Géométrie différentielle

Claire Voisin
CNRS et École Polytechnique

Table des matières

Chapitre 1

Variétés et fibrés vectoriels

1.1 Variétés et sous-variétés

1.1.1 Coordonnées locales

Définition 1.1.1. *Une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ (de classe C^k) de dimension n est la donnée d'un fermé $X \subset \mathbb{R}^N$ ayant la propriété suivante : Pour tout $x \in X$, il existe une boule $B_x \subset \mathbb{R}^N$ centrée en x, telle que*

$$X \cap B_x = \{y \in B_x, f_1(y) = 0, \dots, f_{N-n}(y) = 0\} \tag{1.1.1}$$

où les f_i sont des fonctions de classe C^k sur B_x telles que les différentielles $df_i = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$ sont indépendantes en tout point de B_x.

Une telle variété est compacte lorsqu'elle est contenue dans une boule $B \subset \mathbb{R}^N$.

L'espace tangent $T_{X,x}$ à une telle sous-variété en $x \in X$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ défini par

$$T_{X,x} = \{v = (v_, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N,\, df_i(v) := \sum_j v_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0, \forall i = 1, \dots, N-n\}.$$

On va montrer que l'espace $T_{X,x}$ ainsi défini ne dépend pas du choix des équations locales f_i.

Dans la situation précédente, le théorème d'inversion locale fournit pour tout $x \in X$ des fonctions différentiables (de classe C^k) $g_1, \dots, g_n$ définies dans une boule éventuellement restreinte $B'_x \subset B_x$, telles que

$$(g_1, \dots, g_n, f_1 \dots, f_{N-n}) : B'_x \to \mathbb{R}^N$$

est un difféomorphisme Ψ sur son image. Les fonctions $g_1(x), \dots, g_n(x), f_1(x) \dots, f_{N-n}(x)$ fournissent donc des coordonnées locales $x'_1, \dots, x'_N$ sur B'_x, telles que

$$X \cap B'_x \supseteq \{(x'_1, \dots, x'_n, 0, \dots, 0, |x'_i| < \epsilon\} \subset B'_x, \tag{1.1.2}$$

pour un ϵ suffisamment petit.

Corollaire 1.1.2. *Si une fonction différentiable f définie sur B'_x s'annule sur $B'_x \cap X$, alors $\frac{\partial f}{\partial x'_i}(x)$ s'annule pour $i \leq n$. Ceci montre que la définition précédemment donnée de $T_{X,x}$ est indépendante du choix des équations locales.*

Les fonctions $g_1, \ldots, g_n$ restreintes à $X \cap B'_x$ sont appelées des coordonnées locales sur X.

Remarque 1.1.3. On peut choisir pour les g_i certaines des coordonnées originales : il suffit en effet que leurs différentielles au voisinage de x soient indépendantes des différentielles $df_1, \ldots, df_{N-n}$.

Supposons qu'on ait $g_1 = x_1, \ldots, g_n = x_n$. Le difféomorphisme Ψ s'écrit donc

$$\Psi(x) = (x_1, \ldots, x_n, f_1, \ldots, f_{N-n})$$

où les f_i sont des fonctions de classe C^k de $x_1, \ldots, x_N$. L'inverse Ψ^{-1} s'écrit donc de la même façon (là où il est défini) :

$$\Psi^{-1}(x') = (x'_1, \ldots, x'_n, \psi_1, \ldots, \psi_{N-n})$$

où les ψ_i sont des fonctions de classe C^k de $x'_1, \ldots, x'_N$. L'image par Ψ d'un petit ouvert de $X \cap B'_x$ centré en x étant décrit par (1.1.2), nous trouvons en appliquant Ψ^{-1} que (dans les coordonnées initiales $x_1, \ldots, x_N$),

$$X \cap B_x \supseteq \{(x_1, \ldots, x_n, F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_{N-n}(x_1, \ldots, x_n)),\ |x_i| < \epsilon'\}, \tag{1.1.3}$$

où l'inclusion est ouverte et $F_i(x_1, \ldots, x_n) = \psi_i(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ sont des fonctions de classe C^k de n variables. L'existence du paramétrage (1.1.3) de $X \cap B_x$ est le contenu du *théorème des fonctions implicites.*

