

Schémas de Fano et variétés de Moishezon

Laurent BONAVERO et Claire VOISIN

L. B. : École Normale Supérieure de Lyon,
UMPA, UMR 128,
46, allée d'Italie, 69364 Lyon CEDEX 07, France ;
E-mail: bonavero@umpa.ens-lyon.fr
C. V. : CNRS, UMR 9994, 75005 Paris, France.

Résumé. On construit dans cette Note une nouvelle famille de variétés de Moishezon dont le groupe de Picard est de rang un. Ces dernières sont bimeromorphiquement équivalentes à certains schémas de Fano des k -plans contenus dans une hypersurface de l'espace projectif. Cette construction permet en particulier de tester et de démontrer l'optimalité d'un précédent résultat du premier auteur en dimension 7 et 8. On donne aussi une méthode simple permettant de déterminer certains groupes de cohomologie rationnelle de ces schémas de Fano.

Fano schemes and Moishezon manifolds

Abstract. *In this Note, we give a new family of Moishezon manifolds with Picard group of rank one. These manifolds are bimeromorphically equivalent to some Fano schemes of k -planes contained in a hypersurface in projective space. This construction is used in particular to test and show in dimension 7 and 8 the optimality of a previous result due to the first author. We also give a simple method to compute some of the rational cohomology groups of these Fano schemes.*

Abridged English Version

In [2] [3], the following result is proved.

THEOREM 1. – *Let X be a Moishezon manifold of dimension n , with $\mathrm{rkPic}(X) = 1$ and K_X big but not nef. If X becomes projective after one single blow-up along a smooth connected submanifold Y , then $\dim Y \geq n/2$.*

An easy way of producing a Moishezon manifold is the following. Take Z a projective manifold of dimension n with $\mathrm{rkPic}(Z) = 1$, and containing a submanifold W with normal bundle $N_{W/Z}$ such that

$$(W, N_{W/Z}) \simeq (\mathbf{P}^k, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(-1)^{\oplus n-k}), \quad 1 \leq k \leq n-2.$$

Note présentée par Jean-Pierre DEMAILLY.

Let X be the manifold obtained by first blowing-up Z along W and then blowing-down the exceptional divisor on $\mathbf{P}^{n-k-1}$. Then

PROPOSITION 1. — *The manifold X is never projective.*

Our problem is therefore the following.

PROBLEM (P). — *Construct such a projective manifold Z with $k \geq 2$.*

Let k be an integer greater or equal than 2 and d be an integer greater or equal than 3. Let $F(k-1, d, n)$ be the Fano scheme of $(k-1)$ -planes contained in a generic hypersurface X^d of degree d in $\mathbf{P}^n$. If $\varphi(k-1, d, n) := k(n+1-k) - C_{k-1+d}^d$ is nonnegative (where $C_\bullet$ stands for usual combinatorial numbers), then $F(k-1, d, n)$ is a smooth submanifold of dimension $\varphi(k-1, d, n)$ in the Grassmannian $G(k-1, n)$. If moreover $(k+1)(n-k) = C_{k+d}^d$, then a generic X^d contains a finite number of isolated k -planes. Each such k -plane defines a dual k -plane P^k in $F(k-1, d, n)$. The key point is the following.

PROPOSITION 2. — *The normal bundle of P^k in $F(k-1, d, n)$ is isomorphic to $\mathcal{O}_{P^k}(-1)^{\oplus r}$ where $r = k(n-k) - C_{k-1+d}^d$ is the codimension of P^k in $F(k-1, d, n)$.*

Using a result of Sommese on the Picard group of submanifolds of little codimension in the Grassmannian, we obtain a new family of Moishezon manifolds, bimeromorphically equivalent to some of these Fano schemes $F(k-1, d, n)$.

