

Contrexemple à une conjecture de J. Harris

Claire VOISIN

Résumé — On montre l'existence d'une infinité de composantes exceptionnelles du lieu de Noether-Lefschetz en degré $d=4s$ assez grand, en contradiction avec la conjecture 0.3, proposée par J. Harris.

A counterexample to a conjecture of J. Harris

Abstract — We show the existence of infinitely many exceptional components of the Noether-Lefschetz locus in degree $d=4s \gg 0$, in contradiction with conjecture 0.3, due to J. Harris.

0. INTRODUCTION. — 0.1. Le lieu de Noether-Lefschetz S^d en degré d est défini comme l'ensemble des polynômes F de degré d sur $\mathbf{P}^3$ définissant une surface lisse Σ satisfaisant la condition : $\text{rang}(\text{Pic } \Sigma) \geq 2$. Dès que $d \geq 4$, ce lieu est une union dénombrable de sous-ensembles algébriques propres de l'ensemble des polynômes réguliers de degré d , et ses composantes locales S_λ^d sont, par le théorème de Lefschetz sur les classes $(1,1)$, définies par la condition : « la classe entière $\lambda \in H^2(\Sigma, \mathbf{Z})$ est de type $(1,1)$ dans la décomposition de Hodge de $H^2(\Sigma, \mathbf{C})$ », ou encore par l'annulation de la composante $\lambda^{0,2} \in H^2(\mathcal{O}_\Sigma)$ de la classe λ . Ces composantes sont donc définies localement par

$$h^{2,0} := h^0(K_\Sigma) = h^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(d-4))$$

équations holomorphes sur Σ .

0.2. On connaît par [2] l'existence de composantes de S^d qui sont « générales », c'est-à-dire de la codimension $h^{2,0}$ prédite par la théorie de Hodge. Les autres composantes sont dites « exceptionnelles ». Les composantes de faible codimension ont été classifiées dans [3], [5], et il est montré dans [4] qu'en degré $d \leq 7$ les composantes exceptionnelles réduites sont en nombre fini. Ces travaux étaient motivés par la conjecture suivante, due à Harris :

0.3. CONJECTURE (cf. [3]). — *Pour d fixé il existe un nombre fini de composantes exceptionnelles de S^d .*

0.4. On montre ici l'existence d'une infinité de composantes exceptionnelles de S^d , pour $d=4s$ suffisamment grand. La construction peut se faire aussi pour les entiers $d=ks$ avec k fixé ≥ 4 et s suffisamment grand. Il semble cependant que la réunion des composantes exceptionnelles obtenues de cette manière soit contenue dans un sous-ensemble algébrique propre de l'espace des polynômes réguliers de degré d . Il n'est donc pas exclu que l'énoncé suivant reste valide :

0.5. *La réunion des composantes exceptionnelles de S^d n'est pas dense au sens de Zariski dans l'ensemble des polynômes réguliers de degré d .*

Cet exemple m'est venu à l'esprit à la suite d'échanges intéressants, que j'ai eus avec M. Green et C. Peskine, et dont je les remercie.

1. 1.0. Soit $d=4s$; considérons les polynômes F de degré d sur $\mathbf{P}^3$ de la forme $F = P(F_0, \dots, F_3)$ où $P = P(Y_0, \dots, Y_3) \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(4))$ et pour $i=0, \dots, 3$ $F_i \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(s))$. Lorsque les F_i sont choisis sans zéro commun, pour P générique, F définit une surface lisse de degré d dans $\mathbf{P}^3$, par le théorème de Bertini.

Note présentée par Jean-Pierre SERRE.

Soit $W \subset \text{Grass}(4, H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(s)))$ l'ouvert paramétrant les sous-espaces de dimension quatre de $H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(s))$ sans point fixe sur $\mathbf{P}^3$. Soit $\mathcal{E} \rightarrow W$ le sous-fibré tautologique. On a une application naturelle $\varphi: \mathbf{P}(S^4 \mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{P}(H^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(d)))$ et l'intersection U de l'image de φ avec l'ensemble des polynômes réguliers paramètre les polynômes considérés ci-dessus. On a le lemme suivant :

1.1. LEMME. — φ est génériquement de rang maximal.

Démonstration. — Soient $(X_0, \dots, X_3)$ des coordonnées sur $\mathbf{P}^3$ et pour $i=0, \dots, 3$, soit $F_i = X_i^s$; soit $P = \sum_{i=0}^3 Y_i^4$. Alors $F = \sum_{i=0}^3 X_i^{4s}$. Pour une déformation du premier ordre $P+tQ$ de P et F_i+tG_i de F_i on a :

$$\begin{aligned} d/dt(P+tQ(F_0+tG_0, \dots, F_3+tG_3)) \\ = Q(F_0, \dots, F_3) + \sum_{i=0}^3 G_i \partial P / \partial Y_i(F_0, \dots, F_3) = Q(X_0^s, \dots, X_3^s) + 4 \sum_{i=0}^3 G_i X_i^{3s}. \end{aligned}$$

On voit facilement que ceci ne peut s'annuler que si les G_i sont dans $\langle X_0^s, \dots, X_3^s \rangle$, soit $G_i = \sum_{j=0}^3 \alpha_{ij} X_j^s$, et $Q = -4 \sum_{ij} \alpha_{ij} Y_j Y_i^3$. Il est évident qu'un tel vecteur est nul dans l'espace tangent à $\mathbf{P}(S^4 \mathcal{E})$ au point considéré, ce qui prouve le lemme.

