SUR LA STABILITÉ DES SOUS-VARIÉTÉS LAGRANGIENNES DES VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES HOLOMORPHES

Claire VOISIN (URA D0752)

0. Introduction. — On considère dans cet article des variétés kählériennes symplectiques irréductibles (cf. [2]) ; une telle variété Y est donc une variété analytique compacte kählérienne de dimension complexe $2n$ munie d'une deux-forme holomorphe ω unique à coefficient près et partout non dégénérée. Les sous-variétés lagrangiennes X de Y sont les sous-variétés analytiques connexes de Y de dimension n satisfaisant : $\omega_{|X} = 0$. On se propose de montrer le théorème 0.1 suivant concernant les déformations de Y "préservant X". Soit $\mathcal{M}$ un ouvert simplement connexe de la famille complète des déformations de Y ; on note $\mathcal{M}_X$ la sous-variété analytique de $\mathcal{M}$ définie par la condition : $t \in \mathcal{M}_X \Leftrightarrow$ il existe une déformation X_t de X contenue dans Y_t. Soit j l'inclusion $X \hookrightarrow Y$; comme $\mathcal{M}$ est simplement connexe, on a un isomorphisme naturel $\alpha_t : H^2(Y_t, \mathbb{C}) \simeq H^2(Y, \mathbb{C})$ pour $t \in \mathcal{M}$, et on note j_t^* le composé $j^* \circ \alpha_t$; soit enfin ω_t la deux-forme holomorphe de Y_t (définie à un coefficient près) ; ω_t appartient naturellement à $H^2(Y_t, \mathbb{C})$, et bien sûr, si $O \in \mathcal{M}$ est tel que $Y_0 = Y$, on a $j_0^*(\omega_0) = 0$. Le résultat est alors le suivant.

0.1 THÉORÈME. — $\mathcal{M}_X = \{t \in \mathcal{M} \mid j_t^*(\omega_t) = 0, \ \ dans \ \ H^2(X, \mathbb{C})\}$.

Notant enfin que $\operatorname{Ker} j^* \subset H^2(Y, \mathbb{C})$ est défini sur $\mathbb{Z}$, et est une sous-structure de Hodge de $H^2(Y, \mathbb{C})$, contenant $H^{2,0}(Y)$ on voit facilement que l'orthogonal de $\operatorname{Ker} j^*$ relativement à la forme d'intersection naturelle sur $H^2(Y, \mathbb{C})$ (cf. [2]) est défini sur $\mathbb{Z}$ et de type (1,1), de sorte qu'il a même rang que son intersection L_X avec $H^2(Y, \mathbb{Q})$ et que L_X est contenu dans $NS(Y) \otimes \mathbb{Q}$ (où $NS(Y)$ dénote le groupe de Néron-Séveri de Y) ; le corollaire suivant est une conséquence facile du théorème.

0.2 COROLLAIRE. — *$\mathcal{M}_X$ est la famille des déformations de Y préservant le sous-groupe $L_X \subset NS(Y)$.*

En d'autres termes l'existence de sous-variétés lagrangiennes de Y ne dépend, au moins localement, que de la structure du groupe de Picard de Y. On donne en § 3 quelques exemples illustrant ce phénomène. Les autres paragraphes sont organisés de la façon suivante : en § I, on étudie la variété $\mathcal{M}_{[X]}$ constituée des déformations de Y telles que *la classe de X (dans $H^{2n}(Y_t, \mathbb{Z})$) reste de type (n, n) relativement à la décomposition de* Hodge de Y_t ; $\mathcal{M}_{[X]}$ contient évidemment $\mathcal{M}_X$, et on montre aisément que $\mathcal{M}_{[X]}$ satisfait l'égalité du théorème 0.1. Au paragraphe 2, on montre que $\mathcal{M}_X = \mathcal{M}_{[X]}$, c'est-à-dire que si $[X]$ reste de type (n, n) dans $H^{2n}(Y_t, \mathbb{C})$, X se déforme effectivement en $X_t \subset Y_t$. L'égalité $\mathcal{M}_X = \mathcal{M}_{[X]}$ n'est nullement évidente dans ce cas car X ne satisfait pas en général la condition de semi-régularité de Bloch (cf. [5]), comme le montrent certains des exemples du paragraphe 3.

§ 1 1.1. — Soient Y une variété kählerienne symplectique, et X une sous-variété lagrangienne. La dimension complexe de Y est paire égale à $2n$, et la classe de cohomologie de X est un élément $[X]$ de $H^{2n}(Y, \mathbb{Z})$, qui est de type (n, n) dans la décomposition de Hodge : $H^{2n}(Y, \mathbb{C}) = \oplus_{p+q=2n} H^{p,q}(Y)$. Comme X est lagrangienne on a, avec les notations du paragraphe 0, $j^*\omega = 0$, et donc, notant $\mu_{[X]}$ le cup-produit par la classe $[X] : H^k(Y) \to H^{k+2n}(Y)$, $\mu_{[X]}(\omega) = 0$ dans $H^{2n+2}(Y, \mathbb{C})$. Soit $\mathcal{M}$ un ouvert connexe et simplement connexe de la famille universelle des déformations de Y, tel qu'il existe une section holomorphe $(\omega_t)_{t \in \mathcal{M}}$ du sous-fibré holomorphe $\mathcal{H}^{2,0} \subset \mathcal{H}^2$ prolongeant $\omega = \omega_0$, où $\mathcal{H}^2$ est le faisceau holomorphe plat sur $\mathcal{M}$, de fibre en t $H^2(Y_t, \mathbb{C})$. Notant $H^{2n}_{\mathbb{Z}}$ le faisceau de $\mathbb{Z}$-modules trivial sur $\mathcal{M}$, de fibre en t naturellement isomorphe à $H^{2n}(Y_t,\mathbb{Z})$, et $\mathcal{H}^{2n+2}$ le fibré vectoriel holomorphe plat, de fibre $H^{2n+2}(Y_t,\mathbb{C})$, on peut étendre $[X]$ en une section de $H^{2n}_{\mathbb{Z}}$ localement constante sur $\mathcal{M}$, qu'on notera de la même façon, et l'on obtient alors une section holomorphe $t\mapsto \mu_{[X]}(\omega_t)$ du fibré $\mathcal{H}^{2n+2}$. Définissant de même $\mathcal{H}^{2n}$ et notant $F^n\mathcal{H}^{2n}\subset\mathcal{H}^{2n}$ le sous-fibré vectoriel de fibre en t le sous-espace $\bigoplus_{\substack{p\geq n\\ p+q=2n}} H^{p,q}(Y_t)\subset H^{2n}(Y_t,\mathbb{C})$, la projection de $[X]$ dans le quotient $\mathcal{H}^{2n}/F^n\mathcal{H}^{2n}$ est holomorphe et s'annule en $t\in\mathcal{M}$ si et seulement si $[X]$ est de type (n,n) dans $H^{2n}(Y_t,\mathbb{C})$. Soit $\mathcal{M}^0_{[X]}$ la composante connexe passant par 0 (où $Y_0=Y$) de la sous-variété de $\mathcal{M}$ définie par l'annulation de cette projection. De même, notons $\mathcal{M}'^0_{[X]}$ la composante connexe passant par 0 de la variété $\mathcal{M}'_{[X]}:=\{t\in\mathcal{M}/\mu_{[X]}(\omega_t)=0,\text{dans} H^{2n+2}(Y_t,\mathbb{C})\}$; on a alors la proposition suivante :

