

Sur une conjecture de Griffiths et Harris

Claire Voisin

Département de Mathématiques, Bâtiment 425

Université de Paris-Sud

91405 ORSAY Cedex

0.— Dans [4], Griffiths et Harris proposaient l'éventail suivant de conjectures concernant les courbes contenues dans une hypersurface générale de $\mathbb{P}^4$ de degré $d \geq 6$ (i.e. de fibré canonique ample).

- i) on a : d divise $\deg(C)$
- ii) l'image de l'application d'Abel-Jacobi : $\varphi_X : \text{Hom}^2(X)/\text{Rat}^2(X) \longrightarrow \mathcal{J}^2(X)$ est réduite à zéro
- iii) le groupe $\text{Hom}^2(X)/\text{Alg}^2(X)$ est trivial
- iv) le groupe $\text{Alg}^2(X)/\text{Rat}^2(X)$ est trivial
- v) si C est lisse, C est intersection complète $X \cap \Sigma$, de X et d'une surface Σ de $\mathbb{P}^4$.

Mark Green a expliqué dans son exposé les progrès récents concernant ii); cette note se propose de montrer que v) est faux, ainsi d'ailleurs que l'énoncé v') suivant, qui est plus faible;

v') la suite exacte normale de $C \subset X \subset \mathbb{P}^4$ est scindée.

Je remercie le C.I.R.M. et l'Université de Trento pour l'excellent accueil qui nous a été fait lors de ce congrès, ainsi que C. Ciliberto et E. Ballico pour m'avoir autorisée à inclure ces remarques dans leurs "proceedings".

1.— Contre-exemple à v)

1.1.— On supposera $d > 2$, le cas $d = 2$ étant trivial, puisque toute quadrique contient une droite.

Soit $X \subset \mathbb{P}^n$, $n \geq 4$, une hypersurface lisse de degré d , et soit $C \subset X$ une courbe lisse; supposons qu'il existe une surface $\Sigma \subset \mathbb{P}^n$ telle que C soit l'intersection complète de X et de Σ . Comme C est lisse, Σ est lisse le long de C , de sorte que $\text{Sing } \Sigma$ est constitué de points isolés non situés sur C . Soit $\tau : \tilde{\Sigma} \longrightarrow \Sigma$ une désingularisation de Σ . On a une inclusion naturelle $C \subset \tilde{\Sigma}$, et C est un membre du système linéaire $|\tau^* \mathcal{O}_{\tilde{\Sigma}}(d)|$ sur $\tilde{\Sigma}$. La classe de C dans $H^2(\tilde{\Sigma}, \mathbb{Z})$ est donc divisible par d , ce qui entraîne :

— d divise $(C^2)_{\Sigma}$

— d divise $(K_{\Sigma} \cdot C)_{\Sigma}$

la formule d'adjonction donne alors :

1.2.— d divise $\deg(K_{\mathcal{C}})$.

1.3.— Considérons maintenant la courbe à point double ordinaire D constituée de deux sections planes lisses $P_1 \cap X = C_1$, $P_2 \cap X = C_2$ de X , se rencontrant transversalement en un point p . Une telle courbe existe car $n \geq 4$.

On a, pour $i = 1, 2$:

a) d divise $\deg(C_i)$

b) d divise $\deg(K_{C_i})$.

D'après b) on a alors : $\deg(K_D) = \deg(K_{C_1}) + \deg(K_{C_2}) + 2 \equiv 2$ (modulo d). Soit alors S une surface lisse intersection complète $X \cap X_1 \cap \dots \cap X_{n-3}$, contenant D , et soit $D' \subset S$ un membre lisse du système linéaire $|mH + D|$ sur S ; (D' existe pour m suffisamment grand).

On a :

$$\begin{aligned} \deg(K_{D'}) &= D'^2 + K_S \cdot D' = (D + mH)^2 + (K_S \cdot D + mH) \\ &= \deg(K_D) + 2m \deg(D) + m^2 H^2 + m K_S \cdot H \end{aligned}$$

les deux derniers termes sont divisibles par d ; d'après a) $\deg(D)$ l'est également, d'où : $\deg(K_{D'}) \equiv 2$ (modulo d).

Comme $d > 2$, D' ne satisfait pas la condition 1.2, et fournit un contre-exemple à v).

2.— Contre-exemple à v')

2.1.— On supposera désormais (pour simplifier) que $n = 4$.