Lemme 1.1.4. *Soient $g_1, \ldots, g_n$, $g'_1, \ldots, g'_n$ deux systèmes de coordonnées locales sur un ouvert U de X. Alors on a localement sur U :*

$$g'_i = \psi_i(g_1, \ldots, g_n),$$

où $\psi := (\psi_1, \ldots, \psi_n)$ est un difféomorphisme de classe C^k d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Comme $g = (g_i)$ et $g' = (g'_j)$ donnent des homéomorphismes locaux d'un voisinage U de x sur un ouvert V, resp. V' de $\mathbb{R}^n$, on dispose d'un homéomorphisme $\psi = g' \circ g^{-1}$ de V sur V'. On a

$$\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n),\ g'_i = \psi_i(g_1, \ldots, g_n)$$

et on doit montrer que les fonctions ψ_i sont différentiables de classe C^k. Cela résulte du fait que les g_i sont les restrictions à X de fonctions de classe C^k sur $\mathbb{R}^N$ (qu'on appellera aussi g_i), ainsi que les g'_i, et qu'il existe un difféomorphisme G (resp. G') de classe C^k d'un voisinage W de x dans $\mathbb{R}^N$ tel que

$$G = (g_1, \ldots, g_n, f_1, \ldots, f_{N-n}),$$

$$X \cap U' = \{x = (x_1, \ldots, x_N),\ f_1(x) = 0, \ldots, f_{N-n}(x) = 0\}.$$

et de même pour

$$G' = (g'_1, \ldots, g'_n, f_1, \ldots, f_{N-n}).$$

Le difféomorphisme $\Psi := G' \circ G^{-1}$ de W est alors de classe C^k. Or il s'écrit

$$\Psi(y_1, \ldots, y_N) = (\Psi_1(y), \ldots, \Psi_n(y), y_{n+1}, \ldots, y_N)$$

avec

$$\Psi_i(y_1, \ldots, y_n, 0, \ldots, 0)) = \psi_i(y_1, \ldots, y_n).$$

■

Définition 1.1.5. *Les coordonnées locales $g_1, \ldots, g_n$ fournissent un homéomorphisme local de $X \cap B_x$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ qui est appelé une carte locale.*

Le difféomorphisme ψ est appelé un difféomorphisme de changement de cartes.

Ceci nous permet de définir les “variétés abstraites” de la façon suivante :

Définition 1.1.6. *Une variété différentiable est un espace métrisable recouvert par des ouverts U_i munis d'homéomorphismes*

$$\phi_i : U_i \cong B_i \subset \mathbb{R}^n$$

où les B_i sont des boules de $\mathbb{R}^n$, tels que les homéomorphismes locaux

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1}$$

soient des difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^n$. (Plus précisément, ce sont des difféomorphismes de $\phi_j(U_i \cap U_j)$ sur $\phi_i(U_i \cap U_j)$, ces deux ensembles étant des ouverts de $\mathbb{R}^n$).

Une fonction f sur une variété X est dite différentiable si elle l'est dans des cartes locales, c'est-à-dire avec les notations précédentes : $f \circ \phi_i^{-1}$ est différentiable sur B_i.

Le fait qu'on considère des espaces métrisables X, c'est-à-dire pouvant être munis d'une distance d_X définissant la topologie, est destiné à écarter les espaces dits non séparés. En effet, on a la résultat suivant :

Lemme 1.1.7. *Soit X un espace métrisable. Alors pour deux points $x \neq y$ de X, il existe des ouverts U_x et U_y disjoints contenant respectivement x et y. De plus, pour tout point x de X, et tout ouvert $U \subset X$ contenant x, il existe un ouvert $V \subset U$ contenant x, tel que la clôture $\overline{V}$ de V dans X soit contenue dans U.*