THEOREM. — *For every integer $k \geq 2$ and every positive integer n_0 , there exists a Moishezon manifold of dimension $n \geq n_0$, with Picard group equal to $\mathbf{Z}$, which becomes projective after blowing-up a smooth submanifold of codimension $k+1$ isomorphic to a projective space.*

Finally, by using a monodromy technique and Deligne's theorem on invariant cycles, we show that $\text{rkPic}(F(k, d, n)) = 1$ as soon as $\varphi(k, d, n) \geq 3$ and $n \geq 2k+4$. Applying the above construction for $(k, d, n) = (1, 4, 7)$ and $(2, 3, 8)$ (for which Sommese's result does not apply), we show that theorem 1 is optimal in dimension 7 and 8.

THEOREM. — *There exist Moishezon manifolds of dimension 7 and 8 with rank 1 Picard group and which become projective after blowing-up a submanifold Y of dimension 4, with $(Y, N_{Y/X}) \simeq (\mathbf{P}^4, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(-1)^{\oplus \text{codim} Y})$.*

1. Introduction

Dans [2] et [3], le résultat suivant est démontré.

THÉOREME 1. — *Soit X une variété de Moishezon de dimension n , avec $\text{rgPic}(X) = 1$ et K_X gros mais pas nef. Alors, si X est rendue projective après éclatement le long d'une sous-variété Y lisse et connexe, on a $\dim Y \geq n/2$.*

Rappelons qu'une variété de Moishezon est une variété analytique complexe compacte qui devient projective après un nombre fini d'éclatements de centres lisses. Ce résultat met donc en évidence une classe de variétés de Moishezon pour lesquelles le centre de l'éclatement, lorsqu'un seul suffit à rendre la variété projective, est nécessairement de « grande » dimension. Il est de plus aisé de construire des exemples où le centre de l'éclatement est de codimension 2 dans X . Le but de cette Note est de construire une nouvelle famille d'exemples satisfaisant les hypothèses du résultat précédent et pour lesquels le centre de l'éclatement est de codimension strictement supérieure à 2 (§ 3.4). En outre, ces exemples montrent que l'inégalité du théorème 1 est optimale en dimension 7 et 8 (§ 4).

2. Une remarque simple

Une méthode systématique pour construire une variété de Moishezon non projective est la suivante. Soit Z une variété projective de dimension n avec $\text{rgPic}(Z) = 1$, contenant une sous-variété W de fibré normal $N_{W/Z}$ satisfaisant :

$$(1) \quad (W, N_{W/Z}) \simeq (\mathbf{P}^k, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(-1)^{\oplus n-k}), \quad 1 \leq k \leq n-2.$$

On note $\tilde{Z}$ la variété obtenue en éclatant Z le long de W et E le diviseur exceptionnel de l'éclatement. Sous l'hypothèse (1), E est isomorphe à $W \times \mathbf{P}^{n-k-1}$ et $\mathcal{O}((n-k)E)|_{W \times t} \simeq \det N_{W/Z}$, si bien qu'ici $\mathcal{O}(E)|_{\mathbf{P}^k \times t} \simeq \mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(-1)$. Par contraction de E sur $\mathbf{P}^{n-k-1}$, on en déduit l'existence d'une variété complexe non singulière X , contenant une sous-variété Y isomorphe à $\mathbf{P}^{n-k-1}$. De plus, $\text{rgPic}(X) = 1$. La proposition suivante est alors satisfaite.

PROPOSITION 1. – *La variété X ainsi construite n'est pas projective.*

Démonstration. – Si μ (resp. π) désigne l'éclatement $\tilde{Z} \rightarrow X$ (resp. $\tilde{Z} \rightarrow Z$) et si $\mathcal{O}_X(1)$ (resp. $\mathcal{O}_Z(1)$) désigne le générateur gros (resp. ample) de X (resp. Z), alors il existe un entier $d > 0$ tel que $\mu^* \mathcal{O}_X(1) \simeq \pi^* \mathcal{O}_Z(1) \otimes \mathcal{O}(dE)$. Il s'ensuit que $\mathcal{O}_X(1)$ est strictement négatif sur Y et n'est donc pas ample. Comme $\text{rgPic}(X) = 1$, c'est que X ne possède pas de fibré ample. ■

Remarquons de plus que si $k < (n-1)/2$, alors K_X est gros et n'est pas nef. Le problème qui nous intéresse dorénavant est donc le suivant.

