

Une remarque sur l'invariant infinitésimal des fonctions normales

Claire VOISIN

Résumé — Cette Note propose (prop. 4.1) une interprétation cohomologique très simple de l'invariant infinitésimal des fonctions normales défini et étudié par Griffiths dans [1].

A remark on the infinitesimal invariant of normal functions

Abstract — This Note gives (prop. 4.1) a very simple interpretation of the infinitesimal invariant of normal functions defined by Griffiths in [1].

1. Soit X une variété projective complexe de dimension $2n$; soit $|L|$ un système linéaire sur X , de membre général X_s lisse; chaque $X_s \in |L|_{\text{rég}}$ est muni d'une jacobienne intermédiaire $J^{2n-1}(X_s)$, et l'on a ainsi une fibration en tores complexes sur $|L|_{\text{rég}}$, dont le faisceau des sections holomorphes est défini par $\mathcal{J} = \mathcal{H}^{2n-1}/(F^n \mathcal{H}^{2n-1} \oplus H_Z^{2n-1})$, où le faisceau H_Z^{2n-1} est localement constant, de fibre $H^{2n-1}(X_s, \mathbb{Z})$ (modulo torsion) en s ,

$$\mathcal{H}^{2n-1} = H_Z^{2n-1} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_{|L|_{\text{rég}}}, \quad \text{et} \quad F^n \mathcal{H}^{2n-1} \otimes k(s) = H^{2n-1,0} \oplus \dots \oplus H^{n,n-1}(X_s).$$

2. Si Z est un cycle algébrique sur X de dimension n , dont la restriction à X_s est homologue à zéro, l'application d'Abel-Jacobi Φ fournit une section v_Z de $\mathcal{J}$, définie par $v_Z(s) = \Phi(Z_s)$. Cette fonction v_Z jouit de deux propriétés intéressantes : par la suite exacte de faisceaux sur $|L|_{\text{rég}}$:

$$0 \rightarrow H_Z^{2n-1} \rightarrow \mathcal{H}^{2n-1}/F^n \mathcal{H}^{2n-1} \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow 0,$$

on obtient une flèche $s : H^0(\mathcal{J}) \rightarrow H^1(H_Z^{2n-1})$. Il y a par ailleurs une application naturelle

$$r : \text{Ker}(H^{2n}(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2n}(X_s, \mathbb{Z})) \rightarrow H^1(H_Z^{2n-1}),$$

et l'on a : $s(v_Z) = r([Z])$.

La seconde propriété, dite de quasi-horizontalité, est de nature infinitésimale : la dérivée de Gauss-Manin $\nabla : \mathcal{H}^{2n-1} \rightarrow \mathcal{H}^{2n-1} \otimes \Omega_{|L|_{\text{rég}}}$, vérifie

$$\nabla(F^i \mathcal{H}^{2n-1}) \subset F^{i-1} \mathcal{H}^{2n-1} \otimes \Omega_{|L|_{\text{rég}}},$$

et fournit donc par passage au quotient des dérivations

$$\bar{\nabla}_i : \mathcal{H}^{2n-1}/F^i \mathcal{H}^{2n-1} \rightarrow (\mathcal{H}^{2n-1}/F^{i-1} \mathcal{H}^{2n-1}) \otimes \Omega_{|L|_{\text{rég}}}.$$

Soit alors $\bar{\Psi}$ un relèvement local de v_Z dans $\mathcal{H}^{2n-1}/F^n \mathcal{H}^{2n-1}$: on a $\bar{\nabla}_n \bar{\Psi} = 0$.

On continue dans la suite à travailler sur $|L|_{\text{rég}}$, mais on omet la notation « rég » pour alléger le texte.

3. Ceci permet de définir l'invariant infinitésimal de la fonction normale v_Z , de la façon suivante : soit Ψ une section locale de $\mathcal{H}^{2n-1}$ qui relève v_Z ; Ψ est définie à un terme $\varphi + u$ près, où u est une section de H_Z^{2n-1} , donc est plate, et φ est une section de $F^n \mathcal{H}^{2n-1}$; par quasi-horizontalité, $\nabla \Psi \in F^{n-1} \mathcal{H}^{2n-1} \otimes \Omega_{|L|}$ et son image dans le quotient $(F^{n-1} \mathcal{H}^{2n-1}/F^n \mathcal{H}^{2n-1}) \otimes \Omega_{|L|}$ est définie modulo $\text{Im } \beta$, où

$$\beta : F^n \mathcal{H}^{2n-1}/F^{n+1} \mathcal{H}^{2n-1} \rightarrow (F^{n-1} \mathcal{H}^{2n-1}/F^n \mathcal{H}^{2n-1}) \otimes \Omega_{|L|}$$