Démonstration. Comme $x \neq y$, $d(x, y) = \epsilon > 0$. On prend pour U_x la boule $B_{x,\frac{\epsilon}{2}} = \{z \in X,\ d_X(x, z) < \frac{\epsilon}{2}\}$ et de même $U_y = B_{y,\frac{\epsilon}{2}}$. Clairement, $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Si $x \in U$, U contient une petite boule $B_{x,\epsilon}$. On prend pour V la boule $B_{x,\frac{\epsilon}{2}} = \{z \in X,\ d_X(x, z) < \frac{\epsilon}{2}\}$. La clôture $\overline{V}$ de V dans X est alors contenue dans la boule fermée $\overline{B}_{x,\frac{\epsilon}{2}} = \{z \in X,\ d_X(x, z) \leq \frac{\epsilon}{2}\}$ qui est clairement contenue dans $B_{x,\epsilon}$, et donc dans U. ■

1.1.2 Partition de l'unité, théorème de plongement

Proposition 1.1.8. *Soit X une variété et $x \in X$. Soit $U \subset X$ un ouvert de X contenant x. Alors il existe une fonction f différentiable sur X qui vaut 1 au voisinage de x et 0 en dehors de V, où $V \subset U$ est un ouvert telque$\overline{V} \subset U$.*

Démonstration. On peut supposer que U est un ouvert où il existe des coordonnées locales rendant U difféomorphe à une boule ouverte B de $\mathbb{R}^n$ centrée en 0 (point correspondant à x). De plus, comme X est un espace métrisable, on sait d'après le lemme 1.1.7 que U contient la clôture $\overline{V}$ d'un ouvert V centré en x. Comme V contient une boule ouverte B' de $\mathbb{R}^n$ centrée en 0, on conclut que la clôture $\overline{B}'$ de B' dans X est contenue dans B. Sur la boule B on met une fonction de classe C^∞ qui vaut 1 au voisinage de 0 et et 0 en dehors de B'. On étend cette fonction par 0 en dehors de U et la fonction ainsi obtenue est clairement continue (ce qui utilise la condition $\overline{B}' \subset B$) et différentiable, comme on le vérifie localement.

■

Corollaire 1.1.9. *(Partition de l'unité) Soit X une variété différentiable compacte, et soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X. Il existe un nombre fini d'indices $i \in I$ et des fonctions différentiables f_i sur X, nulles en dehors de d'ouverts V_i tels que $\overline{V}_i \subset U_i$, telles que $\sum_i f_i = 1$.*

Démonstration. Comme on a $X = \cup_i U_i$, pour tout $x \in X$, il existe i_x tel que $x \in U_{i_x}$. D'après la proposition précédente, il existe une fonction $f_{i_x,x}$ qui vaut 1 sur un voisinage V_x de x dans U_{i_x} et 0 en dehors de $\overline{W}_x \subset U_{i_x}$. Quitte à remplacer $f_{i_x,x}$ par $f^2_{i_x,x}$, on peut supposer que $f_{i_x,x} \geq 0$. Comme X est compacte et que la réunion des V_x est égale à X, X est une union finie $X = \cup_{j=1,\ldots,N} V_{x_j}$. Pour chaque $i \in I$ tel que l'ensemble $\{j, i_{x_j} = i\}$ est non vide, posons $g_i = \sum_{i_{x_j}=i} f_{i_{x_j}}$. Il existe donc un ensemble fini J d'indices $i \in I$ concernés. En général, on sait que g_i est nulle en dehors de $\cup_{j,\, i_{x_j}=i} \overline{W}_{x_j} \subset U_i$, et par ailleurs, on a

$$g := \sum_{i\in J} g_i = \sum_j f_{i_{x_j}},$$

et c'est une fonction > 0 sur X, comme somme de fonctions ≥ 0, l'une au moins étant égale à 1. Posons enfin $f_i := \frac{g_i}{g}$ pour $i \in J$. Les f_i sont des fonctions différentiables satisfaisant la conclusion du corollaire.

