordan, on posera

$$W = PDP^{-1} \quad (72)$$

où D est la diagonale dont le k -ième coefficient est 1 si la k -ième valeur propre de $\bar{A}$ n'a pas besoin d'être translatée, et $e^{2i\pi\langle k, \theta \rangle}$ si la k -ième valeur propre de $\bar{A}$ doit être translatée de $2i\pi\langle k, \omega \rangle$. Puis on pose $\tilde{A}$ la matrice telle que

$$\partial_\omega W = \tilde{A}W - W\tilde{A}. \quad (73)$$

Les valeurs propres de $\tilde{A}$ sont alors non résonantes en un sens légèrement plus fort que dans la définition 40 : pour tout k tel que $0 < |k| \leq N$, on a

$$|2\alpha - 2\pi\langle k, \omega \rangle| \geq \frac{\kappa}{\Phi_\omega(N)\Psi_{\rho,\omega}(k)}.$$

On peut travailler à partir de $\tilde{A} + \tilde{F}$ pour trouver un changement de variables proche de l'identité qui réduira la perturbation.

Remarque 26. Cette définition des résonances s'explique si l'on regarde de plus près l'équation cohomologique (69) qu'il faut résoudre : en la décomposant en série de Fourier, on doit trouver pour tout $k \in \mathbb{Z}^d$, $0 < |k| \leq N$, une solution à

$$2i\pi\langle k, \omega \rangle \hat{X}(k) = [A, \hat{X}(k)] + \hat{F}(k) \quad (74)$$

et l'estimation de la solution X impose alors de contrôler les petits diviseurs $2i\pi\langle k, \omega \rangle$.

Il y a deux estimations à fournir : celle de F' pour montrer que la perturbation a été réduite, et celle de X pour assurer la convergence de la suite de changements de variables dans le cas réductible.

On choisit de définir l'ordre N de troncation de manière à ce que $|X|_r \leq \sqrt{|F|_r}$: pour cela on prend N tel que $\Psi_{\rho,\omega}(N)\Phi_\omega(N) \leq \text{const.}|F|_r^{-\frac{1}{2}}$ (l'existence d'un tel N justifie la condition de petitesse (67) sur la perturbation initiale).

Détaillons ici l'estimation de F' dans le cas non résonant. Par définition on a $F' = Z^{-1}(\bar{A} + \bar{F})Z - A' - Z^{-1}\partial_\omega Z$, c'est-à-dire, dans le cas où $Z = e^X$,

$$F' = \bar{A} + \bar{F} + \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k!} ((-X)^k(\bar{A} + \bar{F}) + (\bar{A} + \bar{F})X^k) - A' - \partial_\omega X + O^2(X) \quad (75)$$

où $O^2(X)$ désigne des termes quadratiques en X . Finalement,

$$F' = \bar{F} - \bar{F}^N + O^2(X, \bar{F}) \quad (76)$$

où $O^2(X, \bar{F})$ désigne les termes quadratiques en $(X, \bar{F})$. Puisque N est défini de sorte que $|X|_r \leq \sqrt{|\bar{F}|_r}$, les termes regroupés dans $O^2(X, \bar{F})$ seront dans leur ensemble majorés par $\text{const.}|\bar{F}|_r^{\frac{3}{2}}$, et il n'y a pas de perte de régularité pour cette partie de l'estimation. En revanche, le reste $\bar{F} - \bar{F}^N$ de la série de Fourier de $\bar{F}$ s'estime comme suit :

$$|\bar{F} - \bar{F}^N|_{r'} \leq e^{2\pi N(r-r')} |\bar{F}|_r$$

(on utilise ici la norme pondérée), et comme on n'a besoin que d'arriver à $|F'|_{r'} \leq \frac{1}{4}|\bar{F}|_r$, on obtient une condition sur N et r' de la forme $e^{2\pi N(r-r')} \leq \text{const.}$, autrement dit $r' = r - \frac{\text{const.}}{N}$.

Dans le cas résonant, l'estimation de F' est obtenue en remplaçant $\bar{F}$ par $W^{-1}\bar{F}W$; on doit donc absorber la présence de W en définissant r' plus petit. Comme on a l'estimation

$$|W|_{r'} \leq \text{const.}e^{2\pi N r'} \quad (77)$$

où la constante provient de l'estimation de P et P^{-1} dans (72) (le fait que P et P^{-1} soient bornées par une constante numérique est spécifique à $SL(2, \mathbb{R})$).

Remarque 27. Un arbitrage doit être fait entre la perte de régularité (la décroissance de r_n) et les estimées sur $W_n e^{X_n}$; dans cet article nous avons choisi de borner la suite $|W_n e^{X_n}|_{r_n}$, ce qui implique que, dans le cas non réductible, la suite r_n tend vers 0. C'est une autre formulation possible de la presque réductibilité quantitative.

La perte de régularité permettant des estimations suffisamment bonnes sera définie différemment dans les deux cas ; dans le premier cas, le rayon de convergence passe de r à $r - \frac{\text{const.}}{N}$; dans le deuxième cas, il passe de r à $\frac{r}{2} - \text{const.} \frac{\ln \Phi_\omega(N) + \ln \Psi_{\rho, \omega}(N)}{N}$.