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

est l'application $\mathcal{O}$ -linéaire déduite de ∇ par passage au quotient. L'invariant infinitésimal δv_Z est défini comme l'image de $\nabla \Psi$ dans le quotient

$$(F^{n-1} \mathcal{H}^{2n-1} / F^n \mathcal{H}^{2n-1}) \otimes \Omega_{|L|} / \text{Im } \beta.$$

4. Ce quotient se calcule de la façon suivante : on a

$$(F^{n-1} \mathcal{H}^{2n-1} / F^n \mathcal{H}^{2n-1}) \otimes k(s) = H^n(\Omega_{X_s}^{n-1});$$

$$(F^n \mathcal{H}^{2n-1} / F^{n+1} \mathcal{H}^{2n-1}) \otimes k(s) = H^{n-1}(\Omega_{X_s}^n),$$

et

$$\Omega_{|L|,s} = H^0(\mathcal{O}_{X_s}(L))^*, \quad \text{si } H^1(\mathcal{O}_X) = 0,$$

ce qu'on supposera dans la suite.

L'application β s'insère dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & H^n(\Omega_X^n)^{\text{prim}} & & \\ & & & & \text{res} \downarrow & & \\ H^{n-1}(\Omega_{X_s}^n) & \rightarrow & H^n(\Omega_{X_s}^{n-1}(-L)) & \rightarrow & H^n(\Omega_{X|X_s}^n)^{\text{prim}} & \rightarrow & 0 \\ & \parallel & \alpha \downarrow & & \bar{\alpha} \downarrow & & \\ H^{n-1}(\Omega_{X_s}^n) & \xrightarrow{\beta} & H^n(\Omega_{X_s}^{n-1}) \otimes H^0(\mathcal{O}_{X_s}(L))^* & \rightarrow & \text{Coker } \beta & \rightarrow & 0 \end{array}$$

où la ligne du milieu est une partie de la suite exacte longue associée à la suite exacte

$$0 \rightarrow \Omega_{X_s}^{n-1}(-L) \rightarrow \Omega_{X|X_s}^n \rightarrow \Omega_{X_s}^n \rightarrow 0,$$

la flèche α est donnée par le cup-produit, et les notations « prim » désignent

$$\text{Ker}(H^n(\Omega_X^n) \rightarrow H^n(\Omega_{X_s}^n)) \quad \text{et} \quad \text{Ker}(H^n(\Omega_{X|X_s}^n) \rightarrow H^n(\Omega_{X_s}^n)),$$

« res » étant enfin l'application de restriction.

La formule proposée pour l'invariant infinitésimal est la suivante :

4.1. PROPOSITION. — Notant $[Z] \in H^n(\Omega_X^n)$ la classe de cohomologie de Z , on a :

$$\bar{\alpha}(\text{res}([Z])) = \delta v_Z \in \text{coker } \beta.$$

5. La preuve sera donnée dans un cas simplifié, la situation générale étant susceptible du même traitement : $|L|$ est supposé être un pinceau sans point base, de sorte que $\mathcal{O}_{X_s}(L)$ est trivial. L'application $\pi : X \rightarrow |L|$ est alors une fibration $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de X_{s_0} . On peut de plus faire les hypothèses suivantes : $Z = Z_1 - Z_2$, avec Z_i lisse au voisinage de X_{s_0} , Z_i rencontre transversalement X_{s_0} en Z_{i,s_0} et $Z_{1,s_0} \cap Z_{2,s_0} = \emptyset$. Ces conditions sont bien sûr également satisfaites pour s proche de s_0 .

5.1. Quitte à remplacer $|L|$ par un disque Δ centré en s , on peut trivialisier π de façon $\mathcal{C}^\infty$, de telle sorte que Z soit trivialisé en $Z_0 \times \Delta$ et que la trivialisatation préserve la structure complexe de X le long de X_0 , i.e. induise une décomposition $\mathcal{C}^\infty$ du fibré vectoriel $\Omega_{X|X_0}$ en $\Omega_{X_0} \oplus \pi^* \Omega_{\Delta,0}$.