1.2 PROPOSITION. — *Les variétés $\mathcal{M}^0_{[X]}$ et $\mathcal{M}'^0_{[X]}$ sont égales, lisses, de codimension dans $\mathcal{M}$ égale au rang $r_{[X]}$ de l'application $\mu_{[X]}:H^2(Y,\mathbb{C})\to H^{2n+2}(Y,\mathbb{C})$.*

Démonstration : Montrons d'abord l'égalité ensembliste $\mathcal{M}^0_{[X]}=\mathcal{M}'^0_{[X]}$. Soit $t\in\mathcal{M}'_{[X]}$; dans $H^{2n}(Y_t,\mathbb{C})$ la classe $[X]$ se décompose en composantes de type (p,q), soit $[X]=\sum_{p+q=2n}[X]^{p,q}_t$. Comme X est réelle, on a $[X]^{p,q}_t=\overline{[X]^{q,p}_t}$, et pour montrer que $t\in\mathcal{M}_{[X]}$, il suffit de montrer que $[X]^{p,q}_t=0$ pour $p<n$. Mais par hypothèse, on a : $\mu_{[X]}(\omega_t)=0$ dans $H^{2n+2}(Y_t,\mathbb{C})$, ce qui entraîne, puisque ω_t est de type $(2,0)$, que $[X]^{p,q}_t.\omega_t=0$, dans $H^q(\Omega^{p+2}_{Y_t})$ pour tout couple (p,q). Or ω_t est une deux forme holomorphe non dégénérée sur Y_t, et donc ω^k_t fournit un isomorphisme : $\Omega^{n-k}_{Y_t}\simeq\Omega^{n+k}_{Y_t}$, pour tout k. On en déduit que le cup-produit par ω^k_t fournit un isomorphisme : $H^q(\Omega^{n-k}_{Y_t})\simeq H^q(\Omega^{n+k}_{Y_t})$ pour tout couple (k,q), puis que le cup-produit par $\omega_t:H^q(\Omega^p_{Y_t})\to H^q(\Omega^{p+2}_{Y_t})$ est injectif pour $p<n$; la condition $[X]^{p,q}_t.\omega_t=0$ dans $H^{p+2,q}(Y_t)$ entraîne donc $[X]^{p,q}_t=0$, pour $p<n$, et donc on a bien $t\in\mathcal{M}_{[X]}$; de $\mathcal{M}'_{[X]}\subset\mathcal{M}_{[X]}$, on déduit évidemment $\mathcal{M}'^0_{[X]}\subset\mathcal{M}^0_{[X]}$. Pour montrer l'inclusion inverse, il suffit de montrer que l'intersection $\mathcal{M}'^0_{[X]}\cap\mathcal{M}^0_{[X]}$ est ouverte dans $\mathcal{M}^0_{[X]}$, puisque par hypothèse, elle contient 0, donc est non vide, et que d'autre part elle est aussi fermée dans $\mathcal{M}^0_{[X]}$ qui est connexe. Soit $t\in\mathcal{M}'^0_{[X]}\cap\mathcal{M}^0_{[X]}$. Au point t, la classe $[X]$ est de type (n,n) et satisfait $\mu_{[X]}(\omega_t)=0$ dans $H^{2n+2}(Y_t,\mathbb{C})$; sur $\mathcal{M}^0_{[X]}$ la classe $[X]$ reste de type (n,n) et fournit donc un morphisme de structures de Hodge : $H^2(Y_t,\mathbb{C})\to H^{2n+2}(Y_t,\mathbb{C})$ se décomposant (de façon holomorphe), en ses différentes composantes :
$\mu^{2,0}_{[X]}:\mathcal{H}^{2,0}\to\mathcal{H}^{n+2,n}:=F^{n+2}\mathcal{H}^{2n+2}/F^{n+3}\mathcal{H}^{2n+2}$
$\mu^{1,1}_{[X]}:\mathcal{H}^{1,1}:=F^1\mathcal{H}^2/F^2\mathcal{H}^2\to\mathcal{H}^{n+1,n+1}:=F^{n+1}\mathcal{H}^{2n+2}/F^{n+2}\mathcal{H}^{2n+2}$, et $\mu^{0,2}_{[X]}:\mathcal{H}^{0,2}\to\mathcal{H}^{n,n+2}$ (définis de manière analogue).
Les rangs de $\mu^{2,0}_{[X]}$, $\mu^{1,1}_{[X]}$, $\mu^{0,2}_{[X]}$ étant semi-continus on peut trouver un voisinage U de t dans $\mathcal{M}^0_{[X]}$, tel que pour $t'\in U$, on ait : $\text{rang}(\mu^{2,0}_{[X]}(t'))\geq\text{rang}(\mu^{2,0}_{[X]}(t))$, et de même pour les autres composantes. Mais par ailleurs $\mu_{[X]}$ s'identifie, de façon $\mathcal{C}^\infty$, à la somme directe de ses trois composantes, et est de rang constant, puisque $[X]$ est une section localement constante de $H^{2n}_{\mathbb{Z}}$. On en déduit évidemment que chacun des rangs des composantes $\mu^{i,j}_{[X]}$ reste constant sur U, et comme $\mu^{2,0}_{[X]}$ est nul au point t, $\mu^{2,0}_{[X]}$ reste nul sur U, ce qui montre bien que U est contenu dans $\mathcal{M}'^0_{[X]}$. L'égalité ensembliste $\mathcal{M}'^0_{[X]}=\mathcal{M}^0_{[X]}$ est donc montrée. La lissité de $\mathcal{M}^0_{[X]}$ et $\mathcal{M}'^0_{[X]}$ (et donc leur égalité schématique) est alors très facile. En effet, $\mathcal{M}'^0_{[X]}$ est définie par l'annulation de $\mu_{[X]}(\omega_t)$ qui varie dans le sous-fibré plat