Reprenons la courbe $D = C_1 \cup_p C_2$ du paragraphe 1.

On va montrer les faits suivants :

- (A) la suite exacte normale de $D \subset X \subset \mathbb{P}^4$ n'est pas scindée.
- (B) Soit $S = X \cap X'$, une surface lisse contenant D , avec $\deg X' = k$ suffisamment grand; soit D' une courbe lisse du système linéaire $|mH + D|$ sur S , avec m suffisamment grand; alors la suite exacte normale de $D' \subset X \subset \mathbb{P}^4$ n'est pas scindée.

2.2. Lemme : (A) $\implies$ (B).

Démonstration : On notera $e_D \in H^1(N_D X(-d))$ la classe de l'extension $0 \longrightarrow N_D X \longrightarrow N_D \mathbb{P}^4 \longrightarrow \mathcal{Q}_D(d) \longrightarrow 0$, et pour toute hypersurface X' telle que $X' \cap X = S$, on notera $F_D^{X'} \in H^1(N_D S(-d))$ la classe de l'extension : $0 \longrightarrow N_D S \longrightarrow N_D X' \longrightarrow \mathcal{Q}_D(d) \longrightarrow 0$ — mêmes notations pour D' .

Considérons la suite exacte : $0 \longrightarrow N_D S \longrightarrow N_D X \longrightarrow \mathcal{Q}_D(k) \longrightarrow 0$; elle fournit une flèche $\alpha : H^1(N_D S(-d)) \longrightarrow H^1(N_D X(-d))$, telle que $\alpha(F_D^{X'}) = e_D$.

i) Supposons S fixée, et soit m tel que $H^1(\mathcal{Q}_S(-D)(k-d-m)) = 0$: cela entraîne : $H^0(\mathcal{Q}_S(k-d)) \longrightarrow H^0(\mathcal{Q}_{D'}(k-d))$, pour toute courbe D' dans le système linéaire $|mH + D|$ sur S . On en déduit immédiatement : si $e_{D'} = 0$, il existe une hypersurface X'' de degré k , telle que $X \cap X'' = S$, et $F_{D'}^{X''} = 0$.

ii) Considérons la suite exacte : $0 \longrightarrow \mathcal{Q}_S(-d) \longrightarrow \mathcal{Q}_S(D'(-d)) \longrightarrow N_{D'} S(-d) \longrightarrow 0$. Elle fournit une flèche $\delta_{D'} : H^1(N_{D'} S(-d)) \longrightarrow H^2(\mathcal{Q}_S(-d))$; on a par ailleurs l'application naturelle donnée par le cup-produit :

$$\beta : H^2(\mathcal{Q}_S(-d)) \longrightarrow \text{Hom}(H^0(\mathcal{Q}_S(d)), H^2(\mathcal{Q}_S));$$

on vérifie facilement que β est injective, dès que $K_S \geq 0$.

Il est alors bien connu que l'image $\beta \circ \delta_{D'}(F_{D'}^{X''}) \in \text{Hom}(H^0(\mathcal{Q}_S(d)), H^2(\mathcal{Q}_S))$ s'identifie au composé : $H^0(\mathcal{Q}_S(d)) \longrightarrow H^1(T_S) \xrightarrow{[\lambda_{D'}]} H^2(\mathcal{Q}_S)$, où $[\lambda_{D'}]$ est le cup-produit par la classe $\lambda_{D'} \in H^1(\Omega_S)$ de D' , et la flèche $H^0(\mathcal{Q}_S(d)) \longrightarrow H^1(T_S)$ provient de la suite exacte :

$$0 \longrightarrow T_S \longrightarrow T_{X''|_S} \longrightarrow \mathcal{Q}_S(d) \longrightarrow 0.$$

Il est alors facile de vérifier que $[\lambda_{D'}]$ ne dépend que de la "classe de cohomologie primitive" de D' , i.e. $[\lambda_{D'}] = [\lambda_{D''}]$ si $\lambda_{D'} = \lambda_{D''} + n\lambda_H$, $n \in \mathbb{Z}$.

On en déduit que $[\lambda_{D'}] = [\lambda_D]$.

