Espaces de modules et construction d'invariants en géométrie

Claire Voisin, CNRS et IHÉS

Table des matières

Chapitre 0

Introduction

On décrit dans ce cours des méthodes de construction d'espaces de modules totalement différentes de celles de la géométrie algébrique, dans le cadre soit de la géométrie riemannienne, soit de la géométrie symplectique. Dans la situation de la géométrie algébrique, on a construit des espaces de modules comme quotients par des groupes algébriques de certains schémas *Quot* plongés dans des grassmanniennes. La caractéristique de cette méthode est que tous les objets considérés sont des variétés algébriques.

Dans le cadre de la géométrie différentielle, les espaces de modules qu'on va construire sont des quotients par un groupe de dimension infinie (groupe de jauge) d'une sous-variété de dimension infinie d'un espace de Banach. L'espace de Banach est l'espace des connexions sur un fibré vectoriel complexe différentiable spécial-unitaire (donc de première classe de Chern nulle) sur une base X, qui sera dans notre cas une variété riemannienne compacte de dimension 4. La sous-variété de dimension infinie sera l'ensemble des connexions hermitiennes antiautoduales induisant la connexion triviale sur $det\, E$. Enfin le groupe sera le groupe des automorphismes unitaires du fibré vectoriel considéré, qui agit sur l'espace des connexions en préservant la condition d'anti-autodualité. Pour mettre une structure de variété sur un tel quotient, on choisit une jauge, c'est-à-dire une tranche transverse à l'orbite du groupe des automorphismes. Il s'agit alors de montrer que sur cette tranche, les équations d'antiautodualité définissent une variété au sens usuel du terme. Sous certaines hypothèses de transversalité, ceci fait intervenir la théorie de Fredholm et un théorème des fonctions implicites en dimension infinie. Ici on voit apparaître un avantage de la géométrie riemannienne sur la géométrie algébrique. Les espaces de paramètres sont beaucoup plus souples et permettent souvent de garantir que pour une métrique suffisamment générique sur la base, l'espace des solutions est bien lisse.

La comparaison avec la géométrie algébrique n'est pas de pure rhétorique. En effet, si la base est une surface kählérienne compacte, le théorème de Donaldson (généralisé par Uhlenbeck-Yau en dimension > 2) montre l'existence d'uniques métriques d'Hermite-Einstein sur les fibrés vectoriels stables (relativement à la métrique kählérienne sur la base). Ces métriques ont des connexions de Chern associées qui sont unitaires et anti-autoduales. Inversement une telle connexion détermine une structure complexe sur le fibré, et l'existence d'une métrique d'Hermite-Einstein garantit sa (poly)-stabilité.

On peut donc passer d'un espace de modules à l'autre. Cependant, il faut noter que dans certains cas (i.e. pour certaines valeurs du rang et de la classe de Chern c_2 des fibrés considérés, qui sont des constantes associées à l'espace de modules), les espaces de modules de fibrés vectoriels stables sur une surface peuvent ne pas être de la bonne dimension, même pour une déformation générique de la structure complexe ou kählérienne sur la base.

Une seconde étape consiste à compactifier les espaces de modules. Dans le cas de la géométrie algébrique, la compactification était donnée par l'introduction des faisceaux sans torsion semi-stables. Ces faisceaux sans torsion ne sont pas des fibrés vectoriels. Ils admettent des singularités ponctuelles où se concentre une partie de la classe de Chern c_2. Par exemple, le faisceau d'idéaux $\mathcal{I}_x$ d'un point $x \in X$ est localement libre et en fait trivial en dehors de x : $\mathcal{I}_x \cong \mathcal{O}_X$ en dehors de x, mais au point x, il nécessite au moins deux générateurs (des équations locales pour le point). Ce faisceau satisfait $c_2(\mathcal{I}_x) = 1$.

Dans le cas de la géométrie différentielle, le théorème de compacité d'Uhlenbeck permet précisément de compactifier les espaces de modules de connexions anti-autoduales en ajoutant sur le bord des paires constituées de connexions antiautoduales sur des fibrés ayant comme seconde classe de Chern $c_2 = c_2 - k$, et la donnée de k points sur X où se concentre le reste du c_2 (c'est-à-dire de la courbure).

La seconde moitié du cours sera consacrée à la construction en géométrie symplectique d'espaces de modules de courbes pseudo-holomorphes dans les variétés symplectiques. Une observation fondamentale due à Gromov est le fait que qu'une variété symplectique (X, ω) admet des structures presque complexes J contrôlées par ω, et en fait une famille connexe et contractile de telles structures. La condition que J soit contrôlée par ω s'écrit

$$\omega(u, Ju) > 0,\ \forall 0 \neq u \in T_{X,x},$$

mais on peut aussi imposer la condition suivante qui nous rapproche de la géométrie kählérienne :

$$\omega(u, v) = \omega(Ju, Jv),\ \forall u,\ v \in T_{X,x}.$$

Cette condition dit que ω est de type $(1, 1)$ relativement à J. Si J est intégrable, ω est alors, du fait des deux conditions ci-dessus, une forme de Kähler.

Une autre découverte cruciale due à Gromov est le fait que les courbes pseudo-holomorphes, i.e. les applications différentiables d'une courbe complexe C dans X dont la différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire, se comportent localement comme dans le cas complexe. C'est-à-dire que l'intégrabilité ou la non-intégrabilité de la structure presque complexe J n'interviennent aucunement dans l'étude des petits disques pseudoholomorphes dans X ; (cependant l'intégrabilité impose la classe C^ω, ce qui bien sûr n'est pas le cas en général).

Dans le cas où l'on considère des courbes compactes, avec un groupe discret d'automorphismes, on peut montrer par la théorie de Fredholm, pour une perturbation générique de J et pour les courbes presque plongées dans X (i.e. C est plongée en dehors d'un nombre fini de points) que les déformations de la courbe pseudo-holomorphe $\psi : C \to X$ forment une variété de dimension finie, la dimension étant prédite par la classe d'homologie $\psi_*([C]_{fond})$. Encore une fois, on voit apparaître une souplesse qui n'existe pas en géométrie algébrique ou kählérienne. Dans le cas où X est kählérienne compacte, et ω est une forme de Kähler, on peut construire l'espace de modules des applications (compactifiées par les applications stables) d'une courbe de genre g dans X. Il est faux que pour une perturbation générique de la structure complexe ou kählérienne, cet espace de modules soit de la dimension attendue.

Dans le cas symplectique, on dispose d'un théorème de compacité dû à Gromov pour les applications pseudoholomorphes d'une courbe de genre g vers X, de classe d'homologie fixée. Comme c'est le cas pour le théorème d'Uhlenbeck, ce théorème fournit des limites d'applications pseuholomorphes modulo des singularités bien circonscrites, nommées "bulles". Un point crucial ici, comme pour le théorème de compacité de Bishop en géométrie complexe, est le fait qu'on travaille avec des ensembles de volume borné, ce qui résulte du fait suivant : Supposons que la forme symplectique soit compatible avec J. On a alors une métrique sur X : $g(u,v) = \omega(u, Jv)$. Alors pour une courbe pseudoholomorphe $C \subset X$, l'aire de C relativement à cette métrique est donnée par l'intégrale $\int_C \omega$. Ainsi, si C est compacte, son aire ne va dépendre que de sa classe d'homologie. Le théorème de Gromov concerne en fait les limites de disques pseudoholomorphes d'aire bornée.

En conclusion, on dispose d'espaces de modules compacts fournis soit par la géométrie riemannienne en dimension 4 soit par la géométrie symplectique. Ces espaces de modules peuvent également être construits en géométrie algébrique (il faut cependant comparer les compactifications qui ne sont pas identiques). Cependant on rencontre souvent un défaut de transversalité en géométrie algébrique ou kählérienne, qui fait que les espaces de modules ne se déforment pas bien avec la structure complexe ou kählérienne sur la base. (Actuellement on sait par des méthodes de calculs d'excès, compenser ce défaut en construisant des espaces de modules virtuels, qui sont supportés sur les vrais espaces de modules, et obtenus en tenant compte de leur défaut de transversalité.)

Quoi qu'il en soit, ces espaces de modules ont pour principal intérêt de permettre la construction d'invariants numériques dépendant de la variété X de départ et du choix d'un certain nombre de classes de cohomologie sur X. Par exemple, dans le cas des invariants de Gromov-Witten, on compte le nombre de courbes pseudoholomorphes de genre donné et de classe d'homologie donnée rencontrant un certain nombre de sous-variétés de X (représentant les classes de cohomologie en question). Dans le cas des invariants de Donaldson, la définition des invariants est beaucoup plus compliquée sauf dans le cas où la dimension de l'espace de modules est 0, auquel cas on compte ses points, affectés de signes adéquats. En général, on utilise la classe de Chern c d'un certain fibré universel sur $\mathcal{Y} \times X$, où $\mathcal{Y}$ est l'espace de modules des connexions antiautoduales, pour construire une application $H^2(X) \to H^2(\mathcal{Y})$. La principale difficulté consiste à étendre ces classes à la compactification d'Uhlenbeck, ce qui permet d'intégrer des polynômes en ces classes, définissant ainsi les polynômes de Donaldson.

Chapitre 1

Connexions antiautoduales

1.1 Géométries riemannienne et différentielle en dimension 4

1.1.1 Opérateur de Hodge

Soit X une variété différentiable orientée munie d'une métrique riemannienne, de dimension n. Pour chaque $x \in X$, on a un isomorphisme naturel, donné par le produit extérieur à droite

$$p : \bigwedge^{n-k} \Omega_{X,x} \cong Hom(\bigwedge^{k} \Omega_{X,x}, \bigwedge^{n} \Omega_{X,x}),$$

où $\bigwedge^n \Omega_{X,x}$ est un espace vectoriel de dimension 1. Comme $\Omega_{X,x}$ est muni d'une métrique et est orienté, $\bigwedge^n \Omega_{X,x}$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{R}$, grâce à la forme volume. D'autre part la métrique $(\, , \,)_x$ fournit aussi un isomorphisme

$$m : \bigwedge^{k} \Omega_{X,x} \cong Hom(\bigwedge^{k} \Omega_{X,x}, \mathbb{R}).$$

On peut donc définir l'opérateur

$$*_x = p^{-1} \circ m : \bigwedge^{k} \Omega_{X,x} \cong \bigwedge^{n-k} \Omega_{X,x}$$

qui varie différentiablement avec x lorsque g est différentiable et qui est de même classe de différentiabilité que g.

Définition 1.1 *On notera $*$ l'isomorphisme de fibrés vectoriels*

$$* : \Omega^k_{X,\mathbb{R}} \cong \Omega^{n-k}_{X,\mathbb{R}}$$

ainsi construit. On notera également $*$ le morphisme induit au niveau des sections, c'est-à-dire des formes différentielles

$$* : A^k(X) \cong A^{n-k}(X).$$

L'opérateur $*$ est appelé opérateur de Hodge. Sa propriété essentielle (qui résulte de sa définition) est la suivante :

Lemme 1.2 *On a pour $\alpha, \beta \in A^k(X)$ l'égalité des n-formes*

$$(\alpha, \beta) Vol = \alpha \wedge *\beta,$$

et donc

$$(\alpha, \beta)_{L^2} = \int_X \alpha \wedge *\beta. \tag{1.1.1}$$

Ici la forme d'intersection L^2 sur A^k_X est définie sur les formes différentielles à support compact par

$$(\alpha, \beta)_{L^2} = \int_X (\alpha, \beta) Vol$$

où la fonction (α, β) est fournie par les formes d'intersection ponctuelles sur les fibres de $\bigwedge^k \Omega_X$.

1.1.2 Formes autoduales et antiautoduales

On suppose désormais que X est une variété différentiable riemannienne orientée de dimension 4. En tout point $x \in X$, l'espace $\bigwedge^2 \Omega_{X,x}$ est donc de rang 6 et l'opérateur de Hodge ponctuel $*$ agit sur $\bigwedge^2 \Omega_{X,x}$.

Lemme 1.3 *On a $* \circ * = Id$ sur $\bigwedge^2 \Omega_{X,x}$. De plus les espaces propres associés aux valeurs propres ± 1 de $*$ sont de dimension 3.*

Démonstration. Dans une base orthonormée directe $e_1, \ldots, e_4$ de $\Omega_{X,x}$, l'opérateur de Hodge envoie $e_i \wedge e_j$ sur $e_k \wedge e_l$, où $\{1, \ldots, 4\} = \{i, j, k, l\}$ et e_i, e_j, e_k, e_l est une base d'orientation positive. On en déduit immédiatement que $* \circ * = Id$. Pour la dimension des espaces propres, on note que le rang de Ω^2_X est 6. Or par un changement d'orientation, l'opérateur $*$ change de signe, et donc les fibrés Ω^{2+}_X et Ω^{2-}_X sont échangés. Ils doivent donc être de même rang, sinon toute variété de dimension 4 serait orientable ! On peut bien sûr aussi faire le calcul explicitement. ■

Définition 1.4 *Une forme $\alpha \in A^2_X$ est dite autoduale si $*\alpha = \alpha$ et antiautoduale si $*\alpha = -\alpha$.*

Rappelons qu'une forme α est dite harmonique si elle est annulée par le laplacien $\Delta_g = dd^* + d^*d$, ou de façon équivalente puisque X est compacte :

$$d\alpha = 0 = d(*\alpha).$$

Ici l'opérateur $d^* = \pm * d*$ est l'adjoint formel de d pour la norme L^2.

En dimension 4, le laplacien agissant sur les 2-formes commute avec l'opérateur $*$. On a donc une décomposition

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-$$

où $\mathcal{H}$ est l'espace des 2-formes harmoniques sur X, $\mathcal{H}^+$ est la partie invariante sous $*$, et donc est constituée de formes harmoniques autoduales, et $\mathcal{H}^-$ est la partie antiinvariante sous $*$, et donc est constituée de formes harmoniques antiautoduales.

Inversement, si α est fermée et antiautoduale, elle satisfait $*\alpha = -\alpha$ et donc $d(*\alpha) = 0$. Donc elle est harmonique. De même pour les formes fermées antiautoduales. Rappelons par ailleurs le théorème de Hodge :

Théorème 1.5 *L'application $\mathcal{H} \to H^2(X, \mathbb{R})$, qui à une forme harmonique (donc fermée) associe sa classe de cohomologie, est un isomorphisme.*

Une propriété intéressante de la décomposition

$$\Omega_X^2 = \Omega_X^{2+} \oplus \Omega_X^{2-}$$

en parties autoduales et antiautoduales est la suivante :

Lemme 1.6 *i) Le produit extérieur $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \in \Omega_{X,x}^{2+}$, $\beta \in \Omega_{X,x}^{2-}$ est nul.*

ii) Pour α, $\beta \in \Omega_{X,x}^{2+}$, on a

$$\alpha \wedge \beta = (\alpha, \beta)Vol.$$

iii) Pour α, $\beta \in \Omega_{X,x}^{2-}$ on a

$$\alpha \wedge \beta = -(\alpha, \beta)Vol.$$

Démonstration. En effet, comme l'opérateur ponctuel $*$ est autoadjoint pour la métrique ponctuelle, $\Omega_{X,x}^{2+}$ et $\Omega_{X,x}^{2-}$ sont orthogonaux pour la métrique ponctuelle. Or la métrique ponctuelle satisfait l'égalité :

$$(\alpha, \beta)Vol = \alpha \wedge *\beta.$$

Le premier énoncé en résulte immédiatement.

Pour le second, si α, $\beta \in \Omega_{X,x}^{2+}$, on a $*\beta = \beta$ et donc

$$(\alpha, \beta)Vol = \alpha \wedge *\beta = \alpha \wedge \beta.$$

De même pour le dernier énoncé. ∎

1.1.3 Cas kählérien

On suppose dans ce paragraphe que X est une variété complexe de dimension 2, et que la métrique est kählérienne (cf [25], [28]). On notera $\omega \in A_X^2$ la forme de Kähler. On regarde l'opérateur de Hodge étendu $\mathbb{C}$-linéairement à $\bigwedge^2 \Omega_{X,\mathbb{C}}$. Notons que la structure complexe décompose $\Omega_{X,\mathbb{C}}$ en

$$\Omega_{X,\mathbb{C}} = \Omega_X^{1,0} \oplus \Omega_X^{0,1},$$

où le second espace est conjugué complexe du premier (qui est le fibré des formes à valeurs complexes $\mathbb{C}$-linéaires sur $T_{X,\mathbb{R}}$ muni de sa structure presque complexe), et donc $\bigwedge^2 \Omega_{X,\mathbb{C}}$ en

$$\bigwedge^2 \Omega_{X,\mathbb{C}} = \Omega_X^{2,0} \oplus \Omega_X^{1,1} \oplus \Omega_X^{0,2},$$

où $\Omega_X^{2,0} = \bigwedge^2 \Omega_X^{1,0}$ est de rang 1 sur $\mathbb{C}$, de même pour son conjugué complexe $\Omega_X^{0,2}$, et

$$\Omega_X^{1,1} = \Omega_X^{1,0} \otimes \Omega_X^{0,1}$$

est de rang 4 sur $\mathbb{C}$. Les sections de $\Omega_X^{1,1}$ sont dites formes de type $(1,1)$. La forme de Kähler est de type $(1,1)$ par exemple. On a alors le résultat suivant :

Proposition 1.7 *Les* 2*-formes antiautoduales complexes sont les formes primitives de type* $(1,1)$*. Les* 2*-formes autoduales sont les combinaisons de formes de type* $(2,0)$*,* $(0,2)$ *et* ω*.*

On rappelle ici qu'une forme primitive de degré 2 (sur une variété kählérienne de dimension n) est une forme α qui satisfait

$$\alpha \wedge \omega^{n-1} = 0.$$

Démonstration. La forme ω est clairement autoduale car dans des coordonnées holomorphes locales centrées en un point x, elle s'écrit au point x :

$$\omega = \frac{\iota}{2} \sum_i dz_i \wedge d\overline{z}_i,$$

c'est-à-dire dans les coordonnées réelles $x_i = \mathcal{R}e\, z_i$, $y_i = \mathcal{I}m\, z_j$,

$$\omega = \sum_i dx_i \wedge dy_i.$$

Or la base dx_1, dy_1, dx_2, dy_2 de $\Omega_{X,x,\mathbb{R}}$ est orthonormée directe, et donc on a $*(dx_i \wedge dy_i) = dx_j \wedge dy_j$, $\{i,j\} = \{1,2\}$.

Pour le cas des formes de type $(2,0)$ ou $(0,2)$, on se contentera du cas où $n = 2$. Il suffit alors de considérer le cas où $\alpha = dz_1 \wedge dz_2$, (le cas conjugué de type $(0,2)$ en résultant par conjugaison), soit encore dans les coordonnées réelles introduites ci-dessus

$$\alpha = dx_1 \wedge dx_2 - dy_1 \wedge dy_2 + \iota(dx_1 \wedge dy_2 + dy_1 \wedge dx_2).$$

Alors, en examinant les orientations de chaque terme, on obtient

$$*\alpha = -dy_1 \wedge dy_2 + dx_1 \wedge dx_2 + \iota(-dx_2 \wedge dy_1 + dx_1 \wedge dy_2) = \alpha.$$

Pour les autres assertions, elles résultent du théorème 1.8 suivant, si on note que $\bigwedge^2 \Omega_X$ est la somme directe de la droite engendrée par ω et de l'espace des formes primitives, qui elles-mêmes se décomposent en formes de type $(2,0$ ou $(0,2)$ arbitraires, et formes de type $(1,1)$ primitives. En effet, lorsque $(p,q) = (1,1)$, on a $k = 2$ et donc la formule devient

$$*\alpha = -\frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \wedge \alpha$$

pour α primitive de type $(1,1)$ et donc pour $n = 2$, on obtient finalement :

$$*\alpha = -\alpha$$

pour α primitive de type $(1,1)$.

Elles se démontrent de façon plus directe en rappelant tout d'abord que les rangs de Ω_X^{2+} et de Ω_X^{2-} sont égaux à 3. Par ailleurs, si on applique le lemme 1.6, on voit que

$$\Omega_X^{2-} = \{\alpha \in \Omega_X^2,\ \alpha \wedge \beta = 0,\ \forall \beta \in \Omega_X^{2+}.$$

Comme on a déjà vu que $\Omega_{X,\mathbb{C}}^{2+}$ est engendré par $\Omega_X^{2,0}$, $\Omega_X^{0,2}$ et $\omega\mathbb{C}$, et comme par définition de $\Omega_{X,prim}^{1,1}$, on a pour $\alpha \in \Omega_{X,prim}^{1,1}$,

$$\alpha \wedge \beta = 0,\ \beta \in \Omega_X^{2,0},\ \Omega_X^{0,2},\ \omega\mathbb{C},$$

on conclut que

$$\Omega_{X,prim}^{1,1} = \Omega_{X,\mathbb{C}}^{2-}.$$

■

Théorème 1.8 *Soit α une forme de type (p,q) sur X, primitive, avec $p+q=k \leq n = dim\, X$. Alors on a*

$$*\alpha = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\, i^{p-q} \frac{\omega^{n-k}}{(n-k)!} \wedge \alpha.$$

1.2 Connexions antiautoduales

1.2.1 Connexions, courbure, et classes de Chern

On rappelle (cf [4]) qu'une connexion ∇ sur un fibré vectoriel différentiable réel E de rang k et de classe C^∞ est un opérateur permettant de « dériver les sections de E », c'est-à-dire une application $\mathbb{R}$-linéaire

$$\nabla : \mathcal{C}^\infty(E) \to A^1(E),$$

où $A^1(E)$ est l'espace des sections de classe C^∞ du fibré $\Omega_{X,\mathbb{R}} \otimes E = Hom_{\mathbb{R}}(T_X, E) = Hom_{\mathbb{C}}(T_{X,\mathbb{C}}, E)$, satisfaisant la règle de Leibniz

$$\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f\nabla\sigma.$$

On dira qu'une connexion ∇ sur E est compatible avec h si pour σ, τ deux sections de E, on a

$$d(h(\sigma,\tau)) = h(\nabla\sigma,\tau) + h(\sigma,\nabla\tau), \tag{1.2.2}$$

où comme plus haut le terme de droite est une 1-forme. (Il faut faire attention néanmoins au caractère sesquilinéaire de h qui mène à définir $h(e, \alpha \otimes f) = \overline{\alpha} h(e,f)$ pour $e, f \in E_x$ et $\alpha \in \Omega_{X,x}$.) La première classe de Chern $c_1(L) \in H^2(X,\mathbb{Z})$ d'un fibré en droites complexes L est définie comme l'image de $L \in H^1(X, (\mathcal{C}_X^\infty)^*)$ dans $H^2(X,\mathbb{Z})$ par la flèche de connexion associée à la suite exacte exponentielle :

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{C}_X^\infty \stackrel{exp(2\imath\pi)}{\to} (\mathcal{C}_X^\infty)^* \to 0.$$

Ici $(\mathcal{C}_X^\infty)^*$ est le faisceau des fonctions sur X de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ et $\mathcal{C}_X^\infty$ est le faisceau des fonctions sur X de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

La théorie de Chern-Weil fournit des représentants en cohomologie de de Rham pour les classes de Chern $c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{R})$ d'un fibré vectoriel complexe sur X. Ici on utilise le fait que la cohomologie de Betti à coefficients dans $\mathbb{R}$ peut se calculer à l'aide des formes différentielles (cf [25]) :

$$H^{2k}(X, \mathbb{R}) = \frac{2k-\text{ formes fermées réelles sur } X}{2k-\text{ formes exactes réelles sur } X}.$$

On choisit une connexion complexe ∇ sur E compatible avec une métrique hermitienne h sur E. ∇ s'étend par la règle de Leibniz et fournit encore un opérateur différentiel

$$\nabla : \mathcal{A}_X^1(E) \to \mathcal{A}_X^2(E),$$

où on note $\mathcal{A}_X^i(E)$ le faisceau des i-formes différentielles sur X à coefficients dans E. On a le lemme suivant

Lemme 1.9 *L'opérateur différentiel $\nabla \circ \nabla := R_\nabla : E \to \mathcal{A}_X^2(E)$ est d'ordre 0, c'est-à-dire est une section de $\mathcal{A}_X^2(End\, E)$. De plus cet opérateur est antihermitien, c'est-à-dire satisfait l'équation*

$$^t(R_\nabla) = -R_\nabla,$$

où la transposition est relative à la métrique hermitienne h (et en particulier est une opération $\mathbb{C}$-antilinéaire : pour un opérateur dont les coefficients sont des formes, on étend alors la transposition par $\mathbb{C}$-antilinéarité).

Démonstration. Pour le premier point, il suffit de voir que $R_\nabla(fe) = f\nabla(E)$, où $f \in C^\infty(X)$, et e est une section de E. Or $\nabla(fe) = f\nabla e + dfe$, d'où

$$R_\nabla(fe) = \nabla(f\nabla e + dfe) = df \wedge \nabla e + fR_\nabla e - df \wedge \nabla e = fR_\nabla(e),$$

où l'on a utilisé la formule de Leibniz et $d(df) = 0$.

Pour le second point, il suffit de noter que $dh(e, e') = h(e, \nabla e') + h(\nabla e, e')$. Il vient donc en différentiant une seconde fois :

$$\begin{aligned} 0 = d(h(e, \nabla e') + h(\nabla e, e')) &= h(\nabla e, \nabla e') + h(e, R_\nabla e') + h(R_\nabla e, e') - h(\nabla e, \nabla e') \\ &= h(e, R_\nabla e') + h(R_\nabla e, e'). \end{aligned}$$

(Ici il y a une petite subtilité de signe dans le dernier terme du développement de Leiniz de $d(h(\nabla e, e'))$ due au fait que le produit des 1-formes est anticommutatif). ■

Soit maintenant σ_i le polynôme de degré i en les coefficients d'une matrice de taille (r, r), invariant sous la conjugaison, et associant à une matrice la i-ème fonction symétrique de ses racines (en particulier σ_1 est la trace). Un tel polynôme associe plus généralement à tout endomorphisme ϕ d'un espace vectoriel de rang r un scalaire $\sigma_i(\phi)$. Nous pouvons donc définir, en utilisant le produit (commutatif) des formes différentiel de degré pair sur X, la $2i$-forme $\sigma_i(\frac{\iota}{2\pi}R_\nabla) \in A_X^{2i}$.

Lemme 1.10 *Cette forme est fermée et à coefficients dans* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Pour $i = 1$, c'est un calcul direct : en effet dans une trivialisation locale, la connexion s'écrit

$$\nabla = d + \eta$$

où η est une matrice dont les coefficients sont des 1-formes et d est une somme de copies de l'opérateur de différentiation extérieure agissant sur les fonctions. On trouve alors que

$$R_\nabla = d\eta + \eta \wedge \eta.$$

Il est clair que les coefficients de la matrice $d\eta$ sont des 2-formes fermées. Par ailleurs la trace de $\eta \wedge \eta$ est nulle pour des raisons de symétrie : $Tr\, AB = Tr\, BA$ si A et B sont des matrices à coefficients scalaires, tandis que le produit extérieur des formes est antisymétrique : d'où $Tr\, A \wedge B = -Tr\, B \wedge A$ si A et B sont des matrices à coefficients dans les 1-formes, et donc $Tr\, \eta \wedge \eta = 0$.

Le cas général se montre de la même manière, par récurrence sur i et en regardant plutôt les $2i$-formes

$$Tr\, (R_\nabla)^i$$

qui sont des polynômes en les $\sigma_j(R_\nabla)$, $j \leq i$, à coefficients constants. ■

La théorie de Chern-Weil dit maintenant :

Théorème 1.11 *La classe de cohomologie de de Rham de la forme* $\sigma_i(\frac{\iota}{2\pi}R_\nabla) \in A_X^{2i}$ *est indépendante du choix de la connexion* ∇. *Cette forme est un représentant de la classe de Chern* $c_i(E)$.

Démonstration. Une fois qu'on sait que la classe est indépendante du choix de la connexion, il suffit, pour vérifier qu'elle représente $c_i(E)$, de montrer que pour un fibré en droites L, la forme $\sigma_1(\frac{\iota}{2\pi}R_\nabla)$ représente la classe $c_1(L)$, puis de montrer que les classes des formes fermées $\sigma_i(\frac{\iota}{2\pi}R_\nabla) \in A_X^{2i}$ satisfont la fonctorialité par image inverse et la formule de Whitney. Or ces deux axiomes sont très faciles à vérifier car si on a une connexion ∇ sur le fibré vectoriel complexe E sur X, et une application différentiable $\phi : X \to Y$, on a une connexion induite sur l'image inverse ϕ^*E pour laquelle les formes ci-dessus ne sont autres que les $\phi^*(\sigma_i(\frac{\iota}{2\pi}R_\nabla))$.

Pour ce qui est de la formule de Whitney, on observe qu'en géométrie différentielle, toute suite exacte $0 \to E \to F \to G \to 0$ de fibrés vectoriels complexes est scindée, comme on le voit en mettant une métrique hermitienne sur F. Soit donc $F = E \oplus G$, avec $r = rang\, F$, $r_E = rang\, E$, $r_G = rang\, G$, et soient ∇_E, ∇_G des connexions complexes sur E et G. On met sur F la connexion ∇ qui est la somme directe des connexions ∇_E et ∇_G. Il est immédiat de vérifier que pour cette connexion ∇, on a l'égalité des *formes différentielles* sur Y :

$$1 + \sigma_1(\frac{\iota}{2\pi}R_\nabla) \oplus \ldots \oplus \sigma_r(\frac{\iota}{2\pi}R_\nabla)$$

$$= (1 + \sigma_1(\frac{\iota}{2\pi}R_{\nabla_E}) \oplus \ldots \oplus \sigma_{r_E}(\frac{\iota}{2\pi}R_{\nabla_E}))(1 + \sigma_1(\frac{\iota}{2\pi}R_{\nabla_G}) \oplus \ldots \oplus \sigma_{r_G}(\frac{\iota}{2\pi}R_{\nabla_G})),$$

ce qui montre a fortiori la formule de Whitney au niveau des classes.

Il reste à voir l'indépendance du choix de la connexion, et le cas des fibrés en droites.

L'indépendance du choix de la connexion est évidente. En effet, si ∇_1 et ∇_2 sont deux connexions sur E, on peut construire une connexion ∇ sur le fibré pr_1^*E sur $X\times[0,1]$, qui se restreint à ∇_1 sur $X\times\{0\}$, et à ∇_2 sur $X\times\{1\}$. Les formes $\sigma_i(\frac{\iota}{2\pi}R_\nabla)$ étant fermées ont des classes de cohomologie sur $X\times[0,1]$, dont les restrictions à $X\times\{t\}$ sont constantes puisque

$$H^*(X,\mathbb{R}) \overset{pr_1^*}{\cong} H^*(X\times[0,1],\mathbb{R}).$$

Le cas des fibrés en droites se traite de la façon suivante : soit $\mathcal{U}=(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X par des ouverts sur lesquels L est trivialisé par des sections de classe C^∞ partout non nulles τ_i. On peut supposer que sur les intersections $U_i\cap U_j$, on a $\tau_i=g_{ij}\tau_j$, avec $g_{ij}=exp(2\iota\pi f_{ij})$, où les f_{ij} sont des fonctions complexes de classe C^∞. Notons qu'on a $g_{ij}g_{jk}g_{ki}=1$ sur U_{ijk} et donc $f_{ij}+f_{jk}+f_{ki}\in\mathbb{Z}$ sur U_{ijk} (on suppose U_{ijk} connexe). Le 2-cocycle de Čech

$$a_{ijk}=f_{ij}+f_{jk}+f_{ki} \tag{1.2.3}$$

à coefficients entiers est alors un représentant de la classe $c_1(L)$ définie par la suite exacte exponentielle.

Une connexion sur $L_{|U_i}$ est déterminée par une 1-forme α_i sur U_i telle que

$$\nabla\tau_i=\alpha_i\tau_i.$$

La courbure R_∇ de cette connexion est alors donnée par

$$R_\nabla(\sigma_i)=\nabla^2(\sigma_i)=d\alpha_i\sigma_i,$$

et donc

$$\sigma_1(\frac{\iota}{2\pi}R_\nabla)_{|U_i}=-\frac{d\alpha_i}{2\iota\pi}. \tag{1.2.4}$$

Les 1-formes ne sont pas choisies de façon indépendante, car elles doivent déterminer la même connexion sur $U_i\cap U_j$. Rappelant que $\tau_i=g_{ij}\tau_j$ sur U_{ij}, où les g_{ij} sont de classe C^∞ inversibles, on doit avoir

$$\nabla\tau_i=\alpha_i\tau_i=\alpha_i g_{ij}\tau_j$$

$$=\nabla g_{ij}\tau_j=g_{ij}\nabla\tau_j+dg_{ij}\tau_j=(\alpha_j g_{ij}+dg_{ij})\tau_j.$$

D'où la relation :

$$\alpha_j-\alpha_i=\frac{dg_{ij}}{g_{ij}}=\frac{1}{2\iota\pi}df_{ij}. \tag{1.2.5}$$

L'égalité dans $H^2(X,\mathbb{R})$ de la classe $c_1(L)$, représentée par le cocycle de (a_{ijk}) et de la classe de la 2-forme fermée $\sigma_1(\frac{\iota}{2\pi}R_\nabla)$ résulte alors de (1.2.3), (1.2.4) et (1.2.5). Il faut en effet voir ces égalités comme des égalités de classes de cohomologie dans le complexe simple associé au complexe double Čech-de Rham de X. ∎

1.2.2 Connexions antiautoduales

Soit X une variété riemannienne compacte connexe orientée de dimension 4, et soit E un fibré vectoriel complexe de rang 2 et tel que $c_1(E) = 0$ dans $H^2(X, \mathbb{Z})$. Cette dernière propriété se voit au fait qu'on peut choisir les matrices de transition pour E dans le groupe spécial unitaire $SU(2)$. Une telle réduction fournit un isomorphisme naturel $det\, E \cong T$, où T est le fibré trivial hermitien de rang 1 sur X. Notons le fait suivant :

Théorème 1.12 *Si X est simplement connexe, un tel fibré est déterminé à isomorphisme (différentiable) près par sa seconde classe de Chern $c = c_2(E) \in H^4(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.*

Démonstration. Comme X est simplement connexe, $X \setminus \{x\}$ se rétracte sur un bouquet de sphères. On peut donc écrire X comme l'union d'une boule B^4 et de $X' =: \overline{X \setminus B^4}$, l'intersection étant S^3. Or sur B^4, E est trivial comme fibré spécial unitaire, et de même sur X' qui a le type d'homotopie d'un bouquet de sphères. Le fibré E est donc déterminé par l'application de recollement

$$S^3 \to SU(2)$$

comparant les deux trivialisations.

En fait $SU(2)$ est difféomorphe à S^3 : Le groupe des quaternions de norme 1 agit par multiplication à gauche sur l'espace Q des quaternions et cette action commute avec la multiplication à droite par n'importe quel quaternion. Choisissant un quaternion de carré -1, l'espace des quaternions est muni par multiplication à droite d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de rang 2, pour laquelle la multiplication à gauche est $\mathbb{C}$-linéaire. La multiplication à gauche fournit donc un morphisme

$$S^3 \to U(2),$$

puisqu'elle préserve également la norme quaternionique. On vérifie qu'elle est en fait à valeurs dans $SU(2)$. Ce morphisme est évidemment injectif, et comme les deux groupes sont connexes et de même dimension, c'est un isomorphisme.

Les classes d'isomorphisme de fibré E sont ainsi en bijection avec les classes d'homotopie d'applications continues $S^3 \to SU(2) \cong S^3$. Or cet ensemble est isomorphe à $\mathbb{Z}$, l'application étant donnée par le degré. Il reste seulement à vérifier que ce degré n'est autre que la seconde classe de Chern $c_2(E)$. ∎

Soit $\mathcal{A}$ l'espace des connexions sur E compatibles avec la métrique h et induisant la connexion triviale sur $det\, E$. Cet espace est un espace affine. En effet, si ∇_0 et ∇_1 sont des connexions sur E, $t\nabla_0 + (1-t)\nabla_1$ est encore une connexion. Si ∇_0 et ∇_1 sont compatibles avec h, ∇ l'est aussi vu que les conditions de compatibilité sont linéaires en ∇. Notons que l'espace vectoriel associé à l'espace affine $\mathcal{A}$ n'est autre que l'espace des sections du fibré des 1-formes à valeurs dans l'algèbre de Lie $su(E)$ du groupe $\mathcal{G}$ des automorphismes différentiables spécial-unitaires de E. En effet, la différence de deux connexions sur E est une section du fibré des 1-formes à valeurs dans $End\, E$, et les conditions de compatibilité avec h et avec la trivialisation de

$det\,E$ entraînent que la différence est en fait une 1-forme à valeurs dans le fibré des endomorphismes antihermitiens de trace nulle de E, c'est-à-dire $su(E)$.