■

Théorème 1.1.10. *(Théorème de plongement) Soit X une variété différentiable compacte connexe de dimension n. Alors X est difféomorphe à une sous-variété de $\mathbb{R}^N$, pour N suffisamment grand.*

Démonstration. Pour tout $x \in X$, il existe un ouvert $U_x \subset X$ contenant x et des coordonnées locales $f_i : U \to \mathbb{R}$ telles que $(f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ soit un difféomorphisme de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Choisissons une fonction f

différentiable sur X égale à 1 dans un voisinage W_x de x et égale à 0 sur $U \setminus V_x$, où $V_x \subset U$ est un ouvert contenant W_x et dont la clôture est contenue dans U. Les fonctions $ff_i : U \to \mathbb{R}$ s'étendent alors en des fonctions différentiables $F_{i,x}$ sur X, nulles en dehors de V_x et fournissant des coordonnées sur l'ouvert W_x. Comme X est compacte, et X est couvert par les ouverts W_x, il existe un nombre fini d'ouverts W_{x_i}, $i = 1, \ldots, M$, tels que $X = \cup_i W_{x_i}$. Considérons les Mn fonctions

$$F_{1,x_1}, \ldots, F_{n,x_1}, F_{1,x_2}, \ldots, F_{n,x_2}, \ldots, F_{1,x_M}, \ldots, F_{n,x_M} : X \to \mathbb{R}.$$

Ces fonctions fournissent une application différentiable

$$F = (F_{1,x_1}, \ldots, F_{n,x_M}) : X \to \mathbb{R}^{Mn}.$$

Cette application est localement un plongement puisque pour tout $x \in X$, appartenant à l'un des ouverts W_{x_i}, la composée $\pi_i \circ F : X \to \mathbb{R}^n$, où π_i est la projection de $\mathbb{R}^{Mn}$ sur $\mathbb{R}^n$ donnée par les coordonnées allant de $(i-1)n+1$ à in, est égale à $(F_{1,x_i}, \ldots, F_{n,x_i})$ sur W_{x_i}. Il en résulte que pour tout $x \in X$, l'ensemble

$$\{y \in X, y \neq x,\ F(y) = F(x)\}$$

est fini, de cardinal M_x. Notons $\{y_1, \ldots, y_{M_x}\}$ cet ensemble. Choisissons une fonction f_x qui vaut 1 au voisinage de y_i et 0 au voisinage de x. Soit $u \neq 0 \in \mathbb{R}^{Mn}$ et considérons l'application différentiable

$$F_x : X \to \mathbb{R}^{Mn} \times \mathbb{R}$$

définie par

$$F_x(y) = (F, f_x).$$

Cette application différentiable est encore un plongement, puisque composée avec la projection sur le premier facteur $\mathbb{R}^{Mn}$, elle donne F. Par ailleurs, l'ensemble $\{y \in X, y \neq x,\ F_x(y) = F_x(x)\}$ est vide, car lorsque $F(y) = F(x)$, y est l'un des y_i et donc $f_x(y) \neq f_x(x)$.

Il en résulte facilement qu'il existe un voisinage W'_x de x dans X tel que pour tout $z \in W'_x$, l'ensemble $\{y \in X, y \neq z,\ F_x(y) = F_x(z)\}$ est vide.

Faisons cette construction pour tout $x \in X$. Par compacité de X, il existe un nombre fini d'ouverts W'_{x_l}, $l = 1, \ldots, K$ couvrant X. L'application différentiable

$$G := (F, f_{x_1}, \ldots, f_{x_K}) : X \to \mathbb{R}^{Mn+K}$$

est alors est plongement.

■

1.1.3 Variétés complexes

On rappelle qu'une fonction $\phi : U \to \mathbb{C}$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ est holomorphe si elle est localement analytique complexe, i.e. pour tout $z_0 \in U$ et tout z proche de $z_0 \in U$

$$\phi(z) = \phi(z_0) + \sum_{k>0} a_k (z - z_0)^k$$

la convergence étant absolue pour $|z - z_0| < r_0$.

Une définition équivalente consiste à demander que ϕ soit différentiable, de différentielle

$$d\phi_z : T_{\mathbb{C}^n, z} = \mathbb{C}^n \to T_{\mathbb{C}, \phi(z)} = \mathbb{C}$$

$\mathbb{C}$-linéaire en tout point $z \in U$. La première condition entraîne clairement la seconde. L'équivalence des deux définitions est obtenue à l'aide de formules intégrales satisfaites par les fonctions ϕ satisfaisant la seconde condition (généralisant la formule de Cauchy $f(z) = \frac{1}{2\iota\pi} \int_{|\zeta - z_0|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, $|z - z_0| < 1$ pour les fonctions holomorphes d'une variable z).