- iii) Choisissons alors k , (et S), tels que l'on ait : $H^1(\mathcal{O}_S(D(-d))) = 0$ (il est facile de voir que cette condition est satisfaite pour k assez grand).
- iv) Supposons par l'absurde que $e_{D'} = 0$, où D' est lisse et choisie comme en i) : il existe alors X'' , telle que $F_{D'}^{X''} = 0$. On en déduit que $\beta \circ \delta_{D'}(F_{D'}^{X''}) = 0$, et, d'après ii) que $[\lambda_{D'}] = 0$. Toujours d'après ii), il vient $[\lambda_D] = 0$, d'où $\beta \circ \delta_D(F_D^{X''}) = 0$. Or le choix de k , fait en iii), entraîne que δ_D est injective. Comme β est également injective, on en déduit $F_D^{X''} = 0$, et immédiatement $e_D = 0$, ce qui contredit (A).

2.3.- **Preuve de (A) :** la suite exacte normale de $D \subset X \subset \mathbb{P}^4$ s'écrit :
 $0 \longrightarrow N_D X \longrightarrow N_D \mathbb{P}^4 \longrightarrow \mathcal{O}_D(d) \longrightarrow 0$; il est clair qu'il suffit de prouver :
 $h^0(N_D \mathbb{P}^4(-d)) = 0$.

Considérons les suites exactes suivantes : (cf. [6]).

$$(E_1) \quad 0 \longrightarrow N_D \mathbb{P}^4(-d) \longrightarrow N_D \mathbb{P}^4(-d)|_{C_1} \oplus N_D \mathbb{P}^4(-d)|_{C_2} \longrightarrow N_D \mathbb{P}^4(-d)|_P \longrightarrow 0$$

$$(E_2) \quad 0 \longrightarrow N_{C_1} \mathbb{P}^4(-d) \longrightarrow N_D \mathbb{P}^4(-d)|_{C_1} \longrightarrow \mathbb{C}_P \longrightarrow 0.$$

On a : $h^0(N_{C_1} \mathbb{P}^4(-d)) = 1 = h^0(N_{C_2} \mathbb{P}^4(-d))$.

Il suffit donc de montrer :

$$i) \quad H^0(N_D \mathbb{P}^4(-d)|_{C_1}) \simeq H^0(N_{C_1} \mathbb{P}^4(-d))$$

et

$$ii) \quad H^0(N_{C_1} \mathbb{P}^4(-d)) \oplus H^0(N_{C_2} \mathbb{P}^4(-d)) \hookrightarrow H^0(N_D \mathbb{P}^4(-d)|_P).$$

- i) Par Riemann–Roch et par dualité, $H^0(N_D \mathbb{P}^4(-d)|_{C_1}) = H^0(N_{C_1} \mathbb{P}^4(-d))$ si et seulement si l'inclusion $H^0(N_D \mathbb{P}^{4*}(-d) \otimes K_{C_1}) \hookrightarrow H^0(N_{C_1} \mathbb{P}^{4*}(d) \otimes K_{C_1})$ est stricte; or, pour $d \geq 3$, le faisceau $N_{C_1} \mathbb{P}^{4*}(d) \otimes K_{C_1}$ est engendré par ses sections globales. La conclusion est donc immédiate, au vu de la suite exacte duale de (E_2) .
- ii La section de $H^0(N_{C_1} \mathbb{P}^4(-d))$ provient de la section canonique de $N_{C_1} P_1(-d)$ pour $i = 1, 2$. L'assertion résulte immédiatement du fait que les espaces tangents de P_1 et P_2 sont transversaux au point p , et la description locale de $N_D \mathbb{P}^4$.

2.4.— **Remarque :** Il est naturel de penser qu'une courbe du type $C_1 \cup_p C_2$ fournisse des contre-exemples à v) et $v')$; en effet considérons la surface réduite $P = P_1 \cup_p P_2$, union des plans P_1 et P_2 se coupant transversalement au point p . Alors son intersection schématisée avec X n'est pas la courbe réduite $C_1 \cup_p C_2$, mais possède un point immergé, de sorte que D n'est qu'ensemblément l'intersection $P \cap X$.

3.— Concernant les autres points de la conjecture de Griffiths et Harris, on peut faire la remarque (peut-être évidente) suivante :

3.1. **Lemme :** ii) $\implies$ i).

Démonstration : Supposons qu'une hypersurface X générale contienne une courbe de degré m , et que l'application d'Abel Jacobi φ_X soit nulle.