5.2. Par dualité un relèvement $\bar{\Psi}$ de v_Z dans $\mathcal{H}^{2n-1}/F^n \mathcal{H}^{2n-1}$ est une section de $F^n \mathcal{H}^{2n-1*}$: soit $\Gamma_t \subset X_t$ une famille continue de chaînes satisfaisant $\partial \Gamma_t = Z_t$. Par définition de l'application d'Abel-Jacobi, on obtient un tel relèvement en posant :

$$\bar{\Psi}(\omega_t) = \int_{\Gamma_t} \omega_t, \quad \text{pour } (\omega_t)_{t \in \Delta} \text{ une section de } F^n \mathcal{H}^{2n-1}. \quad \text{Considérant } \delta v_Z \text{ comme un élément}$$

du dual de $\text{Ker}' \beta$, on obtient aisément la formule 5.3 suivante : soient $\eta = \partial/\partial t \in T_{\Delta,0}$, et $\omega_0 \in H^{n-1}(\Omega_{X_0}^n)$, tels que $\omega_0 \otimes \eta \in \text{Ker}' \beta$. Cela signifie que pour (ω_t) section de

$F^n \mathcal{H}^{2n-1}$ prolongeant ω_0 on a : $\nabla_{\partial/\partial t}|_{t=0}(\omega_t) = : \varphi \in F^n \mathcal{H}^{2n-1}(X_0)$. On a alors :

5.3. $\delta v_Z(\omega_0 \otimes \eta) = d/dt|_{t=0}(\bar{\Psi}(\omega_t)) - \bar{\Psi}(\varphi)$ (cela résulte facilement de la définition donnée en 4).

On calcule 5.3 en dérivant la formule $\bar{\Psi}(\omega_t) = \int_{\Gamma_t} \omega_t$: soit χ le champ de vecteurs qui relève $\partial/\partial t$ dans la trivialisatation 5.1. Soit $\tilde{\omega}$ la forme sur X associée à la famille (ω_t) grâce à cette même trivialisatation. Soit $\Gamma_{[0,t]} = \bigcup_{s \in [0,t]} \Gamma_s$ et $Z_{i,[0,t]} = \bigcup_{s \in [0,t]} Z_{i,s}$.

De $\int_{\Gamma_{[0,t]}} d\tilde{\omega} = \int_{\Gamma_t} \omega_t - \int_{\Gamma_0} \omega_0 + \int_{Z_{1,[0,t]}} \tilde{\omega} - \int_{Z_{2,[0,t]}} \tilde{\omega}$, on tire, en appliquant $d/dt|_{t=0}$:

5.4. $\int_{\Gamma_0} \text{int } \chi(d\tilde{\omega}) = d/dt|_{t=0}(\bar{\Psi}(\omega_t)) + \int_{Z_{1,0}} \text{int } \chi(\tilde{\omega}) - \int_{Z_{2,0}} \text{int } \chi(\tilde{\omega})$ (on utilise le fait que

χ est tangent à Z le long de Z_0).

Par construction, $\text{int } \chi(\tilde{\omega}) = 0$, et les deux derniers termes sont en fait nuls.

$\mathcal{A}(X_0)$ désigne dans ce qui suit l'ensemble des formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ sur X .

Par définition de la connexion de Gauss-Manin, $\text{int } \chi(d\tilde{\omega})|_{X_0}$ est une forme fermée qui représente $\nabla_{\partial/\partial t}(\omega_t)$ et par les hypothèses faites en 5.1 $\text{int } \chi(d\tilde{\omega})|_{X_0} \in F^{n-1} \mathcal{A}^{2n-1}(X_0)$. Par hypothèse, il existe des formes φ_1 et φ_2 telles que $\text{int } \chi(d\tilde{\omega})|_{X_0} = \varphi_1 + d\varphi_2$, et

$$\varphi_2 \in F^{n-1} \mathcal{A}^{2n-2}(X_0) = \bigoplus_{\text{def } p \geq n-1} \mathcal{A}^{p, 2n-p-2}(X_0), \quad \varphi_1 \in F^n \mathcal{A}^{2n-1}(X_0).$$

Comparant 5.4 et 5.3, on obtient :

$$5.5. \delta v_Z(\omega_0 \otimes \eta) = \int_{\Gamma_0} d\varphi_2 = \int_{Z_{1,0}} \varphi_2 - \int_{Z_{2,0}} \varphi_2.$$

5.6. Considérons la suite exacte :

$$0 \rightarrow \Omega_{X_0}^{n-1} \rightarrow \Omega_{X|X_0}^n \otimes \pi^* T_{\Delta,0} \rightarrow \Omega_{X_0}^n \otimes \pi^* T_{\Delta,0} \rightarrow 0.$$

On en déduit la suite exacte :

$$H^{n-1}(\Omega_{X|X_0}^n \otimes \pi^* T_{\Delta,0}) \xrightarrow{\gamma} H^{n-1}(\Omega_{X_0}^n) \otimes T_{\Delta,0} \xrightarrow{\beta} H^n(\Omega_{X_0}^{n-1}).$$

D'autre part, la suite exacte :

$$0 \rightarrow \Omega_X^n \rightarrow \Omega_X^n(L) \rightarrow \Omega_{X|X_0}^n \otimes \pi^* T_{\Delta,0} \rightarrow 0$$

fournit l'application duale de « res » : ${}^t\text{res} : H^{n-1}(\Omega_X^n \otimes \pi^* T_{\Delta,0}) \rightarrow H^n(\Omega_X^n)$. La formule 4.1 dualisée s'écrit alors :

5.7. $\delta v_Z(\omega_0 \otimes \eta) = {}^t\text{res}(\Omega) \cdot [Z]$, où Ω satisfait : $\gamma(\Omega) = \omega_0 \otimes \eta \in \text{Ker } {}^t\beta$.