Un difféomorphisme $\Phi : U \to V$ entre deux ouverts de $\mathbb{C}^n$ est dit holomorphe si les composantes Φ_i de Φ (dans les coordonnées sur V induites par le plongement $V \subset \mathbb{C}^n$) sont holomorphes. De façon équivalente, la différentielle

$$d\Phi_z : T_{U,z} = \mathbb{C}^n \to T_{V, \phi(z)} = \mathbb{C}^n$$

est $\mathbb{C}$-linéaire en tout point $z \in U$.

Notons que le difféomorphisme inverse est aussi holomorphe, comme on le voit immédiatement d'après la seconde définition.

La notion de variété abstraite ne s'est pas avérée très utile dans le cadre différentiable, à cause du théorème 1.1.10 qui nous ramène au cas des sous-variétés. Dans le cas complexe au contraire, cette notion est très utile :

Définition 1.1.11. *Une variété complexe est un espace métrique X muni d'un recouvrement par des ouverts U pour chacun desquels on s'est donné un homéomorphisme*

$$\phi_U : U \cong V \subset \mathbb{C}^n$$

avec la condition que les homéomorphismes de changement de cartes

$$\phi_U \circ \phi_{U'}^{-1}$$

sont des difféomorphismes holomorphes là où ils sont définis, c'est-à-dire de $\phi_{U'}(U \cap U')$ dans $\phi_U(U \cap U')$.

Une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ sur une variété complexe est dite holomorphe si pour toute carte $U \subset X$, $\phi_U : U \cong V \subset \mathbb{C}^n$, la fonction $f \circ \phi_U^{-1}$ est holomorphe sur V.

Les ouverts U et les homéomorphismes locaux $\phi_U : U \cong V \subset \mathbb{C}^n$ sont alors appelés des cartes holomorphes et les fonctions $z_{i,U} := x_i \circ \phi_U$ sont appelées des coordonnées holomorphes locales sur X. Notons que pour vérifier que f est holomorphe au voisinage d'un point $x \in X$, il suffit de le faire dans une carte holomorphe, du fait que les homéomorphismes de changement de cartes sont holomorphes et que la composition de deux applications holomorphes est holomorphe.

Théorème 1.1.12. *Sur une variété complexe compacte connexe, les fonctions holomorphes sont constantes. En particulier, une variété complexe compacte de dimension n ne peut pas être plongée holomorphiquement dans $\mathbb{C}^N$, quel que soit N.*

Démonstration. Ceci résulte en effet du principe du maximum. Soit f une fonction holomorphe sur X. Comme X est compacte, la fonction $|f|$ atteint son maximum en un point $x \in X$. Soit $\phi_U : U \cong V \subset \mathbb{C}^n$ une carte holomorphe centrée en x. La fonction $f \circ \phi_U^{-1}$ est par définition holomorphe sur V et la fonction $|f \circ \phi_U^{-1}|$ atteint son maximum en 0. Elle est donc constante dans un voisinage de $0 \in V$. On a donc montré que la fonction f est constante au voisinage de x. Par prolongement analytique et connexité de X, on conclut que f est constante. ∎

1.2 Fibrés vectoriels

1.2.1 Fibrés vectoriels : définition, opérations

Soit X une variété différentiable de classe C^k. On va définir les fibrés vectoriels (de classe C^k) sur X. Supposant que X est connexe, un tel fibré possède un rang r. L'espace total E du fibré est alors une variété différentiable de dimension $n+r$, $n = \dim X$. La structure de fibré est donnée par une application différentiable $\pi : E \to X$. La structure de fibré vectoriel est décrite localement par les conditions suivantes :

1. X admet un recouvrement par des ouverts U_i tels que $E_{U_i} := \pi^{-1}(U_i) \subset E$ est difféomorphe à $U_i \times \mathbb{R}^r$, le difféomorphisme $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{R}^n$ satisfaisant $pr_1 \circ \phi_i = \pi$.
2. Au-dessus de l'intersection $U_i \cap U_j$, les difféomorphismes ϕ_i et ϕ_j satisfont la propriété suivante :
$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^r \cong (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^r$$
est de la forme
$$(x, v) \mapsto (x, M_{ij}(x)v), \tag{1.2.4}$$
où M_{ij} est une matrice (r, r) dont les coefficients sont des fonctions de classe C^k de x.