Itération : On définit ensuite des suites A_n, F_n, X_n, W_n de matrices et des suites r_n, ϵ_n, N_n de nombres tels que $A_0 = \hat{A}(0)$ (où A est l'application du théorème), $F_0 = A - \hat{A}(0)$, $r_0 = r$, la suite ϵ_n est de la forme $\frac{C_0}{4^n}$, et telles que pour tout $n \geq 0$,

$$\partial_\omega(W_n e^{X_n}) = (A_n + F_n)W_n e^{X_n} - W_n e^{X_n}(A_{n+1} + F_{n+1}) \quad (78)$$

où $|F_{n+1}|_{r_{n+1}} \leq \epsilon_{n+1}$, $|X_n|_{r_n} \leq \sqrt{\epsilon_n}$, $|W_n e^{X_n}|_{r_n}$ est bornée, et si $W_n = I$ alors $r_{n+1} = r_n - \frac{\text{const.}}{N_n}$, et sinon $r_{n+1} = \frac{r_n}{2} - \text{const.} \frac{\ln \Phi_\omega(N_n) + \ln \Psi_{\rho, \omega}(N_n)}{N_n}$.

Ainsi, à l'itération, la limite du rayon de convergence r_n n'est positive que si le deuxième cas n'arrive qu'un nombre fini de fois : la condition de Brjuno-Rüssmann permet la convergence vers une valeur positive de la suite des rayons en l'absence de résonances à partir d'un certain rang, c'est-à-dire si, pour n assez grand, $r_{n+1} = r_n - \frac{\text{const.}}{N_n}$ (il faut néanmoins que le rayon d'analyticité soit suffisant au départ).

4.1.2 En classe ultradifférentiable

Dans cette section je présente la publication [6]. Introduisons d'abord le cadre des fonctions ultradifférentiables.

Le cadre ultradifférentiable Nous donnons ici la définition au sens de Braun-Meise-Taylor ([8], voir [52] pour une présentation synthétique), car elle est plus fonctionnelle pour traiter des séries de Fourier que celle donnée par les suites de Carleman. Plus précisément, une classe de fonctions sera définie par une fonction servant à contrôler la croissance des coefficients de Fourier, avec l'idée qu'un meilleur contrôle correspond à une plus forte régularité.

Définition 41. Une fonction poids est une fonction $\Lambda : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ croissante, dérivable et sous-additive, vérifiant les conditions suivantes :

1. $\ln(t) = o(\Lambda(t))$ quand $t \rightarrow +\infty$;
2. $t \mapsto \Lambda(e^t)$ est convexe.

Remarque 28. L'hypothèse de sous-additivité remplace, et renforce légèrement, l'hypothèse de Braun-Meise-Taylor que

$$\Lambda(2t) = O(\Lambda(t)) \text{ quand } t \rightarrow +\infty \quad (79)$$

de manière à avoir une structure d'algèbre pour la classe de fonctions définie ci-dessous :

Définition 42. Soit $\Lambda : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction poids. On définit la classe des fonctions ultradifférentiables pour le poids Λ d'exposant $r > 0$ comme étant la classe des $f : \mathbb{T}^d \rightarrow \mathbb{C}$ dont le développement en série de Fourier,

$$f(\theta) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{f}(k) e^{i\langle k, \theta \rangle},$$

vérifie la condition de convergence

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\hat{f}(k)| e^{r\Lambda(|k|)} < +\infty. \quad (80)$$

On note alors $f \in U_{\Lambda, r}(\mathbb{T}^d)$.

Remarque 29. La condition 1 de la définition 41 assure que toute fonction $f \in U_{\Lambda}$ soit bien de classe C^∞ . La sous-additivité de Λ fait que U_{Λ} est une algèbre de Banach. La condition (79) signifie que les fonctions analytiques sont les plus régulières considérées.

Soit $F : \mathbb{T}^d \rightarrow sl(2, \mathbb{R})$. On notera par extension $F \in U_{\Lambda, r}(\mathbb{T}^d)$ si le développement en série de Fourier de F vérifie une condition similaire à (80).

Remarque 30. Si $\Lambda = id$, on retombe sur la classe analytique de rayon de convergence r . Si Λ vérifie la condition

$$\int_0^{+\infty} \frac{\Lambda(t)}{t^2} dt = +\infty$$

alors tout fonction $f \in U_{\Lambda, r}$ est quasi-analytique, au sens où f est entièrement déterminée par son image sur tout ouvert arbitrairement petit (voir [8]).

Conditions arithmétiques suffisantes On définit ici une condition de Brjuno-Rüssmann adaptée au cadre ultradifférentiable.

Définition 43. Soit Λ croissante, dérivable et sous-additive. On dit que ω vérifie une condition de Brjuno-Rüssmann adaptée à Λ , noté $\omega \in BR_{\Lambda}$, si sa fonction d'approximation de Brjuno-Rüssmann vérifie

$$\int_1^{+\infty} \frac{\Lambda'(t) \ln \Psi_{\omega}(t)}{\Lambda(t)^2} dt < +\infty \quad (81)$$

Lorsque $\Lambda = id$ (cas analytique), on retombe sur la condition de Brjuno-Rüssmann mentionnée pour les cocycles analytiques. Lorsque $\Lambda(t) = t^\alpha$ pour un certain $\alpha \in (0, 1)$ (cas Gevrey), on retrouve la condition de Brjuno-Rüssmann d'exposant α .