Pour une telle connexion ∇ sur E, considérons $R_\nabla \in A^2_X(su(E))$ (cf lemme 1.9). On peut voir R_∇ comme un endomorphisme de E dont les coefficients sont des 2-formes sur X. Or on a la décomposition de Ω^2_X en 2-formes autoduales et 2-formes antiautoduales donnée par le lemme 1.3. Suivant cette décomposition, on a donc :

$$R_\nabla = R^+_\nabla + R^-_\nabla.$$

Définition 1.13 *La connexion ∇ est antiautoduale si $R^+_\nabla = 0$.*

1.2.3 Cas kählérien

Rappelons qu'on a montré dans la proposition 1.7 qu'une forme antiautoduale sur une variété kählérienne de dimension 2 (munie de son orientation complexe) est une forme primitive de type $(1,1)$. Dans le cas kählérien, une connexion antiautoduale sur E satisfait donc la propriété

$$R_\nabla \in A^{1,1}(su(E)),\ \omega \wedge R_\nabla = 0.$$

Notons maintenant le théorème suivant :

Théorème 1.14 *Soit X une variété complexe, E un fibré vectoriel complexe différentiable sur X et ∇ une connexion complexe sur E. Alors si R_∇ est de type $(1,1)$, il existe une unique structure de fibré holomorphe sur E, pour laquelle*

$$\nabla^{0,1} = \overline{\partial}_E.$$

Ici $\nabla^{0,1}$ est la composition de $\nabla : E \to E \otimes \Omega_{X,\mathbb{C}}$ et de la projection $E \otimes \Omega_{X,\mathbb{C}} \to E \otimes \Omega^{0,1}_X$.

Démonstration. C'est une conséquence du théorème d'intégrabilité de Newlander-Nirenberg caractérisant les structures presque complexes qui proviennent d'une structure complexe. En effet, la connexion ∇ fournit de façon équivalente une décomposition de l'espace tangent de E :

$$T_{E,e} = T_{E,e,vert} \oplus T_{E,e,hor},$$

où $T_{E,e,vert}$ est l'espace tangent aux fibres de $\pi : E \to X$, et $T_{E,e,hor}$ est isomorphe à $\pi^* T_X$. Cet espace tangent horizontal est simplement engendré par les vecteurs

$$d_u(\sigma) - \nabla_u(\sigma),\ u \in T_{X,x}$$

où σ est une section différentiable de E définie au voisinage de $x = \pi(e)$ telle que $\sigma(x) = e$ et $d\sigma : T_{X,x} \to T_{E,e}$ est la différentielle de σ.

Cette décomposition fournit alors une structure presque complexe sur T_E, qui s'identifie à la structure naturelle sur la partie verticale, et à celle de T_X sur la partie horizontale. On note alors que le fait que R_∇ n'ait pas de partie de type $(0,2)$ équivaut au fait que cette structure presque complexe sur E satisfasse la condition d'intégrabilité de Newlander-Nirenberg. (En effet la courbure d'une connexion n'est essentiellement rien d'autre que la courbure de la distribution horizontale ci-dessus.)

Ainsi, l'annulation de $R_{\nabla}^{0,2}$ fournit une structure de variété complexe sur E pour laquelle, par définition de la structure presque complexe correspondante, $\pi : E \to X$ est holomorphe, et qui coïncide avec la structure complexe naturelle des fibres de π, qui sont des espaces vectoriels complexes. Pour voir que E est ainsi muni d'une structure de fibré vectoriel holomorphe, il suffit de voir que la somme et la mutiplication par les scalaires sont holomorphes, ce qui est clair du fait du caractère $\mathbb{C}$-linéaire de la connexion.

Enfin, il est clair par construction que $\nabla^{0,1}$ coïncide avec l'opérateur $\overline{\partial}$ du fibré holomorphe E.

■

Les connexions qu'on obtient dans le cas kählérien sont donc en fait des connexions de Chern d'Hermite-Einstein avec $\mu = 0$ (cf [28]). En effet leur partie de type $(0,1)$ est l'opérateur $\overline{\partial}$ d'un fibré holomorphe. De plus elles sont compatibles avec une métrique hermitienne h et sont donc la connexion de Chern de ce fibré holomorphe muni d'une métrique. Enfin, l'équation

$$\omega \wedge R_{\nabla} = 0$$

est exactement l'équation d'Hermite-Einstein (sur une base de dimension 2) avec coefficient $\mu = 0$, condition qui vient du fait que les fibrés considérés sont à première classe de Chern nulle.

1.3 Théorie de jauge

1.3.1 Fonctionnelle de Yang-Mills

A partir de maintenant, X sera non seulement riemannienne orientée de dimension 4 mais aussi compacte. Le fibré E étant comme ci-dessus, la fonctionnelle de Yang-Mills, définie sur l'espace $\mathcal{A}$ des connexions sur E n'est rien d'autre que la norme L^2 de l'opérateur R_{∇}, calculée par intégration à l'aide des métriques ponctuelles induites sur $End\, E$ et sur l'espace des 2-formes sur X. Rappelant que

$$(\alpha, \beta)_{L^2} = \int_X \alpha \wedge *(\overline{\beta})$$

pour des formes à coefficients complexes sur X, et que d'autre part, sur les opérateurs antihermitiens on a $\mid R \mid^2 = -Tr\, R^2$, on obtient la formule suivante :

$$YM(\nabla) = -\int_X Tr\, R_{\nabla} \cdot *R_{\nabla}, \tag{1.3.6}$$

où la multiplication $\cdot$ utilisée ici est la multiplication des matrices dont les coefficients sont des formes différentielles, induite par le produit extérieur sur les formes. Ecrivons

$$R_{\nabla} = R_{\nabla}^{+} + R_{\nabla}^{-}.$$

Alors
$$*R_\nabla = R_\nabla^+ - R_\nabla^-.$$
On a vu dans le lemme 1.6 que le produit extérieur d'une forme autoduale et d'une forme antiautoduale est nul. On obtient donc :
$$\begin{aligned} YM(\nabla) &= -\int_X Tr\,(R_\nabla^+ + R_\nabla^-)(R_\nabla^+ - R_\nabla^- \\ &= -\int_X Tr\,(R_\nabla^+)^2 + \int_X Tr\,(R_\nabla^-)^2. \end{aligned}$$
Rappelons par ailleurs que $Tr\,\frac{-1}{4\pi^2}R_\nabla^2$ représente la classe $-2c_2(E)$ comme on le voit en se souvenant que $c_1(E)=0$ et que $c_2(E)$ est représentée par la seconde fonction symétrique des valeurs propres appliquée à $\frac{\iota}{2\pi}R_\nabla$.

En intégrant sur X, on obtient donc :
$$\begin{aligned} -\int_X Tr\,R_\nabla^2 &= -\int_X Tr\,(R_\nabla^+)^2 - \int_X Tr\,(R_\nabla^-)^2 \\ &= -YM(\nabla) - 2\int_X Tr\,(R_\nabla^+)^2 = -8\pi^2 c_2(E). \end{aligned}$$
Or pour la même raison que précédemment, on a
$$-\int_X Tr\,(R_\nabla^+)^2 = \mid R_\nabla^+ \mid_{L^2}$$
et donc :
$$YM(\nabla) = 8\pi^2 c_2(E) + 2 \mid R_\nabla^+ \mid_{L^2}.$$

On conclut donc :

Théorème 1.15 *Les connexions antiautoduales sont les minima absolus de la fonctionnelle de Yang-Mills.*

1.3.2 Action du groupe de jauge

Soit $\mathcal{G}$ le groupe des automorphismes spécial unitaires de E, c'est-à-dire le groupe des sections du fibré $SU(E,h)$. $\mathcal{G}$ agit sur $\mathcal{A}$, l'action de $g \in \mathcal{G}$ sur une connexion $\nabla \in \mathcal{A}$ étant donnée par $g \cdot \nabla = g^{-1} \circ \nabla \circ g$. Notons que le centre $\{\pm Id_E\}$ de $\mathcal{G}$ agit trivialement sur $\mathcal{A}$. Notons également le lemme suivant :

Lemme 1.16 *Le quotient de $SU(2)$ par son centre $\{\pm Id\}$ est isomorphe à $SO(3)$.*

Démonstration. On a déjà vu qu'on a un isomorphisme
$$S^3 \to U(2)$$
donné par la multiplication quaternionique par le groupe des quaternions de norme 1. Par ailleurs ce groupe agit également par conjugaison sur l'espace $Q_{pur} \cong \mathbb{R}^3$ des quaternions purs. Cette action préservant la norme quaternionique est à valeurs dans $O(3)$. Le noyau de cette action est le centre de Q, ou plus précisément la partie

du centre qui est de norme 1, c'est-à-dire $\{\pm 1\}$. Ceci fournit un morphisme injectif de groupes

$$SU(2)/\{\pm 1\} \to SO(3)$$

et comme le terme de droite est connexe et que les deux groupes sont de la même dimension, c'est un isomorphisme.

■

On a maintenant une action effective de $\mathcal{G}/\pm Id_E$ sur $\mathcal{A}$. Les points de $\mathcal{A}$ ayant un groupe d'isotropie non trivial sont décrits dans le lemme suivant :

Lemme 1.17 *Supposons X simplement connexe. Soit $\nabla \in \mathcal{A}$ une connexion compatible avec h, et soit $g \in \mathcal{G}$, $g \neq \pm Id_E$ un automorphisme fixant ∇. Alors la connexion ∇ est réductible ou le fibré E est trivial. (Ce dernier cas n'apparaît pas dès que $c_2(E) \neq 0$.) Dans le premier cas, le groupe des automorphismes préservant ∇ est le groupe $U(1)$ naturellement contenu dans $SU(2)$.*

Ici par réductible, on veut dire que E est la somme directe de deux sous-fibrés en droites complexes stables sous ∇.

Démonstration. En effet, la condition sur g peut se voir en disant que g est un automorphisme de E préservant la métrique h et la connexion ∇. Soit λ une valeur propre de g en un point $x \in X$. Alors $g - \lambda Id_E$ est aussi parallèle pour ∇ et comme son déterminant s'annule en un point, il s'annule partout. Or g a deux valeurs propres distinctes λ_1, λ_2, puisque $g \neq \pm Id_E$. Alors E est la somme directe orthogonale des deux sous-fibrés parallèles $L_1 := Ker\, g - \lambda_1 Id_E$, $L_2 := Ker\, g - \lambda_1 Id_E$, nécessairement orthogonaux.

Supposons que le groupe des automorphismes de (E, ∇) soit plus gros que le groupe $U(1)$, où $\lambda \in U(1) \subset \mathbb{C}^*$ agit par λ sur L_1, λ^{-1} sur L_2. Alors il existe un isomorphisme entre les deux fibrés avec connexion (L_1, ∇) et (L_2, ∇). Comme par ailleurs $L_2 \cong L_1^{-1}$ et X est simplement connexe, on trouve que L_1 et L_2 sont triviaux et donc que E est le fibré trivial.

■

1.3.3 Connexions réductibles

Les points à groupe d'isotropie non trivial sont une source de singularités pour le quotient, et il est intéressant de décider si dans l'espace des connexions antiautoduales, de tels points existent ou non. On a le résultat suivant :

Proposition 1.18 *Les connexions antiautoduales réductibles sont en bijection avec les classes de cohomologie entières $\alpha \in H^2(X, \mathbb{Z})$ définies au signe près telles que α admet un représentant harmonique antiautodual et $\alpha^2 = -c_2(E)$.*

Démonstration. Soit $E = L_1 \oplus L_2$ une décomposition orthogonale de E en somme de deux fibrés en droites complexes, et soit ∇ une connexion hermitienne antiautoduale sur E, préservant L_1 et L_2. Comme $det\, E$ est trivial, on a $L_2 \cong L_1^{-1}$ et donc, notant $\alpha = c_1(L_1) \in H^2(X, \mathbb{Z})$, on obtient

$$-\alpha^2 = c_2(E).$$

D'autre part, soit R_{∇_1} la courbure de la restriction ∇_1 de ∇ à L_1. C'est une 1-forme β et

$$\tilde{\alpha} := \frac{\iota}{2\pi}\beta$$

représente la classe $c_1(L_1)$. Comme ∇ est antiautoduale, ∇_1 l'est aussi, et donc $\tilde{\alpha}$ est antiautoduale. Comme $d\tilde{\alpha} = 0$ et $*\tilde{\alpha} = -\tilde{\alpha}$, $\tilde{\alpha}$ est harmonique. Noter que la classe α n'est en fait définie qu'au signe près, puisque L_1 et L_1^{-1} sont interchangeables dans le raisonnement ci-dessus.

Inversement, si α est une classe entière de degré 2 sur X, il existe d'après la suite exacte exponentielle un fibré en droites complexes L_1 tel que $\alpha = c_1(L_1)$. Si $\alpha^2 = -c_2(E)$, pour tout choix de métrique hermitienne h sur L_1, le fibré hermitien $L_1 \oplus L_1^{-1}$ est à déterminant trivial et satisfait $c_2 = c_2(E)$. Il est donc isomorphe comme fibré spécial unitaire à E.

Si la classe α admet un représentant $\tilde{\alpha}$ qui est une forme antiautoduale, il existe une connexion compatible avec h sur L_1 dont la forme de courbure vaut $\frac{2\pi}{\iota}\tilde{\alpha}$. En effet, choisissons tout d'abord une connexion ∇ hermitienne sur L_1, de forme de courbure β. Alors la forme réelle fermée $\frac{\iota}{2\pi}\beta$ est cohomologue à la forme $\tilde{\alpha}$:

$$\tilde{\alpha} = \frac{\iota}{2\pi}\beta + d\eta.$$

La connexion

$$\nabla' = \nabla + \frac{2\pi}{\iota}\eta$$

est alors également hermitienne et de forme de courbure $\frac{2\pi}{\iota}\tilde{\alpha}$. Ceci permet donc de construire une connexion hermitienne antiautoduale sur $L_1 \oplus L_1^{-1}$, somme directe des deux connexions hermitiennes duales l'une de l'autre sur L_1 et L_1^{-1}. ■

On va montrer le résultat suivant :

Théorème 1.19 *Si la métrique g est choisie génériquement et si $b_2^+ > 0$, il n'existe aucune classe entière non nulle $\alpha \in H^2(X, \mathbb{Z})$ représentée par une forme harmonique antiautoduale $\tilde{\alpha}$.*

Ici $b_2^+(X)$ est le nombre de signes positifs pour la forme d'intersection sur $H^2(X, \mathbb{R})$ ou encore la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel de $H^2(X, \mathbb{R})$ sur lequel la forme d'intersection est définie positive.

Corollaire 1.20 *Si X est simplement connexe et satisfait $b_2^+(X) > 0$, et si $c_2(E) > 0$, pour une métrique g générique sur X, il n'existe pas de connexion hermitienne antiautoduale réductible sur E.*

Remarque 1.21 Si X est kählérienne munie de l'orientation complexe, alors $b_2^+ > 0$ car la classe de Kähler $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{R})$ satisfait $\omega^2 > 0$.

Démonstration du théorème 1.19. On va montrer le théorème 1.19 par un argument infinitésimal. Notons que pour chaque métrique g, on a une décomposition de $H^2(X,\mathbb{R}) \cong \mathcal{H}^2_g$ en

$$H^2(X,\mathbb{R}) = \mathcal{H}^+ \oplus \mathcal{H}^-,$$

où $\mathcal{H}_g$ est l'espace des formes harmoniques pour la métrique g et $\mathcal{H}^\pm$ sont ses sous-espaces de formes (anti)-autoduales. L'espace $\mathcal{H}^- \subset H^2(X,\mathbb{R})$ varie de façon différentiable avec g (comme le montre la théorie des opérateurs elliptiques). Ses déformations infinitésimales à l'intérieur de l'espace fixé $H^2(X,\mathbb{R})$ sont exactement décrites par des applications linéaires

$$q : \mathcal{H}^- \to \mathcal{H}^+$$

(cf [25] pour une description de l'espace tangent des grassmanniennes).

Le théorème 1.19 est en fait une conséquence du résultat suivant :

Proposition 1.22 *Soit $0 \neq \alpha \in \mathcal{H}^-$. Alors si $\alpha \neq 0$, l'application*

$$T_g \to \mathcal{H}^+$$

$$h \mapsto q_h(\alpha)$$

est surjective. En particulier, si $\mathcal{H}^+ \neq 0$, il existe une déformation h de g telle que la déformation infinitésimale induite

$$q_h : \mathcal{H}^- \to \mathcal{H}^+$$

satisfasse $q_h(\alpha) \neq 0$.

En effet, l'ensemble des classes α entières et représentées par une forme harmonique antiautoduale est un groupe dénombrable. Par un argument de catégorie, il existe certainement une perturbation infinitésimale h de g telle que $q_h(\alpha) \neq 0$ pour toute classe α non nulle comme ci-dessus. Considérons la famille de métriques $g_t = g + th$, avec t petit. Supposons que pour tout t proche de 0 il existe une classe entière $\alpha_t \in H^2(X,\mathbb{Z})$ représentable par une forme harmonique antiautoduale. Par un argument de dénombrabilité, on voit qu'on peut supposer que $\alpha_t = \alpha$ est indépendante de t. Mais alors α reste dans $\mathcal{H}^-_t$ pour t proche de 0, ce qui entraîne que $q_h(\alpha) = 0$, et contredit le choix de h. ∎

Démonstration de la proposition 1.22. La première remarque à faire est un calcul ponctuel comparant, pour un espace vectoriel réel fixé V orienté de dimension 4, muni d'une métrique g, les déformations infinitésimales h de g et les déformations infinitésimales du sous-espace $\Lambda^- \subset \bigwedge^2 V^*$ constitué des formes antiautoduales. Ces déformations sont décrites par des homomorphismes $r_h : \Lambda^- \to \bigwedge^2 V^*/\Lambda^- = \Lambda^+$.

Lemme 1.23 *L'application*

$$d\mathcal{P} : h \mapsto r_h$$

qui est la différentielle de l'application $\mathcal{P} : g \mapsto \Lambda^- \subset \bigwedge^2 V^*$ à valeurs dans la grassmannienne des sous-espaces de dimension 3 de $\bigwedge^2 V^*$, est surjective, de noyau la droite des déformations conformes de g données par $h = \lambda g$.

Démonstration. Il est clair que la droite λg est contenue dans le noyau car l'opérateur $*$ ne dépend que de la classe conforme de g. Par ailleurs les déformations de g forment un espace de dimension 10, celles de Λ^- forment un espace de dimension 9. Il suffit donc de montrer que $d\mathcal{P}$ est surjective, et comme tout est équivariant sous l'action de $Aut\, V$, il suffit de montrer que $Im\, \mathcal{P}$ contient un ouvert de $Grass(3, \bigwedge^2 V^*)$. Or sur $\bigwedge^2 V^*$, on a la forme d'intersection naturelle

$$(\lambda, \lambda') \mapsto \lambda \wedge \lambda' \in \bigwedge^4 V^*.$$

(On suppose ici choisie une orientation de V.) Notons que d'après le lemme 1.6, Λ^- est l'orthogonal de Λ^+ pour cette forme d'intersection, et il suffit donc de montrer que l'ensemble des Λ^+ contient un ouvert de la grassmannienne.

Soit $\Lambda \subset \bigwedge^2 V^*$ un sous-espace de rang 3 pour lequel cette forme d'intersection est définie positive. L'ensemble de ces Λ est un ouvert de la grassmannienne $Grass(3, \bigwedge^2 V^*)$. Dans l'espace vectoriel complexe de rang 3

$$\Lambda_{\mathbb{C}},$$

les éléments η tels que $\eta^2 = 0$ sont donc tous imaginaires purs. Soit η une telle forme, et soit $\overline{\eta}$ son conjugué complexe. Soit ω un élément engendrant l'orthogonal de $< \eta, \overline{\eta} >$ dans Λ pour la forme d'intersection ci-dessus. Le fait que $\eta^2 = 0$ montre que la 2-forme η sur $V_{\mathbb{C}}$ est décomposée et détermine un sous-espace $V^{1,0} \subset V_{\mathbb{C}}$. Comme $\eta \wedge \overline{\eta} \neq 0$, car sinon l'élément réel $\eta + \overline{\eta} \in \Lambda^+$ serait isotrope pour la forme d'intersection, on trouve que

$$V^{1,0} \oplus V^{0,1} = V_{\mathbb{C}}.$$

On a donc une structure complexe sur V. Comme $\omega \wedge \eta = 0$ et ω est réelle, ω est de type $(1,1)$ sur $V_{\mathbb{C}}$. Comme $\omega^2 > 0$, ω est en fait positive ou négative comme $(1,1)$-forme sur $V_{\mathbb{C}}$ et donc quitte à changer son signe, on peut supposer qu'elle est positive.

On a donc construit une structure complexe sur V et une métrique hermitienne $g - \iota\omega$ sur V muni de cette structure complexe, pour lesquelles ω, $\bigwedge^2 V^{*1,0}$, $\bigwedge^2 V^{*,0,1}$ engendrent $\Lambda_{\mathbb{C}}$. Mais d'après la proposition 1.7, ceci entraîne que Λ est l'espace des formes autoduales pour cette métrique kählérienne.

$\blacksquare$

Revenant à notre démonstration, nous concluons du lemme précédent appliqué à l'espace tangent de X en chaque point que la perturbation h de la métrique fournit un morphisme de fibrés vectoriels

$$m_h : \Omega_X^{2-} \to \Omega_X^{2+}$$

qui peut être choisi arbitrairement.

Soit maintenant $\alpha \in \mathcal{H}^-$. On a le lemme suivant :

Lemme 1.24 *$q_h(\alpha) \in \mathcal{H}^+$ est égale à $-\Pi^+(m_h(\alpha))$, où Π^+ est le projecteur L^2 de l'espace des 2-formes autoduales sur X dans l'espace des 2-formes harmoniques autoduales.*

Ce lemme conclut immédiatement la preuve de la proposition 1.22 ; en effet, puisque m_h peut être choisie arbitrairement, la forme autoduale $m_h(\alpha)$ peut être choisie arbitrairement (pour un choix adéquat de h), là où α n'est pas nulle. La forme α étant harmonique ne s'annule sur aucun ouvert de X. Il en résulte immédiatement qu'on peut choisir $h_1, \dots, h_{b_2^+(X)}$ telles que les $q_{h_i}(\alpha)$ forment une base de $\mathcal{H}^+$. ■

Démonstration du lemme 1.24. Pour calculer l'application q_h, on considère la variation $g_t = g + th$ de la métrique, et on choisit une famille de formes fermées $\alpha_t \in A_X^2$, $d\alpha_t = 0$ telle que $\alpha_0 = \alpha$, et $*_t\alpha_t = -\alpha_t$. On a alors par définition

$$q_h(\alpha) = [\frac{d}{dt}_{|t=0}(\alpha_t)] \text{ } modulo \text{ } \mathcal{H}^-,$$

où le crochet signifie la classe de cohomologie. Comme prendre la classe de cohomologie modulo $\mathcal{H}^-$ équivaut à appliquer Π_+, on a aussi : $q_h(\alpha) = \Pi^+(\frac{d}{dt}_{|t=0}(\alpha_t))$. Dérivons maintenant la condition $*_t\alpha_t = -\alpha_t$. On obtient :

$$\frac{d}{dt}_{|t=0}(*_t)(\alpha) + *(\frac{d}{dt}_{|t=0}\alpha_t) = -\frac{d}{dt}_{|t=0}\alpha_t.$$

On observe maintenant que $\frac{d}{dt}_{|t=0}(*_t) = 2m_h$, ce qui nous donne

$$2m_h(\alpha) = -(Id + *)(\frac{d}{dt}_{|t=0}\alpha_t).$$

Comme $\Pi^+ \circ (Id + *) = 2\Pi^+$, il vient

$$\Pi^+(m_h(\alpha)) = -\Pi^+(\frac{d}{dt}_{|t=0}\alpha_t) = -q_h(\alpha).$$

■

Chapitre 2

Etude de l'espace des connexions antiautoduales

2.1 Etude locale

2.1.1 Complétion de Sobolev

On a vu que l'espace des connexions sur E compatibles avec h et la trivialisation de $det\, E$ est un espace affine. Si on choisit une connexion ∇, toute connexion compatible sur E est de la forme

$$\nabla' = \nabla + \eta,$$

où η est une section de $\Omega_X(su(E))$. Géométriquement, nous nous intéressons aux connexions de classe C^∞, mais pour construire l'espace de modules des connexions antiautoduales, nous allons le décrire comme étant défini par des équations différentiables à l'intérieur d'un espace de Banach, qui sera une "tranche" transverse à l'action du groupe de jauge, la différentielle étant donnée par un opérateur de Fredholm.

Or l'espace des sections de $\Omega_X(su(E))$ de classe C^∞ n'a pas de structure d'espace de Banach, et, ce qui est pire, l'application qui à une connexion associe sa courbure, du fait qu'elle fait intervenir des dérivées, ne peut être continue que si on change la norme de Sobolev.

Le choix fait par Donaldson-Kronheimer dans [5] consiste à considérer les connexions de classe L^2_{l-1}, avec $l > 2$. Cela signifie que les formes η ci-dessus sont, de même que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $l-1$, de classe L^2. On notera encore $\mathcal{A}$ cet espace, qui est muni des normes de Sobolev évidentes. Le choix $l > 2$ se justifie entre autres par le théorème de plongement de Sobolev (cf [1]), qui garantit qu'en dimension 4, les fonctions de classe L^2_l, $l > 2$ sont continues. Noter que c'est optimal, car la fonction $(log\, r)^\alpha$, $\alpha > 0$ sur $\mathbb{R}^4$ n'est sûrement pas continue, alors qu'elle est de classe L^2_2 pour $\alpha < \frac{1}{2}$.

En fait la condition $l \geq 2$ est aussi nécessaire pour définir correctement la courbure d'une telle connexion, du fait que la courbure d'une connexion $\nabla + \eta$ ne fait pas intervenir seulement les dérivées de la forme η mais également le produit $\eta \wedge \eta$. Ces produits de formes dans L^2_{l-1} sont dans L^2_{l-2}, avec $l - 2 \geq 0$ pour $l \geq 2$.

Le groupe de jauge $\mathcal{G}$ est obtenu en considérant les sections de classe L^2_l de $SU(E)$. On peut montrer qu'il agit sur $\mathcal{A}$ (cf lemme 2.2 pour l'étude infinitésimale de cette action). Le fait de savoir que les fonctions de classe L^2_l, $l > 2$ sont continues permet d'affirmer que le groupe $\mathcal{G}$ est contenue dans le groupe des sections continues de E, ce qui jouera un rôle dans le chapitre suivant.

La première remarque importante concernant cette action est le fait que l'espace d'orbites $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ admet une structure d'espace métrique. La distance est définie par la fonction suivante, $\mathcal{G}$-invariante en les deux variables :

$$d(\nabla, \nabla') = Inf_{g \in \mathcal{G}}(\int_X \mid g \cdot \nabla - \nabla' \mid^2 Vol)^{\frac{1}{2}}.$$

(Ici on rappelle que la différence de deux éléments de $\mathcal{A}$ est une 1-forme à valeurs dans $su(E)$). On a le résultat suivant :

Proposition 2.1 *On a $d(\nabla, \nabla') = 0$ si et seulement si ∇ et ∇' sont équivalentes sous le groupe $\mathcal{G}$ des transformations de classe L^2_l. L'espace quotient $\mathcal{X}_g$ est donc un espace métrique muni de la distance d, et en particulier séparé.*

Démonstration. La subtilité ici est le fait qu'a priori les topologies sur $\mathcal{A}$ et sur $\mathcal{G}$ sont données par les métriques L^2_{l-1} et L^2_l respectivement, qui font intervenir des dérivées, alors qu'ici on se contente de prendre la métrique L^2.

Soient donc ∇, ∇' deux connexions fixées de classe L^2_{l-1} et soit $u_n \in \mathcal{G}$ une suite telle que $d(\nabla', u_n \cdot \nabla)$ tende vers 0 quand n tend vers l'infini. On veut montrer que $\nabla' = u \cdot \nabla$, avec $u \in \mathcal{G}$. On a

$$\nabla_n := u_n \cdot \nabla = u_n^{-1} \circ \nabla \circ u_n$$

et donc

$$u_n \circ (\nabla_n - \nabla) = \nabla \circ u_n - u_n \circ \nabla = d_\nabla u_n, \tag{2.1.1}$$

où d_∇ est la dérivée covariante associée à ∇, agissant sur les sections de classe L^2_l de $End\, E$. Comme u_n est unitaire et que $\mid \nabla_n - \nabla' \mid_{L^2}$ tend vers 0, on trouve que $d_\nabla u_n$ est borné pour la norme L^2, et cela entraîne que quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que u_n converge fortement pour la topologie L^2 et faiblement pour la topologie L^2_1 vers u qui est un endomorphisme de classe L^2_1 de E. Il reste à montrer qu'en fait u est de classe L^2_l, et qu'on a

$$\nabla' = u \cdot \nabla.$$

La limite u satisfait par passage à la limite dans (2.1.1) l'équation différentielle linéaire :

$$u \circ (\nabla' - \nabla) = d_\nabla u$$

ce qui dit que $\nabla' = u \cdot \nabla$.

Compte tenu du fait que $\nabla' - \nabla$ est de classe L^2_{l-1}, cela entraîne que u est de classe L^2_l.

■

Les équations définissant les connexions antiautoduales dans $\mathcal{A}$ sont fournies par un opérateur

$$\Phi : \mathcal{A} \to A_X^{2+}(su(E))_{l-2}^2,$$
$$\nabla \mapsto R_\nabla^+,$$

où le terme de droite désigne l'espace des 2-formes autoduales sur X à valeurs dans $su(E)$ et de classe L_{l-2}^2. En effet, une connexion s'écrit localement $d + \eta$ où d est intégrable et η est une 1-forme à valeurs dans $su(E)$, et sa courbure est donnée (localement) par

$$R_{d+\eta} = d\eta + \eta \wedge \eta.$$

On perd donc une dérivée et par ailleurs on utilise le produit

$$L_{l-1}^2 \times L_{l-1}^2 \to L_{l-2}^2$$

(cf [1]) pour vérifier que le second terme est également dans L_{l-2}^2.

L'équation d'antiautodualité est bien sûr l'équation $\Phi(\nabla) = 0$. Les complétions de Sobolev sont choisies de façon à garantir que Φ est continu. Cependant l'espace des solutions est bien sûr de dimension infinie, du fait qu'il est stable sous l'action du groupe de jauge. Comme on s'intéresse aux solutions modulo cette action, pour construire localement une structure de variété (ou variété singulière) de dimension finie sur l'espace des connexions antiautoduales modulo l'action de $\mathcal{G}$, on peut restreindre cet opérateur à des sous-espaces transverses aux orbites, (et dans le cas réductible, stables sous l'action du groupe d'isotropie). Un choix naturel consiste à considérer en un point ∇ l'orthogonal de l'espace tangent à l'orbite de ∇ sous le groupe de jauge $\mathcal{G}_l$ des transformations de classe L_l^2. On a maintenant :

Lemme 2.2 *L'espace tangent à l'orbite d'une connexion ∇ sous $\mathcal{G}$ au point ∇ est l'image de*

$$d_\nabla : A_X^0(su(E))_l^2 \to A_X^1(su(E))_l^1,$$

où d_∇ est l'opérateur de différentiation covariante induit par ∇ et le terme de droite est identifié à l'espace tangent à $\mathcal{A}$ en ∇.

Démonstration. On calcule l'action infinitésimale de l'algèbre de Lie du groupe $\mathcal{G}$ au point ∇. L'action de $\mathcal{G}$ sur ∇ est donnée par

$$g \mapsto g \cdot \nabla := g \circ \nabla \circ g^{-1}.$$

Soit σ une section de E, et $f \in A_X^0(su(E))$ un élément tangent à $\mathcal{G}$ au point Id_E. Soit $g_t \in \mathcal{G}$ un arc tel que $\frac{d}{dt}_{|t=0} g_t = f$. On a alors

$$\frac{d}{dt}_{|t=0}(g_t \cdot \nabla)(\sigma) = \frac{d}{dt}_{|t=0}(g_t \circ \nabla \circ g_t^{-1})(\sigma)$$

$$= \nabla(\frac{d}{dt}_{|t=0} g_t^{-1}(\sigma)) + f(\nabla\sigma) = -\nabla(f(\sigma)) + f(\nabla\sigma),$$

soit encore

$$\frac{d}{dt}_{|t=0}(g_t \cdot \nabla)(\sigma) = -(d_\nabla f)(\sigma)$$

car la dérivée covariante d_∇ agissant sur $End\,E$ satisfait la compatibilité du type Leibniz :

$$\nabla(f(\sigma)) = d_\nabla f(\sigma) + f(\nabla\sigma).$$

■

D'après ce lemme, il est naturel de considérer comme sous-espace transverse l'orthogonal pour la norme L^2 de cette image, qui par la théorie de Hodge est

$$Ker\, d_\nabla^* : A^1_X(su(E))^2_{l-1} \to A^0_X(su(E))^2_{l-2},$$

où d_∇^* est l'adjoint formel de d_∇ pour les normes L^2.

2.1.2 Théorie de Fredholm

Définition 2.3 *Un opérateur continu $\phi : U \to V$ entre deux espaces de Banach est un opérateur de Fredholm si son image est fermée et son noyau $Ker\,\phi$ et son conoyau $Coker\,\phi$ sont de dimension finie.*

La théorie de tels opérateurs s'apparente à celle des opérateurs entre espaces vectoriels de dimension finie. En effet, $Ker\,\phi$ et $Im\,\phi$ sont alors fermés et admettent des supplémentaires fermés U_0, V_0. ϕ induit un isomorphisme entre U_0 et $Im\,\phi$. Une petite déformation d'un opérateur de Fredholm reste donc un opérateur de Fredholm. L'indice d'un tel opérateur, noté $Ind\,\phi$, est défini comme $dim\,Ker\,\phi - dim\,Coker\,\phi$. Lorsque les espaces U et V sont de dimension finie, cet indice n'est autre que $dim\,U - dim\,V$, qui ne dépend pas de ϕ. Ceci entraîne facilement que l'indice est constant par déformation. On verra plus loin (théorème 2.12) comment on peut calculer cet indice lorsque l'opérateur de Fredholm est un opérateur différentiel entre fibrés vectoriels sur une variété compacte de dimension finie.

Soit maintenant $\phi : U \to V$ une application de classe C^1 entre deux espaces de Banach. On dira que ϕ est de Fredholm si sa différentielle en chaque point l'est. On a le résultat suivant, qui donne dans ce cas des modèles de dimension finie pour les fibres $\phi^{-1}(v)$, $v \in V$:

Théorème 2.4 *Soit $\phi : U \to V$, $\phi(0) = 0$ une application de Fredholm. Alors il existe un difféomorphisme ψ d'un voisinage O de 0 dans U, tel que dans la décomposition*

$$U = U_0 \oplus Ker\,d\phi_0,\ V = Im\,d\phi_0 \oplus V_0$$

associée à $d\phi_0$, $\phi \circ \psi(u_0, k) = (d\phi(u_0), \mu(u_0, k))$, où $d\phi_0$ est par construction un isomorphisme linéaire entre U_0 et $Im\,d\phi_0$, et $\mu : U_0 \oplus Ker\,d\phi_0 \to V_0$ est différentiable de classe C^1.

On a le corollaire évident :

Corollaire 2.5 *La fibre $\phi^{-1}(0) \cap O$ est naturellement homéomorphe à la fibre $\mu_0^{-1}(0)$, où μ_0 est la restriction de μ à l'espace vectoriel de dimension finie $\{0\} \times K$.*

Ceci montre que des critères du même type que ceux utilisés en dimension finie s'appliquent pour décider si la fibre est une variété de dimension finie.