Il existe une variété irréductible W munie d'une application propre $p : W \longrightarrow \mathcal{X}$, $\mathcal{X} = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^4, \mathcal{O}(d)))$, telle que la fibre de p en X paramètre des courbes de degré m contenues dans X ; deux telles courbes sont homologues et pour X générale, on a : $\forall C, C' \in p^{-1}(X)$, $\varphi_X(C - C') = 0$; en fait, ceci reste vrai pour tout X lisse : En effet, si H dénote une section plane de X , on a, pour X générique, $\varphi_X(dC - mH) = 0$, $\forall C \in p^{-1}(X)$. Par irréductibilité de W , ceci reste vrai pour tout $X \in \mathcal{X}$. Donc $\varphi_X(C - C')$ est un point de torsion, constant sur les composantes connexes de $p^{-1}(X) \times p^{-1}(X)$. Mais la normalité de $\mathcal{X}$ et l'irréductibilité de W entraînent que si $W \longrightarrow W_1 \longrightarrow X$ est la factorisation de Stein de p , chaque composante irréductible du produit $W_1 \times_{\mathcal{X}} W_1$ domine $\mathcal{X}$. Ce qui entraîne facilement le résultat

Fixons une droite Δ de $\mathbb{P}^4$, et notons $\mathcal{X}_\Delta$ la famille des hypersurfaces de degré d contenant Δ . Notons $W_\Delta = p^{-1}(\mathcal{X}_\Delta)$; on a alors une fonction normale ν_Δ définie comme suit sur $\mathcal{X}_\Delta$: soit X lisse $\in \mathcal{X}_\Delta$ et soit $C \in p^{-1}(X)$; alors $\deg(m\Delta - C) = 0$ et l'on peut poser $\nu_\Delta(X) = \varphi_X(m\Delta - C)$.

Or il est connu que le groupe des fonctions normales sur $\mathcal{X}_\Delta$ est cyclique engendré par la fonction normale ν_Δ^H définie par : $\nu_\Delta^H(X) = \varphi_X(d\Delta - H)$ (il suffit de généraliser l'argument de [4], § 3). On en déduit qu'il existe un entier k tel que : $\forall X \text{ lisse} \in \mathcal{X}_\Delta$, $\Phi_X(m\Delta - C) = k \varphi_X(d\Delta - H)$, pour $C \in p^{-1}(X)$.

Comme Δ se déforme continuellement sur Δ' on a en fait $k = k'$; sur $\mathcal{X}_\Delta \cap \mathcal{X}_{\Delta'}$, il vient donc : $(m - kd)\Phi_X(\Delta - \Delta') = 0$. Mais d'après Griffiths [3], si X est générale dans $\mathcal{X}_\Delta \cap \mathcal{X}_{\Delta'}$, $\Phi_X(\Delta - \Delta') \in J(X)$ n'est pas un point de torsion. Donc $m - kd = 0$, ce qui prouve i).

4.— Conclusion : En paragraphe 1 on a dégagé la condition 1.2 nécessaire pour qu'une courbe C soit complète intersection $X \cap \Sigma$ de X et d'une surface Σ de $\mathbb{P}^4$. Si d divise le degré de C , cette condition est automatiquement satisfaite lorsque C est sous-canonique (i.e. $\exists m/K_C = \mathcal{O}_C(m)$). De même, il semble difficile de construire par des procédés analogues à celui décrit en paragraphes 1 et 2, des courbes sous-canoniques qui n'ont pas la suite exacte normale scindée. Il n'est donc pas exclu que v , v' soient vrais pour les courbes sous-canoniques.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] G. Ellingsrud, L. Gruson, C. Peskine, S.A. Stomme.— On the normal bundle of curves on smooth projective surfaces, *Invent. Math.* 80, 181–184 (1985).
- [2] M. Green.— Griffiths' infinitesimal invariant and the Abel Jacobi map, preprint.
- [3] P. Griffiths.— On the periods of certain rational integrals I, II, *Ann. Math.* 90 (1969) 460–541.
- [4] P. Griffiths, J. Harris.— On the Noether–Lefschetz theorem and some remarks on codimension two cycles, *Math. Ann.* 271, 31–51, (1985).
- [5] J. Harris, K. Hulek.— On the normal bundle of curves on complete intersection surfaces, *Math. Ann.* 264, 129–135, (1983).
- [6] R. Hartshorne, A. Hirschowitz.— Smoothing algebraic space curves, dans *Algebraic geometry*, Sitjes, (1983), Lecture Notes in Math. N° 1124.