PROBLÈME (P). – *Construire des variétés projectives de groupe de Picard de rang 1 et contenant une sous-variété W isomorphe à un espace projectif $\mathbf{P}^k$ et dont le fibré normal est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(-1)^{\oplus n-k}$.*

Lorsque $k = 1$, il est facile de voir qu'une hypersurface générique de degré $2n-1$ dans $\mathbf{P}^{n+1}$ contient un nombre fini de droites, chacune d'entre elles possédant un fibré normal isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(-1)^{\oplus n-1}$.

3. La construction principale

La solution au problème (P) consiste à considérer certains schémas de Fano.

3.1. Quelques rappels sur les schémas de Fano

Soient k un entier supérieur ou égal à 2 et d un entier supérieur ou égal à 3.

NOTATIONS. – On note $F(k-1, d, n)$ le schéma de Fano des $(k-1)$ -plans $\mathbf{P}^{k-1}$ de $\mathbf{P}^n$ contenus dans une hypersurface générique X^d de degré d de l'espace projectif $\mathbf{P}^n$. Soit $G(k-1, n)$ la grassmannienne (de dimension $k(n+1-k)$) des $(k-1)$ -plans $\mathbf{P}^{k-1}$ de $\mathbf{P}^n$. On note $\mathcal{S}$ le sous-fibré tautologique de rang k sur $G(k-1, n)$. Un polynôme P homogène de degré d induit par restriction à chaque sous-espace vectoriel V de dimension k une forme homogène de degré d , nulle si et seulement si $V \subset \{P = 0\}$. Autrement dit, le schéma de Fano $F(k-1, d, n)$, comme sous-variété de $G(k-1, n)$, est exactement le lieu des zéros d'une section holomorphe (en fait générique) du fibré vectoriel $\mathcal{S}^d(\mathcal{S}^*)$ de rang C_{k-1+d}^d sur $G(k-1, n)$. Si $\varphi(k-1, d, n) := k(n+1-k) - C_{k-1+d}^d$ est positif ou nul, le fibré $\mathcal{S}^d(\mathcal{S}^*)$ étant globalement engendré, $F(k-1, d, n)$ est lisse et non vide de dimension $\varphi(k-1, d, n)$.

Rappelons le résultat suivant de Sommese [6], permettant de déterminer le type d'homotopie des sous-variétés de petite codimension des grassmanniennes.

THÉORÈME 2. – *Soit V une sous-variété connexe non-singulière de la grassmannienne $G(r, n)$. Alors les groupes d'homotopie relatifs $\pi_j(G(r, n), V)$ sont nuls pour tout entier $j \leq n+1-2 \text{ codim } V$.*

Si les groupes d'homotopie relatifs sont nuls en degrés ≤ 3 , il en est de même pour les groupes d'homologie relatifs ; on en déduit $H_1(V, \mathbf{Z}) = H_1(G(r, n), \mathbf{Z}) = 0$ et $H_2(V, \mathbf{Z}) = H_2(G(r, n), \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$. Nous avons donc le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1. — Si $\varphi(k-1, d, n) > 0$ et $C_{k-1+d}^d \leq (n-2)/2$, alors le groupe de Picard de $F(k-1, d, n)$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$.

3.2. Fixons donc un entier $k \geq 2$. Selon ce qui précède, une hypersurface générique de degré d dans $\mathbf{P}^n$ contient une variété de dimension strictement positive de $(k-1)$ -plans dès que $\varphi(k-1, d, n) > 0$ (condition (i)), et ne contient qu'un nombre fini de k -plans isolés si de plus $(k+1)(n-k) = C_{k+d}^d$ (condition (ii)).

PROPOSITION 2. — Pour tout entier k , il existe une infinité de couples d'entiers (d, n) satisfaisant les deux conditions précédentes. De plus, pour d suffisamment grand, le groupe de Picard de la variété $F(k-1, d, n)$ ainsi obtenue est isomorphe à $\mathbf{Z}$.