Corollaire 2.6 *Si de plus l'application de Fredholm ϕ est submersive au point* 0*, la fibre $\phi^{-1}(0)$ est une sous-variété de U au voisinage de* 0 *de dimension finie égale à $Ind\, d\phi_0$.*

Preuve du théorème 2.4. Comme dans le cas des applications différentiables entre variétés de dimension finie, c'est une conséquence immédiate du théorème d'inversion locale, étendu ici au contexte des espaces de Banach : comme $d\phi$ fournit un isomorphisme entre U_0 et $Im\, d\phi$, si on considère l'application

$$\Phi : U \times V_0 \to V \times Ker\, d\phi$$

de classe C^1 définie par

$$\Phi(u, v) = (\phi(u) + v, \pi(u)),$$

où π est la projection de U sur $Ker\, d\phi$, on trouve que $d\Phi$ est un isomorphisme au point 0. De plus, on a

$$\phi = \pi_V \circ \Phi_{|U\times\{0\}},$$

où π_V est la projection de $V \times Ker\, d\phi$ sur V. Le théorème d'inversion locale dit qu'il existe un difféomorphisme Ψ de $U \times V_0$ tel que

$$\Phi \circ \Psi = d\Phi : U \times V_0 \to V \times Ker\, d\phi.$$

Si on pose $\psi = \pi' \circ \Psi_{|U\times\{0\}}$, où π' est la projection de $U \times V_0$ sur U, on voit immédiatement que ψ est un difféomorphisme de U défini au voisinage de 0 et que $\phi \circ \psi$ a la forme annoncée. ∎

Revenons au cas de l'application $\Phi_0 : Ker\ d^*_\nabla \to A^{2+}_X(su(E))^2_{l-2}$ qui est la restriction de Φ à une tranche transverse à l'orbite de $\mathcal{G}$ au point ∇. Ici "transverse" a la signification suivante : $Ker\, d^*_\nabla$ est invariant sous le groupe d'isotropie G_∇ (qui est de dimension finie) de ∇, et de plus c'est un supplémentaire de l'espace tangent de l'orbite de ∇ sous $\mathcal{G}$. Ainsi on a une identification de $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ et de $Ker\, d^*_\nabla/G_\nabla$ près de l'orbite de ∇. On veut montrer que Φ_0 est un opérateur de Fredholm.

Or on a le résultat suivant :

Lemme 2.7 *La différentielle*

$$d\Phi_\nabla : A^1_X(su(E))^2_{l-1} \to A^{2+}_X(su(E))^2_{l-2}$$

de Φ au point ∇ est la composée d^+_∇ de la dérivée covariante $d_\nabla : A^1_X(su(E))^2_{l-1} \to A^2_X(su(E))^2_{l-2}$ et de la projection $A^2_X(su(E))^2_{l-2} \to A^{2+}_X(su(E))^2_{l-2}$.

Démonstration. En effet, rappelons que pour une connexion spécial-hermitienne

$$\nabla + \eta,\ \eta \in A^1_X(su(E))^2_{l-1}$$

on a

$$\Phi(\nabla + \eta) = R^+_{\nabla+\eta} = [(\nabla + \eta) \circ (\nabla + \eta)]^+,$$

où l'indice supérieur + est la partie autoduale. On trouve donc en développant le produit :

$$\Phi(\nabla + \eta) = \Phi(\nabla) + [\nabla \circ \eta + \eta \circ \nabla]^+ + [\eta \circ \eta]^+.$$

Considérant maintenant la famille de connexions $\nabla + t\eta$, on voit que le dernier terme est d'ordre 2 en t, tandis que celui du milieu est d'ordre 1 en t. On trouve donc :

$$\frac{d}{dt}_{|t=0}\Phi(\nabla + t\eta) = [\nabla \circ \eta + \eta \circ \nabla]^+.$$

Or par définition de la dérivée covariante, on a

$$\nabla \circ \eta + \eta \circ \nabla = d_\nabla \eta.$$

■

2.1.3 Ellipticité

On se propose de montrer

Théorème 2.8 *L'opérateur*

$$d_\nabla^+ + d_A^* : A_X^1(su(E))_{l-1}^2 \to A_X^2(su(E))_{l-2}^2 \oplus A_X^0(su(E))_{l-2}^2$$

est un opérateur elliptique (c'est en fait un opérateur de Dirac) entre fibrés de même rang.

Démonstration. Il suffit de calculer le symbole (cf [25]) de cet opérateur différentiel d'ordre 1. Noter que cet opérateur est une version tordue par $su(E)$ de l'opérateur de Dirac

$$d^+ + d^* : A_X^1 \to A_X^{2+} \oplus A_X^0$$

agissant sur les formes. On remplace ici la dérivation usuelle par la dérivation covariante. Cette différence n'apparaît qu'à l'ordre 0, et donc n'affecte pas les symboles. Le symbole $\sigma(d_\nabla^+ + d_A^*)$ est donc égal à $\sigma(d^+ + d^*) \otimes Id_{su(2)}$, et il suffit de montrer que pour tout $0 \neq \eta \in \Omega_{X,x}$

$$\sigma(d^+ + d^*)(\eta) : \Omega_{X,x} \to \Omega_{X,x}^{2+} \oplus \Omega_{X,x}^0$$

est un isomorphisme. Les deux espaces vectoriels ont le même rang 4, puisque $\Omega_{X,x}^{2+}$ est de rang 3 (cf lemme 1.3). On sait (cf [25]) que $\sigma(d)(\eta)$ agissant $\Omega_{X,x}^k$ est égal à $\eta\wedge$ et dualement, $\sigma(d^*)(\eta)$ est $int(\eta)$, où le produit intérieur se fait via le produit scalaire identifiant $\Omega_{X,x}$ à $T_{X,x}$. Comme d^+ est la composée de d avec l'opérateur de projection sur Ω_X^2, qui est d'ordre 0, on en déduit que

$$\sigma(d^+ + d^*)(\eta)(\alpha) = (\eta \wedge \alpha)^+ + (\eta, \alpha).$$

Supposons que $\sigma(d^+ + d^*)(\eta)(\alpha) = 0$. Alors $(\eta, \alpha) = 0$. Si $\alpha \neq 0$, on peut supposer que α, η sont de norme 1 et les compléter en une base orthonormée directe de $\omega_{X,x}$. Alors

$$*(\alpha \wedge \eta) = \beta \wedge \gamma$$

et donc

$$\sigma(d^+ + d^*)(\eta)(\alpha) = \eta \wedge \alpha - \beta \wedge \gamma \neq 0.$$

Le résultat est donc montré.

■

On en déduit :

Corollaire 2.9 *L'opérateur* $d\Phi_{0,\nabla} := d^+_{\nabla|Ker\, d^*_\nabla}$ *est un opérateur de Fredholm. Son indice est égal à celui de* $d^+_\nabla + d^*_\nabla$ *lorsque* $d^*_\nabla : A^1_X(su(E))^2_{l-1} \to A^0_X(su(E))^2_{l-2}$ *est surjectif ou de façon équivalente* $d_\nabla : A^0_X(su(E))^2_l \to A^1_X(su(E))^2_{l-1}$ *est injectif.*

Démonstration. En effet, on a le diagramme commutatif suivant de complexes, le second étant exact, et le premier exact sauf à droite :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & Ker\, d^*_\nabla & \to & A^1_X(su(E))^2_{l-1} & \overset{d^*_\nabla}{\to} & Im\, d^*_\nabla \to 0 & \\ & \downarrow d\Phi_{0,\nabla} & & \downarrow d^+_\nabla + d^*_\nabla & & \downarrow & \\ 0 \to & A^2_X(su(E))^2_{l-2} & \to & A^2_X(su(E))^2_{l-2} \oplus A^0_X(su(E))^2_{l-2} & \to & A^0_X(su(E))^2_{l-2} & \to 0 \end{array}$$

où $Im\, d^*_\nabla \subset A^0_X(su(E))^2_{l-2}$ et la dernière flèche de droite est l'inclusion naturelle, qui est de corang fini, et de conoyau dual de l'espace $Ker\, d_\nabla$ des endomorphismes infinitésimaux antihermitiens de trace nulle de (E, ∇).

Le fait que $d^+_\nabla + d^*_\nabla$ soit de Fredholm entraîne donc immédiatement la même propriété pour $d\Phi_{0,\nabla}$. Les flèches verticales sont donc en fait toutes des opérateurs de Fredholm, et cette suite exacte de complexes fournit

$$Ind\, d^+_\nabla + d^*_\nabla = Ind\, d\Phi_{0,\nabla} - corang\, d^*_\nabla.$$

■

2.1.4 Opérateurs de Dirac et théorème de l'indice

On a vu dans le théorème 2.8 que l'opérateur de Dirac de X

$$d^+ + d^* : A^1_X \to A^{2+}_X \oplus A^0_X \tag{2.1.2}$$

est un opérateur elliptique, ainsi que ses versions tordues :

$$d^+_\nabla + d^*_\nabla : A^1_X(su(E)) \to A^{2+}_X(su(E)) \oplus A^0_X(su(E)). \tag{2.1.3}$$

L'indice de $d^+ + d^*$ est facile à calculer :

Proposition 2.10 *On a* $Ind\, d^+ + d^* = b_1(X) - b^+_2(X) - 1$.

Démonstration. En effet, le noyau de $d^+ : A^1_X \to A^{2+}_X$ s'identifie au noyau de $d : A^1_X \to A^2_X$, car si $d^+\alpha = 0$, on a

$$*d\alpha = -d\alpha,$$

d'où

$$\int_X -d\alpha^2 = 0 = \int_X d\alpha \wedge *d\alpha = (d\alpha, d\alpha)_{L^2}.$$

Il en résulte que le noyau de $d^+ + d^*$ s'identifie à l'espace des 1-formes harmoniques et donc à $H^1(X, \mathbb{R})$ par la théorie de Hodge. Il vient donc :

$$dim\, Ker\, (d^+ + d^*) = b_1(X).$$

Pour le conoyau, on a intérêt à calculer le noyau de l'opérateur dual qui n'est autre que $d_{|A^{2+}_X} + d^* : A^{2+}_X \oplus A^4_X \to A^3_X$.

Lemme 2.11 *$Im\, d_{|A_X^{2+}}$ et $Im\, d^*$ sont orthogonaux pour la forme d'intersection L^2 sur A_X^3.*

Démonstration. C'est complètement standard et vrai même si α n'est pas autoduale : Soient $\alpha \in A_X^{2+}$, $\beta \in A_X^4$. On a

$$(d\alpha, d^*\beta)_{L^2} = (d \circ d\alpha, \beta)_{L^2} = 0. \tag{2.1.4}$$

■

On en déduit que $Ker\,(d_{|A_X^{2+}} + d^*) = Ker\, d_{|A_X^{2+}} \oplus Ker\, d^*$. Or par définition de A_X^{2+}, les formes fermées dans A_X^{2+} sont fermées et cofermées, donc harmoniques et de plus autoduales. On a donc

$$Ker\, d_{|A_X^{2+}} = \mathcal{H}^{2+},$$

où le terme de droite désigne l'espace des 2-formes harmoniques autoduales. D'autre part, comme les 4-formes sont fermées, l'espace $Ker\, d^*_{|A_X^4}$ s'identifie à l'espace $\mathcal{H}^4$ des 4-formes harmoniques, donc à $H^4(X, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ par la théorie de Hodge. Enfin, notons qu'on a une décomposition de l'espace des 2-formes harmoniques $\mathcal{H}^2$ en 2-formes harmoniques autoduales $\mathcal{H}^{2+}$ et 2-formes harmoniques antiautoduales $\mathcal{H}^{2-}$, ce qui est dû au fait que $*$ commute avec le laplacien. Or on a

$$\mathcal{H}^2 \cong H^2(X, \mathbb{R})$$

par la théorie de Hodge, et sur $\mathcal{H}^{2+}$ la forme d'intersection de X s'identifie à la forme d'intersection L^2, tandis que sur sur $\mathcal{H}^{2-}$ la forme d'intersection de X s'identifie à l'opposé de la forme d'intersection L^2. On en déduit que $dim\, \mathcal{H}^{2+} = b_2^+(X)$, ce qui conclut la preuve de la proposition.

■

On veut maintenant calculer l'indice de l'opérateur tordu (2.1.3). Notons qu'ici on peut choisir n'importe quelle connexion de classe C^∞.

Théorème 2.12 *L'indice de l'opérateur (2.1.3) est égal à*

$$8c_2(E) + 3(b_1(X) - b_2^+(X) - 1).$$

Démonstration. Le point-clé, qui intervient aussi de la même façon dans la preuve du théorème de l'indice général d'atiyah-Singer (cf [12]), est la formule d'excision pour les indices d'opérateurs différentiels elliptiques. Cette formule dit la chose suivante : Ecrivons $X = U \cup V$, et soient $P : E_1 \to E_2$, $P' : E_1' \to E_2'$ deux opérateurs différentiels elliptiques. Supposons qu'on ait des isomorphismes

$$\beta_1 : E_1 \cong E_1',\ \beta_2 : E_2 \cong E_2'$$

définis sur V et tels que

$$\beta_2 \circ P = P' \circ \beta_1$$

sur V. Le principe d'excision dit alors :

Théorème 2.13 *La différence*

$$Ind\,P - Ind\,P'$$

ne dépend que des restrictions des données à U.

Ici, par restriction des données à U, on entend non pas seulement les restrictions de E_i, P, E'_i, P' à U mais aussi des isomorphismes restreints $\beta_{i|V\cap U}$.

Voyons d'abord comment ce principe d'excision combiné avec le théorème 2.10 donne le résultat. Rappelons que le fibré E est trivial en dehors d'une boule $U = B^4 \subset X$ et aussi sur la boule B^4. Sa classe de Chern c_2 est déterminée par la classe d'homotopie de l'isomorphisme de transition :

$$f : S^3 = \partial B^4 \to SU(2).$$

Plongeons la boule B^4 dans un plan projectif $\mathbb{P}^2$, et considérons le fibré F sur $\mathbb{P}^2$ obtenu en recollant deux fibrés spécial-unitaires de rang 2 triviaux sur B^4 et $\mathbb{P}^2 \setminus B^4$ via l'isomorphisme f. On peut appliquer le principe d'excision 2.13 aux paires E, $\mathbb{T}_X$ sur X, où $\mathbb{T}_X$ est le fibré trivial de rang 2 sur X, et F, $\mathbb{T}_{\mathbb{P}^2}$ sur $\mathbb{P}^2$, où $\mathbb{T}_{\mathbb{P}^2}$ est le fibré trivial de rang 2 sur $\mathbb{P}^2$, car ces deux paires ont la même restriction à B^4 (vue comme une boule de $\mathbb{P}^2$ ou comme une boule de X). Plus précisément, on considérera les opérateurs de Dirac sur les fibrés $su(\,)$ associés. On obtient donc, $P_E, P_{\mathbb{T}_X}$, P_F, $P_{\mathbb{T}_{\mathbb{P}^2}}$ étant les opérateurs de Dirac tordus sur les fibrés correspondant $su(E)$, $su(F)$, $su(\mathbb{T}_X)$, $su(\mathbb{T}_{\mathbb{P}^2})$:

$$Ind\,P_E - Ind\,P_{\mathbb{T}_X} = Ind\,P_F - Ind\,P_{\mathbb{T}_{\mathbb{P}^2}}.$$

Or on a vu que

$$Ind\,P_{\mathbb{T}_X} = 3(b_1(X) - b_2^+(X) - 1)$$

ce qui dans le cas de $X = \mathbb{P}^2$ donne :

$$Ind\,P_{\mathbb{T}_{\mathbb{P}^2}} = -6.$$

Ainsi on trouve :

$$Ind\,P_E = 3(b_1(X) - b_2^+(X) - 1) + Ind\,P_F + 6.$$

Le fibré F est un fibré complexe de déterminant trivial, de rang 2, et de seconde classe de Chern égale à $c_2(E)$ sur $\mathbb{P}^2$. On est donc ramené à montrer que pour un fibré de rang 2 spécial-unitaire F de déterminant trivial sur $\mathbb{P}^2$, on a

$$Ind\,P_F = 8c_2(F) - 6.$$

Lorsque $c_2 > 0$, ceci sera montré dans la section 3.3.3, où mettant une structure holomorphe sur F, ce qui est possible lorsque $c_2 > 0$, et choisissant une connexion ∇ sur F telle que $\nabla^{0,1} = \overline{\partial}_F$, le terme de gauche sera calculé (au signe près) comme une caractéristique d'Euler-Poincaré holomorphe à valeurs dans $Ad\,F$. L'autre cas (avec c_2 négatif) se fait avec $\mathbb{P}^2$ muni de l'orientation inverse.

■

Remarque 2.14 Il y a une différence de coefficient 2 dans la formule pour l'indice et la formule de Riemann-Roch pour la caractéristique d'Euler-Poincaré holomorphe. Elle est due au fait que l'indice calcule une dimension réelle, tandis que la caractéristique d'Euler-Poincaré holomorphe calcule une dimension complexe.

Idée de la démonstration du théorème 2.13. Le principal outil consiste à remplacer les opérateurs différentiels elliptiques par des objets beaucoup plus souples, les opérateurs pseudo-différentiels. Le gain est le suivant : Pour un opérateur différentiel, le symbole est une fonction homogène *polynomiale* sur le fibré Ω_X, à valeurs dans $Hom\,(E_1, E_2)$. L'ellipticité se traduit par le fait que le symbole σ_x, sur $\Omega_{X,x} \setminus \{0\}$ est à valeurs dans l'ensemble des isomorphismes de $E_{1,x}$ vers $E_{2,x}$. Le degré d'homogénéité est donc un entier et constant. Pour les opérateurs pseudo-différentiels, le symbole est une fonction homogène σ définie sur $\Omega_X \setminus \{section\ 0\}$, à valeurs dans $p^*Hom\,(E_1, E_2)$, où p est la projection de Ω_X vers X. Un opérateur pseudo-différentiel est elliptique si σ est à valeurs dans $p^*Iso\,(E_1, E_2)$. Il y a beaucoup plus d'opérations possibles dans le cadre des opérateurs pseudodifférentiels elliptiques. Par exemple si P est un opérateur pseudodifférentiel elliptique autoadjoint dont le symbole est défini positif, $P^{\frac{1}{2}}$ est un opérateur pseudodifférentiel. Un point-clé est que toute fonction-symbole inversible est le symbole d'un opérateur différentiel, et que si on a une famille continues de fonctions-symboles inversibles $(\sigma_t)_{t\in[0,1]}$, il existe une famille continues d'opérateurs pseudo-différentiels $(D_t)_{t\in[0,1]}$ telle que

$$\sigma(D_t) = \sigma_t.$$

Avec cette souplesse, l'idée est tout d'abord d'introduire sur X un opérateur elliptique $\widetilde{Q}$ dont l'indice calculera $Ind\,P - Ind\,P'$ et qui se déforme à travers des opérateurs pseudodifférentiels elliptiques autoadjoints sur un opérateur pseudodifférentiel $\widetilde{Q}'$ dont le symbole est l'identité en dehors de U (ceci a bien un sens car la fonction constante égale à l'identité définie sur $\Omega_X \setminus \{section\ 0\}$ est une fonction homogène de degré 0).

On aura alors $Ind\,P - Ind\,P' = Ind\,\widetilde{Q}'$. Or le noyau et le conoyau de $\widetilde{Q}'$ consiste en des sections à support compact dans U, et on en conclut que $Ind\,\widetilde{Q}$ se calcule en fonction des données sur U.

Concrètement, on met des métriques sur E_i, E_i', qui identifient E_i, E_i' à leurs duaux respectifs E_i^*, $E_i'^*$. On peut alors prendre les adjoints des opérateurs P, P' et construire la différence formelle :

$$Q := -P + P'^* : E_1 \oplus E_2' \to E_1' \oplus E_2.$$

Sur l'ouvert V, où E_1 est identifié à E_1' et E_2 à E_2', et P à P', Q a l'allure suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & P^* \\ -P & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est clair que

$$Ind\,Q = Ind\,L - Ind\,L'.$$

Dans un second temps, on remplace Q par

$$\widetilde{Q} = (1 + QQ^*)^{-\frac{1}{2}}Q,$$

qui a manifestement le même indice et dont le symbole est inversible d'ordre 0 sur V. Sur V, $\widetilde{Q}$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \pi^* \\ -\pi & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\sigma(\pi)\sigma(\pi^*) = 1$. (Précisément, $\pi = (1 + PP^*)^{-\frac{1}{2}} P$ et donc $\sigma(\pi) = (PP^*)^{-\frac{1}{2}} P$.) Mais la famille de fonctions-symboles

$$\begin{pmatrix} t1 & (1-t)\sigma(\pi^*) \\ -(1-t)\sigma(\pi) & t1 \end{pmatrix}$$

est une famille continue de fonctions-symboles inversibles, et est donc accompagnée par une famille continue d'opérateurs pseudodifférentiels elliptiques sur V. Comme le symbole est celui de $\widetilde{Q}$ en 0 et celui de Id en 1, ceci fournit la déformation voulue de $\widetilde{Q}$ sur $\widetilde{Q}'$ où $\widetilde{Q}'$ est l'opérateur Id sur V. Cette déformation sur V fournit une déformation sur X, qui est la déformation triviale sur $U \setminus (U \cap V)_\epsilon$, où $(U \cap V)_\epsilon$ est un petit voisinage de $U \cap V$ et qui est la déformation ci-dessus sur $V \setminus (U \cap V)_\epsilon$.

■

Corollaire 2.15 *Lorsque la connexion ∇ est irréductible, l'indice de l'opérateur de Fredholm*

$$d\psi_\nabla : A^1_X(su(E))^2_{l-1} \supseteqq Ker\, d^*_\nabla \to A^2_X(su(E))^2_{l-2}$$

est égal à $-3(-b_1(X) + b_2^+(X) + 1) + 8c_2(E)$.

En effet, lorsque la connexion ∇ est irréductible, l'espace $Ker\, d_\nabla \subset A^0_X(su(E))$ est nul et on applique alors le corollaire 2.9 ainsi que le théorème 2.12.

Le nombre $-3(b_2^+(X) - b_1(X) + 1) + 8c_2(E)$, qui devient $-3(b_2^+(X) + 1) + 8c_2(E)$ lorsque X est simplement connexe, est donc la dimension attendue de l'espace de modules $\mathcal{Y}_g$ des connexions antiautoduales sur E, au sens où, en un point ∇ qui est une connexion hermitienne irréductible pour laquelle la différentielle $d\Phi_\nabla$ est surjective, le quotient a un modèle local qui est une variété lisse de dimension $-3(b_2^+(X) - b_1(X) + 1) + 8c_2(E)$ (cf corollaire 2.6).

2.2 Perturbation de la métrique

2.2.1 Transversalité générique

On se propose de montrer que pour un choix générique de métrique g, l'espace des connexions antiautoduales est une variété lisse en dehors des connexions réductibles. La preuve repose sur une version du théorème de Sard en dimension infinie concernant des applications de Fredholm. Rappelons tout d'abord le théorème de Sard, sous une forme propice à la généralisation qui nous intéresse :

Théorème 2.16 *Soient Y et B des variétés différentiables, F un fibré vectoriel sur B, $\sigma : Y \times B \to pr_2^* F$ une section différentiable. Supposons que le lieu des zéros $Z(\sigma) \subset Y \times B$ est lisse de codimension égale à $rang\, F$. Alors il existe un ensemble B_{reg} dense de B, qui est une intersection dénombrable d'ouverts denses, tel que pour $b \in B$, Le lieu des zéros $Z(\sigma_b)$ de la section σ_b du fibré $E_{|X \times b}$ soit vide ou une sous-variété lisse de codimension égale à $rang\, F$.*

Ceci est en effet le théorème de Sard appliqué à la restriction de l'application différentiable pr_2 à la variété $Z(\sigma)$.

Notons que les hypothèses de ce théorème se vérifient infinitésimalement à l'aide de la différentielle $d\sigma : T_{Y\times B} \to E$ qui est bien définie le long du lieu d'annulation de $Z(\sigma)$. (En général, pour différentier une section d'un fibré vectoriel, on a besoin d'une connexion, mais là où la section s'annule, on définit la différentielle à l'aide d'une trivialisation et la règle de Leibniz montre que le résultat ne dépend pas de la trivialisation.)

On a maintenant l'analogue de ce résultat lorsque Y est une variété de Banach, F est un fibré de Banach, et la section σ est de Fredholm.

Théorème 2.17 *Soient Y une variété de Banach et B une variété différentiable, F un fibré vectoriel de Banach sur B, $\sigma : Y \times B \to pr_2^* F$ une section de Fredholm, au sens où la restriction de σ à $Y \times b$, qui est à valeurs dans l'espace de Banach F_b est de Fredholm pour tout b. Supposons que la différentielle*

$$d\sigma : T_{Y\times B,(y,b)} \to F_b,$$

est surjective en tout point (y, b) du lieu d'annulation de σ.

Alors il existe un ensemble B_{reg} dense de B, qui est une intersection dénombrable d'ouverts denses, tel que pour $b \in B$, Le lieu des zéros $Z(\sigma_b)$ de la section σ_b du fibré $E_{|X\times b}$ soit vide ou une variété lisse de dimension finie et de dimension égale à $Ind\, d\sigma_b : T_{Y,y} \to F_b$ (qui est indépendant de y, b). En particulier, le lieu des zéros est vide génériquement lorsque $Ind\, d\sigma_b : T_{Y,y} \to F_b < 0$.

Démonstration. On peut noter que l'énoncé est local au voisinage de $Z(\sigma)$, en admettant que $Z(\sigma)$ admet une base dénombrable d'ouverts.

Or au voisinage de $Z(\sigma)$, la théorie de Fredholm (théorème 2.4) nous permet de remplacer au voisinage de $(y, b) \in Y \times B$, Y et F par une variété de dimension finie Y_0 et un fibré de rang fini F_0, plus précisément un ouvert dans $Ker\, d\sigma_b$ et le fibré $coker\, d\sigma_b$. σ est alors remplacée par la restriction σ_0 de σ à Y_0, suivie de la projection dans F_0.

La surjectivité de la différentielle $d\sigma$ au point (y, b) dit exactement que l'application induite par $d\sigma$

$$T_{Y_0\times B,(y,b)} \to coker\, d\sigma_b$$

est surjective. Or cette application n'est autre que la différentielle de σ_0. Ainsi on peut appliquer le théorème de Sard 2.16 et conclure que les fibres de

$$Z(\sigma) \to B$$

pour un ensemble dense (de seconde catégorie) de points de B, la fibre $Z(\sigma_b)$ est vide ou est une variété de dimension $dim\, Y_0 - rang\, F_0 = Ind\, d\sigma$ (en particulier vide si $dim\, Y_0 - rang\, F_0 = Ind\, d\sigma < 0$).

■

Pour notre application, Y sera l'espace quotient $\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}$ des connexions spécial-hermitiennes irréductibles sur E, $B = Met$ sera la famille des métriques sur X (ou une famille de dimension finie de métriques), et F sera le fibré de fibre $A_X^{+g}(su(E))$

au-dessus du point $g \in B$, où l'indice $^{+g}$ signifie qu'on considère les 2-formes autoduales relativement à la métrique g à valeurs dans $su(E)$. Plus précisément, on identifie localement Y à une tranche transverse à l'orbite considérée, sachant qu'on s'est placé sur l'ouvert des connexions irréductibles.

La section σ associe à ∇ la partie autoduale de la courbure :

$$\sigma(\nabla) = R_{\nabla}^{+g}.$$

Le critère différentiel utilisé dans le théorème 2.17 est vérifié dans le théorème suivant de Freed-Uhlenbeck :

Théorème 2.18 *On suppose X simplement connexe. Soit g une métrique sur X, et ∇ une connexion g-antiautoduale irréductible. Alors la différentielle*

$$d\sigma : T_{\mathcal{A},\nabla} \times T_{Met,g} \to A_X^{2+g}(su(E))$$

est surjective.

Remarque 2.19 Notant que la différentielle

$$d\sigma_{|T_{\mathcal{A},\nabla}} \to A_X^{2+g}(su(E))$$

est de corang fini, il en résulte que l'on peut dans l'énoncé précédent remplacer localement Met par un espace de dimension finie de métriques sur X (si on préfère travailler avec des espaces de paramètres de dimension finie). Cependant, globalement, il n'est pas clair que le corang de la différentielle soit borné.

La démonstration du théorème 2.18 passe par le calcul de la différentielle $d\sigma$. Dans la proposition ci-dessous, ∇ est antiautoduale pour g. On rappelle que la variation de la métrique g est donnée par un morphisme de fibrés $m : \Omega_X^{2-} \to \Omega_X^{2+}$ décrivant la déformation avec g de $\Omega_X^{2-} \subset \Omega_X^2$. Précisément, si $(g_t)_{t\in[0,1]}$ est une famille différentiable de métriques avec $g_0 = g$, le morphisme $m : \Omega_X^{2-} \to \Omega_X^{2+}$ associé à $h = \frac{dg_t}{dt}_{|t=0}$ est donné par

$$\alpha \mapsto \frac{d\alpha_t}{dt}_{|t=0} \; mod. \; \Omega_X^{2-},$$

où α_t est une famille de formes différentielles antiautoduales pour g_t avec $\alpha_0 = \alpha$. Une autre manière de voir ce morphisme m est la suivante :

Lemme 2.20 *Soit α une forme fixée sur X, qui est antiautoduale pour g. Soit α_t^+ la partie autoduale de α pour g_t. Alors*

$$m(\alpha) = -\frac{d\alpha_t^+}{dt}_{|t=0} \; mod. \; \Omega_X^{2-}.$$

Démonstration. En effet, il suffit de noter que par définition $\tilde{\alpha}_t := \alpha - \alpha_t$ est antiautoduale pour g_t. et qu'on a $\tilde{\alpha}_0 = \alpha$. Or

$$\frac{d\tilde{\alpha}_t}{dt}_{|t=0} = -\frac{d\alpha_t}{dt}_{|t=0}.$$

Le résultat découle donc de la définition précédente de m. ■

Proposition 2.21 *On a*

$$d\sigma_\nabla(\eta,m) = d_\nabla(\eta)^+ - m(R_\nabla) \in A_X^{2+}(su(E))^2_{l-2}.$$

Démonstration. C'est immédiat. En effet, la section σ associe à une connexion ∇ et à une métrique g la partie autoduale pour g de R_∇. Cette partie autoduale est la projection sur $A_X^{2+,g}(su(E))$ de la courbure $R_\nabla \in A_X^2(su(E))$. La variation infinitésimale de R_∇ avec ∇ a déjà été calculée :

$$d_\eta(R_\nabla) = d_\nabla(\eta)$$

et en particulier

$$d_\eta(R_\nabla^+) = d_\nabla(\eta)^+.$$

Pour calculer notre différentielle totale, il faut différentier R_∇^{+g} dans la direction de g, ce qui se fait en utilisant le lemme précédent. Il dit en effet que la dérivée suivant g de R_∇^{+g} est égale $-m(R_\nabla)$.

■

Démonstration du théorème 2.18. On doit montrer que si ∇ est une connexion antiautoduale satisfaisant la propriété que

$$A_X^1(su(E)) \oplus A_X^0(Hom\,(\Omega_X^{2-},\Omega_X^{2+})) \to A_X^{2+}(su(E)),$$

$$(\eta,m) \mapsto d_\nabla(\eta)^+ + m(R_\nabla) \tag{2.2.5}$$

n'est pas surjective, alors ∇ est réductible.

On admettra que ∇ est réductible si et seulement si elle est réductible sur un ouvert non vide (ceci utilise bien sûr la condition d'antiautodualité et aussi le fait que X est simplement connexe). La non-surjectivité de (2.2.5) se dualise, dans les espaces de Sobolev adéquats pour fournir $\theta \in A_X^{2+}(su(E))$ satisfaisant :

$$<\theta, d_\nabla\eta> = <d_\nabla\theta, *\eta> = 0,\ \forall\eta \in A_X^1(su(E)),$$

$$<\theta, m(R_\nabla)> = <\theta\cdot R_\nabla, m> = 0, \forall m \in A_X^0(Hom\,(\Omega_X^{2-},\Omega_X^{2+})).$$

Ici la contraction $\theta\cdot R_\nabla \in A_X^{2+}\otimes A_X^{2-}$ est obtenue en utilisant la forme d'intersection sur $su(E)$. Donc on a $d_\nabla\theta = 0$ et la condition $\theta\cdot R_\nabla = 0$, qui entraîne que les coefficients dans $su(E)$ de la 2-forme θ et ceux de la 2-forme R_∇ sont orthogonaux. Plaçons-nous sur un ouvert non vide de X où les formes R_∇ et θ, vues comme des morphismes $su(E) \to \Omega_X^{2-}$, et $su(E) \to \Omega_X^{2+}$ respectivement, sont de rang constant. Comme $rang\, su(E) = 3$, ce n'est possible que si l'une des deux formes R_∇ ou θ, qui sont toutes deux d_A-fermées, est de rang 1 sur cet ouvert, c'est à dire localement de la forme $\sigma\otimes\chi$, où χ est une section de $su(E)$ et σ est une section (dans un espace de Sobolev adéquat) de Ω_X^{2+} ou Ω_X^{2-}. Mais pour qu'une telle forme soit d_A-fermée, il faut qu'on ait

$$d\sigma\otimes\chi + \sigma\wedge\nabla\chi = 0.$$

Supposons que σ soit autoduale ou antiautoduale non nulle ; alors le produit extérieur

$$\sigma\wedge : \Omega_X^1 \to \Omega_X^3$$

est injectif et la condition $\sigma\wedge\nabla\chi = d\sigma\otimes\chi$ entraîne que $\nabla\chi$ est proportionnel à χ. Ainsi la connexion est réductible sur un ouvert non vide, ce qui est une contradiction.

■

2.2.2 Déformation globale de l'espace de modules, cas où $b_2^+ > 1$

Si l'on combine le corollaire 1.20, le théorème de transversalité (corollaire 2.18), et le calcul d'indice (corollaire 2.15) on obtient le résultat suivant :

Théorème 2.22 *Si X est simplement connexe, et satisfait $b_2^+(X) > 0$, pour une métrique générique sur X, l'espace de modules de connexions antiautoduales sur E est vide ou lisse de dimension $-3(b_2^+(X) + 1) + 8c_2(E)$ (en particulier vide si ce nombre est < 0).*

Rappelons ici qu'il y a deux aspects dans cet énoncé de lissité : les singularités peuvent venir d'un défaut de transversalité qui est contourné par un énoncé du type Sard, ou bien des connexions réductibles qui ayant un groupe d'isotropie non isomorphe à $\pm Id$, produisent des singularités lors du passage au quotient.

Dans l'énoncé suivant, qui si l'on excepte le fait que nos espaces ne sont pas pour l'instant compacts, est un énoncé de cobordisme, on a besoin de la condition plus forte $b_2(X) > 1$:

Théorème 2.23 *Soient g_0, g_1 deux métriques génériques sur X comme dans l'énoncé pécédent. Supposons de plus que X satisfait $b_2(X)^+ > 1$. Alors pour un choix générique de chemin différentiable $(g_t)_{t\in[0,1]}$ de métriques sur X, l'espace défini comme l'union pour $t \in [0,1]$ des espaces de modules de connexions antiautoduales sur E pour g_t est une variété à bords lisse de dimension $-3(b_2^+(X)+1)+8c_2(E)+1$, de bord $\mathcal{Y}_{g_0} \sqcup \mathcal{Y}_{g_1}$.*

Démonstration. Le point-clé ici est de noter que parmi l'ensemble des métriques sur X, l'ensemble des métriques pour lesquelles il existe une classe entière non nulle représentable par une forme antiautoduale est de codimension égale à $b_2^+(X)$ d'après la preuve du théorème 1.19 et plus précisément grâce à la proposition 1.22. Il en résulte que si $b_2^+(X) > 1$, pour un chemin générique de g_0 à g_1, il n'y a aucune connexion réductible antiautoduale pour g_t, $\forall t \in [0,1]$. On complète alors la preuve grâce au théorème de transversalité. ∎

Chapitre 3

Invariants de Donaldson

3.1 Topologie et groupe de jauge

3.1.1 Topologie de l'espace $\mathcal{A}/\mathcal{G}_x$

Par définition, le groupe $\mathcal{G}' := \mathcal{G}/\pm Id$, qui est le groupe des applications de classe L^2_l de X dans $SO(3)$, agit sur $\mathcal{A}_{irr}$ sans point fixes. Il n'en est pas de même de l'action sur $\mathcal{A}$, mais les connexions réductibles apparaissent en codimension infinie dans le quotient, et donc ne changent pas la cohomologie. Notons par ailleurs que $\mathcal{A}$ est contractile. Il en résulte que la cohomologie de $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ est aussi celle de l'espace classifiant $B\mathcal{G}'$.