On définit de la même manière une condition arithmétique adaptée sur le nombre de rotation.

Définition 44. Soit $\rho \in \mathbb{R}$, on dit que ρ vérifie une condition de Brjuno-Rüssmann adaptée à Λ par rapport à ω , noté $\rho \in BR_{\omega, \Lambda}$, si la fonction de Brjuno-Rüssmann de ρ par rapport à ω vérifie

$$\int_1^{+\infty} \frac{\Lambda'(t) \ln \Psi_{\rho, \omega}(t)}{\Lambda(t)^2} dt < +\infty \quad (82)$$

Remarque 31. Des conditions arithmétiques de ce type avaient été formulées et utilisées dans [7].

On peut maintenant énoncer le théorème obtenu dans [6] :

Théorème 18. Soit $\omega \in BR_\Lambda$ et $\rho \in BR_{\omega,\Lambda}$. Soit $r > 0$ et $A \in U_{\Lambda,r}(\mathbb{T}^d, sl(2, \mathbb{R}))$ dont la moyenne est une matrice elliptique. Il existe ϵ_0 tel que si

$$|A - \hat{A}(0)| \leq \epsilon_0 \quad (83)$$

et si le nombre de rotation fibré de A est ρ , alors le cocycle associé à A est réductible dans $U_{\Lambda,r'}$ pour un certain $r' \in (0, r)$.

Idée de la preuve: La méthode KAM mise au point par Eliasson est ici adaptée au cadre ultradifférentiable. A la différence de [29] et [19], nous avons choisi de ne pas considérer d'éventuelles résonances, c'est-à-dire de ne pas faire un algorithme de presque réductibilité, mais seulement de réductibilité, ce qui est possible car la condition sur le nombre de rotation empêche l'apparition de résonances quelle que soit l'étape de l'algorithme. En effet, s'il existe $X \in U_{\Lambda,r}$ tel que

$$\partial_\omega e^X = (A + F)e^X - e^X(A' + F')$$

alors le nombre de rotation de $A + F$ est celui de $A' + F'$ car e^X est proche de l'identité.

La condition de Brjuno sur $\rho(A + F)$ se retrouve identique pour $\rho(A' + F')$, ce qui permet à l'étape suivante d'empêcher l'apparition de résonances et de construire à nouveau un changement de variable de la forme $e^{X'}$, qui ne changera pas le nombre de rotation, etc.

Si la condition de Brjuno sur $\rho(A + F)$ empêche l'apparition de résonances entre les valeurs propres de A , c'est par la continuité du nombre de rotation : $|\rho(A + F) - \rho(A)| \simeq |F|_{C^0}$ (du moins quand $\rho(A) \neq 0$), et donc si $|2\rho(A + F) - 2\pi\langle k, \omega \rangle| \geq \frac{1}{\Psi_{\omega,\rho}(k)}$, alors

$$|2\rho(A) - 2\pi\langle k, \omega \rangle| \gtrsim \frac{1}{\Psi_{\omega,\rho}(k)} - |F|_{C^0}$$

Si N est bien choisi en fonction de $|F|_{\Lambda,r}$, on trouve alors $|2\rho(A) - 2\pi\langle k, \omega \rangle| \geq \frac{1}{2\Psi_{\omega,\rho}(k)}$ et les petits diviseurs sont bien contrôlés, sans perdre trop de régularité.

Si la méthode ne change pas essentiellement par rapport à [19] (résolution d'une équation cohomologique avec des petits diviseurs similaires), je précise ici le choix des paramètres pour voir la spécificité du cadre ultradifférentiable.

A chaque étape, on construit donc un changement de variables $I + X$ qui est proche de l'identité, conjuguant $\bar{A} + \bar{F}$ à $A' + F'$, où $\bar{F}$ est estimée sur un rayon r et F' sur un rayon r' qui a priori est arbitrairement proche de r . L'application X est ici encore solution de l'équation (69), et $F' = (I + X)^{-1}(\bar{A} + \bar{F})(I + X) - A' - (I + X)^{-1}\partial_\omega X$. Rappelons que le cas résonant n'a pas lieu d'être ici. On obtient l'estimation

$$|X|_{\Lambda,r} \leq 2 \max(\Psi_\omega(k), \Psi_{\omega,\rho}(k)) |\bar{F}|_{\Lambda,r}$$

(cette estimation est d'autant meilleure qu'on a supposé que le cocycle initial est une perturbation d'une matrice elliptique non dégénérée, et donc sous une condition perturbative, $\bar{A}$ est aussi elliptique non dégénérée), et on choisit N de sorte que $|X|_{\Lambda,r} \leq |\bar{F}|_{\Lambda,r}^{\frac{1}{2}}$ (ce qui, là encore, joue sur la condition de petitesse (83)). Puis on montre que F' est ici encore de

la forme (76). De même que dans la publication [19], on souhaite obtenir $|F'|_{r'} \leq \frac{1}{4}|\bar{F}|_r$, et puisque c'est encore le terme $|\bar{F} - \bar{F}^N|_{r'}$ qui l'emporte dans l'estimation de (76), on choisit de prendre $r' = r - \frac{\text{const.}}{\Lambda(N)}$, où N est l'ordre de troncation dans l'équation cohomologique.

En itérant les changements de variables et en passant à la limite, la positivité du rayon d'analyticité se traduit naturellement par la convergence de l'intégrale qui fait la condition de Brjuno.