1.2. On déduit de ce lemme que la dimension de U est égale à $4(h^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(s)) - 4) + 34$, qui est un équivalent de $2/3 s^3$ pour s grand. D'autre part, le lieu de Noether-Lefschetz dans U contient une infinité dénombrable d'hypersurfaces, dont l'union est dense dans U . En effet, la surface Σ définie par $F = P(F_0, \dots, F_3) = 0$ est envoyée de façon finie sur la surface $K3$ S de degré 4 dans $\mathbf{P}^3$ définie par $P(Y_0, \dots, Y_3) = 0$, par l'application $\psi: \mathbf{P}^3 \rightarrow \mathbf{P}^3$ définie par $\psi(x) = (F_0(x), \dots, F_3(x))$, et l'assertion résulte de l'énoncé analogue pour les surfaces lisses de degré 4 dans $\mathbf{P}^3$, et de l'injection $\text{Pic } S \subset \text{Pic } \Sigma$.

1.3. Comme expliqué en 0.1, 0.2, la dimension des composantes générales de S^d est égale à

$$h^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(d)) - h^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(d-4)) - 1 = 1 + 2d^2,$$

ce qui est inférieur à $4(h^0(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^3}(s)) - 4) + 33$ pour s assez grand et $d=4s$.

Chacune des hypersurfaces de U considérées en 1.2 est donc contenue dans une composante exceptionnelle de S^d , pour s assez grand, et 0.4 sera prouvé si l'on montre que la réunion de ces hypersurfaces n'est pas contenue dans une union finie de composantes de S^d . Mais comme la réunion de ces hypersurfaces est dense dans U et qu'une union finie de composantes de S^d est un ensemble algébrique, cela entraînerait que U est inclus dans S^d , et donc on conclut par le lemme suivant.

1.4. LEMME. — Pour un élément F général de U , la surface Σ définie par $F=0$ satisfait : $\text{Pic } \Sigma = \mathbf{Z}$.

Démonstration. — On utilise l'argument infinitésimal décrit dans [1]. Prenons, comme en 1.1, $F = \sum_{i=0}^3 X_i^{4s}$. Soit T l'espace tangent à U en F . D'après la preuve de 1.1, T est

engendré par les polynômes R de la forme : $Q(X_0^s, \dots, X_3^s) + \sum_{i=0}^3 G_i X_i^{3s}$, avec $d^0 Q = 4$ et $d^0 G_i = s$. D'après [1], il suffit de prouver que pour tout $\lambda \neq 0 \in H^1(\Omega_\Sigma)^{\text{prim}}$ l'appli-

cation $m_\lambda: T \rightarrow H^2(\mathcal{O}_\Sigma)$, définie comme la composée du produit par $\lambda \in H^1(\Omega_\Sigma): H^1(T_\Sigma) \rightarrow H^2(\mathcal{O}_\Sigma)$ et de l'application de Kodaira-Spencer $\rho: T \rightarrow H^1(T_\Sigma)$, est non nulle. Par la description polynomiale de la variation infinitésimale de structure de Hodge de Σ , ceci est équivalent à l'énoncé suivant :

1.5. Soit M un polynôme de degré $2d-4$, tel que pour tout $R \in T$ on ait : RM appartient à l'idéal $J(\Sigma)$ engendré par les X_i^{4s-1} , $i=0, \dots, 3$; alors M appartient à $J(\Sigma)$.

La preuve de 1.5 est élémentaire du fait que T est engendré par des monômes, ce qui entraîne immédiatement que l'on peut supposer également que M est un monôme.

Note remise le 30 août 1991, acceptée le 18 septembre 1991.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] J. CARLSON, M. GREEN, P. GRIFFITHS et J. HARRIS, Infinitesimal variations of Hodge structure (I), *Compositio Mathematica*, 50, 1983, p. 109-205.
- [2] C. CILIBERTO, J. HARRIS et R. MIRANDA, General components of the Noether-Lefschetz Locus and their density in the space of all surfaces, *Math. Ann.*, 282, 1988, p. 667-680.
- [3] M. GREEN, Components of maximal dimension in the Noether-Lefschetz Locus, *J. Diff. Geom.*, 29, 1989, p. 295-302.
- [4] C. VOISIN, Sur le lieu de Noether-Lefschetz en degré 6 et 7, *Compositio Mathematica*, 75, 1990, p. 47-68.
- [5] C. VOISIN, Composantes de petite codimension du lieu de Noether-Lefschetz, *Comment. Math. Helvetici*, 64, 1989, p. 515-526.

Université Paris-Sud, Mathématique, Bât. n° 425, 91405 Orsay Cedex.