On suppose dans ce qui suit que X est simplement connexe. Dans ce cas si $x \in X$, la topologie de $X \setminus \{x\}$ est celle d'un bouquet de sphères S^2. Pour rendre rigoureux l'argument précédent, on va tout d'abord étudier la topologie d'un autre quotient, qui consiste à considérer le sous-groupe $\mathcal{G}_x$ des automorphismes de E agissant par l'identité sur la fibre E_x. Ce groupe ne contient pas le centre $\pm Id$ ni aucun élément stabilisateur d'une connexion $\nabla \in \mathcal{A}$ et donc le quotient $\mathcal{A}/\mathcal{G}_x$ a le type d'homotopie de $B\mathcal{G}_x$. On a le résultat suivant :

Lemme 3.1 *$\mathcal{A}/\mathcal{G}_x$ est faiblement homotopiquement équivalent à*

$$\mathcal{C}.(X, BG)_c$$

où $G = SU(2)$, l'indice $\cdot$ signifie qu'on regarde les applications continues pointées envoyant x sur le point marqué de BG, et l'indice c indique qu'on regarde la composante connexe de $\mathcal{C}.(X, BG)_c$ correspondant aux fibrés de classe de Chern $c_2 = c$.

Démonstration. Cette équivalence faible signifie qu'on a un isomorphisme de foncteurs contravariants $Var \to Ens$ (où Var est la catégorie des variétés différentiables compactes) :

$$[\cdot, \mathcal{A}/\mathcal{G}_x] \to [\cdot, \mathcal{C}.(X, BG)_c].$$

Cet isomorphisme de foncteurs est fourni par l'existence d'un fibré universel hermitien de rang 2 à déterminant trivial

$$\mathcal{E} \to \mathcal{A}/\mathcal{G}_x \times X,$$

obtenu par passage au quotient à partir du fibré pr_2^*E sur $\mathcal{A} \times X$ en tenant compte du fait que $\mathcal{G}_x$ agit librement sans point fixe sur $\mathcal{A} \times X$ et que cette action est naturellement linéarisée sur $pr_2^*\mathcal{E}$. Notons que ce fibré $\mathcal{E}$ est canoniquement trivial sur $\mathcal{A}/\mathcal{G}_x \times x$.

Soit alors T une variété différentiable compacte, et soit $\phi : T \to \mathcal{A}/\mathcal{G}_x$ une application continue ou différentiable. Alors on dispose de l'image inverse $(\phi, Id)^*\mathcal{E}$ sur $T \times X$. Ce fibré est canoniquement trivial sur $T \times x$ et il est de classe de Chern c sur les fibres $t \times X$. Il fournit donc une application différentiable ou continue $T \times X \to BG$ ou encore une application différentiable ou continue

$$T \to \mathcal{C}(X \times BG).$$

Les propriétés de $\phi^*\mathcal{E}$ montrent que cette application est à valeurs dans $\mathcal{C}.(X, BG)_c$.

Inversement, soit T une variété différentiable compacte, et soit $\phi : T \to \mathcal{C}.(X, BG)_c$. Alors on a une application induite $T \times X \to BG$, et par définition des indices, le fibré E_ϕ induit sur $T \times X$ est trivial sur $T \times x$ et de classe de Chern c sur les fibres $t \times X$. Il existe alors une connexion hermitienne sur E_ϕ, c'est-à-dire une famille de connexions sur E, définies modulo $\mathcal{G}_x$, d'où la flèche inverse

$$[\cdot, \mathcal{C}.(X, BG)_c] \to [\cdot, \mathcal{A}/\mathcal{G}_x].$$

■

Comme $X \setminus \{x\}$ a le type d'homotopie d'une boule B^4 attachée à un bouquet de sphères S^2 et que les fibrés complexes hermitiens à déterminant trivial sur S^2 sont triviaux, on trouve maintenant qu'on a à homotopie faible près une fibration :

$$\mathcal{C}.(S^4, BG)_c \to \mathcal{C}.(X, BG)_c \to \mathcal{C}.(S^2, BG)^N.$$

où $N = H_2(X, \mathbb{Z})$ est le nombre de sphères dans ce bouquet et l'indice c désigne la composante correspondant aux fibrés hermitiens sur S^4 avec $c_2 = c$.

Or la topologie de l'ensemble des applications continues pointées de S^2 dans BG est très simple, vu qu'un fibré spécial hermitien sur S^2 est déterminé par ses fonctions de transition sur S^1. On a donc une équivalence d'homotopie

$$\mathcal{C}.(S^2, BG)^N \cong \mathcal{C}.(S^1, G)^N.$$

Rappelons que $G = SU(2)$ est homéomorphe à S^3.

On a le même raisonnement pour $\mathcal{C}.(S^4, BG)$.

En conclusion, notant $\Omega^1 Y$ l'espace des lacets d'un espace pointé Y (i.e. les lacets basés en un point $y \in Y$), et $\Omega^3 Y$ l'espace des applications continues pointées de S^3 dans Y, on a donc montré :

Théorème 3.2 *A équivalence faible d'homotopie près, $\mathcal{A}/\mathcal{G}_x$ s'inscrit dans une fibration :*

$$(\Omega^3 S^3)_c \to \mathcal{A}/\mathcal{G}_x \to (\Omega^1 S^3)^N,$$

où l'indice c désigne la composante des applications continues pointées de S^3 dans S^3 de degré c.

On se propose de montrer maintenant :

Théorème 3.3 *L'algèbre de cohomologie $H^*(\mathcal{A}/\mathcal{G}_x, \mathbb{Q})$ est une algèbre de polynômes sur*

$$H_2(X, \mathbb{Q}) \cong H^2(X, \mathbb{Q}).$$

Ceci résulte des résultats précédents et de l'analyse de la cohomologie de la base $\Omega^1 {S^3}^N$ et de la fibre $\Omega^3 S^3_c$ de la fibration ci-dessus, qui se calculent de la façon suivante :

Proposition 3.4 *L'algèbre de cohomologie $H^*(\Omega^1 S^3, \mathbb{Q})$ est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{Q}[t]$ avec un générateur en degré 2. L'algèbre de cohomologie $H^*((\Omega^3 S^3)_c, \mathbb{Q})$ est triviale, c'est-à-dire isomorphe à $\mathbb{Q}$.*

Démonstration. On se contentera de montrer le premier énoncé : Considérons l'espace des chemins PS^3 dont l'origine est le point marqué $0 \in S^3$. Alors PS^3 est contractile, et admet une application continue

$$PS^3 \to S^3$$

$$p \mapsto p(1).$$

La fibre de cette application est homéomorphe à $\Omega^1 S^3$. On a donc une suite spectrale de Leray dont deux termes E_2 seulement sont non triviaux, à savoir

$$E_2^{0,q} = H^0(S^3, H^q(\Omega^1 S^3, \mathbb{Q})) = H^q(\Omega^1 S^3, \mathbb{Q}),$$

$$E_2^{3,q} = H^3(S^3, H^q(\Omega^1 S^3, \mathbb{Q})) = H^q(\Omega^1 S^3, \mathbb{Q}).$$

Seule la différentielle d_3 peut être non nulle, et elle doit fournir un isomorphisme pour $q \geq 2$

$$H^q(\Omega^1 S^3, \mathbb{Q}) \cong H^{q-2}(\Omega^1 S^3, \mathbb{Q}).$$

Le calcul de $H^0 = \mathbb{Q}$ et $H^1 = \mathbb{Q}$ étant trivial, on conclut que

$$H^{2i+1}(\Omega^1 S^3, \mathbb{Q}) = 0,\ \forall i,\ H^{2i}(\Omega^1 S^3, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q},\ \forall i \geq 0,$$

et que l'algèbre de cohomologie est engendrée par $t := d_3^{-1}(1)$.

■

Un point important est l'interprétation suivante de la flèche

$$\mu : H_2(X, \mathbb{Q}) \to H^2(\mathcal{A}/\mathcal{G}_x, \mathbb{Q}) \tag{3.1.1}$$

donnée dans le théorème 3.3. Tout d'abord, rappelons qu'on a construit un fibré spécial unitaire canonique $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{A}/\mathcal{G}_x \times X$ dont la restriction à $t \times X$ est isomorphe à E.

Proposition 3.5 *L'isomorphisme (3.1.1) est donné par l'application composée*

$$H_2(X, \mathbb{Q}) \cong H^2(X, \mathbb{Q}) \stackrel{c_2(\mathcal{E}) \cup pr_2^*}{\to} H^6(\mathcal{A}/\mathcal{G}_x \times X, \mathbb{Q})$$

$$\stackrel{pr_{1*}}{\to} H^2(\mathcal{A}/\mathcal{G}_x, \mathbb{Q}).$$

Démonstration. On se contentera de montrer que les deux applications sont proportionnelles. On observe la chose suivante : notons $\mathcal{B}_{X,x}$ le quotient $\mathcal{A}/\mathcal{G}_x$, et pour une sphère orientée $\Sigma \cong S^2$ contenant x, notons de même $\mathcal{B}_{\Sigma,x}$ le quotient de l'espace des connexions spécial-unitaires sur le fibré trivial de rang 2 par l'action libre du groupe de jauge $\mathcal{G}_{\Sigma,x}$ des applications de Σ dans $SU(2)$ qui envoient x sur Id.

On a alors une application de restriction évidente

$$r_\Sigma : \mathcal{B}_{X,x} \to \mathcal{B}_{\Sigma,x}.$$

Le même calcul que précédemment montre que

$$H^2(\mathcal{B}_{\Sigma,x}, \mathbb{Q}) \cong H_2(\Sigma, \mathbb{Q}) = \mathbb{Q},$$

d'où un générateur $\mu_\Sigma([\Sigma]_{fond})$ de $H^2(\mathcal{B}_{X,x}, \mathbb{Q})$ et il est clair d'après la preuve du théorème 3.3 que

$$r_\Sigma^*(\mu_\Sigma([\Sigma]_{fond})) = \mu([\Sigma])$$

où $[\Sigma]$ est la classe d'homologie de Σ dans X.

Par ailleurs, si on restreint le fibré universel $\mathcal{E}$ à $\mathcal{B}_x \times \Sigma$, il est évident qu'il devient isomorphe à $(r_\Sigma, Id)^*(\mathcal{E}_\Sigma)$.

En conclusion, on a aussi

$$c_2(\mathcal{E}) \cup pr_2^*([\Sigma]) = r_\Sigma^*(c_2(\mathcal{E}_\Sigma) \cup pr_2^*([\Sigma]_{fond}),$$

et le résultat pour X est donc une conséquence du résultat pour $\Sigma = S^2$.

Pour S^2, comme on sait que $H_2(\Sigma)$ et $H^2(\mathcal{B}_{S^2,x})$ sont de rang 1, il suffit de montrer que $pr_{1*}(c_2(\mathcal{E}_\Sigma) \cup pr_2^*([\Sigma]_{fond}))$ est non nul, et pour cela il suffit de construire un fibré spécial-unitaire de rang 2 sur $S^2 \times S^2$ dont la classe de Chern

$$c_2 \in H^4(S^2 \times S^2, \mathbb{Q}) = Hom\,(H_2(S^2, \mathbb{Q}), H^2(S^2, \mathbb{Q}))$$

est non nulle. Or c'est évident. Il suffit de prendre un fibré de la forme $L \oplus L^{-1}$, où L est un fibré complexe de rang 1 sur $S^2 \times S^2$, avec $c_1(L)^2 \neq 0$.

■

Notons que le fibré $\mathcal{E}$ (restreint à $\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}_x$) ne descend pas sur $\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G} \times X$ à cause du groupe d'isotropie $\pm Id$ qui agit trivialement sur la base et non trivialement sur la fibre. Mais le fibré $End\,\mathcal{E}$ par exemple descend, muni de l'action de $\mathcal{G}$ par conjugaison. Sa classe $c_2(End\,\mathcal{E})$ est égale à $4c_2(\mathcal{E})$ et elle provient donc d'une classe p sur $\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G} \times X$. On en déduit :

Proposition 3.6 *L'isomorphisme*

$$\mu : H_2(X, \mathbb{Q}) \to H^2(\mathcal{A}/\mathcal{G}_x, \mathbb{Q})$$

du théorème 3.7, composé avec l'isomorphisme de restriction

$$H^2(\mathcal{A}/\mathcal{G}_x, \mathbb{Q}) \to H^2(\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}_x, \mathbb{Q})$$

se factorise par une flèche qu'on notera de même

$$\mu : H_2(X, \mathbb{Q}) \to H^2(\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}, \mathbb{Q}).$$

Les puissances symétriques

$$Sym^k H^2(\mathcal{A}/\mathcal{G}_x, \mathbb{Q}) \subset H^{2k}(\mathcal{A}/\mathcal{G}_x, \mathbb{Q}) \subset H^{2k}(\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}_x, \mathbb{Q})$$

proviennent donc aussi de la cohomologie de $\mathcal{A}/\mathcal{G}$.

Il reste à calculer la cohomologie de $\mathcal{A}/\mathcal{G}$, qui est celle qui nous intéresse.

Notons qu'on a une suite exacte

$$1 \to \mathcal{G}_x \to \mathcal{G} \to SU(2) \to 1$$

et une suite exacte semblable au niveau des groupes orthogonaux :

$$1 \to \mathcal{G}_x \to \mathcal{G}' \to SO(3) \to 1.$$

On en déduit que, si on se restreint à $\mathcal{A}_{irr}$ de façon à éviter les points fixes, on a une fibration :

$$\pi : \mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}_x \to \mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}$$

de fibre $SO(3)$, qui a la même cohomologie rationnelle que $SU(2) = S^3$. On en déduit :

Théorème 3.7 *La cohomologie $H^*(\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}, \mathbb{Q})$ est une algèbre de polynômes engendrée par $\mu(H_2(X, \mathbb{Q}))$ en degré 2, avec un générateur supplémentaire en degré 4.*

Démonstration. Cela résulte des résultats précédents et de la théorie générale des suites spectrales sphériques. La suite spectrale de Leray associée à la fibration en $SO(3)$:

$$\pi : \mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}_x \to \mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}$$

montre que

$$\pi^* : H^{2*}(\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}, \mathbb{Q}) \to H^{2*}(\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}_x, \mathbb{Q})$$

est un isomorphisme. En effet, on a

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}, R^q\pi_*\mathbb{Q}) = 0,\ q \neq 0,\ 3,$$

d'où l'on déduit que la seule différentielle non nulle possible est $d_4 : E_4^{p,3} \to E_4^{p+4,0}$, avec $E_4^{p,q} = E_3^{p,q} = E_2^{p,q}$. Il est bien connu que cette flèche est la flèche de cup-produit par la classe c_2 de ce fibré en sphères. Il en résulte qu'on a

$$E_\infty^{p,3} = Ker\, d_4,\ E_\infty^{p+4,0} = Coker\, d_4.$$

On trouve donc la suite exacte

$$E_4^{p,3} \to E_4^{p+4,0} \to H^{p+4}(\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}_x, \mathbb{Q}) \to E_4^{p+1,3} \to E_4^{p+5,0},$$

soit

$$H^p(\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G},\mathbb{Q}) \to H^{p+4}(\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G},\mathbb{Q}) \to H^{p+4}(\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}_x,\mathbb{Q}) \to H^{p+1}(\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G},\mathbb{Q})$$

où la flèche est la flèche de cup-produit par la classe de Chern η de ce fibré en S^3 (ou plutôt en $SO(3)$).

Mais en fait, les propositions 3.4 et 3.6 montrent que les flèches

$$\pi^* : H^{p+4}(\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G},\mathbb{Q}) \to H^{p+4}(\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}_x,\mathbb{Q})$$

sont surjectives et sont des isomorphismes sur la sous-algèbre engendrée par $\mu(H_2(X,\mathbb{Q}))$. On conclut donc qu'on a des suites exactes courtes

$$0 \to H^p(\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G},\mathbb{Q}) \stackrel{d_4}{\to} H^{p+4}(\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G},\mathbb{Q}) \to H^{p+4}(\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}_x,\mathbb{Q}) \to 0.$$

Sachant que $H^*(\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}_x,\mathbb{Q})$ est une algèbre de polynômes engendrée en degré 2 par $\mu(H_2(X,\mathbb{Q}))$, on en déduit immédiatement que $H^*(\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G},\mathbb{Q})$ est une algèbre de polynômes engendrée en degré 2 par $\mu(H_2(X,\mathbb{Q}))$, et en degré 4 par le générateur $\eta = d_4(1)$.

■

3.1.2 Fibrés déterminants

Ceci n'est qu'une petite partie des idées en K-théorie développées par Atiyah, utilisant des espaces de Banach et des opérateurs de Fredholm pour construire des éléments de K_0, qui en principe ne font intervenir que des fibrés vectoriels de rang fini.

On considère une variété B (qui peut être de dimension infinie) et deux fibrés de Banach $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ sur B, ainsi qu'un opérateur de Fredholm

$$\mathcal{P} : \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F}_2$$

au-dessus de B. L'exemple-type sera pour nous l'opérateur de Dirac

$$d^+_\nabla + d^*_\nabla : A^1_X(su(E))^2_{l-1} \to A^{2+}_X(su(E))^2_{l-2} \oplus A^0_X(su(E))^2_{l-2}$$

où la base B est soit l'espace $\mathcal{A}$ des connexions, soit par descente via l'action libre de $\mathcal{G}_x$ sur $\mathcal{A}$ le quotient $\mathcal{A}/\mathcal{G}_x$, soit par descente via l'action libre de $\mathcal{G}'$ sur $\mathcal{A}_{irr}$ le quotient $\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}'$. Dans cet exemple les fibrés sont réels, mais on verra aussi ci-dessous des exemples où les fibrés sont complexes.

Soit $b \in B$. Alors comme

$$\mathcal{P}_b : \mathcal{F}_{1,b} \to \mathcal{F}_{2,b}$$

est de Fredholm, on a des décompositions

$$\mathcal{F}_{1,b} = Ker\,\mathcal{P}_b \oplus U,\ \mathcal{F}_{2,b} = Im\,\mathcal{P}_b \oplus V,$$

où $\mathcal{P}_b$ induit un isomorphisme de U sur $Im\,\mathcal{P}_b$ et $Ker\,\mathcal{P}_b$ et $V \cong Coker\,\mathcal{P}_b$ sont de dimension finie. Choisissant une trivialisation des fibrés $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ dans le voisinage B_b de b, on a une décomposition induite au voisinage de b

$$\mathcal{F}_1 = U_1 \oplus U_0,\ \mathcal{F}_2 = U_2 \oplus V_0, \tag{3.1.2}$$

où U_0 et V_0 sont des fibrés de rang fini. De plus dans cette trivialisation, l'opérateur $\mathcal{P}_b$ est un isomorphisme de U_1 sur U_2. Quitte à restreindre B_b, on peut supposer que la première composante $\mathcal{P}'_{b'}$ de $\mathcal{P}_{b'}$ reste un isomorphisme de U_1 dans U_2 pour $b' \in B_b$.

Considérons le fibré en droites défini dans le voisinage B_b de b :

$$det\, U_0 \otimes det\, V_0^*.$$

Lemme 3.8 *Pour tout $b' \in B_b$, on a un isomorphisme canonique*

$$det\, U_0 \otimes det\, V_0^* \cong det\,(Ker\, \mathcal{P}_{b'}) \otimes det\,(Coker\, \mathcal{P}_{b'})^{-1}.$$

Démonstration. Dans la décomposition (3.1.2), l'opérateur $\mathcal{P}_{b'}$ s'écrit

$$\mathcal{P}_{b'}(u, u_0) = (\mathcal{P}'_{b'}(u) + \epsilon_1(u_0), \epsilon_2(u) + \epsilon_3(u_0)),$$

où ϵ_2 et ϵ_3 sont à valeurs dans V_0. Si $(u, u_0) \in Ker\, \mathcal{P}_{b'}$, on a donc

$$\mathcal{P}'_{b'}(u) + \epsilon_1(u_0) = 0,\ \epsilon_2(u) + \epsilon_3(u_0) = 0,$$

ce qui donne :

$$u = -(\mathcal{P}'_{b'})^{-1} \circ \epsilon_1(u_0),\ (-\epsilon_2 \circ (\mathcal{P}'_{b'})^{-1} \circ \epsilon_1 + \epsilon_3)(u_0) = 0.$$

Ainsi le noyau $Ker\, \mathcal{P}'_{b'}$ est canoniquement identifié au noyau de l'opérateur

$$-\epsilon_2 \circ (\mathcal{P}'_{b'})^{-1} \circ \epsilon_1 + \epsilon_3 : U_0 \to V_0.$$

De même pour le conoyau $Coker\, \mathcal{P}'_{b'}$. Ainsi on a construit un morphisme de fibrés

$$\mathcal{Q} : U_0 \to V_0$$

sur B_b qui a la propriété qu'on a des isomorphismes canoniques

$$Ker\, \mathcal{Q}_{b'} \cong Ker\, \mathcal{P}_{b'},\ Coker\, \mathcal{Q}_{b'} \cong Coker\, \mathcal{P}_{b'}$$

pour $b' \in B_b$.

On utilise maintenant le lemme 3.9 suivant.

■

Lemme 3.9 *Soit $\phi : U_0 \to V_0$ un morphisme d'espaces vectoriels de dimension finie. Alors on a un isomorphisme canonique*

$$det\, Ker\, \phi \otimes (det\, Coker\, \phi)^{-1} \cong det\, U_0 \otimes det\, V_0^*,$$

(ou bien sûr $(det\, Coker\, \phi)^{-1} = det\,(Coker\, \phi)^*$).

Considérons maintenant sur un autre ouvert W de B une décomposition comme ci-dessus :

$$\mathcal{F}_1 = U'_1 \oplus U'_0,\ \mathcal{F}_2 = U'_2 \oplus V'_0, \tag{3.1.3}$$

où U'_0 et V'_0 sont des fibrés de rang fini, telle que sur W l'opérateur $\mathcal{P}_b$ ait la propriété que la première composante $\mathcal{P}'_{b'} : U'_1 \to U'_2$ de $\mathcal{P}_{b'}$ est un isomorphisme de U' dans U'. On a alors :

Lemme 3.10 *Il existe un isomorphisme canonique de fibrés en droites*

$$det\, U_0 \otimes det\, V_0^* \cong det\, U_0' \otimes det\, V_0'^*.$$

Démonstration. On se ramène immédiatement au cas où $U_1' \subset U_1$, $U_2' \subset U_2$. La décomposition 3.1.2 induit alors une décomposition des fibrés de dimension finie

$$\mathcal{F}_1/U_1',\, \mathcal{F}_2/U_2'$$

en sommes directes

$$\mathcal{F}_1/U_1' = U_1/U_1' \oplus U_0,\, \mathcal{F}_2/U_2' = U_2/U_2' \oplus V_0,$$

où la première composante du morphisme induit par $\mathcal{P}$ induit un isomorphisme

$$U_1/U_1' \cong U_2/U_2'.$$

De plus on a des isomorphismes canoniques

$$\mathcal{F}_1/U_1' \cong U_0',\, \mathcal{F}_2/U_2' \cong V_0'.$$

On en déduit immédiatement un isomorphisme canonique :

$$det\, U_0 \otimes det\, V_0^* \cong det\, U_0' \otimes det\, V_0'^*.$$

■

A l'aide de ce dernier lemme, on construit maintenant un fibré en droites $det\,\mathcal{P}$ sur B, obtenu en recollant les fibrés en droites $det\, U_0 \otimes (det\, V_0)^{-1}$ via les isomorphismes canoniques du lemme 3.10. Ce fibré déterminant a la propriété suivante donnée par le lemme 3.8 :

Pour tout $b \in B$, la fibre $(det\,\mathcal{P})_b$ est canoniquement isomorphe à $det\, Ker\,\mathcal{P}_b \otimes (det\, Coker\,\mathcal{P}_b)^{-1}$.

3.1.3 Orientation de l'espace des connexions antiautoduales

On revient désormais au cas où X est simplement connexe. Pour pouvoir construire une classe d'homologie pour l'espace de modules compactifié $\overline{\mathcal{Y}}$, il faut tout d'abord avoir une orientation sur la partie lisse ouverte $\mathcal{Y}$.

Théorème 3.11 *Supposons que g soit transverse de façon que l'espace de modules des connexions antiautoduales irréductibles $\mathcal{Y}_{irr}$ soit lisse de la dimension $8c-3(b_2^+(X)+1)$. Alors $\mathcal{Y}_{irr}$ est orientable et les orientations de chaque composante connexe de $\mathcal{Y}_{irr}$ sont en bijection naturelle avec les orientations de $H^{2+}(X)$.*

Remarque 3.12 Dans le cas kählérien, on a vu que $H^{2+}(X)$ est engendré par $\mathcal{R}e\, H^{2,0}(X) = \mathcal{I}m\, H^{2,0}(X)$ et la classe de Kähler ω. Il est donc naturellement orienté car l'espace engendré $\mathcal{R}e\, H^{2,0}(X)$ est isomorphe comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel à $H^{2,0}(X)$, et donc admet une structure complexe. On verra plus loin que l'espace $\mathcal{Y}_{irr}$ (supposé lisse) a naturellement dans ce cas une structure complexe. Il est facile de voir que l'orientation complexe est en fait l'orientation donnée par cette orientation naturelle de $H^{2+}(X)$.

Démonstration du théorème 3.11. Sous nos hypothèses, l'espace tangent de Zariski de $\mathcal{Y}_{irr}$ en un point ∇ est isomorphe à

$$Ker\,(d_\nabla^+ + d_\nabla^* : A_X^1(su(E)) \to A_X^{2+}(su(E)) + A_X^0(su(E))).$$

On a vu que cet opérateur est la version tordue de l'opérateur

$$d^+ + d^* : A_X^1 \to A_X^{2+} + A_X^0,$$

dont le noyau est trivial, et le conoyau est isomorphe à $H^{2+}(X, \mathbb{R}) \oplus H^4(X, \mathbb{R})$.

Le déterminant du fibré tangent, qui est un fibré en droites réelles sur $\mathcal{Y}_{irr}$ n'est donc rien d'autre que le fibré déterminant λ de l'opérateur de Fredholm

$$d_\nabla^+ + d_\nabla^* : A_X^1(su(E)) \to A_X^{2+}(su(E)) + A_X^0(su(E))$$

qui est défini sur $\mathcal{A}$ et aussi, par $\mathcal{G}'$-invariance, sur le quotient $\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}'$.

Le théorème est donc une conséquence de la proposition 3.13 suivante.

■

Proposition 3.13 *Le fibré en droites réelles $\lambda = det\, d_\nabla^+ + d_\nabla^*$ est trivial sur $\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}$ et ses trivialisations sont en bijection avec les trivialisations de $det\, H^{2+}(X)$.*

Démonstration. L'espace $\mathcal{A}/\mathcal{G}_x$ n'est pas simplement connexe, mais il s'envoie naturellement par une application qu'on notera τ dans l'espace $\mathcal{A}'/\mathcal{G}'_x$ où $\mathcal{A}'$ est l'espace des connexions sur $E' := E \oplus T$, T étant le fibré trivial, et $\mathcal{G}'_x$ est le groupe des transformations spécial-unitaires de E' agissant trivialement sur la fibre E'_x. Cette application τ envoie ∇ sur la connexion $\nabla + d$, où d est la connexion triviale sur T. Il est évident que l'image inverse $\tau^* det\, D'$ sur $\mathcal{A}'/\mathcal{G}'_x$, où D' est l'analogue pour $\mathcal{A}'$ de notre opérateur de Dirac $d_\nabla^+ + d_\nabla^*$, est isomorphe à $det\,(d_\nabla^+ + d_\nabla^*)$. (Un tel isomorphisme est donné par une trivialisation de la droite réelle $det\, Ker\, d^+ + d^* \otimes (det\, Coker\, d^+ + d^*)^{-1}$.) Pour en déduire que λ est trivial, il suffit de savoir que $\mathcal{A}'/\mathcal{G}'_x$ est simplement connexe, ce qui résulte du théorème 3.2 avec $SU(2)$ remplacé par $SU(3)$.

Une fois qu'on sait que $det\ d_\nabla^+ + d_\nabla^*$ est trivial sur $\mathcal{A}/\mathcal{G}_x$, on en déduit qu'il est trivial sur $\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}_x$, puis sur $\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}'$, du fait que la fibration

$$\mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}_x \to \mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}'$$

est à fibre connexe. Ceci montre le premier énoncé.

Pour le second énoncé, notons que puisqu'on sait que ce fibré en droites réelles est trivial, pour décider si ses orientations sont naturellement en bijection avec celles de $H^2(X)^+$, il suffit de le montrer en un point fixé ∇. On montre alors par une extension du principe d'excision que la droite réelle $det\,(d_\nabla^+ + d_\nabla^*)$ est isomorphe avec la droite réelle $det\,(d^+ + d^*) \otimes Id_{su(3)} = det\,(d^+ + d^*)^{\otimes 3}$, où $d^+ + d^* : A_X^1 \to A_X^{2+} \oplus A_X^0$ est l'opérateur de Dirac de X, cet isomorphisme étant canonique modulo $\mathbb{R}^{*+}$.

Or on a vu que $Ker\, d^+ + d^* = 0$ car X est simplement connexe, et $Coker\, d^+ + d^* \cong H^2(X, \mathbb{R})^+ \oplus H^0(X, \mathbb{R})$. Comme $H^0(X, \mathbb{R})$ est naturellement orienté, une orientation de $det\,(d^+ + d^*)^{\otimes 3}$, ou encore de $det\,(d^+ + d^*)$, est canoniquement déterminée par une orientation de $H^2(X, \mathbb{R})^+$. ■

3.2 Espace de modules et invariants

L'espace $\mathcal{Y}_g$ des classes d'isomorphisme de connexions antiautoduales de classe L^2_{l-1} est vu comme un fermé de $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ muni de sa topologie quotient, qui est une topologie d'espace métrique d'après la proposition 2.1. La structure de variété (lorsqu'il n'y a pas de connexions réductibles et lorsque la transversalité est satisfaite) est donnée à l'aide de la théorie de Fredholm par l'analyse qu'on a faite le long de tranches transverses aux orbites.

3.2.1 Compactification

Le théorème suivant (cf exposé de Julien Grivaux) ne dit pas que l'espace de modules de connexions antiautoduales $\mathcal{Y}_g$ est compact, mais fournit des limites naturelles pour des suites de connexions antiautoduales modifiées par des transformations de jauge, qui sont en fait des connexions antiautoduales avec des singularités ponctuelles. Ici on fait $l = 3$. Notons que ce théorème est plus général, vu qu'il concerne plus généralement les connexions satisfaisant $YM(\nabla) \leq C$. On a vu (théorème 1.15) que les connexions antiautoduales sont les minima absolus de la fonctionnelle de Yang-Mills (1.3.6).

Théorème 3.14 *Soit C une constante et soit ∇_n une suite de connexions hermitiennes sur E de classe L^2_{l-1} telles que*

$$YM(\nabla_n) \leq C$$

. Alors quitte à extraire une sous-suite, il existe

- des points $p_1, \dots, p_N \in X$, affectés de multiplicités entières $m_1, \dots, m_N$,

- des isomorphismes

$$g_n : E_{|X \setminus \{p_1,\dots,p_N\}} \cong E'_{|X \setminus \{p_1,\dots,p_N\}}$$

où E' est un fibré hermitien de déterminant trivial et de classe de Chern $c_2(E) - \sum_i m_i$,

- une connexion ∇' de classe L^2_{l-1} sur E', tels que :

1. *Sur tout compact $K \subset X \setminus \{p_1, \dots, p_N\}$, on ait pour la topologie L^2_{l-1} :*

$$\lim_{n\to\infty} g_n^* \nabla_n = \nabla',$$

2. *$\lim_{n\to\infty} \mid R_{\nabla_n} \mid^2 Vol_g = \mid R_{\nabla'} \mid^2 Vol_g + \sum_i 8\pi^2 m_i \delta_{p_i}$ où les δ_{p_i} sont les mesures de Dirac supportées en p_i et la limite est prise au sens des distributions.*

Rappelons que $\int_X \mid R_{\nabla_n} \mid^2 Vol_g = YM(\nabla_n)$. Lorsque les ∇_n sont de plus antiautoduales, on a de plus

$$YM(\nabla_n) = 8\pi^2 c_2(E)$$

et donc les conditions 1 et 2 entraînent que

$$YM(\nabla') = 8\pi^2 c_2(E').$$

Or on a vu (théorème 1.15) que ceci équivaut au fait que ∇' est antiautoduale.

Le théorème de compacité 3.14 mène à introduire l'espace suivant : Soit $c = c_2(E)$ et pour tout $0 \leq c' \leq c$, notons $\mathcal{Y}_{g,c'}$ l'espace de modules des connexions antiautoduales sur le fibré E' hermitien de déterminant trivial satisfaisant $c_2 = c'$. On pose maintenant

$$\overline{\mathcal{Y}}_{g,c} := \sqcup_{0 \leq c' \leq c} \mathcal{Y}_{g,c'} \times S^{c-c'}X$$

où $S^{c-c'}X = X^{c-c'}/\mathfrak{S}_{c-c'}$ est le produit symétrique de X paramétrant les combinaisons à coefficients entiers $\sum_i m_i p_i$, $\sum_i m_i = c - c'$.

La topologie a déjà été construite sur chacun des termes (la topologie de $S^{c-c'}X$ étant la topologie quotient). La topologie sur cette union disjointe est donnée par les conditions de convergence 1 et 2 du théorème 3.14. On peut reformuler ce dernier théorème sous la forme suivante :

Théorème 3.15 *L'espace topologique $\overline{\mathcal{Y}}_{g,c}$ est compact.*

Remarque 3.16 Si la métrique g est générique et $b_2^+(X) > 0$, tous les espaces $\mathcal{Y}_{g,c'}$ sont lisses de dimension $8c' - 3(b_2^+(X)+1)$. Par ailleurs $S^{c-c'}X$ n'est pas lisse, mais il est stratifié par des variétés (où les multiplicités sont fixées), la strate ouverte étant l'espace des configurations où tous les points sont distincts, qui est de dimension $4(c-c')$. Ainsi le bord $\overline{\mathcal{Y}}_{g,c} \setminus \mathcal{Y}_{g,c}$ est de dimension

$$\leq 8c' - 3(b_2^+(X)+1) + 4(c-c') = 4c - 3(b_2^+(X)+1) + 4c' \leq dim\, \mathcal{Y}_{g,c} - 4c'.$$

Ceci (avec l'existence d'une orientation) suggère la possibilité de construire une classe d'homologie fondamentale pour $\overline{\mathcal{Y}}_{g,c}$.

Dans l'argument précédent, on a un peu triché, car il y a toujours une strate de la compactification qui n'est pas de la dimension donnée ci-dessus, à savoir $\mathcal{Y}_{g,0} \times S^{c_2}X$, qui est de dimension $4c_2$. En effet, $dim\, \mathcal{Y}_{g,0} = 0$, ce qui ne correspond pas en général à la formule $dim\, \mathcal{Y}_{g,0} = -3(b_2^+(X)+1)$ utilisée ci-dessus. Curieusement, ceci ne jouera pas de rôle dans le cas où la dimension de l'espace de modules vaut 0 (cf section 3.2.2), la strate $\mathcal{Y}_{g,0} \times S^{c_2}X$ n'étant plus dans l'adhérence de l'espace de modules. Par contre, dans le cas général considéré dans la section 3.2.3, l'argument de codimension du bord donné dans la remarque précédente n'est valide que si l'on impose également la condition

$$dim\, \mathcal{Y}_{g,0} \times S^{c_2}X = 4c_2 \leq dim\, \mathcal{Y}_{g,c_2} - 2 = 8c_2 - 3(b_2^+(X)+1) - 2,$$

c'est-à-dire

$$4c_2 \geq 3b_2^+(X) + 5.$$

En effet, dans ce cas, toutes les strates du bord sont de dimension $\leq dim\, \mathcal{Y}_{g,c_2} - 2$, auquel cas on peut espérer construire une classe d'homologie fondamentale pour $\overline{\mathcal{Y}}_{g,c}$.