Nécessité d'une condition arithmétique On définit une condition arithmétique plus faible :

Définition 45. On dit que ω est fortement Liouville pour Λ , noté $\omega \in R_\Lambda$, si la fonction de Rüssmann de ω vérifie

$$\limsup \frac{\ln \Psi_\omega}{\Lambda} > 0$$

et qu'il vérifie une condition faible de Brjuno pour Λ sinon.

Un exemple dû à A.Bounemoura prouve que la condition faible de Brjuno est optimale pour la réductibilité continue d'un cocycle $U_{\Lambda,r}$:

Proposition 12. Si ω est fortement Liouville, il existe un cocycle arbitrairement proche d'une constante dans $U_{\Lambda,r}$ qui est non réductible continûment.

Remarque 32. La condition ω fortement Liouville, notamment pour $\Lambda = id$ dans le cadre analytique, est à rapprocher de la condition ω très fortement Liouville (voir la définition 2) qui avait été utilisée par Cremer dans la construction d'une fonction non linéarisable holomorphiquement.

Remarque 33. La construction de l'exemple prouvant le théorème 12 est fondé sur le fait suivant : un cocycle engendré par une application de la forme $u(\theta)J$, où $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, est réductible dans $\mathcal{C}$ si le développement en série de Fourier de u , $u(\theta) \sim \sum_k \hat{u}(k)e^{2i\pi\langle k, \theta \rangle}$, est tel que la série $\sum_k \frac{\hat{u}(k)}{2i\pi\langle k, \omega \rangle} e^{2i\pi\langle k, \theta \rangle}$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}$.

Autrement dit, si $\sum_k \hat{u}(k)e^{2i\pi\langle k, \theta \rangle}$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}'$, une condition arithmétique garantissant que $\sum_k \frac{\hat{u}(k)}{2i\pi\langle k, \omega \rangle} e^{2i\pi\langle k, \theta \rangle}$ est dans $\mathcal{C}$ est nécessaire pour obtenir la réductibilité dans $\mathcal{C}$ des cocycles de classe $\mathcal{C}'$.

Question ouverte 8. Peut-on formuler de manière plus lisible le lien entre $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ et la condition arithmétique nécessaire dictée par l'exemple ci-dessus ?

4.2 Presque réductibilité

Dans cette section je présente deux résultats de presque réductibilité.

4.2.1 En classe ultradifférentiable

Dans cette section, je présente la publication [14]. Dans le théorème de presque réductibilité d'Eliasson ([30]), le rayon d'analyticité tend vers 0 à mesure que la perturbation devient plus petite. Dans [17], une analyse des résonances un peu différente permet d'améliorer les estimées et d'obtenir un rayon d'analyticité positif à la limite.

L'enjeu de [14] est de prouver la presque réductibilité en classe ultradifférentiable avec un paramètre qui reste positif à la limite, même en présence d'une infinité d'étapes résonantes dans l'itération. La publication [14] concerne les cocycles à valeurs dans $SL(2, \mathbb{R})$ et la question reste ouverte pour des cocycles en dimension plus grande.

Plus précisément, dans [14], nous obtenons un théorème de presque réductibilité quantitative, c'est-à-dire avec des estimations sur la suite de conjugaisons (qui divergent néanmoins en général).

Théorème 19. ([14]) Soit $A \in sl(2, \mathbb{R})$, $r > 0$, $F \in U_{\Lambda, r}(\mathbb{T}^d, sl(2, \mathbb{R}))$. Soit $\omega \in BR_{\Lambda}$. Il existe ϵ_0 tel que si $|F|_{\Lambda, r} \leq \epsilon_0$ alors le cocycle associé à $A + F$ au-dessus de ω est quantitativement presque réductible.

Remarque 34. On rappelle que la presque réductibilité quantitative, définie à la définition 23, suppose une estimation de la suite de changements de variables qui réduit arbitrairement la perturbation, et aussi une estimation de la partie constante du système à l'arrivée.

Techniques utilisées Il s'agit d'une méthode de type KAM inspirée de celle d'Eliasson et similaire à celles employées dans la publication [19]. Il a été nécessaire de prendre en compte l'élimination des résonances (c'est ce qui différencie l'algorithme de presque réductibilité de celui de réductibilité).

Notons une première différence avec [19] et [6] : comme il s'agit de presque réductibilité et non pas de réductibilité, on ne peut pas se contenter de travailler dans $GL(2, \mathbb{C})$, d'obtenir la réductibilité dans $GL(2, \mathbb{C})$ puis d'appliquer le théorème prouvé dans [15] pour en déduire la réductibilité dans $SL(2, \mathbb{R})$ modulo un doublement de période. Ainsi, une technicité supplémentaire est requise pour contrôler les doublements de période ; pour cela on utilise les "bonnes propriétés de périodicité" telles que définies dans [17]. Notons cependant qu'un travail en cours avec M.Chatal et H.Eliasson vise à prouver que, dans un cadre C^∞ , la presque réductibilité dans $GL(n, \mathbb{C})$ d'un cocycle réel implique qu'il est presque réductible dans $GL(n, \mathbb{R})$ modulo un doublement de période (ce qui permettra de se passer de ces considérations sur la périodicité).