$\mu_{[X]}(\mathcal{H}^2) \subset \mathcal{H}^{2n+2}$, de rang $r_{[X]}$. On a donc certainement codim$\mathcal{M}'^0_{[X]} \leq r_{[X]}$. Pour montrer que $\mathcal{M}'^0_{[X]}$ est lisse de codimension $r_{[X]}$, il suffit donc de montrer que le rang du système d'équations $\mu_{[X]}(\omega_t) = 0$ est exactement $r_{[X]}$; or ceci est clair, car notant ∇ la connexion de Gauss-Manin sur $\mathcal{H}^2$ et $\mathcal{H}^{2n+2}$, on a pour $\chi \in H^1(T_Y) = T\mathcal{M}_{(0)}$, $\nabla_\chi \mu_{[X]}(\omega_t)) = \mu_{[X]}(\nabla_\chi(\omega_t))$; les éléments $\nabla_\chi(\omega_t)$ engendrent un sous-espace vectoriel de $F^1H^2(Y,\mathbb{C})$ se projetant isomorphiquement sur $H^{1,1}(Y)$, et comme la multiplication par $[X]$ est réelle, et nulle sur $H^{2,0}(Y)$, elle a même image que sa restriction à F^1H^2, qui se factorise par $H^{1,1}(Y)$; cela entraîne bien que la différentielle en 0 du système d'équations $\mu_{[X]}(\omega_t) = 0$ est de rang égal à $r_{[X]}$. Le raisonnement est identique pour $\mathcal{M}^0_{[X]}$, ce qui achève la preuve de la proposition 1.2.

1.3 Avant d'énoncer le corollaire 1.4, on rappelle l'existence d'une forme d'intersection naturelle q rationnelle et non dégénérée sur $H^2(Y)$, satisfaisant : $H^{2,0}(Y)$ est l'orthogonal de $F^1H^2(Y)$ pour $q_{\mathbb{C}}$ (cf. [2]). De la rationalité de q et de celle du sous-espace $\operatorname{Ker}\mu_{[X]} \subset H^2(Y)$, on déduit que l'orthogonal $L_{[X]} \subset H^2(Y,\mathbb{C})$ de $\operatorname{Ker}\mu_{[X]}$ est défini sur $\mathbb{Q}$ et de type $(1,1)$, puisque $\operatorname{Ker}\mu_{[X]}$ contient $H^{2,0}$; de plus, comme q est non dégénérée, on a rang $L_{[X]} = r_{[X]}$. L'intersection $L^{\mathbb{Q}}_{[X]}$ de $L_{[X]}$ avec $H^2(Y,\mathbb{Q})$ est donc un sous-espace de $NS(Y)\otimes\mathbb{Q}$, de rang $r_{[X]}$ et l'on a :

1.4 Corollaire. — *$\mathcal{M}^0_{[X]}$ est aussi la composante connexe passant par 0 de la famille des déformations de Y préservant le sous-espace $L^{\mathbb{Q}}_{[X]} \subset NS(Y)\otimes\mathbb{Q}$.*

Démonstration : D'après la proposition 1.2, on a localement $\mathcal{M}_{[X]} = \{t \in \mathcal{M}/\omega_t \in \operatorname{Ker}\mu_{[X]}\}$; comme ω_t engendre $H^{2,0}(Y_t)$, et que l'orthogonal pour q de $H^{2,0}(Y_t)$ est égal à $F^1H^2(Y_t)$, on a aussi $\mathcal{M}_{[X]} = \{t \in \mathcal{M}/L_{[X]} \subset F^1H^2(Y)\}$ au moins localement ce qui équivaut bien sûr à l'énoncé du corollaire; l'égalité schématique résulte du fait que les deux sous-variétés considérées sont lisses de codimension $r_{[X]}$ (prop. 1.2 et [2]).

Pour conclure cette section, et faire le lien avec le théorème 0.1, on établit le lemme suivant :

1.5 Lemme. — *Soit $X \subset Y$ une sous-variété lagrangienne connexe; alors le rang $r_{[X]}$ du cup-produit $\mu_{[X]} : H^2(Y,\mathbb{C}) \to H^{2n+2}(Y,\mathbb{C})$ est égal au rang de la restriction $j^* : H^2(Y,\mathbb{C}) \to H^2(X,\mathbb{C})$.*

Démonstration : Il suffit de le montrer pour la cohomologie à coefficients réels. Comme $\mu_{[X]} = j_* \circ j^*$, on a évidemment $\operatorname{Ker} j^* \subset \operatorname{Ker}\mu_{[X]} \subset H^2(Y,\mathbb{R})$; pour montrer l'inclusion inverse, on choisit une classe de Kähler $\lambda \in H^2(Y,\mathbb{R})$; le résultat étant évident si $n = \dim X = 1$, on peut supposer $n \geq 2$, et définir la forme d'intersection q_λ suivante sur $H^2(X,\mathbb{R})$: $q_\lambda(\alpha,\beta) = \int_X \lambda^{n-2}.\alpha.\beta$. Si maintenant α et β sont des éléments de $H^2(Y,\mathbb{R})$, on trouve :$q_\lambda(j^*\alpha, j^*\beta) = \int_Y \mu_{[X]}(\alpha).\beta.\lambda^{n-2}$; si $\mu_{[X]}(\alpha) = 0$, on a donc : $\forall \beta \in H^2(Y,\mathbb{R})$, $q_\lambda(j^*\alpha, j^*\beta) = 0$, c'est-à-dire $j^*\alpha$ est dans le noyau de la restriction de q_λ à Im j^*. Pour montrer que $j^*\alpha = 0$, il suffit donc de voir que la restriction de q_λ à Im j^* est non dégénérée; or cela résulte du théorème de l'index. Par hypothèse l'image de j^* est contenue dans $H^2(X,\mathbb{R}) \cap H^{1,1}(X) := H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$; sur $H^{1,1}_{\mathbb{R}}(X)$ la forme q_λ est non dégénérée, de signature $(1, h^{1,1}-1)$, et plus précisément on a $q_\lambda(j^*\lambda) > 0$, q_λ est négative définie sur l'orthogonal de $j^*\lambda$. Comme Im j^* contient un élément de self-intersection > 0, on voit facilement que q_λ est non dégénérée sur Im j^*.