Un exemple particulièrement intéressant où cette inégalité n'est pas satisfaite est le cas où

$$b_2^+(X) = 0,\ c_2 = 1,$$

cas où par ailleurs l'espace de modules $\mathcal{Y}_{g,c}$ n'est a priori pas lisse pour g générique, puisqu'il peut y avoir génériquement des classes entières d'autointersection -1 et qu'elles sont représentées par des formes harmoniques antiautoduales. Dans ce cas, il n'y a qu'une seule strate de bord, qui est $\mathcal{Y}_{g,0}\times X = X$, et l'espace de modules est par ailleurs lisse de dimension 5 en dehors des connexions réductibles qui correspondent bijectivement aux classes entières d'autointersection -1, considérées au signe près (cf proposition 1.18). En analysant la structure de l'espace de modules près des connexions réductibles, Donaldson [6] en déduit par un argument de cobordisme :

Théorème 3.17 *Soit X une variété différentiable simplement connexe orientée avec $b_2^+(X) = 0$. Alors la forme d'intersection (définie négative) sur $H^2(X,\mathbb{Z})$ est diagonale.*

Ceci utilise le lemme suivant :

Lemme 3.18 *Les formes d'intersection définies négatives diagonales sur un réseau de rang $b_2(X)$ sont caractérisées par le fait qu'elles admettent au moins b_2 solutions de l'équation $< x,x >= -1$, x entière définie au signe près.*

Démonstration. En effet, dans un réseau entier muni d'une forme d'intersection définie négative, l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que si on a deux classes non proportionnelles d'autointersection -1, elles sont orthogonales. ■

3.2.2 Cas où la dimension attendue est 0

On suppose que X est simplement connexe et on choisit une orientation de $H^2(X,\mathbb{R})^+$. Rappelons que la dimension attendue de $\mathcal{Y}_g$ est égale à $8c_2-3(b_2^+(X)+1)$. Lorsque $8c_2-3(b_2^+(X)+1) = 0$, ce qui entraîne $b_2(X)^+$ impair, $b_2(X)^+ \geq 3$, et aussi $c_2 \geq 1$, on a vu les résultats suivants :

1. Les connexions antiautoduales sur E sont irréductibles et le restent le long d'une famille de dimension 1 de métriques (corollaire 1.20).
2. L'espace de modules $\mathcal{Y}_g$ des connexions antiautoduales pour g est constitué d'un nombre fini de points "réduits"(c'est-à-dire une variété de dimension 0), si g est générique (théorème 2.22).
3. Pour une famille de dimension 1 générique de métriques $(g_t)_{t\in[0,1]}$, l'union $\cup_{t\in[0,1]}\mathcal{Y}_{g_t}$ des espaces de modules de connexions antiautoduales pour g_t est une variété lisse de dimension 1 (théorème 2.23).
4. On peut associer à chaque point ∇ de $\mathcal{Y}_g$ un signe ± 1, qui est tout simplement obtenu grâce à l'isomorphisme
$$\lambda_\nabla \cong \mathbb{R}$$
dû au fait que $d_\nabla^+ + d_\nabla^*$ est un isomorphisme, composé avec la trivialisation de λ donnée par le choix d'une orientation de $H^2(X,\mathbb{R})^+$ (cf proposition 3.13).

La construction des invariants dans ce cas de dimension 0 est donnée par le résultat suivant :

Théorème 3.19 *Le nombre $\sharp\,\mathcal{Y}_g$ de points de $\mathcal{Y}_g$ comptés avec les signes de 4 est indépendant du choix de la métrique générique g.*

Esquisse de démonstration. Soient g et g' deux métriques génériques satisfaisant les propriétés précédentes, et soit $(g_t)_{t\in[0,1]}$ une famille générique telle que $g_0 = g$, $g_1 = g'$. On dispose donc de la variété de dimension 1 donnée par la propriété 3. Cette variété est naturellement orientée par les arguments de la section 3.1.3 : On voit en effet cette variété comme une sous-variété de $[0,1] \times \mathcal{A}_{irr}/\mathcal{G}$, définie par une équation de Fredholm $R_{\nabla}^{+g_t} = 0$; mettant l'orientation naturelle sur le segment $[0,1]$, et utilisant le fibré λ de la section 3.1.3, on obtient l'orientation voulue. On vérifie que les signes attribués aux points de $\mathcal{Y}_{g'}$ correspondent aux signes comme composante du bord de la variété $\cup_{t\in[0,1]}\mathcal{Y}_{g_t}$ et que les signes attribués aux points de $\mathcal{Y}_g$ sont opposés aux signes comme composante du bord de la variété $\cup_{t\in[0,1]}\mathcal{Y}_{g_t}$. Il en résulte que si $\cup_{t\in[0,1]}\mathcal{Y}_{g_t}$ est compacte, on a

$$\sharp\,\mathcal{Y}_{g'} - \sharp\,\mathcal{Y}_g = \sharp\,\partial(\cup_{t\in[0,1]}\mathcal{Y}_{g_t}) = 0.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $\cup_{t\in[0,1]}\mathcal{Y}_{g_t}$ est une variété compacte. L'idée est la suivante : On peut appliquer le théorème de compacité d'Uhlenbeck avec une métrique variable. Si la famille ci-dessus n'est pas compacte, elle va donc converger en une métrique g_{t_0} vers la donnée d'une connexion antiautoduale pour g_{t_0} sur un fibré E' avec $c' := c_2(E') < c_2(E)$ et d'un lieu singulier de degré $c_2(E) - c_2(E')$. Mais l'espace de modules paramétrant ces données apparaît seulement en codimension 4 (cf remarque 3.16) dans l'espace des paires constituées d'une connexion (singulière) et d'une métrique, du moins tant qu'on ne considère que les strates $\mathcal{Y}_{g,c'} \times S^{c-c'}X$ du bord avec $c' > 0$. Pour un chemin générique, la famille compactifiée $\overline{\cup_{t\in[0,1]}\mathcal{Y}_{g_t}}$ n'a donc pas de telles limites avec $c' > 0$. On admettra que les limites dans $\mathcal{Y}_{g,0} \times S^c X$ n'entraînent pas de défaut de compacité dans ce cas.

■

3.2.3 Cas général et construction des invariants

On suppose ici que g est générique, $b_2^+(X) > 1$, et que la dimension de $\mathcal{Y}_c$ est paire, c'est-à-dire que

$$8c - 3(b_2^+ + 1) = 2k.$$

On choisit une orientation de $H^2(X,\mathbb{R})^+$ et on suppose aussi que $4c \geq 3b_2^+(X) + 5$.

L'idée générale décrite dans [7] est de procéder de la manière suivante :

1. On commence par étendre canoniquement à la compactification d'Uhlenbeck $\overline{\mathcal{Y}}_{g,c}$ les classes $\mu(\alpha)$, $\alpha \in H_2(X,\mathbb{Q})$.
2. On construit une classe fondamentale pour $\overline{\mathcal{Y}}_{g,c}$ de degré $2k$.

Les polynômes de Donaldson (qui ne dépendront que de c comme ci-dessus, et du choix d'orientation de $H^2(X,\mathbb{R})^+$) sont des polynômes de degré k sur $H_2(X,\mathbb{Q})$ à coefficients rationnels, définis par

$$P_c(\alpha_1,\ldots,\alpha_k) = \int_{\overline{\mathcal{Y}}_{g,c}} \mu(\alpha_1) \cup \ldots \cup \mu(\alpha_k).$$

Ce programme est très difficile à mener à bien, particulièrement la construction de la classe fondamentale, qui nécessite une description explicite de la structure de $\overline{\mathcal{Y}}_{g,c}$ près du bord (les connexions avec singularités).

Dans [5], la description suivante est donnée : on considère des classes $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ qui sont des classes d'homologie de surfaces orientées $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_k$ lisses et se rencontrant deux à deux transversalement en des points distincts. On remplace ensuite l'application de restriction

$$r_{\Sigma_i} : \mathcal{B}_X \to \mathcal{B}_{\Sigma_i}$$

par l'application de restriction :

$$r_{T\Sigma_i} : \mathcal{B}_X \to \mathcal{B}_{T\Sigma_i}$$

où $T\Sigma_i$ est un voisinage tubulaire de Σ_i dans X. Comme on sait qu'une connexion irréductible antiautoduale reste irréductible sur un ouvert non vide de X, cette application fournit donc après passage au quotient par $SO(3)$ et restriction aux connexions antiautoduales (qui sont irréductibles sous l'hypothèse de généricité de g) :

$$\tilde{r}_{T\Sigma_i} : \mathcal{Y}_{g,c} \to \mathcal{A}_{irr,T\Sigma_i}/\mathcal{G}.$$

Le terme de droite possède la classe $\mu([\Sigma]) \in H^2(\mathcal{A}_{irr,T\Sigma_i}/\mathcal{G}, \mathbb{Q})$. On observe alors que l'application $\tilde{r}_{T\Sigma_i}$ s'étend en une application $\overline{\tilde{r}}_{T\Sigma_i}$ à l'ouvert de $\overline{\mathcal{Y}}_{g,c}$ constitué de connexions avec un lieu singulier dont le support ne rencontre pas Σ_i.

La surface Σ_i orientée munie de la métrique induite est une surface de Riemann. On peut construire un fibré en droites complexes $det\,\mathbb{D}_{\Sigma_i}$ sur $\mathcal{A}_{irr,\Sigma_i}/\mathcal{G}$, dès qu'on on s'est donné une structure spin η sur Σ_i, c'est-à-dire un fibré en droites holomorphe η tel que

$$\eta^{\otimes 2} \cong K_{\Sigma_i}.$$

Notons que chaque connexion ∇ sur $E_{|\Sigma}$ munit E d'une structure holomorphe d'après le théorème 1.14. On notera $\overline{\partial}_\nabla$ l'opérateur $\overline{\partial}$ de E muni de cette structure holomorphe. L'opérateur de Dirac $\mathbb{D}_{\Sigma_i}$ en un point ∇ s'identifie simplement à l'opérateur $\overline{\partial}_\nabla$ induit sur $E \otimes \eta$

$$\mathbb{D}_{\Sigma_i} = \overline{\partial}_\nabla : A^0_X(E \otimes \eta) \to A^{0,1}_X(E \otimes \eta).$$

Ce fibré en droites défini sur $\mathcal{A}_{\Sigma_i,irr}/\mathcal{G}'$ s'étend en un fibré en droites complexes $\mathcal{L}_i$ sur $\mathcal{A}_{irr,T\Sigma_i}/\mathcal{G}'$ et on a donc des sous-variétés D_i de codimension 2 dans $\mathcal{A}_{irr,T\Sigma_i}/\mathcal{G}'$ qui ont pour classe de cohomologie $\mu_{\Sigma_i}([\Sigma_i])$, données comme les lieux d'annulation D_i de sections génériques de ce fibré $\mathcal{L}_i$. Choisissant ces sections suffisamment génériquement, et utilisant le fait que par un compte de dimension, les D_j, pour $j \neq i$ ne s'intersectent pas dans le lieu d'indétermination de $\overline{\tilde{r}}_{T\Sigma_i}$, Donaldson conclut que l'intersection

$$\cap_i \overline{\tilde{r}}^{-1}_{T\Sigma_i}(D_i)$$

est constituée d'un nombre fini de points qui sont des points de $\mathcal{Y}_{g,c}$, auxquels on peut assigner des signes provenant de l'orientation de $\mathcal{Y}_{g,c}$ et de l'orientation complexe des fibrés en droites $\mathcal{L}_i$.

On définit alors $P_k([\Sigma_1], \ldots, [\Sigma_k])$ comme le nombre de ces points, comptés avec leurs signes donnés par l'orientation de $\mathcal{Y}_{g,c}$ et l'orientation complexe des L_i.

Il reste à montrer que ce nombre est indépendant des choix faits, et de la métrique sous l'hypothèse $b_2(X)^+ > 1$.

3.3 Cas kählérien ou projectif

3.3.1 Fibrés vectoriels stables et métriques d'Hermite-Einstein

On se place dans cette section dans le cas où la métrique g est une métrique kählérienne. Notons que dans ce cas le nombre b_2^+ est impair par le théorème de l'indice de Hodge. Il vaut alors en effet $2h^{2,0}(X) + 1$.

On a montré dans la section 1.2.3 qu'une connexion ∇ antiautoduale sur E détermine une structure de fibré holomorphe sur E, telle que $\nabla^{0,1}$ soit l'opérateur $\overline{\partial}_E$. Comme ∇ est compatible avec h, ∇ est alors la connexion de Chern de h et cette connexion satisfait la propriété :

$$\omega \wedge R_\nabla = 0,$$

où ω est la forme de Kähler.

Soit X une variété kählérienne compacte de dimension n, et ω une forme de Kähler sur X. Soit E un fibré vectoriel holomorphe sur X, de faisceau de sections holomorphes $\mathcal{E}$. On définit tout d'abord la notion de μ-stabilité par rapport à ω (en fait la notion ne dépend que de la classe de Kähler $[\omega]$) comme dans le cas projectif).

Définition 3.20 *Le fibré E est ω-stable si pour tout sous-faisceau analytique cohérent $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ tel que $0 < rang\,\mathcal{F} < rang\,\mathcal{E}$, on a*

$$\frac{c_1(\mathcal{F})[\omega]^{n-1}}{rang\,\mathcal{F}} < \frac{c_1(\mathcal{E})[\omega]^{n-1}}{rang\,\mathcal{E}}.$$

Ici on utilise la notation $c_1(\mathcal{F})[\omega]^{n-1}$ pour l'intégrale $\int_X c_1(\mathcal{F}) \smile [\omega]^{n-1}$. On définit la classe $c_1(\mathcal{F})$ comme étant la classe $c_1(det\,\mathcal{F})$. Ici le déterminant $det\,\mathcal{F}$ d'un faisceau analytique cohérent sans torsion $\mathcal{F}$ est défini comme dans le cas algébrique : la puissance extérieure maximale $\bigwedge^{rang\,\mathcal{F}} \mathcal{F}$ est un faisceau localement libre de rang 1 sur l'ouvert $U \overset{j}{\hookrightarrow} X$ où $\mathcal{F}$ est localement libre. Le faisceau réflexif $j_* \bigwedge^{rang\,\mathcal{F}} \mathcal{F}$ associé est alors localement libre de rang 1 sur X et on le note $det\,\mathcal{F}$.

On a le théorème de Donaldson-Uhlenbeck-Yau (montré par Donaldson dans le cas des surfaces compactes kählériennes, le seul qui nous intéresse ici).

Théorème 3.21 *(Uhlenbeck-Yau) Soit X une variété kählérienne compacte, ω une forme de Kähler sur X, et soit E un fibré vectoriel ω-stable sur X. Alors E admet une métrique d'Hermite-Einstein (relativement à ω), qui est unique à un coefficient près. Inversement, si E admet une métrique d'Hermite-Einstein, E est polystable, c'est-à-dire une somme directe de fibré stables de même pente μ.*

Ici la pente $\mu_\omega(F)$ est le nombre $\frac{c_1(\mathcal{F})[\omega]^{n-1}}{rang\,\mathcal{F}}$.

Dans notre cas, les fibrés holomorphes $\mathcal{E}$ sont à déterminant trivial, et donc à première classe de Chern nulle, a fortiori à pente nulle, mais leurs sous-fibrés ne satisfont pas nécessairement cette condition.

Ce théorème nous fournit le résultat suivant :

Théorème 3.22 *Si X est une surface kählérienne compacte simplement connexe, il existe un homéomorphisme entre l'espace de module des fibrés vectoriels stables de rang 2 et déterminant trivial et l'espace de modules $\mathcal{A}/\mathcal{G}$ des connexions antiautoduales irréductibles.*

Pour construire cette bijection, dans une direction, on a fixé la métrique h sur E, on fait varier la connexion satisfaisant une certaine équation (d'autoantidualité) et on construit la structure complexe à l'aide de la partie de type $(0,1)$ de la connexion ; dans l'autre sens, on part de la structure complexe variable satisfaisant la condition de stabilité, ce qui fournit la moitié (partie de type $(0,1)$) de la connexion, et on construit la métrique, qui donne aussi la partie de type $(1,0)$ de la connexion. Pour montrer que cette bijection est un homéomorphisme, il faut bien sûr connaître la continuité en les paramètres dans le théorème d'existence 3.21.

3.3.2 Compactification

Restreignons-nous au cas où la surface complexe X est projective et la forme de Kähler ω est la forme de Chern d'un fibré en droites L ample muni d'une métrique adéquate. Alors on peut construire (cf [22], [18], [28]) un espace de modules de faisceaux sans torsion semi-stables de première classe de Chern nulle et de seconde classe de Chern fixée c. Ici la notion de semi-stabilité fait intervenir non seulement les pentes des sous-faisceaux cohérents, mais aussi tout leur polynôme de Hilbert relativement à L (cf [28]).

Rappelons aussi que les points stables de cet espace de modules paramètrent les classes d'isomorphisme de faisceaux stables sans torsion de première classe de Chern nulle et de seconde classe de Chern fixée c. Les points semi-stables qui permettent de compactifier l'espace de modules paramètrent les classes d'équivalence de faisceaux sans torsion semi-stables de première classe de Chern nulle et de seconde classe de Chern fixée c pour la relation suivante : deux faisceaux cohérents sans torsion semi-stables sont équivalents si leurs gradués de Jordan-Hölder sont isomorphes. Par définition, les morceaux du gradué de Jordan-Hölder de F sont des faisceaux stables F' de polynôme de Hilbert $P_L(F') \geq \frac{r'}{r} P_L(F)$. Si F est semi-stable, tous les gradués F' sont de polynôme de Hilbert égal à $\frac{r'}{r} P_L(F)$.

Soit F un faisceau cohérent semi-stable de déterminant trivial. Alors son bidual F^{**} est semi-stable et localement libre. En particulier, il est semi-stable au sens des pentes et s'il n'est pas stable au sens des pentes, il est l'extension d'un fibré en droites par un autre fibré en droites de même pente. Ainsi, soit F^{**} est stable au sens des pentes, soit son gradué de Jordan-Hölder est polystable au sens des pentes. Dans les deux cas, on produit grâce au théorème 3.21 une connexion antiautoduale sur un fibré hermitien de déterminant trivial et de classe de Chern $c_2(F^{**}) \leq c_2(F)$.

Par ailleurs, F détermine également l'application quotient

$$F^{**} \to F^{**}/F,$$

où le terme de droite est un faisceau cohérent de longueur finie égale à $c_2(F) - c_2(F^{**})$. Associant à ce faisceau de longueur finie son support (compté avec des multiplicités données par la longueur en chaque point, F détermine donc un élement de $S^{c-c'}X$, $c = c_2(F)$, $c' = c_2(F^{**})$.

Ceci montre que l'application donnée par le théorème 3.22 une application de l'espace de modules ci-dessus vers la compactification d'Uhlenbeck de l'espace de modules des connexions antiautoduales. Noter que cette application étendue n'est plus une bijection. Prenons le cas où $c_2(F^{**}) = c_2(F) - 1$ et F est stable au sen des pentes. Alors on a une suite exacte de faisceaux cohérents :

$$0 \to F \to F^{**} \to \mathbb{C}_x \to 0$$

où x est l'unique point de x où F n'est pas localement libre, et $\mathbb{C}_x$ est le faisceau gratte-ciel supporté en x.

Ainsi F détermine le faisceau stable F^{**} et le point x, mais il détermine aussi le morphisme $F^{**} \to \mathbb{C}_x$ à un scalaire près. Ce morphisme est donc paramétré par un $\mathbb{P}^1$, et donc l'application étendue contracte le bord.

En admettant que cette application étendue est continue, on voit que les invariants de Donaldson peuvent se calculer comme des intégrales sur l'espace de modules des faisceaux semi-stables de rang 2 et déterminant trivial, à condition qu'on soit dans les conditions (concernant la métrique) assurant que l'espace de modules a la dimension correcte et soit génériquement lisse (c'est-à-dire réduit).

3.3.3 Comparaison infinitésimale

X étant une surface kählérienne compacte, On se propose ici de comparer la description infinitésimale de l'espace $\mathcal{Y}_{irr}$ et celle du foncteur de déformation d'un fibré vectoriel stable de rang 2 et déterminant trivial.

Soit donc E un fibré vectoriel holomorphe sur X de rang 2, stable, à déterminant trivial et de seconde classe de Chern $c_2 = c$. Soit $\overline{\partial}_E$ l'opérateur $\overline{\partial}$ de E, qui détermine la structure holomorphe de E d'après le théorème 1.14. On peut décrire la théorie des déformations du fibré vectoriel holomorphe E du point de vue de la géométrie différentielle complexe de la façon suivante (cf [28] pour la description du point de vue formel, plus adapté à la géométrie algébrique). Une déformation de E est donnée par une déformation de l'opérateur $\overline{\partial}_E$, mais bien sûr cette déformation est définie modulo l'action de $Sl(E)$. La déformation de l'opérateur $\overline{\partial}_E$ doit induire la déformation triviale sur $det\, E$, et donc est de la forme

$$\overline{\partial}_E + \eta,$$

où $\eta \in A_X^{0,1}(Ad\, E)$. Cet opérateur déformé doit satisfaire la condition

$$(\overline{\partial}_E + \eta) \circ (\overline{\partial}_E + \eta) = 0$$

et donc au premier ordre en η, on obtient la condition :

$$\overline{\partial}_{Ad\, E}\eta = 0 \text{ dans } A_X^{0,2}(Ad\, E).$$

Par ailleurs si on examine l'orbite de $\overline{\partial}_E$ sous l'action de $SL(E)$, on voit immédiatement que son espace tangent au point $\overline{\partial}_E$ est donné par

$$Im\,\overline{\partial}_{Ad\,E} : A^0_X(Ad\,E) \to A^{0,1}_X(Ad\,E).$$

Ainsi l'espace tangent aux déformations infinitésimales de E est la cohomologie au milieu du complexe

$$A^0_X(Ad\,E) \overset{\overline{\partial}_{Ad\,E}}{\to} A^{0,1}_X(Ad\,E) \overset{\overline{\partial}_E}{\to} A^{0,2}_X(Ad\,E), \tag{3.3.4}$$

c'est-à-dire l'espace vectoriel $H^1(X, Ad\,E)$ d'après le théorème de Dolbeault (cf [25]). On peut aussi identifier par la théorie de Hodge $H^1(X, Ad\,E)$ au noyau de

$$\overline{\partial}_{Ad\,E} + \overline{\partial}^*_{Ad\,E} : A^{0,1}_X(Ad\,E) \to A^{0,2}_X(Ad\,E) \oplus A^0_X(Ad\,E). \tag{3.3.5}$$

Soit h une métrique hermitienne sur E qui induit la métrique triviale sur $detE = \mathcal{O}_X$, et soit ∇ la connexion de Chern associée, qui est une connexion spécial-hermitienne. On veut comparer l'opérateur (3.3.5) et l'opérateur suivant (3.3.6), dont le noyau s'identifie lorsque ∇ est antiautoduale à l'espace tangent à l'espace de modules des connexions antiautoduales sur E (la métrique h étant fixée).

$$A^1_X(su(E)) \overset{d^+_\nabla + d^*_\nabla}{\to} A^{2+}_X(su(E)) \oplus A^0_X(su(E)). \tag{3.3.6}$$

Notons que $Ad\,E$ est isomorphe à $su(E) \otimes \mathbb{C}$. Dans (3.3.6) les formes différentielles sont réelles. Cependant on a une structure complexe sur A^1_X donnée par la structure presque complexe de X, c'est-à-dire par l'identification de fibrés vectoriels réels :

$$\Omega_{X,\mathbb{R}} \cong \Omega^{0,1}_X,$$

et cela identifie $A^1_X(su(E))$ à $A^{0,1}_X(Ad\,E)$. Le terme de droite de (3.3.6) est une somme de deux morceaux, d'après la proposition 1.7, à savoir $\mathcal{R}e\,A^{0,2}_X$ et $\omega A^0_X(su(E))$. Encore une fois, $\mathcal{R}e\,A^{0,2}_X$ est muni d'une structure complexe (il est isomorphe comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel à $A^{0,2}(Ad\,E)$). En conclusion, l'opérateur (3.3.6) se réécrit sous la forme suivante :

$$A^{0,1}_X(Ad\,E) \overset{d_\nabla + d^*_\nabla}{\to} A^{0,2}_X(Ad\,E) \oplus \omega A^0_X(su(E)) \oplus A^0_X(su(E)), \tag{3.3.7}$$

et on peut manifestement identifier $\omega A^0_X(su(E)) \oplus A^0_X(su(E)$ avec $A^0_X(Ad\,E)$ par la flèche

$$u + \iota v \mapsto u - \omega v,\ u,\ v \in A^0_X(su(E)).$$

On a alors :

Proposition 3.23 *Avec ces identifications, la composition $d^{0,2}_\nabla$ de l'opérateur d^+_∇ et de la projection sur $A^{0,2}_X(Ad\,E)$ s'identifie à l'opérateur $\overline{\partial}_{Ad\,E}$. De plus, notant q la composition de l'opérateur de projection $\Omega^2_X \to \Omega^{2+}_X$ et de la projection $\Omega^{2+}_X \to \omega A^0_X(su(E)) \cong A^0_X(su(E))$,*

$$q \circ d^+_\nabla + d^*_\nabla = q \circ d_\nabla + d^*_\nabla$$

s'identifie à l'opérateur $2\overline{\partial}^*_{Ad\,E}$ agissant sur $A^{0,1}_X(Ad\,E)$.

Démonstration. Le premier énoncé résulte immédiatement du fait que $\nabla^{0,1} = \overline{\partial}_E$ agissant sur les sections de E. Comme l'opérateur $\overline{\partial}_{Ad\,E}$ agissant sur $Ad\,E$ est induit par $\overline{\partial}_E$, on trouve aussi que

$$d_\nabla^{0,1} = \overline{\partial}_{Ad\,E}$$

sur $A^0_X(su(E))$, puis que

$$d_\nabla^{0,2} = \overline{\partial}_{Ad\,E}$$

sur $A^1_X(su(E)) = A^{0,1}_X(Ad\,E)$.

Le second point est plus délicat, car il fait intervenir les identités kählériennes.

Celles-ci fournissent, pour $\phi \in A^1_X(Ad\,E)$:

$$d_\nabla^*\phi = (\overline{\partial}^*_{Ad\,E} + \partial^*_{Ad\,E})\phi,$$

$$-\iota[\Lambda, d_\nabla]\phi = (\overline{\partial}^*_{Ad\,E} - \partial^*_{Ad\,E})\phi,$$

où Λ est l'opérateur adjoint de l'opérateur L de cup-produit avec ω, de sorte que Λ est nul sur

$$A^{2,0}_X,\ A^{0,2}_X,\ (A^{1,1}_X)_{prim}$$

et envoie $\omega \wedge \eta$ sur η. En additionnant ces deux égalités, on trouve :

$$d_\nabla^*\phi - \iota[\Lambda, d_\nabla]\phi = 2\overline{\partial}^*_{Ad\,E}\phi.$$

Comme ϕ est une section de $A^1_X(Ad\,E)$, on a $\Lambda\phi = 0$, et cette égalité devient :

$$d_\nabla^*\phi - \iota\Lambda d_\nabla\phi = 2\overline{\partial}^*_{Ad\,E}\phi.$$

Prenant ϕ réel, $d_\nabla^*\phi$ et $\Lambda d_\nabla\phi$ sont réels, et on a exactement le résultat annoncé, compte tenu du fait que $\Lambda d_\nabla = \Lambda q d_\nabla$. ∎

Corollaire 3.24 *Les noyaux et conoyaux des opérateurs (3.3.5) et (3.3.6) sont canoniquement isomorphes.*

Chapitre 4

Géométrie symplectique et géométrie kählérienne

4.1 Géométrie symplectique

Désormais on va s'intéresser à un autre aspect de la géométrie kählérienne, à savoir la géométrie symplectique sous-jacente. A priori cela signifie qu'on oublie la structure complexe pour ne garder que la 2-forme de Kähler. Il se trouve que les travaux de Gromov ont indiqué une bien meilleure voie à suivre : on n'oublie pas la structure complexe mais on s'autorise à la perturber génériquement en une structure presque complexe dominée par la forme symplectique. Ce qu'on va montrer dans la suite de ce cours est le fait que du point de vue de l'étude des courbes (pseudo)-holomorphes, l'intégrabilité de la structure complexe ne joue aucun rôle, tandis que la possibilité de perturber la structure complexe fournit des énoncés de transversalité qui vont permettre de construire des espaces de modules stables par déformation et donc des invariants liés à ces espaces de modules. Si en particulier la variété kählérienne compacte initiale était projective, le gain est évident, car une variété projective contient toujours énormément de courbes (par exemple des intersections complètes d'hypersurfaces amples), dont on voit facilement qu'elles forment des familles de dimension excessive.

Il se trouve qu'a posteriori, on peut quand même calculer les invariants de Gromov-Witten sans perturber la structure complexe et donc en restant dans le cadre de la géométrie algébrique, grâce à des formules d'excès (cf [8] et chapitre 6). Il n'en reste pas moins que ces invariants et leur structure ont été découverts grâce à un détour par la géométrie symplectique.

4.1.1 Définition, exemples

Soit X une variété réelle de dimension $2n$.

Définition 4.1 *Une forme symplectique sur X est une 2-forme ω fermée et non dégénérée en tout point.*

Exemple 4.2 *Considérons $X = \mathbb{R}^{2n}$, muni des coordonnées $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ et de la forme*

$$\omega = \sum_i dx_i \wedge dy_i.$$

Ceci est appelé la structure symplectique standard sur $\mathbb{R}^{2n}$.

Un autre exemple important qui généralise le précédent est donné par le fibré cotangent $Y := \Omega_X$ d'une variété X de dimension n. Soit $\pi : Y \to X$ le morphisme structurel. Sur $Y = \Omega_X$, on dispose d'une section tautologique du fibré $\pi^*\Omega_X$. Via $\pi^* : \pi^*\Omega_X \to \Omega_Y$, cette section fournit une 1-forme θ sur Y. On pose

$$\omega = d\theta.$$

En prenant des coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n$ sur X, complétées par les coordonnées $y_1, \ldots, y_n$ sur Y, données par la base locale associée $dx_1, \ldots, dx_n$ de Ω_X, on a $\theta = \sum_i y_i dx_i$, et on en déduit immédiatement que cette forme est symplectique et localement isomorphe à celle de l'exemple 4.2.

Une propriété évidente des variétés symplectiques est le fait qu'elles sont naturellement orientées. En effet, la forme ω^n est par définition une forme de degré maximal partout non nulle et donne donc une orientation sur X.

Le même argument montre le résultat suivant :

Lemme 4.3 *Soit X une variété symplectique compacte. Alors la 2-forme symplectique (fermée) ω est de classe non nulle dans $H^2(X, \mathbb{R})$.*

En effet, comme ω^n est une forme volume sur X, on a $\int_X \omega^n \neq 0$, et donc ω^n est de classe non nulle dans $H^{2n}(X, \mathbb{R})$. Il en résulte que ω n'est pas exacte. ■

Notons que cet argument montre un résultat un peu plus fort, à savoir que la puissance n-ième de la classe de ω dans $H^2(X, \mathbb{R})$ doit engendrer $H^{2n}(X, \mathbb{R})$. Par exemple, la variété $S^2 \times S^4$ n'est pas symplectique, car aucune classe dans $H^2(S^2 \times S^4, \mathbb{R})$ ne satisfait $\alpha^3 \neq 0$ dans $H^6(S^2 \times S^4, \mathbb{R})$.

4.1.2 Le théorème de Darboux

Théorème 4.4 *(Darboux) Soit ω une forme symplectique sur X, $\dim X = 2n$. Alors ω est localement isomorphe à la forme symplectique standard sur $\mathbb{R}^{2n}$ (cf exemple 4.2).*

Démonstration. La démonstration qui suit est modelée sur la preuve de la forme globale de ce théorème (théorème 4.5), due à Moser. Soit $x \in X$. Choisissons des coordonnées locales $x_1, \ldots, x_{2n}$ sur X centrées en $x \in X$ et telles que au point x on ait

$$\omega_x = \sum_{i \leq n} dx_i \wedge dx_{i+n}.$$

Soit η la forme standard $\sum_{i \leq n} dx_i \wedge dx_{i+n}$ définie au voisinage de x. Notons que comme $\eta_x = \omega_x$, la forme $\gamma_t = (1-t)\omega + t\eta$ est symplectique au voisinage de x pour tout $t \in [0, 1]$. On a $\frac{d}{dt}\gamma_t = \eta - \omega$ et cette forme fermée s'écrit (au voisinage de x)

$$\eta - \omega = d\alpha,$$

où l'on peut bien sûr supposer que $\alpha(x) = 0$ Comme γ_t est symplectique, on peut écrire au voisinage de x, $\alpha = -Int_{\chi_t}\gamma_t$ pour un champ de vecteurs χ_t dépendant du temps et s'annulant en x. En dehors d'une petite boule centrée en x, on peut modifier χ_t de façon à garantir que χ_t est à support compact. Alors le flot de difféomorphisme Φ_t associé au champ dépendant du temps χ_t est défini pour tout t, et on vérifie que

$$\frac{d}{dt}\Phi_t^*\gamma_t = 0$$

au voisinage de x. Il vient donc au voisinage de x

$$\omega = \Phi_0^*\gamma_0 = \Phi_1^*\gamma_1 = \Phi_1^*\eta,$$

et on a donc montré que le difféomorphisme local Φ_1^{-1} qui fixe le point x transforme ω en la forme standard.

■

4.1.3 Cas compact

Le théorème suivant est une version globale du théorème local 4.4 et se démontre d'ailleurs de la même manière.

Théorème 4.5 *Soit X une variété compacte, et soit $(\omega_t)_{t\in[0,1]}$ une famille différentiable de formes symplectiques sur X, telles que la classe $[\omega_t] \in H^2(X,\mathbb{R})$ soit constante. Alors il existe un difféomorphisme $\phi : X \to X$, isotope à l'identité, tel que $\phi^*\omega_1 = \omega_0$.*

Démonstration. La démonstration est essentiellement la même que dans le cas local (théorème 4.4). Comme on a $\frac{d}{dt}[\omega_t] = 0$ dans $H^2(X,\mathbb{R})$, on a

$$\frac{d}{dt}\omega_t = d\alpha_t,$$

pour une famille différentiable de 1-formes α_t sur X. Comme ω_t est symplectique, on peut écrire $\alpha_t = -Int_{\chi_t}\omega_t$, pour un champ de vecteurs dépendant du temps χ_t. Soit Φ_t le flot de difféomorphismes associé au champ χ_t. Ce flot est bien défini pour $t \in [0,1]$ grâce à la compacité de X. La formule de Cartan-Lie montre que

$$\frac{d}{dt}\Phi_t^*\omega_t = \Phi_t^*(d(Int_{\chi_t}\omega_t)) + \Phi_t^*(\frac{d}{dt}\omega_t) = 0.$$

Comme $\Phi_0^*\omega_0 = \omega_0$, on trouve bien $\Phi_1^*\omega_1 = \omega_0$. ■

4.2 Structure presque complexe, courbes pseudoholomorphes

4.2.1 Structures presque complexes compatibles

Soit X une variété réelle connexe de dimension $2n$ munie d'une forme symplectique ω.

Définition 4.6 *Une structure presque complexe J sur X est compatible avec ω si*

$$\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v),\ \forall u,\ v \in T_{X,x},\ \omega(u, Ju) > 0,\ 0 \neq u \in T_{X,x}.$$

La première condition dit que ω est de type $(1,1)$ en tout point pour J. La seconde condition est tout à fait cruciale ; elle dit que ω "domine" J et elle permettra plus loin de borner topologiquement l'aire des courbes pseudoholomorphes. Le résultat suivant dû à Gromov est le lien entre géométrie symplectique et géométrie complexe.

Théorème 4.7 *Il existe des structures complexes compatibles avec ω sur X et l'ensemble de ces structures est contractile.*

Démonstration. Observons tout d'abord que la donnée de J est équivalente à la donnée d'une décomposition de l'espace tangent complexifié $T_{X,\mathbb{C}}$ en somme directe

$$T_{X,\mathbb{C}} = T_X^{1,0} \oplus T_X^{0,1}, \tag{4.2.1}$$

qui sont les espaces propres associés aux valeurs propres i et $-i$ de J. Bien sûr le second espace est le conjugué du premier. Par ailleurs on a le lemme suivant :

Lemme 4.8 *J satisfait les conditions de compatibilité ci-dessus si et seulement si on a :*

1. *$T_X^{1,0}$ est totalement isotrope pour l'extension $\mathbb{C}$-bilinéaire de ω.*
2. *La forme hermitienne $h(U,V) = -\iota\omega(U,\overline{V})$ définie sur $T_{X,\mathbb{C}}$ est définie positive sur $T_X^{1,0}$.*

Démonstration. Soient u, $v \in T_{X,\mathbb{R}}$. Alors on a

$$u = \frac{1}{2}(u - \iota Ju) + \frac{1}{2}(u + \iota Ju),\ v = \frac{1}{2}(v - \iota Jv) + \frac{1}{2}(v + \iota Jv)$$

qui sont les décompositions de u et v dans la décomposition (4.2.1). Les vecteurs $U = \frac{1}{2}(u - \iota Ju)$, $V = \frac{1}{2}(v - \iota Jv)$ sont dans $T_X^{1,0}$ et l'engendrent, lorsque u (ou v) varie dans $T_{X,\mathbb{R}}$. Il vient donc

$$\omega(U,V) = \frac{1}{4}\omega(u - \iota Ju, v - \iota Jv)$$

$$= \frac{1}{4}(\omega(u,v) - \omega(Ju,Jv) - \iota\omega(u,Jv) - \iota\omega(Ju,v)).$$

Prenant les parties réelles, on voit que le fait que $T_X^{1,0}$ soit totalement isotrope entraîne la J invariance de ω. Inversement, si $\omega(u,v) = \omega(Ju,Jv)$, on a aussi $\omega(u,Jv) = -\omega(Ju,v)$ car $J^2 = -Id$, et donc $\omega(U,V) = 0$. Ceci montre le premier point.