La construction est similaire à celle de [19], mais pour faire face aux problèmes de périodicité évoqués plus haut, on cherche plutôt à itérer la construction d'un changement de variables entre deux systèmes qui seront proches non pas d'une constante, mais d'un système réductible. Ainsi, étant donné $\bar{A}$ réductible à $\tilde{A} \in sl(2, \mathbb{R})$ via un changement de variables Ψ , et $\bar{F} \in U_{\Lambda, r}(\mathbb{T}^d, sl(2, \mathbb{R}))$, en supposant que la conjugaison par Ψ préserve la périodicité des applications sur $\mathbb{T}^d$, on construit $A' \in sl(2, \mathbb{R})$ et $W, X, F' \in U_{\Lambda, r'}(2\mathbb{T}^d)$ telles que

$$\partial_\omega(We^X) = (\tilde{A} + \Psi^{-1}\bar{F}\Psi)We^X - We^X(A' + F')$$

(où W est l'application d'élimination des résonances) et on cherche à estimer W, X, F' .

La définition de W dépend évidemment de la définition des résonances, qui est la suivante :

Définition 46. On dit que $\tilde{A}$ est résonante à l'ordre N si pour tout k tel que $0 < |k| \leq N$, les valeurs propres $\pm i\alpha$ de $\tilde{A}$ vérifient

$$|2\alpha - 2\pi\langle k, \omega \rangle| \geq \frac{\kappa}{\Psi_\omega(3RN)\Psi_\omega(k)}$$

L'estimation sur X est similaire à (71) car on prend ici en compte l'éventualité que $\bar{A}$ soit nilpotente.

Une deuxième différence avec les publications [19] et [6] est la vitesse de convergence exponentielle, et plus rapide que dans [29], pour la perturbation. Pour obtenir cette grande vitesse de convergence, nous reprenons le principe introduit dans [17] qui veut qu'une fois les résonances d'ordre N éliminées, les valeurs propres sont en fait résonantes jusqu'à un ordre RN bien plus grand, ce qui permet de résoudre l'équation cohomologique à l'ordre RN plutôt qu'à l'ordre N , et surtout, d'itérer la construction en l'absence de résonances un certain nombre j de fois; au bout de cette itération en l'absence de résonances, on a réduit la perturbation à $|F|_r^{200000}$. Voici le schéma d'une étape de l'algorithme :

$$\bar{A} + \bar{F} \xrightarrow{\Phi} \tilde{A} + \tilde{F} \xrightarrow{W} \check{A} + \check{F} \xrightarrow{e^{X_1}} \dots \xrightarrow{e^{X_j}} A' + F' \xrightarrow{W^{-1}\Phi^{-1}} \bar{A}' + \bar{F}'$$

où Φ réduit $\bar{A}$ à $\tilde{A}$, W élimine les résonances dans $\tilde{A}$ pour obtenir $\check{A}$, et les parties constantes des systèmes intermédiaires entre $\check{A}$ et A' n'ont pas de résonances à l'ordre RN . L'entier j est le plus grand tel que la perturbation puisse effectivement réduire en se contentant de tronquer l'équation cohomologique à l'ordre RN .

Remarque 35. La publication [14] concerne $SL(2, \mathbb{R})$ et donc on devrait avoir une estimation sur W similaire à (77), qui est bien meilleure que celle donnée dans [14]. Je poursuis donc l'exposition du résultat en utilisant une estimation du type de (77) et en reprenant méthodiquement les estimations de l'article que cela permet d'améliorer.

Dans le lemme 7.1 : On a l'estimation

$$|\Phi^{\pm 1}|_{r'} \leq 2C_0 e^{2\pi\Lambda(\frac{N}{2})r'}.$$

Dans la proposition 8.3 : L'estimation de $\Phi^{-1}\tilde{X}\Phi$ n'est pas radicalement meilleure (il y a un exposant moins grand sur le κ' qui apparaît quand même).

Le lemme 9.2 est inchangé.

Dans le lemme 9.3 : Dans le point 3, l'estimation de $\Phi^{-1}X\Phi$ n'est pas radicalement meilleure, seul l'exposant sur κ' est réduit. Pour cette raison je ne reprendrai pas les estimations découlant de celle-ci.

Dans le lemme 10.2 : Dans le point 7, l'estimée de $\Psi'^{-1}\Psi$ (notée ici W) et de son inverse est

$$|\Psi'^{-1}\Psi|_{s'} \leq 2C_0 e^{2\Lambda(\frac{N}{2})s'}$$

(et similairement pour $|\Psi^{-1}\Psi'|_{s'}$). Dans le point 8, l'estimée de Ψ' devient

$$|\Psi'^{\pm 1}|_r \leq 2C_0\epsilon^{-\zeta}e^{2\pi\Lambda(\frac{N}{2})r}$$

Je vais maintenant détailler le choix des paramètres de l'algorithme : si $\epsilon = |F|_{\Lambda,r}$, on pose $N = \Lambda^{-1}(\frac{50|\ln \epsilon|}{\pi r})$, $R = \frac{\Psi^{-1}(\epsilon^{-\zeta})}{3N}$ où ζ est un petit nombre positif, et $r' = r - \frac{5 \cdot 10^6 |\ln \epsilon|}{\pi \Lambda(RN)}$ (la condition arithmétique assure que r' reste positif si la condition initiale est assez petite). Ceci permet de borner W par $|W|_{\Lambda,r'} \leq \text{const} \cdot \epsilon^{-100}$ et Ψ' par $|\Psi'|_{r'} \leq \epsilon^{-101} \leq (\epsilon^{200000})^{-\zeta}$.