Les difféomorphismes ϕ_i sont appelés des trivialisations locales de E sur U_i. Les matrices M_{ij} sont appelées des matrices de transition.

Notons que le groupe $\mathbb{R}^*$ agit différentiablement sur E, l'action se faisant au-dessus de la base, ou encore commutant avec π : Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, la multiplication μ_λ agissant sur E est donnée dans les trivialisations locales comme la multiplication par λ agissant sur $\mathbb{R}^n$ (donc sur $U \times \mathbb{R}^n$, l'action sur U étant triviale). Le fait que les actions ainsi définies localement se recollent résulte immédiatement de (1.2.4), puisque les applications de changements de trivialisations étant linéaires le long des fibres, elles commutent avec la multiplication par λ.

Définition 1.2.1. *Une section (de classe C^k) d'un fibré vectoriel E sur X (de classe C^k) est une application différentiable (de classe C^k) $\sigma : X \to E$ telle que $\pi \circ \sigma = \pi$.*

Dans une trivialisation locale $\phi_U : E_U \cong U \times \mathbb{R}^r$ de E au-dessus de U, une telle section σ est donc donnée par une application différentiable f_U de U dans $\mathbb{R}^r$, telle que $\phi_U \circ \sigma_{|U}(x) = (x, f_U(x))$. On note $\Gamma(X, E)$ l'ensemble des sections de E (la classe étant spécifiée). Un fibré vectoriel E possède toujours la section 0, qui dans les trivialisations locales est donnée par $x \mapsto (x, 0) \in U \times \mathbb{R}^r$. Le théorème suivant montre qu'un fibré vectoriel réel possède toujours beaucoup de sections.

Théorème 1.2.2. *Soit $E \to X$ un fibré vectoriel, et soit $\sigma_U : U \to E$ une section de E sur un ouvert U de X. Alors pour tout $x \in U$, il existe un voisinage $V \subset U$ de x dans U, et une section $\tilde{\sigma}$ de E sur X, telle que*

$$\tilde{\sigma}_{|V} = \sigma_{|V}.$$

Démonstration. D'après le lemme 1.1.7, il existe un voisinage W de x tel que $\overline{W} \subset U$ et une fonction différentiable $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $f = 1$ dans un voisinage $V \subset W$ de x et $f = 0$ dans $U \setminus W$. Pour toute section σ de E sur U, la section $f\sigma : z \mapsto f(z)\sigma(z)$ est une section différentiable de E sur U qui s'annule dans $U \setminus W$ et qui vaut σ sur V. Cette section s'étend clairement en une section $\tilde{\sigma}$ de E sur X : on pose $\tilde{\sigma}(z) = 0$ en dehors de U. On vérifie la continuité et la différentiabilité comme dans le lemme 1.1.7. ∎

Le corollaire suivant utilise la notion d'évaluation d'une section en un point $x \in X$. Si $\sigma : X \to E$ est une section, et $x \in X$, $\sigma(x) \in \pi^{-1}(x) =: E_x$. L'application $\sigma \mapsto \sigma(x) \in E_x$ est appelée l'application d'évaluation. Notons que la fibre E_x est isomorphe (non canoniquement) à $\mathbb{R}^r$. L'ensemble des sections de E a naturellement une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel, la somme des sections σ et σ' étant définie dans les trivialisations locales comme ci-dessus par

$$\phi_U \circ \sigma_{|U}(x) = (x, f_U(x)),\ \phi_U \circ \sigma'_{|U}(x) = (x, f'_U(x)),$$

$$\phi_U \circ (\sigma + \sigma')_{|U}(x) = (x, f_U(x) + f'_U(x)).$$

Le produit par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est donné par $\lambda\sigma = \mu_\lambda \circ \sigma : X \to E$. L'application d'évaluation $ev_x : \Gamma(X, E) \to E_x$ est clairement un morphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Corollaire 1.2.3. *L'application d'évaluation $ev_x : \Gamma(X, E) \to E_x$ est surjective.*