Démonstration. — C'est facile : il existe une infinité d'entiers d tels que $k+1$ divise C_{k+d}^d (c'est le cas si d est premier supérieur ou égal à $k+2$), et pour ces derniers, n est uniquement déterminé par (ii) : $n = k + C_{k+d}^d / (k+1)$. Lorsque d tend vers $+\infty$, on a alors $n \sim d^k / (k+1)!$ et donc

$$k(n+1-k) \sim kd^k / (k+1)! > C_{k-1+d}^d \sim d^{k-1} / (k-1)!$$

d'où (i). Enfin,

$$C_{k-1+d}^d \sim d^{k-1} / (k-1)! \leq \frac{n-2}{2} \sim d^k / 2(k+1)!$$

et le groupe de Picard de $F(k-1, d, n)$ est $\mathbf{Z}$ par le corollaire 1. ■

3.3. Dorénavant, on se fixe un triplet d'entiers (k, d, n) satisfaisant les conditions (i) et (ii) précédemment introduites. Soit $\mathbf{P}^k = \mathbf{P}(V)$ l'un des k -plans (en nombre fini) contenus dans une hypersurface générique de degré d d'équation $P = 0$ dans $\mathbf{P}^n$. Les $(k-1)$ -plans contenus dans ce $\mathbf{P}^k$ définissent dualement un espace projectif de dimension k noté $\mathbf{P}^k = \mathbf{P}(V^*)$ contenu dans $F(k-1, d, n)$. L'observation clé est la suivante.

PROPOSITION 3. — Le fibré normal $\mathcal{N}$ de $\mathbf{P}^k$ dans $F(k-1, d, n)$ est isomorphe au fibré $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(-1)^{\oplus r}$ où $r = k(n-k) - C_{k-1+d}^d$ est la codimension de $\mathbf{P}^k$ dans $F(k-1, d, n)$.

Démonstration. — Étape 1. — De la suite exacte courte

$$(2) \quad 0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow N_{\mathbf{P}^k / G(k-1, n)} \xrightarrow{dP|_{\mathbf{P}^k}} N_{F(k-1, d, n) / G(k-1, n)}|_{\mathbf{P}^k} \rightarrow 0$$

avec $N_{\mathbf{P}^k / G(k-1, n)} \simeq (\mathcal{S}_{\mathbf{P}^k}^*)^{\oplus n-k}$ et $N_{F(k-1, d, n) / G(k-1, n)} \simeq S^d(\mathcal{S}^*)|_{F(k-1, d, n)}$, et sachant que $\mathcal{S}_{\mathbf{P}^k}^*$ est isomorphe au fibré quotient $\mathcal{Q}_{\mathbf{P}^k}$ sur $\mathbf{P}^k$, on déduit que

$$c_1(\mathcal{N}) = (n-k - C_{k-1+d}^{d-1}) c_1(\mathcal{S}_{\mathbf{P}^k}^*) = n-k - C_{k+d-1}^{d-1}.$$

Comme $(k+1)(n-k) = C_{k+d}^d$, il vient

$$c_1(\mathcal{N}) = n-k - (C_{k+d}^d - C_{k-1+d}^d) = C_{k-1+d}^d - k(n-k) = -r.$$

Ainsi $\det \mathcal{N}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(-r)$.

Étape 2. — Rappelons qu'un fibré vectoriel E sur $\mathbf{P}^n$ est trivial si et seulement si E est globalement engendré et $c_1(E) = 0$. D'après l'étape 1, il suffit donc de montrer que $\mathcal{N} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(1)$ est globalement

engendré. Pour cela, il suffit d'après le critère de Castelnuovo-Mumford de montrer l'annulation des groupes de cohomologie $H^i(\mathbf{P}^k, \mathcal{N} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(1-i))$ pour tout $i > 0$. L'annulation de ces groupes se déduit, via la suite longue de cohomologie associée à (2), de celle de $H^1(\mathbf{P}^k, \mathcal{N})$, de $H^i(\mathbf{P}^k, \mathcal{Q}_{\mathbf{P}^k} \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(1-i))$ pour tout $i > 0$ et de $H^{i-1}(\mathbf{P}^k, S^d(\mathcal{Q}_{\mathbf{P}^k}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{P}^k}(1-i))$ pour tout $i > 1$. Les deux derniers groupes sont nuls d'après le théorème de Bott [4]. Pour l'annulation de $H^1(\mathbf{P}^k, \mathcal{N})$, considérons la suite longue déduite de (2) :