De plus, si W n'est pas constamment égale à l'identité, c'est que l'on a effectivement enlevé des résonances dans $\tilde{A}$ et donc $\|A'\| \leq \text{const} \cdot \frac{\kappa}{\Psi_\omega(3RN)} = \text{const} \cdot \epsilon^\zeta$. Comme à l'itération ϵ devient arbitrairement petit, on a bien la presque réductibilité quantitative. De plus, le rayon d'analyticité reste positif à la limite grâce à la condition arithmétique supposée au départ.

Question ouverte 9. Ce résultat a deux limites dont il n'est pas encore clair si elles sont essentielles :

- Peut-on le généraliser à la dimension quelconque ?
- Peut-on améliorer les estimations de manière à obtenir la régularité Hölder $\frac{1}{2}$ de l'exposant de Lyapunov au voisinage d'un système à coefficients constants ?

4.2.2 En différentiabilité finie

Théorème 20. ([12]) Soit $\omega \in DC(\kappa, \tau)$ (définition 25). Il existe une constante numérique $C > 0$ telle que pour tout $k \geq C\tau$, si $A \in C^k(\mathbb{T}^d, sl(2, \mathbb{R}))$, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que si $\|A - \hat{A}(0)\| \leq \epsilon_0$, alors le cocycle associé à A est quantitativement presque réductible dans $C^{k'}$ pour un certain $k' \leq \frac{k}{6}$.

Remarque 36. Ce résultat pourrait donc probablement être étendu au cas de la fréquence vérifiant une condition de Brjuno-Rüssmann et je mentionnerai comment ci-dessous, bien que la question reste techniquement ouverte.

Technique utilisée Il s'agit d'un raffinement de la technique d'approximation des fonctions différentiables par des fonctions analytiques basée sur le théorème de Zehnder ([61]) et développée dans [16]. Dans [16], un résultat de presque réductibilité faible avait été obtenu (avec néanmoins un contrôle de la perte de régularité) et le raffinement des estimations permet d'obtenir la presque réductibilité quantitative. Si le résultat de [16] était valable en dimension quelconque, et préservait la structure algébrique (un cocycle à valeurs dans un groupe de Lie classique G était presque réductible via une suite de transformations à valeurs dans G), la publication [12] se focalise sur $SL(2, \mathbb{R})$.

Voici le schéma de la preuve : on définit une suite F_j de fonctions analytiques qui approchent $A - \hat{A}(0)$ avec les bonnes estimations ci-dessous (cette suite est introduite dans [16] et construite à partir d'un théorème de Zehnder dans [61]) :

$$|F_j|_{\frac{1}{j}} \leq C\|F\|_{C^k}; \quad |F_{j+1} - F_j|_{\frac{1}{j+1}} \leq \frac{C}{j^k}\|F\|_{C^k} \quad (84)$$

où C ne dépend pas de j . On définit une sous-suite de la forme $l_j = M^{2^{j-1}}$ et une suite ϵ_m de la forme $\frac{\text{const.}}{m^{\frac{k}{4}}}$ puis on montre par induction qu'il existe une conjugaison B_{l_j} analytique

de rayon $\frac{1}{l_{j+1}}$ qui conjugue $\hat{A}(0) + F_{l_j}$ à $A_{l_j} + F'_{l_j}$ où $A_{l_j} \in sl(2, \mathbb{R})$ avec les estimations $|F'_{l_j}|_{\frac{1}{l_{j+1}}} \leq \epsilon_{l_j}^{\frac{5}{2}}$ et $|B_{l_j}|_{\frac{1}{l_{j+1}}} \leq \epsilon_{l_j}^{-\frac{1}{25}}$. Ceci repose sur le mécanisme standard de la théorie KAM, similaire à celui utilisé dans [29], qui donne aussi que si la suite $|B_{l_j}|_{\frac{1}{l_{j+1}}}$ ne converge pas (ce qui veut dire que A est non réductible), alors il existe une infinité de A_{l_j} telles que $\|A_{l_j}\| \leq \epsilon_{l_j}^{\frac{1}{10}}$.

Puis on considère que

$$\partial_\omega B_{l_j} = AB_{l_j} - B_{l_j}(A_{l_j} + F'_{l_j} + B_{l_j}^{-1}(F - F_{l_j})B_{l_j})$$

et on obtient l'estimation suivante :

$$|F'_{l_j} + B_{l_j}^{-1}(F - F_{l_j})B_{l_j}|_{C^k} \leq \epsilon_{l_j}^{\frac{5}{2}} + \frac{\text{const.}}{l_j^k} \epsilon_{l_j}^{-\frac{1}{10}} \leq \epsilon_{l_j}^2$$

ce qui, avec l'estimation de B_{l_j} et la propriété portant sur la suite A_{l_j} , correspond à la presque réductibilité quantitative. $\square$

Les publications [19], [6] et [14] ont montré qu'on peut adapter l'algorithme KAM à la condition de Brjuno-Rüssmann adaptée à la classe de fonctions considérée, en particulier à la classe analytique. D'où :

Question ouverte 10. Peut-on obtenir le même résultat sous la condition que ω vérifie une condition de Brjuno-Rüssmann ?