Démonstration. En effet, prenons une base $\tau_1, \ldots, \tau_r$ de E_x. Il est clair que dans une trivialisation locale $E_U \cong U \times \mathbb{R}^r$ de E dans un voisinage U de x, il existe des sections $\tau_{i,U}$ de E sur U telles que $\tau_{i,U}(x) = \tau_i$. Pour chaque i il existe un voisinage V_i de x dans U tel que la section $\tau_{i,U}$ restreinte à V_i s'étende en une section σ_i de E sur X. Les sections σ_i satisfont alors $ev_x(\sigma_i) = \tau_i$. ∎

Dans le cas compact, on a le résultat suivant :

Corollaire 1.2.4. *Si de plus X est compacte, il existe un nombre fini de sections $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ telle que notant $F \subset \Gamma(X, E)$ le $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\Gamma(X, E)$ engendré par les σ_i, l'application d'évaluation $ev_x : F \to E_x$ soit surjective en tout point $x \in X$. (On dit aussi que les sections de E engendrent E au point x.)*

Démonstration. Pour tout $x \in X$, on sait qu'il existe des sections $\sigma_1, \dots \sigma_r$ de E telles que $ev_x(\sigma_i)$ engendrent E_x. Il existe alors un voisinage $V_x \subset X$ de x dans X tel que pour tout $x' \in V_x$, les $ev_{x'}(\sigma_i)$ engendrent $E_{x'}$. Ceci résulte du théorème 1.2.2 mais peut se voir aussi directement de la façon suivante : Dans une trivialisation locale de E sur un voisinage U de x dans X, les sections σ_i sont données par r applications différentiables $f_1, \dots, f_r : U \to \mathbb{R}^r$. On sait que les éléments $f_1(x), \dots, f_r(x)$ sont indépendants au point x, ce qui s'écrit comme la non-annulation au point x du déterminant de la matrice des vecteurs $f_1(x), \dots, f_r(x)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^r$. Ce déterminant étant une fonction différentiable et donc continue de x, il ne s'annule pas dans un voisinage V_x de x ce qui en retour entraîne que les sections σ_i engendrent $E_{x'}$ pour x' dans V_x.

Les ouverts V_x recouvrent X qui est compact. Un nombre fini de tels ouverts recouvrent X. Pour chaque tel ouvert, on dispose d'un nombre fini de sections de E engendrant E sur cet ouvert. Ceci nous fournit un nombre fini de sections de E engendrant E en tout point.

■

Sommes directes

Soient E et E' deux fibrés vectoriels sur X, de rangs respectifs r et r'.

Définition 1.2.5. *La somme directe $E \oplus E'$ est le fibré vectoriel sur X obtenu de la façon suivante : Prenons un recouvrement ouvert de X par des U_i sur lesquels E et E' sont trivialisés : $\phi_i : E_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{R}^r$, $\phi_i' : E'_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{R}^{r'}$. On pose alors*

$$(E \oplus E')_{|U_i} \cong U_i \times (\mathbb{R}^r \oplus \mathbb{R}^{r'}),$$

les matrices de transition pour $E \oplus E'$ étant les matrices par blocs

$$\begin{pmatrix} M_{ij} & 0 \\ 0 & M'_{ij}, \end{pmatrix}$$

où les M_{ij}, resp. M'_{ij}, sont les matrices de transition pour E, resp. E'.

Remarque 1.2.6. L'opération décrite ci-dessus est un cas particulier de produit fibré : si $f : X \to B$, $g : Y \to B$ sont deux espaces topologiques au-dessus de B, le produit fibré $X \times_B Y$ est défini comme l'image inverse de la diagonale de B dans le produit $X \times Y$:

$$X \times_B Y := \{(x, y) \in X \times Y,\ f(x) = g(y)\}.$$

1.2.2 Dual, produit tensoriel, Hom

Voir TD.

Noyaux, Quotients

Soient E, E' deux fibrés vectoriels sur X.