$$0 \rightarrow H^0(\mathbf{P}^k, \mathcal{N}) \rightarrow H^0(\mathbf{P}^k, (\mathcal{S}_{|\mathbf{P}^k}^*)^{\oplus n-k}) \rightarrow H^0(\mathbf{P}^k, S^d(\mathcal{S}_{|\mathbf{P}^k}^*)) \rightarrow H^1(\mathbf{P}^k, \mathcal{N}) \rightarrow 0.$$

Les groupes $H^0(\mathbf{P}^k, (\mathcal{S}_{|\mathbf{P}^k}^*)^{\oplus n-k}) = (V^*)^{\oplus n-k}$ et $H^0(\mathbf{P}^k, S^d(\mathcal{S}_{|\mathbf{P}^k}^*)) = S^d(V^*)$ ayant même dimension (condition (ii)), l'annulation de $H^1(\mathbf{P}^k, \mathcal{N})$ est équivalente à celle de $H^0(\mathbf{P}^k, \mathcal{N})$. Mais l'isomorphisme naturel $H^0(\mathbf{P}^k, N_{\mathbf{P}^k/G(k-1,n)}) \simeq H^0(\mathbf{P}^k, N_{\mathbf{P}^k/\mathbf{P}^n})$ induit un isomorphisme $H^0(\mathbf{P}^k, \mathcal{N}) \simeq H^0(\mathbf{P}^k, N_{\mathbf{P}^k/X^d})$ et ce dernier espace est réduit à 0 car $F(k, d, n)$ est un schéma réduit de dimension 0. ■

3.4. Le résultat principal

Il découle de la discussion précédente que pour (k, d, n) satisfaisant les conditions (i) et (ii) et d assez grand, la variété $F(k-1, d, n)$ est solution de notre problème et le résultat suivant est démontré.

THÉORÈME. — *Pour tout entier $k \geq 2$ et pour tout entier positif n_0 , il existe une variété de Moishezon non projective de dimension $n \geq n_0$, de groupe de Picard $\mathbf{Z}$ et devenant projective après éclatement le long d'une sous-variété de codimension $k+1$ isomorphe à un espace projectif.*

4. Deux cas particuliers optimaux

Dans ce dernier paragraphe, on montre que le groupe de Picard de $F(1, 4, 7)$ et de $F(2, 3, 8)$ est de rang un. La construction précédente donne alors lieu à deux variétés de Moishezon de dimension respective 7 et 8 et devenant projectives après éclatement le long d'une sous-variété de dimension 4. Autrement dit, le théorème 1 est optimal en dimension 7 et 8.

Soit $X^d \in \mathbf{P}(H^0(\mathbf{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbf{P}^n}(d))) := \mathbf{P}^N$ et $F_{X^d} \subset G(k, n)$ la variété des k -plans inclus dans X^d . On note $\text{Sing} F_{X^d} \subset F_{X^d}$ le lieu des points $p \in F_{X^d}$ tels que $\text{rg} T_{F_{X^d}, p} > \varphi(k, d, n)$. On montre le critère suivant.