Par ailleurs on a

$$-\iota\omega(u - \iota Ju, v + \iota Jv) = 2(\omega(u,Jv) - \iota\omega(u,v))$$

et donc la forme de gauche est définie positive sur $T_X^{1,0}$ si et seulement si la forme hermitienne

$$h(u,v) = \omega(u,Jv) - \iota\omega(u,v)$$

est définie positive sur T_X muni de sa structure complexe J, si et seulement si sa partie réelle $g(u,v) = \omega(u,Jv)$ est définie positive sur T_X. ■

Revenant à notre démonstration, nous montrons maintenant que pour $x \in X$ fixé, l'ensemble des structures complexes J_x sur $T_{X,x}$ satisfaisant les conditions de compatibilité par rapport à ω_x est contractile. Sur $T_{X,x,\mathbb{C}}$, considérons la forme d'intersection hermitienne :

$$h(u,v) = -\iota\omega(u,\overline{v}).$$

Cette forme hermitienne est de signature (n,n), où $2n = dim\, T_{X,x}$. Une structure complexe J sur $T_{X,x}$ est équivalente à la donnée d'un sous-espace complexe

$$T^{1,0}_{X,x} \subset T_{X,x,\mathbb{C}}$$

tel que

$$T^{1,0}_{X,x} \oplus \overline{T^{1,0}_{X,x}} = T_{X,x,\mathbb{C}}.$$

La condition que ω soit de type $(1,1)$ pour J équivaut au fait que $T^{1,0}_{X,x}$ soit totalement isotrope pour l'extension $\mathbb{C}$-linéaire de ω. La condition que ω domine J (ou soit J-positive) équivaut au fait que $h_{|T^{1,0}_{X,x}}$ soit définie positive.

Fixons une décomposition de $T_{X,x}$ en somme directe

$$T_{X,x} \cong L \oplus L'$$

de deux sous-espaces vectoriels lagrangiens pour ω. Cette décomposition fournit la décomposition correspondante de $T_{X,x,\mathbb{C}}$,

$$T_{X,x,\mathbb{C}} = L_{\mathbb{C}} \oplus L'_{\mathbb{C}}$$

où les deux espaces complexes $L_{\mathbb{C}}$ et $L'_{\mathbb{C}}$ sont isotropes à la fois pour h et ω. Notons π et π' les projections de $T_{X,x,\mathbb{C}}$ sur $L_{\mathbb{C}}$ et $L'_{\mathbb{C}}$ respectivement. Comme h est définie positive sur $T^{1,0}_{X,x}$ et nulle sur $L'_{\mathbb{C}}$, la restriction de π à $T^{1,0}_{X,x}$ est un isomorphisme, ce qui permet de voir $T^{1,0}_{X,x}$ comme le graphe d'une application $\mathbb{C}$-linéaire $\phi : L_{\mathbb{C}} \to L'_{\mathbb{C}}$. Notons que ces deux espaces vectoriels sont en dualité parfaite via ω ou mieux via h.

Lemme 4.9 *J est compatible avec ω si l'application ϕ a la propriété que $\mathcal{R}e\,\phi$ et $\mathcal{I}m\,\phi$ sont des applications symétriques de L dans L' et $\mathcal{I}m\,\phi$ est de plus définie positive.*

Démonstration. En effet, nous devons écrire les deux conditions

$$\omega(u,v) = 0,\ \forall u,\ v \in T^{1,0}_{X,x},$$

$$h(u,u) = -\iota\omega(u,\overline{u}) > 0,\ \forall 0 \neq u \in T^{1,0}_{X,x}.$$

L'endomorphisme ϕ est construit de façon que $T^{1,0}_{X,x}$ s'identifie à l'ensemble des $u + \phi(u)$, $u \in L_{\mathbb{C}}$, et donc ces conditions deviennent, compte tenu du fait que L et L' sont totalement isotropes pour ω :

$$\omega(u,\phi(v)) + \omega(\phi(u),v) = 0,\ \forall u,\ v \in L_{\mathbb{C}}, \tag{4.2.2}$$

$$-(\iota(\omega(u,\overline{\phi(u)})+\omega(\overline{\phi(u)},u))>0,\ \forall 0\neq u\in L_{\mathbb{C}}. \tag{4.2.3}$$

Décomposant ϕ (c'est-à-dire la matrice de ϕ dans des bases rélles de $L_{\mathbb{C}}$ et $L'_{\mathbb{C}}$) en parties réelle et imaginaire : $\phi=\mathcal{R}e\,\phi+\iota\mathcal{I}m\,\phi$, on trouve que via l'égalité (4.2.2), l'inégalité (4.2.3) s'écrit

$$\omega(u,\mathcal{I}m\,\phi(u))>0,\ \forall u\in L. \tag{4.2.4}$$

Prenant des bases duales e_i, f_j pour L et L', ce qui donne

$$\omega(e_i,f_j)=\delta_{ij},\ \omega(f_i,e_j)=-\delta_{ij}$$

on voit que (4.2.2) équivaut au fait que $\mathcal{R}e\,\phi$ et $\mathcal{I}m\,\phi$ sont symétriques et (4.2.4) est équivalent au fait que $\mathcal{I}m\,\phi$ est définie positive. ■

Ainsi l'ensemble des structures complexes compatibles avec ω sur $T_{X,x}$ s'identifie (non canoniquement) à l'ensemble des matrices symétriques de taille (n,n) à coefficients complexes dont la partie imaginaire est définie positive (c'est aussi ce qu'on appelle le demi-espace supérieur de Siegel). Cet ensemble est évidemment contractile.

L'ensemble des structures presque complexes sur J satisfaisant les conditions de compatibilité est donc l'ensemble des sections d'un fibré localement trivial de fibre contractile sur X. Or on a le lemme suivant :

Lemme 4.10 *Un fibré différentiable $P\to X$ localement trivial de fibre contractile admet une section différentiable et l'ensemble de ces sections est connexe.*

Démonstration. Supposons pour simplifier que X peut être couvert par un nombre fini de boules B_i au-dessus desquelles le fibré est trivial. On suppose une section σ construite sur $\cup_{i\leq k}B_i$ et on cherche à étendre σ sur $\cup_{i\leq k+1}B_i$. La section différentiable $\tau:=\sigma_{|(\cup_{i\leq k}B_i)\cap B_{k+1}}$ étant donnée, il suffit d'étendre τ en une section différentiable du fibré P sur B_{k+1}. Comme le fibré est trivial sur B_{k+1}, la section τ doit être vue comme une application différentiable à valeurs dans un espace contractile, qu'on cherche à étendre sur B_{k+1}. C'est exactement le lemme de Tietze-Urysohn.

Pour voir que l'ensemble des sections est connexe, et même connexe par arcs, étant données deux sections σ, σ', on applique l'énoncé précédent au fibré $\mathcal{L}P_{\sigma,\sigma'}$ des chemins dans P d'extrémités σ et σ' qui est encore un fibré sur X de fibre contractile. ■

Ceci conclut la preuve du théorème 4.7. ■

4.2.2 Courbes pseudoholomorphes, étude locale

Soit X une variété munie d'une structure presque complexe J. Soit Σ une surface de Riemann, c'est-à-dire une variété complexe de dimension 1.

Définition 4.11 *Une application pseudoholomorphe $f:\Sigma\to X$ (relativement à J) est une application différentiable dont la différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire en chaque point.*

Ici on utilise bien sûr la structure complexe sur T_Σ donnée par la structure complexe de Σ. Notons que si J est intégrable, c'est-à-dire que X est en fait munie par J d'une structure complexe, f est pseudoholomorphe si et seulement si elle est holomorphe, comme on le voit en utilisant des coordonnées holomorphes locales et la définition d'une fonction holomorphe.

Une observation remarquable due à Gromov [10] est le fait que la théorie locale des courbes pseudoholomorphes n'est pas influencée par la non intégrabilité de J (sauf pour les questions de régularité). Par théorie locale, on entend ici l'étude des germes d'applications pseudoholomorphes du disque dans X.

Pour expliquer ce phénomène, on va tout d'abord, comme dans [2], exposé II, appendice par Gauduchon, comparer les jets à l'ordre fini, ce qui permet de se rendre compte qu'à aucun ordre le tenseur de courbure de J n'influe sur les jets d'ordre fini d'applications pseudoholomorphes à valeurs dans X. Considérons tout d'abord le cas où J est une structure complexe sur X. Examinons l'espace X_n des jets d'ordre n d'applications holomorphes du disque dans X, ou encore les morphismes de schémas analytiques

$$\Delta_n := Spec\, \mathbb{C}[t]/(t^{n+1}) \to X.$$

Proposition 4.12 *L'application de restriction (ou d'oubli de l'ordre n) $\pi_n : X_n \to X_{n-1}$ fait de X_n un fibré affine complexe de rang $m = dim_{\mathbb{C}} X$ de fibré vectoriel associé $\pi^* T_X$, où π est la projection de X_{n-1} sur X.*

Démonstration. Au-dessus d'un ouvert U de X muni de coordonnées locales holomorphes $z_1, \ldots, z_m$, X_n est décrit comme l'ensemble $\{P = (P_1, \ldots, P_m),\ P(0) \in U\}$ des m-uples de polynômes à coefficients complexes tels que $P(0) \in U$, définis modulo t^{n+1}. L'application d'oubli $P \mapsto \overline{P} := P\, mod.\, t^n$ a donc pour fibre $\mathbb{C}^m$. Un changement de coordonnées $(z'_1, \ldots, z'_m) = \Psi(z_1, \ldots, z_m)$, où Ψ est holomorphe, agit de façon compatible sur X_n et X_{n-1} et l'action sur les fibres est affine, de partie linéaire associée égale à $d\Psi$, comme on le voit en examinant le terme en t^n de $\Psi \circ P$.

■

Le résultat suivant (proposition 4.14) montre que le même résultat a lieu dans le cadre presque complexe (on suppose ici que tout est de classe C^∞). (La preuve ne sera donnée ci-dessous qu'à l'ordre 2.) On a tout d'abord :

Proposition 4.13 *Soit X une variété presque complexe, alors l'espace total Y du fibré (complexe) tangent T_X admet naturellement une structure presque complexe pour laquelle*

$$\pi_* : T_Y \to \pi^* T_X$$

est $\mathbb{C}$-linéaire.

Démonstration. Le fibré tangent T_Y possède une partie verticale $T_{Y,vert}$ qui s'identifie à $\pi^* T_X$ et admet donc une structure complexe. Le quotient $T_Y / T_{Y,vert}$ s'identifie également à $\pi^* T_X$. Il reste à trouver une structure complexe naturelle sur T_Y induisant celle de $T_{Y,vert}$ et de $T_Y / T_{Y,vert}$. Soit $y = (x, u)$, $u \in T_{X,x}$ un point de Y. Dans des coordonnées locales $x_1, \ldots, x_{2m}$ sur X, on a des coordonnées

$$x_1, \ldots,\ x_{2m} u_1, \ldots, u_{2m}$$

sur Y. Soit $v \in T_{Y,y}$, qui se décompose en ses parties horizontale et verticale $v = (v_x, v_u)$. Soit J l'opérateur de structure complexe, représenté par une matrice $J(x) : \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ telle que $J^2 = -Id$. Ici $\mathbb{R}^{2m}$ est le fibré tangent, muni de sa base $\frac{\partial}{\partial u_i}$. On veut construire

$$\widetilde{J} : T_{Y,y} \to T_{Y,y}$$

$$(v_x, v_u) \mapsto (Jv_x, Jv_u + \phi(v_x))$$

où $\phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ dépend de (x, v). On pose tout simplement

$$\phi(x, v) = d_v J : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}.$$

Vérifions que $\widetilde{J}^2 = -Id$: ceci vient du fait que $J^2 = -Id$ et donc $J \circ d_v J + d_v J \circ J = 0$. Il vient donc

$$\widetilde{J}^2(v_x, v_u) = (-v_x, -v_u + J(d_v J(v_x)) + d_v J(Jv_x)) = (-v_x, -v_u).$$

On vérifie que le $\widetilde{J}$ ainsi construit dans des coordonnées locales ne dépend pas en fait du choix de coordonnées.

■

Ceci permet de comparer les jets d'ordre 1 et les jets d'ordre 2 d'applications pseudoholomorphes à valeurs dans X.

Proposition 4.14 *Si $x \in X$ et $u = f_*^{(1)}(\frac{\partial}{\partial z}) \in T_{X,x}^{1,0} \cong T_{X,x}$ est le vecteur tangent à un jet d'ordre 1 d'application pseudoholomorphe $f^{(1)} : \Delta_1 \to X$, une extension pseudoholomorphe de f à l'ordre 2 :*

$$f^{(2)} : \Delta_2 \to X$$

est uniquement déterminée par la donnée d'un vecteur tangent $v \in T_{T_X,u} = T_{Y,(x,u)}$, tel que $\pi_* v = u$.

Démonstration. Soit $f^{(2)} : \Delta \to X$ une application définie à l'ordre 2 et étendant un germe $f^{(1)} : \Delta \to X$ d'application pseudoholomorphe. Le vecteur tangent complexe $f_*^{(2)}(\frac{\partial}{\partial z})$ est une section du fibré tangent complexifié $T_{X,\mathbb{C}}$ définie à l'ordre 1 sur Δ. On peut donc le voir comme un germe $\tilde{f}^{(1)}$ défini à l'ordre 1 d'application de Δ dans $T_{X,\mathbb{C}}$, dont la projection dans X donne $f^{(1)}$ et dont la restriction à 0 est à valeur dans $T_X^{1,0} = T_X$. Un calcul local montre alors que $f^{(2)}$ est pseudoholomorphe à l'ordre 2 si et seulement si ce relèvement $\tilde{f}^{(1)}$ est à valeurs dans $T_X^{1,0} = T_X$ et pseudoholomorphe à l'ordre 1 pour la structure presque complexe $\widetilde{J}$, c'est-à-dire est déterminé par un vecteur complexe

$$\tilde{f}_*^{(1)}(\frac{\partial}{\partial z}) \in T_{T_X, f^{(1)}}^{1,0} = (T_{Y,f^{(1)}}, \widetilde{J}).$$

■

Le même argument montre plus généralement que l'ensemble des jets d'ordre n d'applications pseudoholomorphes de Δ dans X a exactement la structure décrite dans la proposition 4.12 et sa démonstration.

Nous allons maintenant décrire les applications pseudoholomorphes du disque dans (X, J), montrant d'un point de vue plus analytique et moins géométrique qu'il y en a autant localement que dans le cas complexe où J est intégrable. Considérons un point $x \in X$; on peut choisir des coordonnées x_1, $y_1, \ldots, x_m$, y_m centrées en x telles que la matrice différentiable J décrivant la structure presque complexe satisfasse $J_x(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial}{\partial y_i}$. En d'autres termes, la structure presque complexe J s'identifie au point x à la structure complexe standard ι sur $\mathbb{C}^m$ de coordonnées $z_i = x_i + \iota y_i$ (le point x étant envoyé sur $0 \in \mathbb{C}^m$). Notons que comme $J = \iota$ en 0, $J + \iota$ est inversible au voisinage de 0. Soit $f : \Delta \to \mathbb{C}^m$ une application J-holomorphe avec $f(0)$ proche de 0. Soient x, y, $z = x + \iota y$ les coordonnées standard sur Δ. La structure complexe I sur T_Δ est décrite par

$$I\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}$$

et donc f doit satisfaire la condition :

$$f_*(\frac{\partial}{\partial y}) = Jf_*(\frac{\partial}{\partial x}).$$

Comme on a

$$\frac{\partial}{\partial x} = (\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \overline{z}}),$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \iota(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}}),$$

cette équation se réécrit sous la forme :

$$\iota(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}) = J(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}),$$

ou encore :

$$(\iota - J)\frac{\partial f}{\partial z} = (\iota + J)\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}.$$

La matrice $(-\iota - J)$ admet un inverse M au voisinage de x, qui est différentiable, et notre équation s'écrit donc :

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = (M \circ f)(\iota - J \circ f)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Or il existe (cf [25]) un opérateur intégral P agissant sur les fonctions à valeurs complexes définies sur le disque, satisfaisant la condition

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(Pg) = g.$$

Considérons l'opérateur Q :

$$f \mapsto f - P((M \circ f)(\iota - J \circ f)\frac{\partial f}{\partial z})$$

agissant sur les fonctions à valeurs dans un petit voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^m$. Notre équation s'écrit :

$$\frac{\partial Q(f)}{\partial \overline{z}} = 0,$$

et donc équivaut au fait que $Q(f)$ est holomorphe. Comme la matrice $M(\iota - J)$ est petite au voisinage de 0, on peut montrer que l'opérateur Q est bijectif sur les fonctions à valeurs dans un petit voisinage de 0, et fournit donc une bijection entre m-uples de fonctions holomorphes (de petit module) et applications pseudoholomorphes d'un petit disque dans X à valeurs dans un petit voisinage de x.

4.2.3 Inégalité de Wirtinger et cas d'égalité

Soit X une variété symplectique de forme symplectique ω et soit J une structure presque complexe sur X, compatible avec ω. On a alors la forme hermitienne sur le fibré T_X muni de la structure complexe J, donnée par

$$h(u, v) = \omega(u, Jv) - \iota\omega(u, v).$$

La partie réelle $g(u, v) = \omega(u, Jv)$ munit X d'une structure riemannienne.

Soit maintenant $\Sigma \subset X$ une sous-variété orientée à bords de dimension 2 compacte de X. Σ possède une aire $\mathcal{A}(\Sigma)$ qui est définie comme l'intégrale

$$\int_\Sigma Vol_\Sigma,$$

où Vol_Σ est la forme volume sur Σ associée à la métrique induite $g_{|\Sigma}$ et à l'orientation de Σ. On a le théorème suivant :

Théorème 4.15 *(Inégalité de Wirtinger) On a*

$$\mathcal{A}(\Sigma) \geq \int_\Sigma \omega, \tag{4.2.5}$$

avec égalité si et seulement si Σ est une courbe pseudoholomorphe, c'est-à-dire que son espace tangent est invariant sous J en chaque point, munie de l'orientation complexe.

Lorsque Σ est compacte, le terme de droite ne dépend que de la classe d'homologie de Σ. Les courbes pseudoholomorphes compactes sont donc minimales. Dans le cas non compact, le même raisonnement vaut pour les surfaces Σ à bord fixé et à classe d'homologie relative fixée.

Ce théorème sera crucial par la suite, car il permettra de montrer des théorèmes de compacité pour les courbes pseudoholomorphes compactes de classe d'homologie fixée. En effet, la propriété cruciale est le fait que ces courbes soient en fait d'aire bornée.

Démonstration. Cette inégalité intégrale résulte en fait d'une inégalité ponctuelle qui résulte elle-même d'un lemme de géométrie hermitienne. Soit $E \subset \mathbb{C}^m$ un sous-espace vectoriel réel de dimension 2 orienté. Soit h la métrique hermitienne standard sur $\mathbb{C}^m$, et soient $g = \mathcal{R}e\, h$ la métrique euclidienne correspondante, $\omega = -\mathcal{I}m\, h$ la 2-forme non dégénérée correspondante. Donc

$$h(z, z') = \sum_i z_i \overline{z}'_i$$

et si $z_i = x_i + \imath y_i$,

$$g(z) = \sum_i x_i^2 + y_i^2,\ \omega = \sum_i dx_i \wedge dy_i.$$

On a alors :

Lemme 4.16 *Si μ_E est l'élément de volume sur E associé à l'orientation de E et à $g_{|E}$, on a $\omega_{|E} \leq \mu_E$, l'égalité étant atteinte si et seulement si E est une droite complexe munie de l'orientation complexe.*

Démonstration. Soit e_1, e_2 une base orthonormée directe de E, pour la métrique $g_{|E}$. Alors on a $\omega_{|E} = \omega(e_1, e_2)\mu_E$, et d'autre part

$$\omega(e_1, e_2) = g(Je_1, e_2).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit donc

$$\omega(e_1, e_2) \leq \mid Je_1 \mid_g \mid e_2 \mid_g = 1,$$

avec égalité si et seulement si Je_1 est proportionnel à e_2, c'est-à-dire que E est une droite complexe et e_1, Je_1 est une base directe de E, c'est-à-dire que l'orientation est l'orientation complexe.

■

L'inégalité de Wirtinger (4.2.5) en résulte immédiatement par application à chaque espace tangent

$$T_{\Sigma,x} \subset T_{X,x},$$

ce qui fournit l'inégalité de formes de degré 2 (sur la variété orientée Σ) :

$$\omega_{|\Sigma} \leq Vol_\Sigma,$$

et donc (4.2.5) par intégration.

■

4.3 Cas kählérien

4.3.1 Le cône des formes de Kähler

Soit X une variété kählérienne, de structure presque complexe associée J et de forme de Kähler ω. Par définition d'une métrique de Kähler, ω est fermée. Comme on a les relations de compatibilité

$$\omega(Ju, Jv) = \omega(u, v),\ \omega(u, Jv) = g(u, v),$$

où $g = \mathcal{R}e\, h$, la forme ω est en particulier non dégénérée et définit une forme symplectique sur X.

Notons que l'ensemble des formes de Kähler sur X est un cône convexe ouvert et définit donc une classe de déformations de structures symplectiques sur X. En fait l'ensemble des déformations de la forme symplectique est beaucoup plus gros que l'ensemble des formes de Kähler, sauf dans le cas de la dimension complexe 1, pour la raison suivante : les formes de Kähler sont de type $(1,1)$ c'est-à-dire satisfont la condition d'invariance ci-dessus. Une petite perturbation de la forme de Kähler comme 2-forme fermée reste bien sûr symplectique, mais elle aura génériquement une composante de type $(2,0)$ non triviale.

En fait, d'après le théorème 4.5, il n'est guère intéressant de déformer la forme symplectique (cela revient localement à perturber la classe de cohomologie de la forme symplectique). Par contre on peut déformer la structure complexe J en une structure presque complexe générique, ce qui va être crucial pour obtenir des énoncés de transversalité pour l'espace de modules des courbes pseudoholomorphes compactes de classe fixée.

4.3.2 Courbes holomorphes et pseudoholomorphes

Il est clair que si la structure presque complexe J sur X est intégrable, une courbe J-pseudoholomorphe n'est rien d'autre qu'une courbe holomorphe. Une petite perturbation générique de J fait perdre (sauf en dimension complexe 1) la condition d'intégrabilité, mais préserve d'après les résultats de la section 4.2.2 l'allure locale des courbes pseudoholomorphes. Cependant elle fait en général disparaître des courbes holomorphes qui ne survivent pas à une déformation. Le cas de variétés avec $b_2 = 1$ est éloquent : perturber la forme symplectique n'est pas intéressant dans ce cas puisque la classe est fixée à un multiple près. Or dans le cas kählérien, on sait que si $b_2(X) = 1$, X est projective, comme conséquence du théorème de plongement de Kodaira. Ainsi une déformation de la structure complexe kählérienne préserve les courbes holomorphes (projectives) qui sont construites comme des intersections complètes suffisamment amples. On verra plus loin que ces courbes disparaissent en général lors d'une déformation générique de la structure presque complexe.

Dans certains cas, le phénomène de disparition de courbes holomorphes peut cependant aussi être observé lors d'une déformation kählérienne. Prenons le cas d'un tore complexe muni d'une structure complexe générique. Un tel tore T (supposé de dimension > 1) ne contient pas de courbes holomorphes compactes. En effet, sous l'hypothèse de généricité, le tore n'est pas projectif et il est simple, c'est-à-dire ne contient aucun sous-tore propre non trivial. S'il contient une courbe C, elle doit donc engendrer le tore comme groupe, et ceci entraîne que T est dominé par une puissance C^g, l'application $C^g \to T$ étant donnée par $(c_1, \ldots, c_g) \mapsto \sum_i c_i$. Il en résulte que T est projectif, par le théorème de Moishezon qui dit qu'une variété kählérienne est projective si elle est dominée par une variété projective. Ceci est une contradiction et montre qu'un tore complexe assez générique ne contient aucune courbe holomorphe compacte. Dans ce cas, on observe donc que partant d'un tore projectif T, une petite déformation de la structure complexe de T suffit à faire disparaître les courbes holomorphes compactes de T.

Chapitre 5

Courbes pseudoholomorphes et invariants de Gromov-Witten

5.1 Courbes pseudoholomorphes compactes

(X, ω) étant une variété symplectique compacte, et J étant une structure presque complexe compatible avec ω, on se propose d'étudier les classes d'isomorphisme d'applications pseudoholomorphes :

$$\phi : \Sigma \to X,$$

où Σ est une surface de Riemann (ou courbe projective complexe) fixée, de classe d'homologie $A := \phi_*([\Sigma]_{fond})$ fixée. Ici, les classes d'isomorphisme sont obtenues en identifiant ϕ et $\phi \circ g$, $g \in Aut\,\Sigma$, qui est un groupe fini si $g(\Sigma) \geq 2$ et égal à $\mathbb{P}Gl(2)$ en genre 0.

Le fait de fixer la classe d'homologie A est naturel puisque cette classe est constante sous les déformations de ϕ. Par contre, le fait de fixer la classe d'isomorphisme de Σ, qui simplifie nettement la construction, ne l'est pas, sauf bien sûr en genre 0, puisqu'il y a une seule classe d'isomorphisme de surfaces de Riemann compactes de genre 0, à savoir $\mathbb{P}^1$. En fait la construction de l'anneau de cohomologie quantique ne fera intervenir que les courbes de genre 0, ce qui est une raison pour ce choix. Le cas général où on ne fixe pas la classe d'isomorphisme de Σ est beaucoup plus difficile car il faut prendre le quotient de l'espace des paires (J_Σ, ϕ), constituées d'une structure complexe sur Σ et d'une application pseudoholomorphe de Σ dans X, relativement à J_Σ et à J, par le groupe des difféomorphismes de Σ, qui est de dimension infinie. Notons que si X est un point, construire cet espace de paires avec $g(\Sigma) = g$ revient à construire $\mathcal{M}_g$!

5.1.1 Espace de déformations

Soit $\phi : \Sigma \to X$ une application différentiable. Notons tout d'abord que l'espace tangent aux déformations de ϕ s'identifie à l'espace des sections du fibré vectoriel $\phi^* T_X$. En effet, à une application $\phi_t = \phi(\sigma, t) : \Sigma \to X$ définie à l'ordre 1 en t, et telle que $\phi_0 = \phi$, on associe

$$\frac{d\phi_t}{dt}_{|t=0} := \frac{\partial\phi_t}{\partial t}_{|t=0}.$$

Cette identification peut être rendue plus concrète (et surtout étendue à l'ordre supérieur) en prenant un voisinage tubulaire T_ϕ du graphe de ϕ qui est une sous-variété de $\Sigma \times X$. Le fibré normal de ce graphe s'identifiant à ϕ^*T_X, on peut ainsi identifier localement les déformations de ϕ aux sections de ϕ^*T_X. Dans la suite, on travaillera avec des applications qui ne sont plus nécessairement différentiables, puisqu'on devra recourir à des complétions de Sobolev pour appliquer la théorie de Fredholm, mais de classe L^2_l, avec l suffisamment grand pour que les applications considérées soient au moins continues, ce qui permet de donner un sens au fibré ϕ^*T_X.

Considérons les équations caractérisant les courbes pseudoholomorphes : on notera $\mathcal{A}^1_\Sigma(\phi^*T_X)$ le faisceau des 1-formes sur Σ à valeurs dans le fibré ϕ^*T_X, qui est grâce à J un fibré vectoriel complexe sur Σ, et $\mathcal{A}^{0,1}_\Sigma(\phi^*T_X)$, (resp. $\mathcal{A}^{1,0}_\Sigma(\phi^*T_X)$) le faisceau des $(0,1)$-formes (resp. $(0,1)$-formes) sur Σ à valeurs dans le fibré ϕ^*T_X, c'est-à-dire des formes $\mathbb{C}$-antilinéaires (resp. $\mathbb{C}$-linéaires) à valeurs dans ϕ^*T_X. Le fibré ϕ^*T_X étant un fibré vectoriel complexe, on a une décomposition

$$\mathcal{A}^1_\Sigma(\phi^*T_X) = \mathcal{A}^{1,0}_\Sigma(\phi^*T_X) \oplus \mathcal{A}^{0,1}_\Sigma(\phi^*T_X)$$

et une décomposition induite au niveau des sections globales :

$$A^1_\Sigma(\phi^*T_X) = A^{1,0}_\Sigma(\phi^*T_X) \oplus A^{0,1}_\Sigma(\phi^*T_X).$$

La condition que ϕ soit pseudoholomorphe s'écrit

$$d^{0,1}\phi = 0,$$

où $d^{0,1}\phi$ est la projection de $d\phi \in A^1_\Sigma(\phi^*T_X)$ dans $A^{0,1}_\Sigma(\phi^*T_X)$. Il s'agit maintenant d'analyser la différentielle de ces équations. Tout d'abord observons que si on se donne une connexion ∇ sur X, on a un tenseur

$$T_J : T_X \otimes T^{0,1}_X \to T^{1,0}_X,$$

qui décrit la variation (mesurée grâce au transport parallèle) de la structure complexe sur chaque $T_{X,x}$. Ainsi, si v est un vecteur tangent à X en x de type $(0,1)$, et v' est une extension de v en un champ défini à l'ordre 1 dans la direction u, la condition pour que v' reste un champ de vecteur de type $(0,1)$ est que

$$\nabla_u(v') - T_J(u,v) = 0 \ modulo\ T^{0,1}_{X,x}. \tag{5.1.1}$$

Soit $u \in A^0_\Sigma(\phi^*T_X)$, déterminant une déformation du premier ordre ϕ_t de ϕ. Grâce à ∇, c'est-à-dire au transport parallèle suivant u, le fibré $\phi_t^*T_X$ s'identifie au fibré ϕ^*T_X comme fibré vectoriel réel. La variation au premier ordre en t de la structure complexe sur ϕ^*T_X est alors mesurée par

$$T_J(u) \in \Gamma(\Sigma, Hom\,(\phi^*T^{0,1}_X, \phi^*T^{1,0}_X)).$$

La différentielle $d\phi$ est une section de $A^1_\Sigma(\phi^*(T_X))$. Considérons la différentielle $d\phi_t$ qu'on peut voir comme une section de $Hom\,(T_\Sigma, \phi^*T_X)$ étendant à l'ordre 1 la section $d\phi \in Hom\,(T_\Sigma, \phi^*T_X)$. On regarde la section induite de $A^{0,1}_\Sigma(\phi^*T_{X,\mathbb{C}})$, obtenue par extension $\mathbb{C}$-linéaire et restriction à $T^{0,1}_\Sigma$. On la note $(d\phi_t)^{0,1}$ et c'est une section de $A^{0,1}_\Sigma(\phi^*T_{X,\mathbb{C}})$ définie à l'ordre 1 en t. Comme ϕ est pseudoholomorphe, cette section est à l'ordre 0 dans $A^{0,1}_\Sigma(\phi^*T^{0,1}_X)$

La condition que $d\phi_t$ reste pseudoholomorphe dit que $(d\phi_t)_{|T^{0,1}_\Sigma}$ reste à l'ordre 1 dans $T^{0,1}_X$, ce qui compte-tenu de la variation de J_X donnée par (5.1.1) s'écrit maintenant :

$$\nabla_u(d\phi_t^{0,1}) - T_J(u)(d\phi) = 0 \ mod.\ A^{0,1}_\Sigma(\phi^*T^{0,1}_X), \tag{5.1.2}$$

ce qu'on peut voir (en projetant modulo $T^{0,1}_X$) comme une égalité dans $A^{0,1}_\Sigma(\phi^*T^{1,0}_X)$ (ou encore dans $A^{0,1}_\Sigma(\phi^*T_X)$ si l'on identifie $T^{1,0}_X$ à T_X muni de J).

Prenons des coordonnées locales sur X, et supposons que ∇ soit la connexion triviale dans ces coordonnées sur X. Prenons également une coordonnée holomorphe locale sur Σ. On a alors

$$\nabla_u(d\phi_t^{0,1}) = \frac{\partial^2\phi_t}{\partial t\partial\overline{z}},$$

et donc l'équation s'écrit (compte-tenu de la symétrie des dérivées et de $u = \frac{\partial\phi_t}{\partial t}$) :

$$\frac{\partial u}{\partial\overline{z}} - T_J(u)(d\phi) = 0 \text{ dans } A^{0,1}_\Sigma(T^{1,0}_X).$$

(Ici, par "dans $A^{0,1}_\Sigma(T^{1,0}_X)$, on entend "modulo $A^{0,1}_\Sigma(\phi^*T^{0,1}_X)$".) Notant que $u \mapsto \frac{\partial u}{\partial\overline{z}} - T_J(u)(d\phi))$ mod. $A^{0,1}_\Sigma(\phi^*T^{0,1}_X)$ est un opérateur différentiel d'ordre 1 de $A^0_\Sigma(\phi^*T_X)$ dans $A_\Sigma(\phi^*T_X)$, et que la connexion ∇ diffère de la connexion triviale par un terme d'ordre 0, on voit donc que l'espace tangent au point ϕ à notre espace $\mathcal{M}_A(\Sigma, X, J)$ d'applications pseudoholomorphes est le noyau d'un opérateur différentiel d'ordre 1, qu'on notera

$$\overline{\partial}_{J,\phi} : A^0_\Sigma(\phi^*T_X) \to A^{0,1}_\Sigma(\phi^*T_X).$$

Cet opérateur différentiel a le même symbole que

$$\overline{\partial}_\Sigma \otimes Id_{\phi^*T_X}$$

et donc est un opérateur différentiel elliptique.

5.1.2 Transversalité générique

On est donc exactement dans la situation considérée dans les chapitres précédents. Quitte à introduire les complétions de Sobolev adéquates, l'espace de modules est défini comme le lieu des zéros de la section $d\phi^{0,1}$ du fibré de fibre $A^{0,1}_\Sigma(\phi^*T_X)$, qui est une section de Fredholm, vu que sa différentielle est donnée par un opérateur de Fredholm. Notons que cette construction a des paramètres, à savoir le choix de J, de même que dans la situation précédente on pouvait faire varier la métrique sur la base.

Pour garantir que cet espace est lisse de la dimension attendue (cf section suivante), il faudrait avoir un énoncé de transversalité qui permette d'appliquer le théorème de Sard en dimension infinie (cf théorème 2.17). Pour cela, il faudrait garantir que sur l'espace total

$$\mathcal{A}_A \times \mathcal{J}$$

paramétrant les paires constituées d'une application différentiable $\phi : \Sigma \to X$ de classe A et d'une structure presque complexe J dominée par ω, la section σ du fibré vectoriel de Banach de fibre $A^{0,1}_\Sigma(\phi^* T^J_X)$ qui en (ϕ, J) vaut $d\phi^{0,1,J}$ est transverse. Or ceci n'est vrai que pour les applications ϕ qui sont génériquement injectives, c'est-à-dire qui sont injectives en dehors d'un nombre fini de points.

Théorème 5.1 *La section σ est transverse, c'est-à-dire a une différentielle surjective, en tout point (ϕ, J) paramétrant une application J-pseudoholomorphe de Σ dans X, qui est génériquement injective.*

Démonstration. Comme ϕ est génériquement injective, ϕ est un plongement en dehors d'un nombre fini de points $p_1, \ldots, p_N$ de Σ. En dehors de ces points, la différentielle du plongement donne un morphisme

$$d\phi : T^{0,1}_\Sigma \hookrightarrow T^{0,1}_{X,J}$$

ou encore une section partout non nulle de $\Omega^{0,1}_\Sigma \otimes \phi^* T^{0,1}_{X,J}$. Une déformation du premier ordre de J est donnée par une section η de $Hom\,(T^{0,1}_{X,J}, T^{1,0}_{X,J})$, qui peut être choisie arbitrairement le long de $\Sigma \setminus \{p_1, \ldots, p_N\}$. Alors la section $\eta \circ d\phi$ est une section de $\Omega^{0,1}_\Sigma \otimes T^{1,0}_{X,J}$ qui peut être choisie arbitrairement en dehors de petits voisinages des p_i. Il en résulte facilement que les éléments $\eta \circ d\phi$ engendrent $A^{0,1}_\Sigma(T_X)$ modulo l'espace $Im\,\overline{\partial}_{J,\phi}$ qui est l'image de la différentielle de σ avec J fixé. ∎

On peut donc conclure d'après les résultats de la section 2.2 que pour J dans un ensemble de seconde catégorie, l'espace $\mathcal{M}_A(\Sigma, X, J)$ des applications J-pseudoholomorphes et génériquement injectives de Σ dans X est une variété lisse de la dimension attendue, égale à l'indice de l'opérateur de Fredholm $\overline{\partial}_{J,\phi}$.