1.6 Remarque : L'hypothèse "X lagrangienne" n'est pas nécessaire; il suffit d'utiliser le fait que j^* est un morphisme de structures de Hodge, et la positivité de la forme q_λ sur l'espace $(H^{2,0}(X) \oplus H^{0,2}(X)) \cap H^2(X,\mathbb{R})$ pour obtenir le même énoncé en toute généralité.

Du lemme 1.5 et de la proposition 1.2, on déduit finalement l'égalité suivante : (cf. Théorème 0.1).

1.7 PROPOSITION. — *$\mathcal{M}^0_{[X]}$ est égale à la composante connexe passant par 0 de la sous-variété $\mathcal{M}''_{[X]}$ de $\mathcal{M}$ définie par la condition : $t \in \mathcal{M}''_{[X]} \Leftrightarrow j_t^*(\omega_t) = 0$ dans $H^2(X, \mathbb{C})$.*

1.8 Remarque : D'après le lemme 1.5, on voit que l'espace $L^{\mathbb{Q}}_{[X]}$ défini en 1.3 a le même rang que la restriction $j^* : H^2(Y) \rightarrow H^2(X)$; cependant, l'exemple d'une surface K3 dont le groupe de Picard est engendré par la classe d'une courbe elliptique montre que la restriction de j^* à $L^{\mathbb{Q}}_{[X]}$ n'est pas nécessairement injective, ou encore que $L^{\mathbb{Q}}_{[X]}$ n'est pas nécessairement un supplémentaire de $\operatorname{Ker} j^*$.

§ 2 2.1. — On se propose dans cette section de montrer l'égalité $\mathcal{M}_X = \mathcal{M}^0_{[X]}$ (notons que $\mathcal{M}_X$ est connexe par définition) qui signifie que localement les déformations Y_t de Y pour lesquelles la classe de X reste de type (n, n) dans $H^{2n}(Y_t, \mathbb{C})$ sont aussi celles pour lesquelles il existe une déformation $X_t \subset Y_t$ de $X \subset Y$. Notons que ce résultat est bien connu dans le cas des surfaces : Y est alors en effet une surface K3 ou un tore complexe, et $X \subset Y$ est une courbe lisse de fibré inversible associé $\mathcal{O}_Y(X) =: L$ sur Y . Si Y est une surface K3, l'égalité $\mathcal{M}_X = \mathcal{M}_{[X]}$ résulte de la nullité du groupe $H^1(Y, L)$, elle-même due à la connexité de X , si Y est un tore complexe, on a L ample et $H^1(Y, L) = 0$, dès que $L^2 > 0$, la seule possibilité restante étant $L^2 = 0$, et X est une courbe elliptique, fibre de l'application $Y \rightarrow \mathrm{Pic}^0(\mathrm{Y})$ associée à L , et donc préservée par les déformations de Y qui préservent L.

2.2. — D'après 1.7, on a l'égalité locale : $\mathcal{M}^0_{[X]} = \{t \in \mathcal{M} / j_t^*(\omega_t) = 0 \text{ dans } H^2(X, \mathbb{C})\}$, et cela entraîne immédiatement la description suivante de l'espace tangent de $\mathcal{M}^0_{[X]}$ en 0 : $T\mathcal{M}^0_{[X](0)} = \{u \in H^1(T_Y) / j^*(\text{int } u(\omega)) = 0, \text{ dans } H^1(\Omega_X)\}$. Notons enfin que si $\mathcal{Y} \xrightarrow{p} \mathcal{M}$ est une famille complète (locale) de déformations de Y, $\mathcal{M}_X \subset \mathcal{M}$ est l'image par p de la composante connexe passant par X du schéma de Hilbert relatif $H_{\mathcal{Y}/\mathcal{M}}$, lequel est propre au-dessus de $\mathcal{M}$ puisque les fibres Y_t sont kählériennes. $\mathcal{M}_X$ est donc un sous-espace analytique de $\mathcal{M}$. La démonstration procède alors de la façon suivante. On montre d'abord.

2.3 LEMME. — *Les espaces tangents de Zariski $T\mathcal{M}_{X(0)}$ et $T\mathcal{M}_{[X](0)}$ en 0 à $\mathcal{M}_X$ et $\mathcal{M}_{[X]}$ respectivement, sont égaux.*

Ce lemme montre l'égalité désirée au premier ordre. La proposition 2.4 étudie alors les obstructions d'ordre supérieur à déformer X avec Y, lorsque Y reste dans $\mathcal{M}_{[X]}$; on montre précisément :

2.4 PROPOSITION. — *Soit $u \in H^1(T_Y)$ un élément de $T\mathcal{M}_X$; alors il existe une série formelle $\theta(t) = \sum_{i>0} \theta_i t^i$ où les θ_i sont des sections de $T_Y \otimes A^{0,1}(Y)$, satisfaisant la condition d'intégrabilité :$\bar{\partial}\theta + 1/2[\theta, \theta] = 0$, telle que l'image de θ dans $N_Y \otimes A^{0,1}(X)$ (par l'application évidente que l'on notera α_X) soit nulle, et telle que la classe de θ_1 dans $H^1(T_Y)$ soit égale à u.*

Si $\theta(t)$ est convergente, cela signifie que $\theta(t)$ définit une structure complexe Y_t sur Y, pour laquelle $X \subset Y$ est une sous-variété analytique, ou encore que la courbe $t \rightarrow Y_t$ est contenue dans $\mathcal{M}_X$. En général, l'existence d'une telle courbe formelle contenue dans $\mathcal{M}_X$, et ayant un vecteur tangent arbitraire en 0, élément de $T\mathcal{M}_{X(0)}$, suffit à assurer que $\mathcal{M}_X$ est lisse; comme $\mathcal{M}_X$ est évidemment contenu dans $\mathcal{M}_{[X]}$, et que par le lemme 2.3, elles ont même espace tangent en 0, elles sont égales. Le théorème 0.1 résulte alors de 1.7 et le corollaire 0.2 résulte de 1.4 et 1.5. Il n'y a donc plus qu'à montrer le lemme 2.3 et la proposition 2.4.