PROPOSITION 4. — *Supposons que $\dim(\text{Sing} F_{X^d}) < \varphi(k, d, n) - 2$ pour tout X^d dans le complémentaire d'un sous-ensemble algébrique W de codimension supérieure ou égale à 2 dans $\mathbf{P}^N$. Alors $H^1(F_{X^d}, \mathbf{Q}) = 0$ et $H^2(F_{X^d}, \mathbf{Q}) = \mathbf{Q}$ dès que F_{X^d} est lisse. En particulier, $\text{rg Pic} F_{X^d} = 1$ dès que F_{X^d} est lisse.*

Démonstration. — Soient Δ l'hypersurface discriminante de $\mathbf{P}^N$ constituée des X^d tels que F_{X^d} est singulière, $\mathcal{F} \subset \mathbf{P}^N \times G(k, n)$ la variété d'incidence et $\pi : \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{P}^N$ la première projection. Pour tout Y^d générique dans Δ (i.e. pour $Y^d \in \Delta \setminus W$), F_{Y^d} est de dimension $\varphi(k, d, n)$ et lisse en codimension 2, et donc il existe un voisinage U de Y^d dans $\mathbf{P}^N$ et une intersection complète $\mathcal{S}$ d'hypersurfaces amples dans $\mathcal{F}$ telle que $\pi : \pi^{-1}(U) \cap \mathcal{S} \rightarrow U$ soit une famille de surfaces complexes lisses. Pour $X^d \in U \setminus U \cap \Delta$, le théorème de Lefschetz donne $H^1(F_{X^d}, \mathbf{Q}) = H^1(S_{X^d}, \mathbf{Q})$ et $H^2(F_{X^d}, \mathbf{Q}) \subset H^2(S_{X^d}, \mathbf{Q})$. On en déduit que les monodromies

$$\pi_1(\mathbf{P}^N \setminus \Delta) \rightarrow \text{Aut} H^i(F_{X^d}, \mathbf{Q}), \quad i = 1, 2$$

sont triviales. Le théorème des cycles invariants de Deligne [5] montre alors que les restrictions $H^i(\mathcal{F}, \mathbf{Q}) \rightarrow H^i(\mathcal{F}_{X^d}, \mathbf{Q})$, $i = 1, 2$ sont surjectives pour tout X^d dans $\mathbf{P}^N \setminus \Delta$. ■

Il reste à vérifier l'hypothèse de la proposition 4. Pour cela, il suffit de montrer que le fermé $\mathcal{Z}$ des points $(X^d, \mathbf{P}^k) \in \mathcal{F}$ en lesquels la projection π n'est pas lisse est de codimension supérieure ou égale à 4 dans $\mathcal{F}$. Ceci se vérifie facilement pour $(k, d, n) = (1, 4, 7)$ ou $(2, 3, 8)$. Plus généralement, l'estimation suivante nous a été communiquée par Debarre.

PROPOSITION 5. — Si $n \geq 2k + 4$ et $\varphi(k, d, n) \geq 3$, alors $\text{codim}_{\mathcal{F}} \mathcal{Z} \geq 4$ et donc $\dim(\text{Sing} F_{X^d}) < \varphi(k, d, n) - 2$ pour tout X^d dans le complémentaire d'un sous-ensemble algébrique W de codimension supérieure ou égale à 2 dans $\mathbf{P}^N$.

Note remise le 1^{er} juillet 1996, acceptée le 3 juillet 1996.

Références bibliographiques

- [1] Barth W. et Van de Ven A., 1978. Fano varieties of lines on hypersurfaces, *Arch. Math.*, 31, p. 94-104.
- [2] Bonavero L., décembre 1995. Inégalités de Morse et variétés de Moishezon, *Thèse de doctorat*, Université Joseph-Fourier, Grenoble-I.
- [3] Bonavero L., 1995 Sur des variétés de Moishezon dont le groupe de Picard est de rang un, *Prépublication de l'Institut Fourier*, n° 310, *Bulletin de la Société Mathématique de France* (à paraître).
- [4] Bott R., 1957. Homogeneous vector bundles, *Ann. Math.*, 66, p. 203-248.
- [5] Deligne P., 1971. Théorie de Hodge II, *Publ. Math. IHES*, 40, p. 5-57.
- [6] Sommese A. J., 1982. Complex subspaces of homogeneous complex manifolds II-Homotopy results, *Nagoya J. Math.*, 86, p. 101-129.
- [7] Voisin C., 1993. Transcendental methods in the study of algebraic cycles, Springer LNM, n° 1594 ; *Algebraic cycles and Hodge theory*, Torino, p. 153-222.