5.1.3 Compte de dimension, excès

L'indice de l'opérateur de Fredholm se calcule par une formule de type Riemann-Roch sur les courbes. Pour un fibré vectoriel holomorphe $\mathcal{E}$ de rang r sur Σ, on dispose de l'opérateur

$$\overline{\partial}_E : A^0_\Sigma(\mathcal{E}) \to A^{0,1}_\Sigma(\mathcal{E}) \tag{5.1.3}$$

dont le noyau est $H^0(\Sigma, \mathcal{E})$ et le conoyau $H^1(\Sigma, \mathcal{E})$. Son indice (comme opérateur réel) est donc égal à

$$2\chi(\Sigma, \mathcal{E}) = 2(deg\,\mathcal{E} + r(1-g)).$$

On a vu ci-dessus que l'opérateur de Fredholm

$$\overline{\partial}_{J,\phi} : \phi^* T_X \to \Omega^{0,1}_\Sigma(\phi^* T_X)$$

est un opérateur différentiel elliptique sur le fibré vectoriel complexe ϕ^*T_X, dont le déterminant a (par définition) pour première classe de Chern $\phi^*c_1(T_X)$ (où la classe $c_1(T_X) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ est déterminée par la structure symplectique puisque cette dernière détermine la structure presque complexe à déformation près). Ainsi $deg\,\phi^*T_X = A \cdot c_1(T_X)$, où on utilise l'intersection entre $H^2(X)$ et $H_2(X)$ pour calculer $c_1(T_X) \cdot A$.

Sur la surface de Riemann Σ, les fibrés vectoriels complexes topologiques ou différentiables sont classifiés par leur rang et leur degré, c'est-à-dire le degré de leur déterminant. Cet opérateur différentiel elliptique ayant pour symbole $\overline{\partial}_\Sigma \otimes Id_{\phi^*T_X}$ a le même indice que l'opérateur $\overline{\partial}_E$ de (5.1.3) pour un fibré holomorphe $\mathcal{E}$ de même rang et de même degré.

Ainsi on conclut que la dimension attendue de l'espace des applications J-pseudoholomorphes de classe A de Σ dans X, avec $dim_{\mathbb{C}}X = n$ est donnée par la formule :

$$2(c_1(T_X) \cdot A + n(1-g)).$$

On peut voir maintenant facilement pourquoi le théorème de transversalité ne peut pas être vrai pour des applications qui ne sont pas génériquement injectives. Prenons pour X une surface kählérienne éclatée en un point. La courbe exceptionnelle E est isomorphe à $\mathbb{P}^1$, et on voit facilement que la famille des applications de $\mathbb{P}^1$ dans X donnée par les isomorphismes $\mathbb{P}^1 \cong E \subset X$ est transverse de la bonne dimension 6. Il en résulte que pour toute petite déformation de la structure complexe sur X, la courbe pseudoholomorphe E survit, ainsi que sa famille de dimension 6 de paramétrages $\mathbb{P}^1 \cong E$. Mais il en résulte que les revêtements de degré d

$$f : \mathbb{P}^1 \to X,$$

forment une famille d'applications pseudoholomorphes de classe dA de $\mathbb{P}^1$ dans X qui survivent à toute déformation de J. Or la dimension de cette famille est $2(2d+1)$, tandis que la dimension attendue est $2(d+2)$. Les deux dimensions ne coïncident que si $d = 1$.

On peut corriger ce problème de différentes manières : soit on remplace les applications pseudoholomorphes de Σ dans X par leurs applications graphes à valeurs dans $\Sigma \times X$. Soit on introduit une perturbation des équations du type Cauchy-Riemann, qui consiste à choisir une section τ de petit module du fibré $A^{0,1}_\Sigma(\phi^*T_X)$ et à considérer l'équation

$$d^{0,1,J}\phi = \tau$$

plutôt que l'équation originale $d^{0,1,J}\phi = 0$. Cette équation perturbée satisfait tautologiquement la condition du théorème 2.17, vu l'introduction du paramètre supplémentaire τ.

5.1.4 Orientation

On a vu que lorsque les équations définissant $\mathcal{M}_A(\Sigma, X, J)$ sont transverses, l'espace tangent de $\mathcal{M}_A(\Sigma, X, J)$ en un point ϕ est le noyau d'un opérateur de Fredholm $\overline{\partial}_{J,\phi}$ induit au niveau des sections globales par l'opérateur elliptique d'ordre 1 :

$$\overline{\partial}_{J,\phi} : \phi^*T_X \to \Omega^{0,1}_\Sigma(\phi^*T_X).$$

Les deux fibrés vectoriels sont munis de structures complexes, mais l'opérateur $\overline{\partial}_{J,\phi}$ n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire. Cependant son symbole (qui est celui de l'opérateur $\overline{\partial}$ tensorisé par $Id_{\phi^*T_X}$) est à valeurs dans l'ensemble des applications $\mathbb{C}$-linéaires de ϕ^*T_X dans $\Omega_\Sigma^{0,1}(\phi^*T_X)$, et il en résulte qu'on peut (en modifiant la partie d'ordre 0) déformer $\overline{\partial}_{J,\phi}$ à travers des opérateurs elliptiques sur un opérateur elliptique $\mathbb{C}$-linéaire, qui induit un opérateur $\overline{\partial}'_{J,\phi}$ au niveau des sections globales. Cette homotopie peut se faire globalement sur $\mathcal{M}_A(\Sigma, X, J)$, et il en résulte qu'on obtient un isomorphisme de fibrés en droites réelles sur $\mathcal{M}_A(\Sigma, X, J)$:

$$det\, \overline{\partial}'_{J,\phi} \cong det\, \overline{\partial}_{J,\phi},$$

où le terme de droite est le déterminant du fibré tangent de $\mathcal{M}_A(\Sigma, X, J)$, et le terme de gauche est le déterminant réel d'une famille d'opérateurs de Fredholm $\mathbb{C}$-linéaires, et possède donc l'orientation complexe.

Ainsi $\mathcal{M}_A(\Sigma, X, J)$ est orientable et même muni d'une orientation naturelle.

5.2 Compacité et non compacité

5.2.1 Phénomène de bulle, exemple

Lorsqu'on considère des applications holomorphes variables d'une surface de Riemann dans une variété complexe, des dégénérescences apparaissent généralement. Lorsque la structure complexe de la surface de Riemann varie, les dégénérescences qui apparaissent peuvent prendre des formes variées, même topologiquement : elles sont liées au fait qu'une courbe de genre g peut dégénérer sur une courbe irréductible nodale, ou sur l'union de plusieurs composantes, elles-même nodales ou lisses, la topologie de la limite dépendant alors des genres des composantes et aussi du "graphe dual" décrivant la combinatoire des composantes de la courbe et de leurs intersections. Lorsqu'on considère les applications holomorphes d'une surface de Riemann fixée Σ dans X, les choses sont beaucoup plus simples, car la surface elle-même ne dégénère pas, ou plutôt dégénère sur une surface Σ' qui est l'union de Σ et de composantes isomorphes à $\mathbb{P}^1$.

La situation typique est la suivante : Prenons une courbe lisse $\Sigma = C \subset \mathbb{P}^2$ de degré d et notons $i : \Sigma \to \mathbb{P}^2$ l'inclusion. Posons $X = \mathbb{P}^2_y$, l'éclatement de $\mathbb{P}^2$ en un point y. Soit maintenant g_t, $t \in U \subset \mathbb{C}$ une famille d'automorphismes linéaires de $\mathbb{P}^2$ tels que

1. On a $g_0 = Id$.
2. Le point y n'appartient pas à $g_t \circ i(\Sigma)$ pour $t \in U \setminus \{1\}$.
3. $y \in g_1 \circ i(\Sigma)$. Plus précisément, il existe exactement un point $\sigma \in \Sigma$ tel que $g_1 \circ i(\sigma) = y$.

Pour $t \in U \setminus \{1\}$, d'après 2, l'application $g_t \circ i$ fournit une application holomorphe $\phi_t : \Sigma \to X$.

Par contre, pour $t = 1$, d'après le point 3, cette famille d'applications ne s'étend pas continûment en une famille d'applications holomorphes de Σ dans X. En effet, on rencontre ici une obstruction de nature topologique. Si la famille ϕ_t, $t \in U \setminus \{1\}$

s'étendait continûment, l'extension devrait coïncider par continuité avec l'extension naturelle de la famille $\phi_{t|\Sigma\setminus\{\sigma\}}$. Ainsi l'application étendue ϕ_1 devrait coïncider avec $g_1 \circ i$ sur $\Sigma\setminus\{\sigma\}$, et donc l'image de ϕ_1 serait le transformé propre de la courbe $g_1(C)$. Mais comme y appartient à $g_1(C)$, ce transformé propre a pour classe de cohomologie $\tau^*(dH) - E$, où $H = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))$, $\tau : X \to \mathbb{P}^2$ est l'application d'éclatement, et E est le diviseur exceptionnel. Or les courbes holomorphes $\phi_t(\Sigma)$ ont pour classe de cohomologie $\tau^*(dH)$. On voit sur cet exemple qu'une partie de la classe d'homologie s'est concentrée sur la courbe exceptionnelle.

5.2.2 Théorème de compacité de Gromov

Le théorème de compacité de Gromov dit grosso modo que le phénomène algébro-géométrique décrit dans la section précédente résume les singularités possibles de familles d'applications pseudoholomorphes $\phi_t : \Sigma \to X$, $t \in B$, où Σ est une surface de Riemann fixée, X est une variété presque complexe et ϕ_t est supposée d'aire bornée. Rappelons que par l'égalité de Wirtinger, si X est symplectique et la forme symplectique ω est compatible avec J, l'aire de ϕ_t ne dépend que de la classe d'homologie $\phi_{t*}([\Sigma]) \in H_2(X, \mathbb{Z})$, étant donnée par la formule

$$A(\phi) = \int_{\phi_*([\Sigma]_{fond})} \omega = \phi_*([\Sigma]_{fond}) \cdot [\omega].$$

Ainsi, si B est connexe, la classe d'homologie est constante et l'aire est constante. Si B est au contraire discret, on retrouve grâce au théorème de compacité 5.2 une version symplectique du théorème de Chow : il n'existe qu'un nombre fini de familles d'applications pseudoholomorphes de Σ dans X de classes d'homologie A satisfaisant $\int_A \omega \leq C$.

Théorème 5.2 *Soit X une variété presque complexe compacte, soit $C \in \mathbb{R}$ et soit $\phi_n : \Sigma \to X$ une suite d'application pseudoholomorphes telles que*

$$A(\phi_n) \leq C.$$

Alors, quitte à prendre une sous-suite, il existe une courbe singulière Σ' obtenue en ajoutant à Σ des arbres de composantes isomorphes à $\mathbb{P}^1$, et une application pseudoholomorphe

$$\phi' : \Sigma' \to X$$

telle que ϕ_n converge vers ϕ'.

Ici la convergence est à prendre au sens suivant : topologiquement Σ' est une limite naturelle de Σ, du fait qu'on peut voir chaque sphère ajoutée à Σ en un point σ comme la limite d'un gros disque substitué à un disque centré en σ, dont le rayon tend vers 0. (Noter cependant que Σ' n'est pas homéomorphe à Σ, car Σ' moins un point σ comme ci-dessus pris sur l'intersection de deux composantes est non connexe, tandis que Σ moins un point est toujours connexe.) Quand on ajoute un "arbre", on doit réitérer cette opération en se plaçant en un point σ' du $\mathbb{P}^1$ ajouté, et ainsi de suite. La limite est alors à prendre comme la limite au sens faible pour les applications et la limite au sens précédent pour la source.

5.2.3 Évaluation et compactification

Fixons une classe $A \in H_2(X, \mathbb{Z})$. Par le théorème de compacité de Gromov, il n'existe qu'un nombre fini de classes $A' \in H_2(X, \mathbb{Z})$ telles que $[\omega] \cdot A' \leq [\omega] \cdot A$ et qu'il existe une application pseudoholomorphe $\Sigma \to X$ de classe A'. Supposons que la structure presque complexe J sur X est suffisamment générale, et perturbons éventuellement les équations définissant les applications pseudoholomorphes (là où on n'a pas la transversalité) de façon à obtenir pour toute classe A' comme ci-dessus un espace d'applications pseudoholomorphes lisse $\mathcal{M}_{A'}(\Sigma, X, J)$ de dimension $2(c_1(T_X) \cdot A' + n(1-g))$.

L'espace $\mathcal{M}_A(\Sigma, X, J)$ paramètre des applications pseudoholomorphes de Σ vers X, et on a donc une application d'évaluation :

$$Ev : \mathcal{M}_A(\Sigma, X, J) \times \Sigma \to X,$$

$$(\phi, \sigma) \mapsto \phi(\sigma)$$

ainsi que les variantes suivantes :

$$Ev_k : \mathcal{M}_A(\Sigma, X, J) \times \Sigma^k \to X^k,$$

$$(\phi, \sigma_1, \ldots, \sigma_k) \mapsto (\phi(\sigma_1), \ldots, \phi(\sigma_k)).$$

Ces applications sont continues et le terme de gauche est une variété orientée. Nous allons montrer (en trichant un peu) que le bord de l'image de Ev_k est de dimension $\leq dim\, \mathcal{M}_A(\Sigma, X, J) \times \Sigma^k - 2$, ce qui va permettre d'assigner une classe d'homologie à $Im\, Ev_k$, de degré égal à $dim\, \mathcal{M}_A(\Sigma, X, J) \times \Sigma^k$.

Considérons la partie la plus simple du bord, constituée d'applications pseudo-holomorphes (ou leurs versions perturbées)

$$\phi : \Sigma \cup_{\sigma=0} \mathbb{P}^1 \to X,$$

de classe A, où bien sûr ϕ n'est pas constante sur $\mathbb{P}^1$ et où σ est un point variable de Σ. Notons A' la classe $\phi'_*([\Sigma]_{fond})$ et $A'' = \phi''_*([\mathbb{P}^1]_{fond})$, ϕ' et ϕ'' étant respectivement les restrictions de ϕ à Σ et à $\mathbb{P}^1$. La dimension de l'espace $\mathcal{M}_{A'}(\Sigma, X)$ est égale à $2(c_1(T_X) \cdot A' + n(1-g))$ et la dimension de l'espace $\mathcal{M}_{A''}(\mathbb{P}^1, X)$ est égale à $2(c_1(T_X) \cdot A'' + n)$. Mais comme on impose la condition que $\phi'(\sigma) = \phi''(0)$, on a $2(n-1)$ conditions imposées à ϕ'', ϕ' étant donné. (Il faut bien sûr s'assurer que ces conditions sont transverses pour des choix génériques de paramètres.)

Il en résulte que l'espace $\mathcal{M}_{A',A''}(\Sigma \cup \mathbb{P}^1)$ considéré est de dimension

$$2(c_1(T_X) \cdot A' + n(1-g)) + 2(c_1(T_X) \cdot A'') + 2 = 2(c_1(T_X) \cdot A + n(1-g) + 1) \quad (5.2.4)$$

Mais le groupe G_0 des automorphismes de $\mathbb{P}^1$ fixant 0 est de dimension réelle 4, et comme la classe A'' est non nulle, l'application ϕ'' est non constante, ce qui entraîne que ce groupe agit avec des stabilisateurs finis sur l'espace des applications pseudoholomorphes (ϕ', ϕ'') de $\Sigma \cup_{\sigma=0} \mathbb{P}^1$ lorsque $A'' \neq 0$. Cette action est compatible avec l'application d'évaluation :

$$Ev : \mathcal{M}_{A',A''}(\Sigma \cup \mathbb{P}^1, X) \times (\Sigma \cup_{\sigma=0} \mathbb{P}^1) \to X, \quad (5.2.5)$$

au sens où, pour $\gamma \in G_0$, et $(\phi', \phi'', \sigma) \in \mathcal{M}_A(\Sigma \cup_{\sigma=0} \mathbb{P}^1, X) \times \Sigma$ on a $Ev(\gamma \cdot (\phi', \phi''), \sigma) = Ev(\phi', \phi'', \sigma)$ et pour $\gamma \in G_0$, $(\phi', \phi'', z) \in \mathcal{M}_A(\Sigma \cup_{\sigma=0} \mathbb{P}^1, X) \times \mathbb{P}^1$ on a $Ev(\gamma \cdot ((\phi', \phi''), z) = Ev(\phi', \phi'', \gamma^{-1} z)$. Ceci montre que les fibres de l'application d'évaluation (5.2.5) sont de dimension réelle au moins 4 et combiné avec l'estimation 5.2.4, cela montre que le bord de $Im\, Ev$ est de dimension $\leq 2(c_1(T_X) \cdot A + n(1-g)$.

Ceci permet de construire une classe d'homologie de degré $2(c_1(T_X) \cdot A + n(1-g))+2$ comptée avec la multiplicité adéquate pour l'espace compactifié $\overline{Ev(\mathcal{M}_A(\Sigma, X) \times \Sigma)}$ dans X et de même pour les espaces $\overline{Ev_l(\mathcal{M}_A(\Sigma, X) \times \Sigma^l)}$ dans X^l. La multiplicité est donnée par le degré de Ev_l lorsque $2(c_1(T_X) \cdot A + n(1-g)) + 2l = dim\, X^l$. Si $2(c_1(T_X) \cdot A + n(1-g)) + 2l > dim\, X^l$, la classe est évidemment nulle, et si $2(c_1(T_X) \cdot A + n(1-g)) + 2l < dim\, X^l$, on montre par un argument de transversalité que Ev^l est génériquement de degré 1 sur son image, dont un ouvert est naturellement orienté, et dont le bord dans la compactification est de dimension $\leq 2(c_1(T_X) \cdot A + n(1-g)) + 2l - 2$. Ceci permettra de définir des intégrales sur l'image de ces applications d'évaluation de classes de cohomologie sur X^l.

5.3 Cohomologie quantique

5.3.1 Invariants de Gromov-Witten

Même en genre 0, il y a deux types d'invariants de Gromov-Witten, les invariants

$$\Phi_{0,A}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{Q}, \sum_i deg\, \alpha_i = 2(c_1(T_X) \cdot A + n) + 2(r-3),\ r \geq 3$$

et les invariants

$$\Psi_{0,A}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbb{Q}, \sum_i deg\, \alpha_i = 2(c_1(T_X) \cdot A + n),\ r \geq 3.$$

Dans les deux cas, on regardera l'espace des courbes pseudoholomorphes $\mathcal{M}_A(\mathbb{P}^1, X, J)$ de $\mathbb{P}^1$ dans X de classe A (on peut faire la théorie en genre supérieur mais il est alors plus naturel de faire varier la structure complexe sur Σ et les choses deviennent plus difficiles). Les classes α_i sont des classes de cohomologie rationnelle sur X. Dans les deux cas, les invariants de Gromov-Witten sont définis en considérant l'application d'évaluation sur r points :

$$Ev : \mathcal{M}_A(\mathbb{P}^1, X, J) \times (\mathbb{P}^1)^r \to X^r,$$

convenablement compactifiée (cf section précédente). De plus, comme on veut "quotienter par l'action de $\mathbb{P}Gl(2)$", on va se restreindre aux r-uples tels que $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = \infty$, c'est-à-dire à $\mathcal{M}_A(\mathbb{P}^1, X, J) \times (\mathbb{P}^1)^{r-3}$. Encore une fois ceci suppose une compactification adéquate du type évoqué dans la section précédente, car en fixant ainsi les trois premiers points, on omet les r-uples dont les trois premiers points ne sont pas distincts.

Ceci étant dit, la différence entre les invariants de Gromov-Witten Φ et les invariants Ψ (qui joueront un rôle annexe dans la section 5.3.3) est la suivante : Les invariants $\Phi_{0,A}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ sont définis en intégrant sur la classe de cohomologie de $Ev_r(\mathcal{M}_A(\mathbb{P}^1, X, J) \times (\mathbb{P}^1)^{r-3})$ la classe

$$pr_1^*\alpha_1 \cup \ldots \cup pr_r^*\alpha_r.$$

Noter que les conditions numériques sont choisies de façon que le degré de la classe $pr_1^*\alpha_1 \cup \ldots \cup pr_r^*\alpha_r$ soit égal à la dimension réelle de $\mathcal{M}_A(\mathbb{P}^1, X, J) \times (\mathbb{P}^1)^{r-3}$.

Une façon plus géométrique de voir ces invariants consiste à choisir des représentants $B_i \subset X$ des classes de cohomologie α_i (supposées entières). Alors $\Phi_{0,A}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ compte le nombre (avec des signes adéquats donnés par les orientations) de données

$$(\phi, x_4, \ldots, x_r)$$

où ϕ est une application pseudoholomorphe de $\mathbb{P}^1$ dans X de classe A et les x_i sont tels que

$$\phi(0) \in B_1,\ \phi(1) \in B_2,\ \phi(\infty) \in B_3,\ \phi(x_i) \in B_i,\ i \geq 4.$$

Les invariants Ψ sont obtenus de façon similaire mais en fixant les points $x_4, \ldots, x_r$. (En termes d'espace de modules, on fixe le module du r-uple $(x_1, \ldots, x_r)$ de points de $\mathbb{P}^1$. Ainsi on restreint en fait l'application d'évaluation à $\mathcal{M}_A(\mathbb{P}^1, X, J) \times \{0,\ 1, \infty,\ x_4, \ldots, x_r\}$, et les invariants $\Psi_{0,A}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ sont définis en intégrant sur la classe de $Ev_r(\mathcal{M}_A(\mathbb{P}^1, X, J) \times \{0,\ 1, \infty,\ x_4, \ldots, x_r\})$ la classe

$$pr_1^*\alpha_1 \cup \ldots \cup pr_r^*\alpha_r.$$

Noter que les conditions numériques sont choisies de façon que le degré de la classe $pr_1^*\alpha_1 \cup \ldots \cup pr_r^*\alpha_r$ soit égal à la dimension réelle de $\mathcal{M}_A(\mathbb{P}^1, X, J) \times \{0,\ 1, \infty,\ x_4, \ldots, x_r\}$.

Le point crucial qu'on utilisera plus tard est le fait que $\Psi_{0,A}(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ ne dépend pas du choix des points x_i. Bien entendu, ceci ne s'explique que grâce à l'existence de compactifications pour lesquelles les classes d'homologie des variétés compactifiées $\overline{Ev_r(\mathcal{M}_A(\mathbb{P}^1, X, J) \times \{0,\ 1, \infty,\ x_4, \ldots, x_r\})}$ sont indépendantes du choix des x_i dans $\mathbb{P}^1$.

5.3.2 Produit quantique

Le produit quantique n'est pas un produit sur la cohomologie de X, sauf dans le cas où on peut montrer que certaines séries sont convergentes, par exemple lorsqu'elles n'ont qu'un nombre fini de termes. C'est un produit sur l'anneau suivant : On considère les séries arbitraires du type

$$\sum_{A \in H_2(X,\mathbb{Z})/Tors} \alpha_A q^A,\ \alpha_A \in \mathbb{Q}.$$

Ici on peut choisir une base $a_1, \ldots, a_N$ de $H_2(X, \mathbb{Z})/Tors$ et une base duale $q_1, \ldots, q_N$ de variables formelles. Alors pour $A = \sum_i n_i a_i$, $q^A := q_1^{n_1} \ldots q_N^{n_N}$.

Ceci ne forme pas un anneau, du fait que le développement des produits va faire intervenir des sommes infinies, a priori non convergentes. On considère donc le sous-ensemble suivant de séries, qui a le mérite de posséder une structure d'anneau et qui est appelé “anneau de Novikov” (et dépend de (X, ω)) :

$$\mathcal{N} = \{ \sum_{A \in H_2(X,\mathbb{Z})/Tors} \alpha_A q^A, \text{ satisfaisant } \ (F_\omega)\},$$

où la condition de finitude (F_ω) est la suivante :

$$(F_\omega)\ \forall C \in \mathbb{R},\quad \text{l'ensemble } \{A \in H_2(X,\mathbb{Z})/Tors,\ A\cdot[\omega] \leq C,\ \alpha_A \neq 0\} \text{ est fini.}$$

Exercice 5.3 *Montrer que $\mathcal{N}$ a naturellement une structure d'anneau. (Raison : Quand on développe le coefficient de q^A dans le produit $\alpha\beta$, on trouve une somme*

$$\sum_{A_1+A_2=A} \alpha_{A_1}\beta_{A_2}$$

Montrer que cette somme est finie si on est dans l'anneau de Novikov $\mathcal{N}$.)

Le produit quantique sur la cohomologie d'une variété symplectique X est un produit sur l'espace $H^*(X,\mathbb{Q})\otimes\mathcal{N}$, compatible avec la structure de $\mathcal{N}$-module.

Dans certains cas, on peut montrer qu'en faisant la substitution

$$q_i \mapsto exp\,(-\int_{A_i}\omega)$$

dans le produit de deux éléments de $H^*(X,\mathbb{R})$, on obtient une somme convergente (parfois finie). Dans ce cas le produit quantique peut être vu comme une famille de produits sur $H^*(X,\mathbb{R})$ paramétrés par ω. On peut aussi introduire des paramètres ω complexifiés (ce qui joue un rôle important dans la symétrie miroir).

Le produit quantique est défini sur $H^*(X,\mathbb{Q})$ puis par $\mathcal{N}$-linéarité sur $H^*(X,\mathbb{Q})\otimes\mathcal{N}$. Soient $\alpha\in H^i(X,\mathbb{Q})$, $\beta\in H^j(X,\mathbb{Q})$. On définit le produit

$$\alpha*\beta=\sum_A \mu_A(\alpha,\beta)q^A \in H^*(X,\mathbb{Q})\otimes\mathcal{N}$$

de la façon suivante : les coefficients $\mu_A(\alpha,\beta)\in H^*(X,\mathbb{Q})$ sont déterminés par la dualité de Poincaré par les intersections

$$<\mu_A(\alpha,\beta),\gamma>\in\mathbb{Q},\ \gamma\in H^*(X,\mathbb{Q}).$$

On pose

$$<\mu_A(\alpha,\beta),\gamma>=\Phi_{0,A}(\alpha,\beta,\gamma).$$

La raison pour laquelle la somme $\sum_A \mu_A(\alpha,\beta)q^A$ est bien dans $H^*(X,\mathbb{Q})\otimes\mathcal{N}$ est simplement le fait vu dans la section 5.2.2 que si on borne le degré $A\cdot\omega=\int_A\omega$, il n'existe qu'un nombre fini de familles de courbes pseudoholomorphes dans X de genre 0 et de classe A satisfaisant cette borne.

Un point non trivial dans cette définition est le suivant :

Théorème 5.4 *Le terme de degré* 0 *du développement du produit quantique est égal au produit usuel sur $H^*(X,\mathbb{Q})$.*

Démonstration. Notons que les applications pseudoholomorphes de $\mathbb{P}^1$ dans X de classe 0 sont exactement les applications constantes. On vérifie que les équations définissant les applications pseudoholomorphes sont transverses en toute application constante (ce n'est plus vrai en genre $g > 0$). Donc l'espace $\mathcal{M}_0(\mathbb{P}^1, X)$ s'identifie à X. Rappelons qu'on a

$$a * b = \sum_A \mu_A(a, b) q^A$$

avec $\mu_A(a, b) \in H^*(X, \mathbb{Q})$ caractérisé par

$$< \mu_A(a, b), c >= \Phi_{0,A}(a, b, c).$$

L'énoncé est équivalent à

$$\mu_0(a, b) = a \cup b,$$

et donc à

$$\Phi_{0,0}(a, b, c) = \int_X a \cup b \cup c.$$

Or c'est clair par définition de $\Phi_{0,A}$ car l'application d'évaluation Ev_3 aux points $0, 1, \infty$, de $\mathcal{M}_0(\mathbb{P}^1, X)$ dans X^3 s'identifie au plongement de la diagonale $X \hookrightarrow X^3$.

■

5.3.3 Associativité

Les invariants Ψ vont montrer leur utilité dans la preuve du théorème suivant :

Théorème 5.5 *Le produit quantique $*$ est associatif.*

La preuve repose sur l'étude des invariants $\Psi_{0,A}(\alpha_1, \ldots, \alpha_4)$. On va tout d'abord exprimer ces invariants à l'aide des invariants Φ. Soit $e_i \in H^*(X, \mathbb{Q})$ une base et soit f_i la base duale pour la dualité de Poincaré. La classe de cohomologie de la diagonale

$$\Delta_X \subset X \times X$$

est alors donnée (dans la décomposition de Künneth) par la formule

$$[\Delta_X] = \sum_i e_i \otimes f_i.$$

Théorème 5.6 *Pour tout $A \in H_2(X, \mathbb{Z})$, on a l'égalité suivante :*

$$\Psi_{0,A}(a, b, c, d) = \sum_{A=A_1+A_2} \Phi_{0,A_1}(e_i, a, b) \Phi_{0,A_2}(f_i, c, d).$$

Notons que la somme de droite est finie car pour que $\Phi_{0,A_2}(c, d, f_i) \neq 0$ et $\Phi_{0,A_1}(a, b, e_i) \neq 0$, il faut qu'il existe des courbes pseudoholomorphes de classe A_2, resp. A_1, ce qui entraîne que les degrés $\int_{A_i} \omega \leq \int_A \omega$, $i = 1, 2$ sont bornés.

Démonstration du théorème 5.6. L'idée est de faire dégénérer la donnée des quatre points distincts $x_1, \ldots, x_4$ sur $\mathbb{P}^1$ vers la donnée de la courbe singulière marquée de 4 points : $\Sigma' = \mathbb{P}^1 \cup_{0=0} \mathbb{P}^1$ munie de deux points marqués y_1, y_2 sur la première composante et de deux points marqués y_3, y_4 sur la deuxième composante. Cette dégénérescence est très naturelle du point de vue de la géométrie algébrique. L'espace de modules $\mathcal{M}_{0,4}$ qui paramètre les classes d'isomorphismes de 4-uples de points distincts de $\mathbb{P}^1$ est paramétré par $\mathbb{C}^*$ (birapport) et a pour compactification $\mathbb{P}^1$, les deux limites correspondant à la décomposition de $\mathbb{P}^1$ en deux composantes, et étant distinguées par la façon dont les points marqués se répartissent sur les deux composantes.

Les applications pseudoholomorphes de Σ' dans X de classe A sont données par des paires d'applications pseudoholomorphes ϕ', ϕ'' de $\mathbb{P}^1$ dans X de classes respectives A', A'', avec $A = A' + A''$, et telles que

$$\phi'(0) = \phi''(0).$$

On peut voir cette dernière condition comme le fait que $(\phi'(0), \phi''(0)) \in \Delta_X$, où $\Delta_X \subset X \times X$ est la diagonale de X. Ainsi le nombre $\Psi_{0,A}(a, b, c, d)$ qui est l'intégrale sur $Ev_4(\mathcal{M}_A(\mathbb{P}^1, X) \times \{x_1, \dots, x_4\})$ de $pr_1^*a \cup pr_2^*b \cup pr_3^*c \cup pr_4^*d$ peut se calculer à l'aide de cette dégénérescence de la façon suivante : pour toutes les paires A', A'' telles que $A = A' + A''$, on regarde les morphismes d'évaluation

$$Ev_{3,A'} : \mathcal{M}_{A'}(\mathbb{P}^1, X) \times \{0, y_1, y_2\} \to X^3,\ Ev_{3,A''} : \mathcal{M}_{A'}(\mathbb{P}^1, X) \times \{0, y_3, y_4\} \to X^3,$$

dont l'image a une certaine classe d'homologie, qu'on doit d'une part intersecter avec la classe de la diagonale $pr_{1,3}^*\Delta_X$, et sur laquelle on doit par ailleurs intégrer la classe $pr_2^*a \cup pr_3^*b \cup pr_5^*c \cup pr_6^*d$.

Comme la classe de la diagonale dans $X \times X$ est égale à $\sum_i pr_1^*e_i \cup pr_2^*f_i$, on obtient finalement la formule :

$$\Psi_{0,A}(a, b, c, d) = \sum_{A=A'+A''} \sum_i$$

$$\int_{Ev_{3,A'}(\mathcal{M}_{A'}(\mathbb{P}^1,X)\times\{0,y_1,y_2\})\times Ev_{3,A''}(\mathcal{M}_{A'}(\mathbb{P}^1,X)\times\{0,y_3,y_4\})} pr_1^*e_i \cup pr_2^*a \cup pr_3^*b \cup pr_4^*f_i \cup pr_5^*c \cup pr_6^*d$$

ce qui par la définition des invariants $\Phi_{0,A'}$, $\Phi_{0,A''}$ est aussi égal à

$$\sum_{A=A'+A''} \sum_i \Phi_{0,A'}(e_i, a, b)\Phi_{0,A''}(f_i, c, d).$$

∎

Notons aussi le lemme suivant :

Lemme 5.7 *Si $a, b, c, d \in H^*(X, \mathbb{Q})$ sont homogènes, c'est-à-dire d'un degré donné, on a $\Psi_{0,A}(a, b, c, d) = -1^{deg\, b deg\, c}\Psi_{0,A}(a, c, b, d)$.*

Démonstration. C'est évident compte-tenu du fait que Ψ_A peut être calculé à l'aide de n'importe quel choix de points x_1, x_2, x_3, x_4 dans $\mathbb{P}^1$. En particulier, on peut remplacer x_1, x_2, x_3, x_4 par x_1, x_3, x_2, x_4. Notant Ev_i l'application d'évaluation au point x_i, on a

$$\Psi_A(a, b, c, d) = \int_{\overline{\mathcal{M}_A(\mathbb{P}^1,X)}} Ev_1^*a \cup Ev_2^*b \cup Ev_3^*c \cup Ev_4^*d.$$

Ceci est bien sûr égal à

$$-1^{deg\, b deg\, c}\int_{\overline{\mathcal{M}_A(\mathbb{P}^1,X)}} Ev_1^*a\cup Ev_3^*c\cup Ev_2^*b\cup Ev_4^*d.$$

Mais d'autre part, si on échange x_2 et x_3, $Ev_2'=Ev_3$ et $Ev_3'=Ev_2$, de sorte que

$$\Psi_{0,A}(a,c,b,d)=\int_{\overline{\mathcal{M}_A(\mathbb{P}^1,X)}} Ev_1'^*a\cup Ev_2'^*c\cup Ev_3'^*b\cup Ev_4'^*d$$
$$=\int_{\overline{\mathcal{M}_A(\mathbb{P}^1,X)}} Ev_1^*a\cup Ev_3^*c\cup Ev_2^*b\cup Ev_4^*d.$$

■

Démonstration du théorème 5.5. C'est un calcul formel. Etant donnés $a,b,c\in H^*(X,\mathbb{R})$, on veut montrer que

$$a*(b*c)=(a*b)*c$$

et ceci équivaut par dualité de Poincaré au fait que pour tout $d\in H^*(X,\mathbb{C})$, on ait

$$<a*(b*c),d>=<(a*b)*c,d>$$

dans l'anneau $\mathcal{N}$. Or par définition du produit quantique, on a

$$<a*(b*c),d>=\sum_A \Phi_{0,A}(a,b*c,d)q^A.$$

On doit donc montrer que

$$\sum_A \Phi_{0,A}(a,b*c,d)q^A=\sum_A \Phi_{0,A}(a*b,c,d)q^A, \tag{5.3.6}$$

pour tous $a,b,c,d\in H^*(X,\mathbb{R})$.