2.5 Preuve du lemme 2.3 : Considérons les deux flèches naturelles $\alpha : T_Y \to T_{Y|X}$ et $\beta : T_{Y|X} \to N_X$; elles induisent des applications (notées de la même façon) $\alpha : H^1(T_Y) \to H^1(T_{Y|X})$ et $\beta : H^1(T_{Y|X}) \to H^1(N_X)$. Il est alors bien connu que l'espace tangent à $\mathcal{M}_X$ en 0 est le sous-espace $\alpha^{-1}(\operatorname{Ker}\beta) = \operatorname{Ker}\beta\circ\alpha$ de $H^1(T_Y)$.

Reprenant la notation ω pour la deux-forme holomorphe de Y, on a par hypothèse $\omega_{|X} = 0$, et l'espace tangent à X est en tout point de X totalement isotrope maximal pour ω ; ω fournit donc une application naturelle $\tilde{\omega} : T_Y \to \Omega_Y$, qui est un isomorphisme, et dont la restriction à X passe en un isomorphisme :$\tilde{\omega}_X : N_X \simeq \Omega_X$.

Ces applications induisent des applications, notées de la même façon, au niveau des groupes de cohomologie H^1 des faisceaux considérés, et l'on a évidemment : $\tilde{\omega}_X\circ\beta\circ\alpha = j^*\circ\tilde{\omega} : H^1(T_Y) \to H^1(\Omega_X)$. Comme $\tilde{\omega}_X$ est un isomorphisme, on a $\operatorname{Ker}\beta\circ\alpha = \operatorname{Ker}\tilde{\omega}_X\circ\beta\circ\alpha = \operatorname{Ker}j^*\circ\tilde{\omega} \subset H^1(T_Y)$. Or, d'après 2.2, $\operatorname{Ker}j^*\circ\tilde{\omega}$ est aussi l'espace tangent à $\mathcal{M}_{[X]}$ en 0, ce qui montre le lemme.

2.6 Remarque : En général, si $X \subset Y$ est une sous-variété quelconque de dimension n, on a une application naturelle $\gamma : H^1(N_X) \to H^{n+1}(\Omega_Y^{n-1})$ telle que le diagramme suivant commute :

$$(*)\qquad \begin{tikzcd} H^1(T_Y) \arrow[rr, "\beta\circ\alpha"] \arrow[dr, "\gamma_{[X]}"'] & & H^1(N_X) \arrow[dl, "\gamma"] \\ & H^{n+1}(\Omega_Y^{n-1}) & \end{tikzcd}$$

(cf. [5]).

La théorie des variations de structure de Hodge dit que $\operatorname{Ker}\gamma_{[X]}$ est l'espace tangent à $\mathcal{M}_{[X]}$, tandis que comme mentionné plus haut $\operatorname{Ker}\beta\circ\alpha$ est l'espace tangent à $\mathcal{M}_X$. La condition de semi-régularité de Bloch est l'injectivité de γ et assure (cf. [5]) l'égalité $\mathcal{M}_X = \mathcal{M}_{[X]}$. Dans le cas considéré ici, cette condition n'est pas réalisée en général (cf. § 3), et au premier ordre elle est simplement remplacée par la condition $\operatorname{Ker}\beta\circ\alpha = \operatorname{Ker}\gamma\circ\beta\circ\alpha$, qui s'identifie à l'égalité $\operatorname{Ker}j^* = \operatorname{Ker}\mu_{[X]}$ du lemme 1.5, si l'on note qu'en faisant agir ω sur chacun des espaces ci-dessus, le triangle $(*)$ s'identifie à :

$$(**)\qquad \begin{tikzcd} H^1(\Omega_Y) \arrow[rr, "j^*"] \arrow[dr, "\mu_{[X]}"'] & & H^1(\Omega_X) \arrow[dl, "j_*"] \\ & H^{n+1}(\Omega_Y^{n-1}) & \end{tikzcd}$$

à condition bien sûr que $\mu_{[X]}(\omega) = 0$.

2.7 Preuve de la proposition : On utilise le résultat de [4], [13], [15], qui dit que $\mathcal{M}$ est lisse, et la preuve est d'ailleurs directement inspirée de la démonstration de Tian, telle que présentée par Friedman dans [7].

Pour θ une section de $T_Y\otimes A^{0,k}(Y)$, on note $\tilde{\omega}(\theta)$ le produit intérieur de ω par θ (comme on l'a fait au lemme 2.5). Partant de $u \in T\mathcal{M}_{X(0)}$, on va construire par récurrence sur n

une section $\theta_n \in T_Y \otimes A^{0,k}(Y)$, telle que $\bar\partial\theta_1 = 0$ et $\theta_1 = u$ dans $H^1(T_Y)$, et satisfaisant les trois conditions :

a) $\bar\partial\theta_n + 1/2(\sum_{i=1}^{n-1}[\theta_i, \theta_{n-i}]) = 0$

b) $\partial(\tilde\omega(\theta_n)) = 0$, dans $\Omega_Y^2 \otimes A^{0,1}(Y)$

c) $\alpha_X(\theta_n) = 0$, dans $N_X \otimes A^{0,1}(X)$.

1) Si $n = 1$: l'application $\tilde\omega$ fournit un isomorphisme entre $T_Y \otimes A^{0,k}(Y)$ et $\Omega_Y \otimes A^{0,k}(Y)$, compatible avec les applications $\bar\partial$, et induit en particulier un isomorphisme entre $H^k(T_Y)$ et $H^k(\Omega_Y)$; la théorie de Hodge dit qu'on peut choisir une forme η de type $(1,1)$ ∂_ et $\bar\partial$_ fermée représentant $\tilde\omega(u) \in H^1(\Omega_Y)$. Posant $u' = \tilde\omega^{-1}(\eta) \in T_Y \otimes A^{0,1}(Y)$, on a donc $u' = u$ dans $H^1(T_Y)$, et $\partial(\tilde\omega(u')) = 0$. D'autre part, par hypothèse, et par le lemme 2.3, u' satisfait : $j^*(\tilde\omega(u')) = 0$ dans $H^1(\Omega_X)$: comme $\tilde\omega(u')$ est ∂_ et $\bar\partial$_ fermée, on en déduit par le "lemme $\partial\bar\partial$" appliqué à X qu'il existe une fonction φ sur X telle que $j^*(\tilde\omega(u')) = \partial\bar\partial\varphi$. Etendant φ en une fonction $\tilde\varphi$ sur Y, et posant $\theta_1 = u' - \tilde\omega^{-1}(\partial\bar\partial\tilde\varphi)$, on voit que θ_1 satisfait les conditions a), b) et c), le dernier point résultant du fait déjà noté que pour $\theta \in T_Y \otimes A^{0,1}(Y)$, $j^*(\tilde\omega(\theta)) = 0$ dans $\Omega_X \otimes A^{0,1}(X)$ est équivalent à $\alpha_X(\theta) = 0$, dans $N_X \otimes A^{0,1}(X)$.