Peut-on encore relâcher davantage la condition arithmétique étant donné qu'on est dans un cadre de différentiabilité finie ?

Références

- [1] S. Hadj Amor, *Hölder continuity of the rotation number for quasi-periodic cocycles in $sl(2, R)$* , Communications in Mathematical Physics, 287(2) :565–588, 2009.
- [2] J. Aurouet, *Normalisation de champs de vecteurs holomorphes et équations différentielles implicites*, Thèse de doctorat de l’université de Nice, 2013.
- [3] A.Avila, S.Jitomirskaya, *Almost localization and almost reducibility*, J.Eur.Math.Soc. 12 (2010), 93-131
- [4] M.Balazard, B.Martin, *Sur le minimum de la fonction de Brjuno*, Mathematische Zeitschrift 296,1819–1824 (2020)
- [5] A.Berretti, G.Gentile, *Bryuno Function and the Standard Map*, Communications in Mathematical Physics volume 220, pages623–656 (2001)
- [6] A.Bounemoura, C.Chavaudret, S.Liang, *Reducibility of ultra-differentiable quasiperiodic cocycles under an adapted arithmetic condition*, Proceedings of the American Mathematical Society 149 n.7 (2021) :1
- [7] A.Bounemoura, J.Féjoz, *Hamiltonian perturbation theory for ultra-differentiable functions*, Memoirs of the American Mathematical Society, 2021, 270 (1319)
- [8] R.W.Braun, R.Meise, B.A.Taylor, *Ultradifferentiable functions and Fourier analysis*, Results in Mathematics 17 (1990)
- [9] Bruno, A.D., *Analytical form of differential equations*, Trans. Mosc. Math. Soc, 25,131-288(1971) ; 26,199-239(1972)
- [10] A.D. Bruno, *Local methods in nonlinear differential equations*, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer Verlag, 1989.
- [11] X.Buff, A.Chéritat, *The Brjuno function continuously estimates the size of quadratic Siegel disks*, Annals of Mathematics, 163 (2006), 1-48
- [12] A.Cai, C.Chavaudret, J.You, Q.Zhou, *Sharp Holder continuity of the Lyapunov exponent of finitely differentiable quasi-periodic cocycles*, Mathematische Zeitschrift 291(9)
- [13] C.Carminati, S.Marmi, D.Sauzin, *There is only one KAM curve*, Nonlinearity 27 (2014) 2035
- [14] M.Chatal, C.Chavaudret, *Almost reducibility of quasiperiodic $SL(2,R)$ -cocycles in ultradifferentiable classes*, Journal of Differential Equations 356 n.7 (2023) :243-288
- [15] C.Chavaudret, *Reducibility of quasiperiodic cocycles in linear Lie groups*, Ergodic Theory and Dynamical Systems 31 n.3 (2008)
- [16] C.Chavaudret, *Almost reducibility for finitely differentiable $SL(2, R)$ -valued quasiperiodic cocycles*, Nonlinearity 25 (2012) 481-494
- [17] C.Chavaudret, *Strong almost reducibility for analytic and Gevrey quasi-periodic cocycles*, Bull. Soc. math. France 141 (1), 2013, p. 47–106
- [18] C.Chavaudret, *Normal form of holomorphic vector fields with an invariant torus under Brjuno’s A condition*, Annales- Institut Fourier 66(5) :1987-2020
- [19] C.Chavaudret, S.Marmi, *Reducibility of cocycles under a Brjuno-Rüssmann arithmetical condition*, Journal of Modern Dynamics 6, n.1, 2012, 59–78
- [20] C.Chavaudret, S.Marmi, *Erratum : Reducibility of cocycles under a Brjuno-Rüssmann arithmetical condition*, Journal of Modern Dynamics 9 (2015) 285-287