Par ailleurs, notant $\Omega|_{Z_{i,0}}$ l'image de Ω par le composé :

$$H^{n-1}(\Omega_{X|X_0}^n \otimes \pi^* T_{\Delta,0}) \rightarrow H^{n-1}(\Omega_{Z_i|Z_{i,0}}^n \otimes \pi^* T_{\Delta,0}) \rightarrow H^{n-1}(\Omega_{Z_{i,0}}^{n-1}),$$

on vérifie aisément que :

$$5.8. {}^t\text{res}(\Omega) \cdot [Z] = \int_{Z_{1,0}} \Omega|_{Z_{1,0}} - \int_{Z_{2,0}} \Omega|_{Z_{2,0}}.$$

Il reste donc à comparer 5.5 et 5.8 : l'égalité suit en fait aisément de la représentation de Ω en cohomologie de Dolbeault. Les hypothèses faites en 5.1 entraînent que la forme $\tilde{\omega}$ est de type $(n, n-1)$ le long de X_0 ; on la considère comme une section de $\Omega_{X|X_0}^n \otimes \mathcal{A}^{0, n-1}(X_0)$ dont l'image dans $\Omega_{X_0}^n \otimes \mathcal{A}^{0, n-1}(X_0)$ représente $\omega_0 \in H^{n-1}(\Omega_{X_0}^n)$;

l'image de ω_0 dans $H^n(\Omega_{X_0}^{n-1})$ par le cup-produit par la classe de Kodaira-Spencer $\rho(\eta) \in H^1(T_{X_0})$ est alors représentée par la forme $\text{int } \chi(\bar{\partial}_{X_0} \tilde{\omega}|_{X_0})$, où χ est considéré comme une section de $T_{X|X_0}$ et $\bar{\partial}_{X_0}$ désigne la connexion de type (0,1) : $\Omega_{X|X_0}^n \otimes \mathcal{A}^{0,n-1}(X_0) \rightarrow \Omega_{X|X_0}^n \otimes \mathcal{A}^{0,n}(X_0)$. On vérifie alors qu'avec les notations de 5.4, on a : $\text{int } \chi(\bar{\partial}_{X_0} \tilde{\omega}|_{X_0}) = \bar{\partial} \phi_2^{(n-1, n-1)}$, où la notation $\alpha^{(k,k)}$ signifie « composante de type (k, k) de α ». La forme Ω peut donc être choisie égale à $(\tilde{\omega}|_{X_0} - \phi_2^{(n-1, n-1)} \wedge dt) \otimes \partial/\partial t$, et l'égalité de 5.5 et 5.8 suit immédiatement. Ce qui prouve la proposition 4.1.

6. Comme application immédiate de la formule 4.1, on a le théorème suivant :

THÉORÈME. — Si le faisceau inversible L satisfait les hypothèses suivantes :

$H^n(\Omega_X^n(-L)) = 0$ et

le cup-produit $H^{n-1}(\Omega_{X_0}^n) \otimes H^0(\mathcal{O}_{X_0}(L)) \rightarrow H^{n-1}(\Omega_{X_0}^n(L))$ est surjectif,

alors l'invariant δv_Z est nul au point $X_0 \in |L|$ si et seulement si la classe $[Z] \in H^{2n}(X, \mathbb{Z})$ est de torsion.

Ces hypothèses sont satisfaites si L est suffisamment ample et $H^{n-1}(\Omega_X^n) = 0$.

Note reçue le 14 mars 1988, acceptée le 9 mai 1988.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] P. GRIFFITHS, IVHS III : Determinantal varieties and the infinitesimal invariant of normal functions, *Compo. Math.*, 50, 1983, p. 267-324.
- [2] P. GRIFFITHS, A theorem concerning the differential equations satisfied by normal functions associated to algebraic cycles, *Amer. J. Math.*, 101, 1979, p. 94-131.
- [3] S. ZUCKER, Generalized intermediate jacobians and the theorem on normal functions, *Invent. Math.*, 33, 1976, p. 185-222.

Université de Paris-Sud, Mathématique, Bât. n° 425, 91405 Orsay Cedex.