2) Supposons maintenant a), b), c) satisfaits pour $i < n$, avec $n \geq 2$; on va d'abord trouver θ'_n satisfaisant a) et b). Il est bien connu que $\sum_{i=1}^{n-1}[\theta_i, \theta_{n-i}]$ est un élément $\bar\partial$-fermé de $T_Y \otimes A^{0,2}(Y)$, dont la classe dans $H^2(T_Y)$ mesure l'obstruction à étendre la déformation à l'ordre $n-1$ de Y donnée par $\sum_{i=1}^{n-1} t^i\theta_i$ (les θ_i satisfaisant la condition a)) en une déformation à l'ordre n de Y. Cette obstruction est nulle du fait de la lissité de $\mathcal{M}$, et donc $\sum_{i=1}^{n-1}[\theta_i, \theta_{n-i}]$ est $\bar\partial$-exact, ainsi que $\tilde\omega(\sum_{i=1}^{n-1}[\theta_i, \theta_{n-i}])$. On a par ailleurs le lemme suivant :

2.8 LEMME. — *Si θ et θ' sont des éléments de $T_Y \otimes A^{0,1}(Y)$ satisfaisant : $\partial\tilde\omega(\theta) = 0 = \partial\tilde\omega(\theta')$, alors $\partial\tilde\omega([\theta, \theta']) = 0$.*

Démonstration : Ecrivons localement $\theta = \sum \chi_i \otimes d\bar z_i$ et $\theta' = \sum \chi'_i \otimes d\bar z_i$, où les z_i sont des coordonnées holomorphes et les χ_i, χ'_i sont des champs $\mathcal{C}^\infty$ de type $(1,0)$; alors $[\theta, \theta'] = \sum_{i,j}[\chi_i, \chi'_j] \otimes d\bar z_i \wedge d\bar z_j$ et $\tilde\omega(\theta) = \sum_i \mathrm{int}\chi_i(\omega) \otimes d\bar z_i$, $\tilde\omega(\theta') = \sum_j \mathrm{int}\chi'_j(\omega) \otimes d\bar z_j$; l'hypothèse entraîne donc : $\forall i$, $\mathrm{int}\chi_i(\omega)$ est ∂-fermée, ainsi que $\mathrm{int}\chi'_i(\omega)$, et l'égalité $\tilde\omega([\theta, \theta']) = \sum_{i,j} \mathrm{int}[\chi_i, \chi'_j](\omega) \otimes d\bar z_i \wedge d\bar z_j$ montre qu'il suffit de prouver : si χ, χ' sont des champs de type $(1,0)$, tels que int $\chi(\omega)$ et int $\chi'(\omega)$ soient ∂-fermées, alors $\mathrm{int}[\chi, \chi'](\omega)$ est ∂-fermée. Or cela résulte immédiatement du fait que ω est ∂-fermée et du résultat analogue très classique de géométrie différentielle.

2.9 D'après le lemme 2.8, et l'hypothèse de récurrence, $\tilde\omega(-1/2(\sum_{i=1}^{n-1}[\theta_i, \theta_{n-i}]))$ est une forme ∂ et $\bar\partial$-fermée, et aussi $\bar\partial$-exacte. Par le "lemme $\partial\bar\partial$", on en déduit qu'elle peut s'écrire $\bar\partial\eta$, où η est une forme de type $(1,1)$ ∂-fermée. Posant $\theta'_n = \tilde\omega^{-1}(\eta)$, on voit que θ'_n satisfait les conditions a) et b). On peut bien sûr ajouter à θ'_n un élément φ de $T_Y \otimes A^{0,1}(Y)$, satisfaisant les conditions $\partial\tilde\omega(\varphi) = 0 = \bar\partial\tilde\omega(\varphi)$, et c'est ce que l'on va faire pour obtenir c). La condition c) étant satisfaite pour $i < n$ il est très facile de voir que $\alpha_X(-1/2(\sum_{i=1}^{n-1}[\theta_i,\theta_{n-i}])) = 0$ dans $N_X \otimes A^{0,2}(X)$, ce qui se réécrit encore : $\alpha_X(\bar\partial\theta'_n) = 0$ dans $N_X \otimes A^{0,2}(X)$; $\alpha_X(\theta'_n)$ fournit un élément de $H^1(N_X)$ qui mesure l'obstruction à étendre la déformation $X_{n-1} \subset Y_{n-1}$ donnée par le développement $\sum_{i=1}^{n-1} t^i\theta_i$, où les θ_i satisfont a) et c), en une déformation $X_n \subset Y_n$, où la déformation à l'ordre n Y_n de Y est donnée par le développement $\sum_{i=1}^{n-1} t^i\theta_i + t^n\theta'_n$. Bien sûr, en appliquant l'isomorphisme $\tilde\omega_X : N_X \simeq \Omega_X$ défini en 2.5, à $\alpha_X(\theta'_n)$, on obtient la forme $j^*(\tilde\omega(\theta'_n))$, de type $(1,1)$ sur X; pour construire $\theta_n = \theta'_n + \varphi$, satisfaisant a), b), c), où φ doit donc satisfaire :$\partial\tilde\omega(\varphi) = 0 = \bar\partial\tilde\omega(\varphi)$, et $j^*(\tilde\omega(\varphi)) = -j^*(\tilde\omega(\theta'_n))$, il suffit clairement de montrer : la forme $j^*(\tilde\omega(\theta'_n))$ sur X est la restriction d'une forme de type $(1,1)$ $\partial-$ et $\bar\partial$-fermée sur Y. Comme par construction $\tilde\omega(\theta'_n)$ est de type $(1,1)$ ∂-fermée et que sa restriction à X est $\partial-$ et $\bar\partial$-fermée, il faut montrer :

2.10 LEMME. — *Soit η une forme sur X de type $(1,1)$ ∂ et $\bar\partial$-fermée ; si η est la restriction d'une forme de type $(1,1)$ ∂-fermée sur Y, alors η est aussi la restriction d'une forme de type $(1,1)$ ∂ et $\bar\partial$-fermée sur Y.*