- [21] C.Chavaudret, S.Marmi, *Analytic linearization of a generalization of the semi-standard map : Radius of convergence and Brjuno sum*, Discrete and Continuous Dynamical Systems 42 n.7 (2022) :3077
- [22] C.Chavaudret, L.Stolovitch, *Analytic reducibility of resonant cocycles to a normal form*, Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu 17(1)
- [23] A. Chéritat, *Nouvelle preuve d'un théorème de Yoccoz*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338 (2004).
- [24] B.V.Chirikov, *Research concerning the theory of non-linear resonance and stochasticity*, Nuclear Physics Insitute of the Siberian Section of the USSR Academy of Sciences, Report 267 (1969)
- [25] S-N.Chow, K.Lu, Y-Q. Shen, *Normal form and linearization for quasiperiodic systems*, Trans.AMS 331 n.1 (1992) 361-376
- [26] Henri Cohen, *Multiplication par un entier d'une fraction continue périodique*, Seminaire de Théorie des Nombres de Bordeaux 2 (1972-1973) 1-30
- [27] A.M.Davie, *The critical function for the semistandard map*, Nonlinearity 7 (1994), 219-229
- [28] D.Delande, *Kicked rotor and Anderson localization*, Boulder School on Condensed Matter Physics, 2013
- [29] L.H. Eliasson, *Floquet solutions for the 1-dimensional quasi-periodic schrödinger equation*, Communications in mathematical physics, 146 :447–482, 1992
- [30] L. H. Eliasson, *Almost reducibility of linear quasi-periodic systems*, in “Smooth Ergodic Theory and its Applications” (Seattle, WA, 1999), Proc. Sympos. Pure Math., 69, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2001), 679–705
- [31] L.H.Eliasson, *Ergodic skew-systems on $\mathbb{T}^d \times SO(3, \mathbb{R})$* . Ergodic Theory and Dynamical Systems. 2002 ;22(5) :1429-1449
- [32] G.Gentile, *Invariant curves for exact symplectic twist maps of the cylinder with Bryuno rotation numbers*, (2015) Nonlinearity 28 2555
- [33] A. Giorgilli, S. Marmi, *Convergence radius in the Poincaré-Siegel problem*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S3, (4) :601–621, 2010.
- [34] J.M.Greene, *A method for determining a stochastic transition*, J. Math. Phys. 20,1183 (1979)
- [35] J.M.Greene, I.C.Percival, *Hamiltonian maps in the complex plane*, Physica D : Non-linear Phenomena 3 n°3 (1981) 530-548
- [36] M.Herman, *Une méthode pour minorer les exposants de Lyapunov...*, Commentarii Mathematici Helvetici 58 (1983) 453-502
- [37] R.A.Johnson, *Exponential dichotomy, rotation number, and linear differential operators with bounded coefficients*, Journal of Differential Equations 61 n.1 (1986) 54-78
- [38] R.Johnson, J.Moser, *The rotation number for almost periodic potentials*, Commun.Math. Phys. 84, 403–438 (1982)
- [39] R.Johnson, G.R.Sell, *Smoothness of Spectral Subbundles and Reducibility of Quasi-Periodic Linear Differential Systems*, Journal of Differential Equations 41, 262-288 (1981)
- [40] Jorba, A. and Simó, C. *On the Reducibility of Linear Differential Equations with Quasi-Periodic Coefficients*, Journal of Differential Equations, 98 (1992) , 111-124

- [41] N.karaliolios, *Fibered rotation vector and hypoellipticity for quasiperiodic cocycles in compact Lie groups*, arXiv :1903.01914
- [42] N.Karaliolios, X.Xu, Q.Zhou, *Anosov-Katok constructions for quasi-periodic $SL(2, \mathbb{R})$ -cocycles*, Peking Math J (2022)
- [43] E. Lombardi, L. Stolovitch, *Normal forms of analytic perturbations of quasihomogeneous vector fields : rigidity, invariant analytic sets and exponentially small approximation*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., 43(3) :659–718, 2010.
- [44] S.Marmi, *Critical functions for complex analytic maps*, J.Phys.A : Math.Gen. 23 (1990), 3447-3474
- [45] S.Marmi, P.Moussa, J-C.Yoccoz, *The Brjuno Functions and Their Regularity Properties*, Commun. Math. Phys. 186, 265 – 293 (1997)
- [46] S.Marmi, J.Stark, *On the standard map critical function*, Nonlinearity5 (1992) 743-761
- [47] R.S.McKay, I.C.Percival, *Converse KAM : Theory and Practice*, Commun. Math. Phys. 98,469-512 (1985)
- [48] M.Mendès France, *Sur les fractions continues limitées*, Acta arithmetica 23 (1973), 207-215
- [49] A.Meziani, *Normalization and solvability of vector fields near trapped orbits*, Transactions of the American Mathematical Society Vol. 369, No. 5 (May 2017), pp. 3325-3354
- [50] Ju. A. Mitropolskii, A. M. Samoilenko, *On constructing solutions of linear differential equations with quasiperiodic coefficients by the method of improved convergence*, Ukrain. Mat. J., 17(6) :42–59, 1965.
- [51] J.Moser, *On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. - Phys. Kl. II 1, 1962, 1–20.
- [52] A.Rainer, *Ultradifferentiable extension theorems : a survey*, ArXiv 2107.01061v1
- [53] R.Sacker, G.R.Sell, *A Spectral Theory for Linear Differential Systems*, Journal of differential equations 27, 320-358 (1978)
- [54] T.Seara, J.Villanueva, *Asymptotic Behaviour of the Domain of Analyticity of Invariant Curves of the Standard Map*, Nonlinearity 13 (2000) 1699
- [55] C.L. Siegel, *Iterations of analytic functions*, Ann. Math., 43(1942)807-812, 1942.
- [56] L. Stolovitch, *Singular complete integrability*, Publications mathématiques de l’IHES, 91 :133–210, 2000.
- [57] M.Tessarotto, P.Nicolini, *Theory of stochastic transitions in area preserving maps*, in AIP Conf. Proc. 762, 132–140 (2005)
- [58] P.Bonckaert, F.Verstringe, *Normal forms with exponentially small remainder and ge-vrey normalization for vector fields with a nilpotent linear part*, Annales de l’Institut Fourier, 62 n.6 (2012), p. 2211-2225
- [59] Yoccoz, J.-C.,*Linéarisation des germes de difféomorphismes holomorphes de $(\mathbb{C}, 0)$* ,C.R. Acad. Sci. Paris 306(1988)55-58
- [60] J.C. Yoccoz, *Petits diviseurs en dimension 1*, Astérisque, Volume 231 (1995)
- [61] E. Zehnder, *Generalized implicit function theorems with applications to some small divisor problems*, I. Comm. Pure Appl. Math. XXVIII, 91-140 (1975)