Comme on a

$$<e_i,b*c>=\sum_{A'}\Phi_{0,A'}(e_i,b,c)q^{A'}$$

il vient par définition de la base duale :

$$b*c=\sum_{i,A'}\Phi_{0,A'}(e_i,b,c)f_iq^{A'}$$

et de même

$$a*b=\sum_{i,A'}\Phi_{0,A'}(e_i,a,b)f_iq^{A'}.$$

Ainsi (5.3.6) devient :

$$\sum_{i,A',A''}\Phi_{0,A''}(a,f_i,d)\Phi_{0,A'}(e_i,b,c)q^{A'+A''}=\sum_{i,A',A''}\Phi_{0,A''}(e_i,a,b)\Phi_{0,A'}(f_i,c,d)q^{A'+A''}. \tag{5.3.7}$$

On peut bien sûr supposer que tous les éléments considérés sont homogènes. Supposons d'abord pour simplifier que X n'a que de la cohomologie en degré pair. Alors

$$\sum_{i,A'+A''=A}\Phi_{0,A''}(a,f_i,d)\Phi_{0,A'}(e_i,b,c)=\Psi_{0,A}(a,b,c,d)=\sum_{i,A'+A''=A}\Phi_{0,A''}(e_i,a,b)\Phi_{0,A'}(f_i,c,d)$$

par le théorème 5.6 et le lemme 5.7. Le cas général se montre de même en examinant de plus près les règles de signes. ■

Chapitre 6

Le point de vue de la géométrie algébrique

Nous revenons ici dans le contexte et le langage de la géométrie algébrique (ou analytique). Le but est de montrer que bien que les structures complexes des variétés algébriques X ne satisfassent que rarement les hypothèses de transversalité qui garantissent que les espaces de morphisme d'une courbe projective lisse sont de la bonne dimension, il est quand même possible de calculer les invariants de Gromov-Witten sans sortir du cadre de la géométrie algébrique. L'idée générale est de considérer l'espace de modules de tels objets, qui en général n'est pas de la bonne dimension, de le compléter en une variété projective et de construire une classe virtuelle supportée sur cette variété projective. Le prototype de cette démarche est donné par la théorie de l'intersection raffinée de Fulton (cf [8]). L'ingrédient essentiel qui permet de réaliser ce programme est le fait que la théorie des déformations des objets considérés est régie par un complexe à deux termes, le H^0 fournissant les déformations infinitésimales, et le H^1 décrivant les obstructions. Le modèle local est le suivant :

On prend une variété lisse ambiante Y munie d'un fibré vectoriel algébrique (ou holomorphe selon le contexte) E de rang r, et d'une section σ de ce fibré. On pose $M = Z(\sigma)$. Le long de M on a

$$d\sigma : T_{Y|M} \to E_{|M} \tag{6.0.1}$$

qui régit l'étude à l'ordre fini de M, au sens où

$$T_{M,m} = Ker\, d\sigma_m,\ m \in M$$

et les équations qui apparaissent à l'ordre supérieur au point m vont être paramétrées par $Coker\, d\sigma$. Bien entendu, la classe “attendue” de $V(\sigma)$ est égale à $c_r(E)$ dans $H^{2*}(Y, \mathbb{Z})$. La théorie de Fulton permet de construire cette classe comme étant supportée sur M, et à l'aide de la donnée de (6.0.1).

Lorsqu'on travaille avec les espaces de modules d'applications stables, on a une théorie de déformations qui permet de disposer localement d'une description schématique du foncteur de déformations semblable à la précédente (pour construire l'espace de modules, il faut par la suite prendre des quotients par des groupes d'isotropie pour lesquels on n'a plus de telle description locale). L'analogue en géométrie différentielle est la présentation locale des espaces de modules décrit à l'aide d'opérateurs de Fredholm (cf théorème 2.4 et corollaire 2.5). On voit ici une différence importante avec le cas de la théorie des déformations des faisceaux cohérents sur une surface X : les déformations du premier ordre de $\mathcal{F}$ à déterminant fixé sont données par $H^1(X, Ad\,\mathcal{F})$ et les obstructions sont dans $H^2(X, Ad\,\mathcal{F})$. Mais il n'existe pas localement de complexe de faisceaux localement libres sur la base de la famille de déformations, dont la cohomologie en degré 0 au point b paramétrant $\mathcal{F}_b$ soit $H^1(X, Ad\,\mathcal{F}_b)$, et la cohomologie en degré 1 soit $H^2(X, Ad\,\mathcal{F}_b)$. Plus précisément, on ne peut garantir l'existence d'un tel complexe au voisinage de b que si $H^0(X, Ad\,\mathcal{F}_b) = 0$.

Les travaux de Behrend et Fantechi [3] d'une part, Siebert [21], Li-Tian [13] d'autre part ont permis d'étendre les résultats de Fulton au cas où l'on ne dispose que localement d'une telle présentation.

6.1 Applications et courbes stables

6.1.1 Courbes stables

Un point x d'une courbe C définie sur k (algébriquement clos) est une singularité nodale si le rang du k-espace vectoriel $\mathcal{M}_x/\mathcal{M}_x^2$ est 2, de sorte que C peut se plonger formellement au voisinage de x dans A_k^2 (x étant envoyé sur 0) et être réalisée formellement comme une hypersurface définie par une équation

$$f = 0$$

où $f(0) = 0, df(0) = 0$ et la hessienne de f est non dégénérée au point 0. Dans le contexte analytique ou formel, on peut toujours (c'est une version du lemme de Morse) se ramener au cas où l'équation locale est

$$xy = 0,$$

du fait que k est algébriquement clos. Une courbe est dite nodale si ses singularités sont nodales.

Définition 6.1 *Une courbe stable est une courbe projective dont les singularités sont nodales et qui de plus a la propriété suivante : toute composante rationnelle C' de C dont la normalisée $n : C'' \to C'$ est rationnelle et satisfait la propriété que $\sharp(n^{-1}(Sing\,C)) \geq 3$.*

Les automorphismes d'une courbe stable ne forment pas nécessairement un groupe fini, mais ils forment toujours un groupe compact. Si la courbe est connexe, elle ne peut posséder un groupe infini d'automorphisme que si c'est une courbe elliptique lisse, qui bien sûr possède le groupe de ses translations comme groupe d'automorphismes. En effet, le groupe d'automorphismes agit via un groupe fini sur l'ensemble des composantes et sur l'ensemble des points singuliers. Le sous-groupe fixant chaque composante et chaque point singulier agit sur chaque composante C' en fixant les points singuliers de C qui sont sur C'. Par hypothèse, les composantes rationnelles ne peuvent contribuer à un groupe infini car les automorphismes de $\mathbb{P}^1$ fixant trois points sont triviaux. Seules les composantes elliptiques lisses E peuvent contribuer à un groupe d'automorphismes infini mais elles ne doivent pas rencontrer le reste de la courbe (sinon cela fournirait une singularité de la courbe C située sur E et fixée par les automorphismes). Comme C est connexe, ceci n'est possible que si $E = C$.

6.1.2 Théorème de réduction (semi)-stable

Soit $\pi : \Sigma \to B$ un morphisme plat et projectif de dimension relative 1, où $dim\, B = 1$ et Σ et B sont réduits. On supposera dans la suite que B est un disque holomorphe. Dans le langage de la géométrie algébrique, B sera une courbe lisse ou le spectre d'un anneau de valuation de corps résiduel k.

Par normalisation, on peut supposer que B est lisse et que Σ n'a qu'un nombre fini de points singuliers. Par le théorème de résolution d'Hironaka, on peut quitte à procéder à des éclatements supposer que les fibres $\pi^{-1}(B)$ sont des diviseurs à croisements normaux, mais non nécessairement réduits. On rappelle qu'un diviseur à croisements normaux dans une variété lisse est une hypersurface qui dans des coordonnées formelles ou holomorphes locales $z_1, \ldots, z_n$ admet pour équation $z_1^{r_1} \ldots z_n^{r_n}$. Il est donc réduit si on peut partout supposer que $r_i = 0$ ou 1.

Théorème 6.2 *(Mumford) Quitte à faire un changement de base $u = t^n$, où t est une coordonnée locale sur B, on peut trouver une désingularisation $\Sigma' \to \Sigma$ pour laquelle les fibres de $\pi' : \Sigma' \to B$ sont des diviseurs à croisements normaux réduits.*

Démonstration en dimension 2. En dimension 2, la situation locale est la suivante : après une désingularisation d'Hironaka, on peut supposer Σ lisse et $f^{-1}(0)$ donné par une équation du type $z_1^{r_1} z_2^{r_2}$. On peut donc supposer que $\pi : \Sigma \to B$ est donné par $t = z_1^{r_1} z_2^{r_2}$. Effectuons le changement de base $B' \to B$, $t = u^a$, où a est un multiple de toutes les multiplicités des composantes de la fibre centrale. Alors $\Sigma' \subset B' \times \Sigma$ est localement l'hypersurface décrite par

$$z_1^{r_1} z_2^{r_2} = u^a$$

où r_1 et r_2 divisent a. Σ' n'est pas une surface normale, et en fait elle possède r_1 branches le long de $z_1 = 0$, et r_2 branches le long de $z_2 = 0$. On vérifie que la normalisation a une équation locale du type $z_1 z_2 = u^k$, qui par des éclatements successifs fournit la surface Σ' voulue. ■

Ce théorème permet de montrer la propreté de $\overline{\mathcal{M}}_g$, qui se vérifie à l'aide du critère valuatif de propreté (cf [28]).

Théorème 6.3 *Soit $\pi : \Sigma \to B$ un morphisme propre sur une courbe lisse B et soit $0 \in B$ un point fermé. On suppose que les fibres $\Sigma_t = \pi^{-1}(t)$ sont des courbes stables pour $t \neq 0$. Alors quitte à prendre un revêtement ramifié $B' \to B$, il existe une famille $\pi' : \Sigma' \to B'$ de courbes stables, isomorphe à $\Sigma \times_B B'$ en dehors de 0.*

Démonstration. On se ramène sans difficulté au cas où le morphisme π est lisse génériquement sur B.

On peut donc appliquer le théorème de réduction semi-stable. On observe alors que la fibre au-dessus de 0 est une courbe nodale (ou semistable) mais non nécessairement stable. Le défaut de stabilité se voit par la présence de courbes rationnelles $C' \subset C = \pi^{-1}(0)$ (peut-être singulières) ayant la propriété que $n^{-1}(Sing\, C)$ consiste en ≤ 2 points, où $n : \widetilde{C'} \to C'$ est l'application de normalisation. Rappelant que C est la fibre de π, de sorte que $\mathcal{O}_\Sigma(C)_{|C}$ est trivial, on conclut que : - Soit C' est une courbe rationnelle lisse d'autointersection -1, qui rencontre le reste de la courbe en un point, et qui donc se contracte sans produire de singularités et en préservant le caractère "à croisements normaux" de la fibre.

- Soit C' est une courbe rationnelle lisse d'autointersection -2, qui rencontre le reste de la courbe en deux points. Une telle courbe se contracte en produisant une singularité nodale ordinaire de la surface. La nouvelle fibre est encore une courbe nodale, la composante rationnelle C' attachée en deux points à deux composantes C_1 et C_2 ayant disparu et C_1, C_2 se trouvant recollées par leurs points d'intersection avec C'. Il se trouve qu'on peut, par la théorie des singularités de surfaces, contracter de cette manière des arbres de courbes rationnelles d'autointersection -2, produisant au pire sur la surface des singularités simples, et obtenant finalement une fibre stable.

■

On voit bien la nécessité d'introduire la notion de courbes stables pour avoir un bord raisonnable pour l'espace de modules complété $\overline{\mathcal{M}}_g$ paramétrant les courbes stables de genre g : en effet, considérons une famille de courbes $\Sigma \to B$, projectives lisses, à l'exception de $\Sigma_0 = \pi^{-1}(0)$ qui possède un noeud. On peut éclater ce noeud dans Σ, et la nouvelle famille est encore une famille de courbes nodales, la fibre centrale étant composée de la normalisée de Σ_0 où l'on a attaché un $\mathbb{P}^1$ qui joint les deux préimages du point singulier. Après un changement de base d'ordre 2, on peut réitérer l'opération, en éclatant à chaque fois un noeud de la fibre centrale qui est un point double de la surface. Ceci montre que sans hypothèse de stabilité, la même famille sur $B \setminus \{0\}$ a une infinité de limites possibles.

6.1.3 Courbes marquées

Comme on l'a vu plus haut, dans le cas de courbes rationnelles ou elliptiques, on n'a pas la notion d'objet stable. Introduisons les courbes marquées qui sont constituées d'une courbe nodale projective C et d'un n-uple de points (ordonné) $x_1, \ldots, x_n$ qui sont des points lisses de C.

Définition 6.4 *Un tel objet est stable si pour toute composante C' de C, de normalisation $n : \widetilde{C} \to C$, on a*

$$\sharp(n^{-1}(Sing\, C \cup \{x_1, \ldots, x_n\})) + 2g - 2 > 0.$$

Par exemple, si C est une courbe rationnelle lisse, elle doit être munie de trois points marqués.

Lemme 6.5 *Une courbe nodale marquée $(C, x_1, \ldots, x_n)$ est stable si et seulement si $\sharp(Aut(C, x_1, \ldots, x_n)) < \infty$.*

Ceci résulte de la remarque qu'il faut ajouter un point à une courbe elliptique et trois à $\mathbb{P}^1$ pour obtenir des groupes d'automorphismes finis. ■

6.1.4 Applications stables

X étant une variété projective et $A \in H_2(X,\mathbb{Z})$ étant une classe d'homologie fixée, on va maintenant définir les applications n-marquées stables à valeurs dans X, de classe A et de genre g.

Définition 6.6 *Un morphisme $\phi : C \to X$ d'une courbe nodale $(C = \cup_i C_i,\, x_1, \ldots, x_n)$ marquée de genre arithmétique $g = h^1(C, \mathcal{O}_C)$ et de classe $A = \sum_i \phi_*([C_i])$ est dit stable si pour toute composante C_i de C telle que $\phi_{|C_i}$ est constante, on a*

$$\sharp(n_i^{-1}(Sing\, C \cup \{x_1, \ldots, x_n\})) + 2g - 2 > 0 \tag{6.1.2}$$

où n_i est la normalisation de C_i.

Le groupe G des automorphismes de $(C,\, x_1, \ldots, x_n)$ agit sur l'ensemble des applications de classe A de C dans X, par composition :

$$g \cdot \phi = \phi \circ g.$$

Lemme 6.7 *$(C,\, x_1, \ldots, x_n, \phi)$ est stable si et seulement si le groupe G_ϕ des automorphismes $g \in G$ de $(C,\, x_1, \ldots, x_n)$ tels que $\phi \circ g = \phi$ est fini.*

Démonstration. Si $\phi \circ g = \phi$, ϕ laisse stable l'union C' des composantes de C sur lesquelles ϕ est génériquement finie sur son image et laisse aussi stable l'union C'' des composantes de C le long desquelles ϕ est constante. Il est clair que $\phi \circ g = \phi$ entraîne que le groupe G_ϕ agit via un groupe fini sur C'. Par ailleurs, la condition $\phi \circ g = \phi$ n'est presque pas contraignante sur C'' puisqu'elle demande simplement que g permute les composantes sur lesquelles ϕ prend une même valeur. Donc il suffit de savoir que le groupe des automorphismes de $(C, x_1, \ldots, x_n)$ agit de façon finie sur C'', et on a déjà vu que ceci équivaut à (6.1.2). ∎

6.2 Espaces de modules

Théorème 6.8 *Pour $g \geq 2$, il existe un espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_g$ qui paramètre les classes d'isomorphismes de courbes stables de genre g. C'est une variété projective, et on a $\dim \overline{\mathcal{M}}_g = 3g - 3$.*

On peut construire $\overline{\mathcal{M}}_g$ en utilisant le plongement m-canonique des courbes stables de genre $g > 1$. Pour $m \geq 3$ le fibré $K_C^{\otimes m}$ est très ample (c'est impliqué par la condition de stabilité) et permet de plonger toute courbe stable C de genre g dans $\mathbb{P}^{(2m-1)(g-1)-1}$, à condition de choisir une base de $H^0(C, K_C^{\otimes m})$. Il existe alors un sous-schéma Z localement fermé du schéma de Hilbert de $\mathbb{P}^{(2m-1)(g-1)-1}$ (de polynôme de Hilbert adéquat) paramétrant les courbes stables m-canoniques plongées. Pour obtenir $\overline{\mathcal{M}}_g$, il faut quotienter Z par l'action du groupe $\mathbb{P}Gl((2m-1)(g-1))$ de façon à oublier le choix de la base de $H^0(C, K_C^{\otimes m})$. Le théorème 6.3 garantit que le quotient ainsi construit est complet.

Théorème 6.9 *Il existe un espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ qui paramètre les classes d'isomorphismes de courbes stables de genre g avec n points marqués. C'est une variété projective, et on a $\dim \overline{\mathcal{M}}_{g,n} = 3g - 3 + n$.*

Cet espace de modules peut être obtenu grosso modo de la façon suivante : on ne dispose pas de courbe universelle sur $\overline{\mathcal{M}}_g$, mais il en existe une sur le schéma de Hilbert Z utilisé plus haut, et dont le quotient est $\overline{\mathcal{M}}_g$. On peut construire sur cette courbe universelle $\mathcal{C} \to Z$ un schéma de Hilbert relatif Z_n paramétrant les n-uples de points : comme $\mathcal{C} \subset Z \times \mathbb{P}^{(2m-1)(g-1)-1}$, ce schéma de Hilbert relatif est le sous-schéma de $Z \times Hilb_n(\mathbb{P}^{(2m-1)(g-1)-1})$ constitué des points (c, z), $z \subset C_c$. Ici $Hilb_n(\mathbb{P}^{(2m-1)(g-1)-1})$ est le schéma de Hilbert ponctuel de $\mathbb{P}^{(2m-1)(g-1)-1}$ paramétrant les sous-schémas de longueur n. Ce schéma Z_n ne suffit pas pour décrire toutes les courbes stables marquées, pour la raison suivante : tout d'abord il faudrait ôter de Z_n le lieu où un point marqué est un point singulier de la courbe, ou bien deux points marqués coïncident. Mais le résultat n'est clairement plus complet, ne satisfaisant plus le critère de valuation. Le problème ici est qu'on a voulu travailler avec des courbes stables marquées, alors qu'on cherche à construire des courbes marquées stables. Prenons l'exemple suivant : On se donne une famille $\pi : \Sigma \to B$ de courbes lisses de genre ≥ 2, donc stables, où B est une courbe, et une courbe $B' \subset \Sigma$, qui est l'union de deux sections B_1, B_2 de π. Sur l'ouvert de B où les deux sections ont des valeurs distinctes, on a donc une famille de courbes marquées stables. Aux points d'intersection x_i des deux sections, il faut éclater les x_i, ce qui transforme la courbe $C_i = \pi^{-1}(\pi(x_i))$ en l'union de C_i et du diviseur exceptionnel. Si les deux sections B_1, B_2 se rencontrent transversalement, leurs transformés stricts ne se rencontrent pas dans la surface éclatée et ne rencontrent plus C_i, mais seulement le diviseur exceptionnel en deux points distincts y_1, y_2. On obtient donc une courbe marquée stable constituée de $C_i \cup \mathbb{P}^1$, avec deux points marqués sur $\mathbb{P}^1$.

Un exemple similaire est obtenu lorsque qu'on considère une famille $\pi : \Sigma \to B$ de courbes avec un point marqué, donné par une section $B' \subset \Sigma$ de π qui est génériquement un point lisse de la courbe. Supposons que Σ ait un point double ordinaire en x et que la section passe par x. Alors au-dessus du point $b = \pi(x)$, le point x est un point singulier de C_b et on ne dispose plus d'une courbe marquée. Si cependant on éclate le point x dans Σ, on voit apparaître une courbe exceptionnelle rationnelle $E = \mathbb{P}^1$ d'autointersection -2, qui rencontre le transformé strict C'_b de la courbe C_b en deux points y_1, y_2 (les préimages du point singulier x de C_b), et le transformé strict de la section B' ne rencontre plus C'_b mais rencontre la courbe exceptionnelle en un point distinct y_3 de E. Ainsi on a bien une courbe marquée stable, car la courbe $C'_b \cup E$ a un point marqué sur E, qui rencontre C'_b en deux autres points.

Considérons finalement le cas des applications marquées stables.

Théorème 6.10 *X étant donnée, projective et lisse, ainsi que $A \in H_2(X, \mathbb{Z})$, il existe un espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X, A)$ qui paramètre les classes d'isomorphismes d'applications marquées stables de genre g, de classe A, avec n points marqués. C'est une variété projective.*

Cet espace de modules est construit tout d'abord dans le cas où $X = \mathbb{P}^N$, puis lorsque $X \subset \mathbb{P}^N$, $d = deg\, A$, comme un sous-schéma fermé de $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(\mathbb{P}^N, d)$. Étudier le cas de $\mathbb{P}^N$ est beaucoup plus facile, car un morphisme ϕ d'une courbe dans $\mathbb{P}^N$ est déterminé par un fibré en droites L sur la courbe (le degré de L étant déterminé par la classe $\phi_*([C]_{fond})$), et par le choix de $N + 1$ sections de L sans point de base.

Ici, on n'a pas d'énoncé sur la dimension (sauf dans le cas de $\mathbb{P}^N$ et en genre 0), mais on a un énoncé sur la dimension "attendue", qui est celle qu'aurait l'espace de modules si la théorie locale était non obstruée. Dans la section suivante, on expliquera les idées qui permettent de construire une classe "virtuelle" supportée sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,A)$ sur laquelle on peut intégrer les classes de cohomologie de X^n (remontées sur $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}(X,A)$ via l'application d'évaluation).

La théorie locale est bien comprise : Supposons C lisse. Soit $\phi : C \to X$ un morphisme, et notons N_ϕ le complexe $0 \to T_C \stackrel{\phi_*}{\to} \phi^*T_X \to 0$, où ϕ^*T_X est placé en degré 0.

Lemme 6.11 *Les déformations du premier ordre de la paire (c,ϕ) sont paramétrées par $\mathbb{H}^0(C,N_\phi)$. Les obstructions à étendre ces déformations sont dans $\mathbb{H}^1(C,N_\phi)$.*

Démonstration. Soit $\phi_\epsilon : C_\epsilon \to X_\epsilon$ un morphisme au-dessus de $\Delta_1 := Spec\, k[\epsilon]/(\epsilon^2)$, où $X_\epsilon = X \times \Delta_1$ et $C_\epsilon \to \Delta_1$ est une déformation du premier ordre de C. On dispose de la différentielle

$$\phi_{\epsilon *} : T_{C_\epsilon|C} \to \phi^*T_{X_\epsilon|X} = \phi^*T_X \oplus \mathcal{O}_C,$$

qui fournit un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & T_C & \to & T_{C_\epsilon|C} & \to & \mathcal{O}_C & \to 0 \\ & \phi_* \downarrow & & \phi_{\epsilon *} \downarrow & & Id \downarrow & \\ 0 \to & \phi^*T_X & \to & \phi^*T_X \oplus \mathcal{O}_C & \to & \mathcal{O}_C & \to 0 \end{array}$$

On peut voir ce diagramme comme une suite exacte de complexes de faisceaux cohérents sur C

$$0 \to N_\phi \to N_{\phi,\epsilon} \to T \to 0,$$

où T est le complexe $\mathcal{O}_C \stackrel{Id}{\to} \mathcal{O}_C$, le second terme étant placé en degré 0. Cette suite exacte induit un isomorphisme

$$\mathbb{H}^*(C,N_\phi) \cong \mathbb{H}^*(C,N_{\phi,\epsilon}).$$

Or le complexe $N_{\phi,\epsilon}$ a pour terme $\phi^*T_X \oplus \mathcal{O}_C$ en degré 0, et 0 en degré > 0. La section $1 \in H^0(C,\mathcal{O}_C)$ fournit donc un élément de $\mathbb{H}^0(C,N_{\phi,\epsilon}) \cong \mathbb{H}^0(C,N_\phi)$.

Inversement, considérons un élément $u \in \mathbb{H}^0(C,N_\phi)$. La suite exacte

$$0 \to \phi^*T_X \to N_\phi \stackrel{\alpha}{\to} T_C[1] \to 0$$

donne un élément $v = \alpha(u) \in H^1(C,T_C)$, et donc une déformation du premier ordre C_ϵ de C. Le fait que $v = \alpha(u)$ ou encore que v s'annule dans $H^1(C,\phi^*T_X)$ entraîne aisément que C_ϵ admet un morphisme dans $X \times \Delta_1$ au-dessus de Δ_1.

L'énoncé concernant les obstructions se montre comme dans [28]. ■

Corollaire 6.12 *La dimension (complexe) attendue de $\overline{\mathcal{M}}_g(X,A)$ est égale à*

$$\chi(C,N_\phi) = A \cdot c_1(T_X) + (n-3)(1-g),\ n = dim\, X. \tag{6.2.3}$$

Corollaire 6.13 *Si $X = \mathbb{P}^n$ et $g = 0$, notant une classe d'homologie $A \in H_2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$ par son degré d, le champ de modules (ou foncteur de déformations) $\mathcal{M}_0(\mathbb{P}^n, d)$ est lisse de dimension $(n+1)d+n-3$. (L'espace de modules peut avoir des singularités quotients aux groupes d'isotropie).*

En effet, il est clair qu'on a dans ce cas $H^1(C, N_\phi) = 0$ car $H^1(C, \phi^*(T_{\mathbb{P}^n})) = 0$, vu que C est rationnelle et $T_{\mathbb{P}^n}$ est engendré par ses sections globales. ∎

On a le même type d'énoncés pour les espaces de courbes stables marquées $\overline{\mathcal{M}}_{g,k}(X, A)$, où l'on doit cependant tenir compte du fait que la courbe n'est plus lisse et qu'on doit aussi paramétrer les points marqués. On obtient en particulier le résultat suivant :

Théorème 6.14 *Le champ de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,k}(\mathbb{P}^n, d)$ est lisse de dimension $(n+1)d+n-3+k$.*

6.3 Classe fondamentale virtuelle

6.3.1 Exemple de contribution d'excès

On a déjà vu dans la section 5.1.3 l'exemple de la famille des revêtements de degré d de $\mathbb{P}^1$ dans E, où E est la courbe exceptionnelle de l'éclatement $\widehat{X}$ d'une surface projective X lisse en un point. Cet exemple se généralise en dimension supérieure en considérant des courbes rationnelles $\mathbb{P}^1 \cong E \subset X$ avec fibré normal isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1)^{n-1}$. On a dans ce cas $c_1(T_X) \cdot [E] = 2 - n + 1$. La dimension attendue de $\mathcal{M}_{0,d[E]}(\widehat{X})$ est donc $(d-1)(n-3)$ d'après (6.2.3), tandis que la famille est de dimension $2d-2$ (l'application étant donnée par une paire de polynômes de degré d sur $\mathbb{P}^1$, définie à un scalaire près, modulo l'action de $\mathbb{P}Gl(2)$).

En particulier pour $n = 3$, on trouve que la dimension attendue est 0 pour tout d. La formule d'Aspinwall-Morrison calcule la contribution de cette famille aux invariants

$$\Phi_{0,d[E]}(H, H, H),$$

où $H_i \in H^2(X, \mathbb{Z})$, pour tout degré d :

Théorème 6.15 *Pour tout $d \geq 1$, la famille des revêtements de degré d de E a une contribution égale à $([E] \cdot H)^3$ au nombre $\Phi_{0,d[E]}(H, H, H)$.*

Notons que $\Phi_{0,d[E]}(H, H, H)$ compte les objets constitués de courbes C de classe $d[E]$ et de triplets x_1, x_2, x_3 de points de C tels que $x_i \in H_0$, où H_0 est une hypersurface de classe H. Or chaque courbe de classe $d[E]$ recontre H_0 en $d[E] \cdot H$ points. Ainsi le résultat ci-dessus suggère que cette famille contribue par le nombre (rationnel !) $\frac{1}{d^3}$ au “nombre virtuel” de courbes rationnelles de classe $d[E]$ (il ne faut pas oublier cependant que ce nombre virtuel n'est pas défini, ce qui explique aussi pourquoi il peut être rationnel).

Ce théorème dont la preuve est esquissée par Aspinwall et Morrison est montré en suivant le point de vue symplectique dans [26]. Un point de vue algébrique est donné dans [16].

6.3.2 Formules d'excès de Fulton

La situation est la suivante : Soit X une variété algébrique lisse qu'on va supposer projective pour simplifier, E un fibré vectoriel algébrique sur X, et σ une section de E. Soit $Z = V(\sigma) \subset X$. Si la section σ est transverse, on sait que la classe d'homologie de Z dans X est égale (via la dualité de Poincaré) à $c_r(E)$ (dans n'importe quelle théorie (co)homologique, incluant les groupes de Chow). Si la section σ est nulle, on a $Z = X$ et on peut poser comme classe virtuelle de Z : $[Z]_{virt} = c_r(E)$, qui est une classe supportée sur Z et dont l'image dans $H_*(X)$ est encore la classe $c_r(E)$.

La théorie de Fulton permet de traiter les cas intermédiaires et de construire canoniquement une classe

$$[Z]_{virt} \in H_{2n-2r}(Z)$$

canoniquement définie, dont l'image dans $H_{2n-2r}(X)$ est égale à $c_r(E)$ (via la dualité de Poincaré).

Soit $\mathcal{I}_Z$ l'idéal de Z dans X. On a donc une surjection

$$\mathcal{E}^* \to \mathcal{I}_Z$$

donnée par σ. Cette surjection fournit une surjection de faisceaux d'algèbres sur Z :

$$\oplus_k Sym^k \mathcal{E}^*_{|Z} \to \oplus_k \mathcal{I}_Z^k / \mathcal{I}_Z^{k+1}. \tag{6.3.4}$$

La variété

$$C_{Z/X} := Spec \oplus_k \mathcal{I}_Z^k / \mathcal{I}_Z^{k+1}$$

est appelée le cône normal de Z dans X. Lorsque Z est lisse, ce n'est rien d'autre que l'espace total du fibré normal de Z dans X. Elle est de dimension égale à $dim\, X$.

La surjection (6.3.4) fournit un plongement

$$C_{Z/X} \subset Spec \oplus_k Sym^k \mathcal{E}^*_{|Z} = E_{|Z}.$$

On a donc un sous-schéma de dimension $n = dim\, X$ dans le fibré $E_{|Z}$. Si Z est lisse, ce sous-schéma admet une classe de cohomologie de degré

$$2(dim\, Z + rang\, E - dim\, X)$$

dans $H^*(E_{|Z})$. Mais l'application $\pi^* : H^*(Z) \to H^*(E_{|Z})$ est un isomorphisme. On obtient donc une classe de cohomologie de degré $2(dim\, Z + rang\, E - dim\, X)$ sur Z, ou encore une classe d'homologie de degré $2(dim\, X - rang\, E)$ sur Z. C'est la classe virtuelle cherchée.

Si Z n'est pas lisse, le plus commode est d'utiliser les groupes de Chow $CH_*(\,)$ qui satisfont la propriété d'homotopie et admettent une application "classe d'homologie" lorsque la variété est complète (projective). Le cône normal $C_{Z/X} \subset E_{|Z}$ a une classe dans le groupe de Chow de Z :

$$\alpha \in CH_n(E_{|Z}) = CH_{n-r}(Z).$$

La classe $\alpha \in CH_{n-r}(Z)$ a une classe d'homologie associée dans $H_{2n-2r}(Z, \mathbb{Z})$, qui est la classe virtuelle cherchée.

6.3.3 Application

On a vu que le champ de modules $\overline{\mathcal{M}}_{0,k}(\mathbb{P}^n, d)$ est lisse. Soit maintenant E un fibré vectoriel holomorphe sur $\mathbb{P}^n$ et σ une section de E dont le lieu des zéros X est lisse de codimension égale à $r = rang\, E$. On suppose que E est engendré par ses sections globales. Pour toute application stable de genre 0

$$\phi : C \to \mathbb{P}^n$$

marquée ou non, on a alors $H^1(C, \phi^* E) = 0$. Il en résulte par le théorème de changement de base (cf [25]) que considérant la courbe universelle

$$\mathcal{C} \xrightarrow{\pi} \overline{M}_0(\mathbb{P}^n, d),\ \Phi : \mathcal{C} \to \mathbb{P}^n$$

(qui n'existe que sur le champ de modules), on dispose d'un fibré vectoriel

$$\mathcal{E} := R^0\pi_*(\Phi^* E)$$

sur $\overline{\mathcal{M}}_0(\mathbb{P}^n, d)$. De plus, la section σ de E induit par restriction à chaque courbe une section τ de $\mathcal{E}$:

$$\tau(\phi) = \phi^*\sigma.$$

Il est clair que notant i l'inclusion de X dans $\mathbb{P}^n$, et $d = deg\, i_* A$ pour $A \in H_2(X, \mathbb{Z})$, $\overline{\mathcal{M}}_0(X, A)$ s'identifie à une composante connexe du lieu des zéros de la section τ du fibré $\mathcal{E}$ sur la variété lisse $\overline{\mathcal{M}}_0(\mathbb{P}^n, d)$. (En effet, par définition de τ, une application ϕ est à valeurs dans $X = V(\sigma)$ si et seulement si $\tau(\phi) = 0$.)

On peut donc appliquer dans cette situation les résultats de la section précédente, et construire par la formule d'excès de Fulton une classe fondamentale virtuelle supportée sur $\overline{\mathcal{M}}_0(X, A)$. De même pour les espaces d'applications stables de genre 0. Ceci permet de construire algébriquement les invariants de Gromov-Witten par intégration sur cette classe virtuelle des images inverses de classes dans X^k via les applications d'évaluation aux points marqués.

Cette construction particulière a une version totalement générale développée dans [3], et qui ne nécessite pas la présence d'un espace ambiant permettant de réaliser globalement $\overline{\mathcal{M}}_0(X, A)$ comme le lieu des zéros d'une section d'un fibré vectoriel sur une variété lisse.

Bibliographie

[1] R. Adams, J. Fournier. Sobolev spaces, Pure and applied mathematics series 140, 2nde édition, Elsevier 2003.

[2] M. Audin, J. Lafontaine. Holomorphic curves in symplectic geometry, Progress in Math. 117, Birkhaüser (1994).

[3] Kai Behrend and Barbara Fantechi. The intrinsic normal cone. *Invent. Math.*, 128(1) :45–88, 1997.

[4] R. Bott, L. Tu. Differential forms in algebraic topology. Graduate Texts in Mathematics, 82. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[5] S. K. Donaldson, P. B. Kronheimer. The geometry of four-Manifolds, Oxford Mathematical monogrphs, Oxford Science publication (1990).

[6] S. Donaldson. An application of gauge theory to four dimensional topology, J. Differential Geometry 18, 269-278 (1983).

[7] R. Friedman, J. Morgan. Smooth Four-Manifolds and Complex Surfaces, Springer 1994.

[8] W. Fulton. Intersection theory, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) 2. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[9] William Fulton and Rahul Pandharipande. Notes on stable maps and quantum cohomology. In *Algebraic geometry—Santa Cruz 1995*, volume 62 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 45–96. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[10] M. Gromov. Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds. Invent. Math. 82 (1985), no. 2, 307–347.

[11] R. Hartshorne. Algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[12] B. Lawson, M.-L. Michelsohn. Spin geometry. Princeton Mathematical Series, 38.

[13] Jun Li and Gang Tian. Comparison of algebraic and symplectic Gromov-Witten invariants. *Asian J. Math.*, 3(3) :689–728, 1999.

[14] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, 2nd ed, Benjamin/Cummings, Reading, MA (1980).

[15] D. McDuff, D. Salamon, J-holomorphic curves and Quantum Cohomology, University lecture series 6, AMS.

[16] Yu. Manin. Generating functions in algebraic geometry and sums over trees. The moduli space of curves (Texel Island, 1994), 401–417, Progr. Math., 129, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1995.

[17] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan, Geometric invariant theory, 3eme édition, Ergebnisse der Math. 34, Springer 1994.

[18] J. Le Potier, Lectures on vector bundles, Cambridge studies in advanced Math 54, CUP 1997.

[19] S. Mukai : An Introduction to Invariants and Moduli - Cambridge University Press.

[20] S. Kobayashi, Differential Geometry of complex vector bundles, Iwanami Shoten and Princeton University Press (1987).

[21] Bernd Siebert. Algebraic and symplectic Gromov-Witten invariants coincide, *Ann. Inst. Fourier* 49 (1999) 1743–1795.

[22] C. Simpson. Moduli of representations of the fundamental group of a smooth variety, Publ. Math. IHES 79, 80 (1994).

[23] K. Uhlenbeck, S. Yau : On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles, Comm. Pure and Applied Math. 39-S (1986) 257-293.

[24] E. Viehweg. Quasi-projective moduli for polarized manifolds. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) 30. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[25] C. Voisin, Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe, Cours spécialisés, SMF 2003.

[26] C. Voisin. A mathematical proof of a formula of Aspinwall and Morrison. Compositio Math. 104 (1996), no. 2, 135–151.

[27] Geometry of $K3$ surfaces : moduli and periods (Palaiseau, 1981/1982). Astérisque No. 126 (1985), 19–28.

[28] C. Voisin. Géométrie algébrique et espaces de modules, Notes de cours de M2 2008.