Démonstration : Soit $\eta = j^*(\tilde\eta)$ avec $\partial\tilde\eta = 0$; alors $\bar\eta = j^*(\bar{\tilde\eta})$, avec $\bar\partial\ \bar{\tilde\eta} = 0$. Donc la classe de $\bar\eta$ dans $H^1(\Omega_X)$ est dans l'image de la restriction $j^* : H^1(\Omega_Y) \to H^1(\Omega_X)$; il en va donc de même pour η, et la décomposition de Hodge de $H^2(Y,\mathbb{C})$ fournit une forme η' sur Y, $\partial-$ et $\bar\partial$-fermée, de type $(1,1)$ telle que $j^*(\eta') = \eta$ dans $H^1(\Omega_X)$). Donc $\eta - j^*(\eta')$ est ∂- et $\bar\partial$-fermée, et $\bar\partial$-exacte; le lemme $\partial\bar\partial$ entraîne alors que $\eta - j^*(\eta') = \partial\bar\partial\psi$, où ψ est une fonction sur X, et donc si $\tilde\psi$ est une extension de ψ à Y, η est la restriction de $\eta' + \partial\bar\partial\tilde\psi$, qui est de type $(1,1)$, $\partial-$ et $\bar\partial$-fermée sur Y.

Ceci achève la preuve de la proposition 2.4. Comme noté plus haut, celle-ci entraîne l'égalité $\mathcal{M}_X = \mathcal{M}^0_{[X]}$, et aussi, par les résultats de § 1, le théorème 0.1 et son corollaire 0.2.

2.11 Remarque : Il est facile de voir que le théorème 0.1 reste vrai dans le cas où X n'est pas connexe. Par contre, l'égalité $\mathcal{M}_X = \mathcal{M}^0_{[X]}$ n'a plus nécessairement lieu si X n'est pas connexe (comme le montre l'exemple de deux courbes rationnelles disjointes sur une surface K3); cela reflète le fait que le lemme 1.5 n'est plus vrai dans ce cas.

§ **3 Exemples.** —

1) Dans [2] A. Beauville montre que si S est une surface K3, le schéma de Hilbert $S^{[r]}$ des zéro-cycles de degré r de S est une variété symplectique irréductible (kählérienne en vertu d'un théorème de Varouchas). Si S contient une courbe C lisse, on a une immersion du produit symétrique $C^{(r)}$ de C dans $S^{[r]}$, qui fournit une sous-variété lagrangienne de $S^{[r]}$. Il est facile de voir que l'image de la restriction $j^* : H^2(S^{[r]}) \to H^2(C^{(r)})$ est engendrée par les classes des diviseurs $D_c :=$ image de $c \times C^{(r-1)}$ dans $C^{(r)}$, et de la diagonale de $C^{(r)}$. (Notons que bien que l'image de j^* soit engendrée par des classes de diviseurs la restriction de j^* à $\mathrm{NS}(S^{[r]})$ n'a pas nécessairement la même image, cf. 1.8).

Deux cas se produisent donc : a) si C est rationnelle, on a rang $j^* = 1$ et donc le théorème principal entraîne que la sous-variété lagrangienne $C^{(r)}$ est préservée sur une hypersurface de la famille complète des déformations de $S^{[r]}$. Toujours à cause du théorème, on voit facilement que cette hypersurface est transverse à la famille des déformations de $S^{[r]}$ qui restent du type $T^{[r]}$, où T est une déformation de S; dans ce cas, $S^{[r]}$ se déforme donc sur une variété symplectique irréductible qui n'est plus du type "produit symétrique", et qui contient un espace projectif $\mathbb{P}^r$.

b) Par contre, si C n'est pas rationnelle, le rang de j^* est égal à 2, et les déformations de $S^{[r]}$ préservant la sous-variété lagrangienne $C^{(r)}$ forment une sous-variété de codimension deux, qui est donc nécessairement égale à la famille des variétés $T^{[r]}$, où T varie dans l'hypersurface de la famille complète des déformations de S, sur laquelle le diviseur C est préservé.

2) Si l'on considère maintenant les variétés $S^{[2]}$, éclatement du produit symétrique $S^{(2)}$ le long de sa diagonale Δ, et si l'on note $\tau : E \to \Delta$ le diviseur exceptionnel, fibré en coniques au-dessus de $\Delta \simeq S$, pour une courbe $C \subset S$ lisse, on obtient une sous-variété lagrangienne de $S^{[2]}$ en considérant la surface réglée $\tau^{-1}(C) \subset E \subset S^{[2]}$. Il est facile de voir dans ce cas que le rang de la restriction j^* est égal à deux. Les déformations de $S^{[2]}$ préservant la sous-variété lagrangienne $\tau^{-1}(C)$ sont donc les variétés $T^{[2]}$ où T contient une déformation de C.

3) Si maintenant S est une surface K3 munie d'un diviseur ample H tel que $H^2 = 2g-2$, et si S ne contient pas de courbe C telle que $h^0(H(-C)) \geq 2$, on a une immersion naturelle de la grassmannienne G des droites de $\mathbb{P}(H^0(H)) = \mathbb{P}^g$ dans $S^{[2g-2]}$. On obtient ainsi une sous-variété lagrangienne de $S^{[2g-2]}$. Comme $H^2(G)$ est de rang 1 et que j^* n'est pas nul, cette sous-variété se déforme avec $S^{[2g-2]}$ en codimension un dans la famille complète des déformations de $S^{[2g-2]}$. En appliquant le théorème, on voit facilement que l'intersection de cette hypersurface avec la famille des déformations de $S^{[2g-2]}$ qui restent du type produit symétrique est constituée des variétés $T^{[2g-2]}$, où H est une classe algébrique sur T, de sorte que l'on peut construire des déformations qui ne sont plus du type produit symétrique, et qui contiennent une grassmannienne.

4) Si S est une surface K3 dont le groupe de Picard est engendré par un diviseur H très ample avec $H^2 = 2g-2$ et g pair, $g = 2s$, il existe un unique fibré vectoriel stable E de rang 2 sur S de déterminant H, satisfaisant $c_2(E) = s+1$ et $h^0(E) = s+2$. On voit alors facilement qu'on a une immersion de $\mathbb{P}(H^0(E)) = \mathbb{P}^{s+1}$ dans $S^{[s+1]}$, qui fournit une sous-variété lagrangienne de $S^{[s+1]}$. Encore une fois, le théorème montre que localement, sur la famille des déformations de $S^{[s+1]}$, l'existence de ce sous-espace $\mathbb{P}^{[s+1]}$ caractérise les déformations de S pour lesquelles la classe de H reste algébrique, et aussi qu'on peut déformer $S^{[s+1]}$ sur une variété qui n'est plus du type produit symétrique, en préservant cet espace projectif.

5) Si S est une surface quartique générique dans $\mathbb{P}^3$, la surface T des bitangentes de S est naturellement immergée dans $S^{[2]}$. C'est une sous-variété lagrangienne puisque les zéro-cycles $Z_\ell = x_1 + x_2$ de S découpés par une bitangente ℓ de S satisfont $2Z_\ell = \ell.S$ qui est constant dans $CH_0(S)$, ce qui entraîne le résultat par le théorème de Mumford [12]. Notons que $H^1(\Omega_T) = H^1(N_T)$ est de rang bien plus grand que celui de $H^3(\Omega_{S^{[2]}})$, ce qui entraîne que la condition de semi-régularité 2.6 ne peut être réalisée dans ce cas. Le rang de la restriction j^* est égal à 1 dans ce cas, comme il résulte du fait que le rang générique de NS(T) est égal à 1. Encore une fois, on voit qu'on peut déformer $S^{[2]}$ sur une variété qui n'est plus de ce type et qui contient une déformation de T. Cet exemple diffère des précédents par le fait que T a un fibré canonique très ample.

6) Surfaces K3 admettant une involution. Soit S une surface K3 obtenue comme un revêtement double d'une surface T, qui peut être un plan, une quadrique, ou une surface d'Enriques. La surface T satisfait $h^{2,0} = 0$ et son image naturelle dans $S^{[2]}$ est donc une sous-variété lagrangienne. L'application de restriction j^* est surjective dans tous les cas, et il est facile de voir qu'on peut déformer $S^{[2]}$ en une variété qui n'est plus du type produit symétrique, en préservant la sous-variété lagrangienne T. (En effet par le théorème et son corollaire 0.2, il suffit de voir que le diviseur exceptionnel E (cf. Ex. 2)) n'est pas dans l'orthogonal de $\operatorname{Ker} j^*$; or le contraire entraînerait que $\operatorname{Ker} j^*$ est contenu dans l'orthogonal de E, qui est encore égal à l'image "diagonale" de $H^2(S)$ dans $H^2(S^{[2]})$ (cf. [2]). Il est facile de voir que cela n'est pas le cas. Par contraste avec les exemples précédents, la surface d'Enriques fournit un exemple où la codimension de la famille sur laquelle la sous-variété

lagrangienne est préservée est assez grande (égale à 10).

7) La variété F des droites d'une cubique X de dimension 4 (cf. [2], [3]) fournit un exemple explicite de variété symplectique qui n'est pas du type produit symétrique d'une surface K3 et qui contient des sous-variétés lagrangiennes. La surface des droites contenues dans une section hyperplane lisse de X est une telle sous-variété de F, se déformant avec F aussi longtemps que F reste la variété des droites d'une cubique, c'est-à-dire dans une hypersurface de la famille des déformations de F (cf. [14]).

Si maintenant X contient un plan P, F contient le plan dual P^v, qui constitue évidemment une sous-variété lagrangienne de F. Comme $H^2(P^v)$ est de rang 1, on a rang $j^* = 1$ dans ce cas, et le plan P^v est préservé dans une hypersurface de la famille des déformations de F. Il est facile de voir que cette hypersurface est transverse à la famille des déformations de F comme variété des droites d'une cubique.

Tous ces exemples illustrent le contenu du théorème, au sens où ils exhibent des sous-variétés lagrangiennes d'une variété générique dans une famille de déformations d'une variété symplectique avec groupe de Picard fixé. La question suivante est assez naturelle. Soit S une surface K3, ayant un groupe de Picard fixé. Peut-on construire toutes les sous-variétés lagrangiennes des produits symétriques $S^{[k]}$ par l'un des procédés décrits ci-dessus, ou par des procédés similaires ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. Artin. — On the solutions of analytic equations, *Invent. Math* **5**, (1968), 277-291.

[2] A. Beauville. — Variétés kählériennes dont la première classe de Chern est nulle, *J. Differential Geometry* **18**, (1983), 755-782.

[3] A. Beauville, R. Donagi. — The variety of lines of a cubic fourfold, *C. R. Acad. Sci. Paris* **301 série I**, (1985), 703-706.

[4] F. Bogomolov. — Hamiltonian kähler manifolds, *Soviet. Math. Doklady* **19**, (1978), 1462-1465.

[5] S. Bloch. — Semi-regularity and De Rham cohomology, *Invent Math* **17**, (1972), 51-66.

[6] O. Debarre. — Un contre-exemple au théorème de Torelli pour les variétés symplectiques irréductibles, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 299 série I, (1984).

[7] R. Friedman. — On threefolds with trivial canonical bundle (preprint).

[8] P. Griffiths, J. Harris. — Infinitesimal variation of Hodge structure II : an infinitesimal invariant of Hodge class, Comp. Math., vol. 50, 207-265.

[9] K. Kodaïra. — On stability of compact submanifolds of complex manifolds, Amer. J. of Math., vol. 85, (1963), 79-94.

[10] S. Mukai. — Biregular classification of Fano threefolds and Fano manifolds of coindex three, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, vol. 86, (1989), 3000-3002.

[11] S. Mukai. — Symplectic structure on the moduli space of sheaves on an abelian or K3 surface, *Invent. Math.* **77**, (1984), 101-116.

[12] D. Mumford. — Rational equivalence of zéro cycles on surfaces, J. Math. Kyoto Univ., vol. 9, (1968), 195-204.

[13] G. Tian. — Smoothness of the universal deformation space of compact Calabi-Yau manifolds and its Petersson-Weil metric, in "Mathematical aspects of string theory", S.T.Yau ed., World Scientific, Singapore, (1987), pp. 629-646.

[14] C. Voisin. — Théorème de Torelli pour les cubiques de P^5, *Invent. Math.* **86**, (1986), 577-601.

[15] A.N. Todorov. — The Weil-Petersson geometry of the moduli space of $SU(N \geq)$ (Calabi-Yau) manifolds I, (preprint de l'I.H.E.S.), (1988).

Claire VOISIN
URA D0752 du CNRS
Université de Paris-Sud
Mathématique, bât. 425, ORSAY