Définition 1.2.7. *Un morphisme $f : E \to E'$ est une application différentiable $f : E \to E'$ au-dessus de X, c'est-à-dire telle que $\pi' \circ \phi = \pi$, et donnée dans des trivialisations locales $\phi_U : E_U \cong U \times \mathbb{R}^r$, $\phi'_U : E'_U \cong U \times \mathbb{R}^{r'}$ par une matrice de taille (r, r') à coefficients différentiables :*

$$\phi'_U \circ f \circ \phi_U^{-1}(x, v) = (x, M(x)v) \in U \times \mathbb{R}^{r'}, \, \forall (x, v) \in U \times \mathbb{R}^r.$$

Un tel f induit en chaque point un morphisme $f_x : E_x \to E'_x$ de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, donné dans des trivialisations comme ci-dessus par la matrice $M(x)$. On dit que f est surjectif en tout point si f_x est surjectif pour tout $x \in X$. On dit que f est injectif en tout point si f_x est injectif pour tout $x \in X$.

Définition 1.2.8. *Soit $E \to X$ un fibré vectoriel de rang r. Un sous-fibré vectoriel $E' \subset E$ de rang $r' \leq r$ est une sous-variété $E' \subset E$ telle que pour un choix adéquat de trivialisations locales*

$$\phi_U : E_U \cong U \times \mathbb{R}^r$$

de E, on ait $E'_U := E' \cap E_U = U \times \mathbb{R}^{r'}$, où $\mathbb{R}^{r'} \subset \mathbb{R}^r$ est engendré par les r' premiers vecteurs de la base canonique.

Proposition 1.2.9. *Soit $f : E \to E'$ un morphisme de fibrés vectoriels de rangs respectifs r et r' qui est surjectif en tout point. Alors $f^{-1}(0_{E'}) \subset E$ est un sous-fibré vectoriel de E de rang $r - r'$. On note ce fibré* $\operatorname{Ker} f$.

Démonstration. On sait qu'en tout point $x \in X$, l'application $f_x : E_x \to E'_x$ est surjective. Dans des trivialisations locales

$$\phi_U : E_U \cong U \times \mathbb{R}^r, \, \phi'_U : E'_U \cong U \times \mathbb{R}^{r'},$$

le morphisme f est donné par une matrice M de taille (r, r') dont les coefficients sont des fonctions différentiables de x et telle que $M(x) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^{r'}$ est surjective pour tout $x \in U$. Soit $x \in U$. Quitte à changer l'ordre des vecteurs de base de $\mathbb{R}^r$, on peut supposer que les vecteurs $M(x)e_1, \ldots, M(x)e_{r'}$ forment une base de $\mathbb{R}^{r'}$. Notons $p_{r'+1,r} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^{r-r'}$ le projecteur sur l'espace vectoriel engendré par $e_{r'+1}, \ldots, e_r$. Considérons le morphisme de fibrés vectoriels de rang r sur U :

$$g : E_U \to E'_U \oplus \mathbb{R}^{r-r'},$$

$$g(e) = (f(e), p_{r'+1,r}(\phi_U(e)))$$

ou encore, en utilisant les trivialisations ϕ_U et ϕ'_U :

$$g(x, v) = (x, M(x)v, p_{r'+1,r}(v).$$

Ce morphisme est un isomorphisme au point x, donc dans un voisinage $U' \subset U$ de x (son inverse est obtenu en inversant la matrice de $v \mapsto (M(x)v, p_{r'+1,r}(v))$ et est donc différentiable de la même classe). Combinant ceci avec la trivialisation choisie de E' sur U', on obtient une nouvelle trivialisation $\phi''_{U'}$ de $E_{U'}$, qui est telle que le morphisme f s'écrit dans les trivialisations $\phi''_{U'}$ et $\phi'_{U'}$ comme le projecteur $p_{1,r'} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^{r'}$ sur les r' premiers facteurs. Il résulte alors de la définition que $f^{-1}(0)$ est un sous-fibré de E.

■

On peut définir de façon similaire le quotient d'un morphisme de fibrés vectoriels $f : E' \to E$ injectif en tout point. C'est un fibré noté E/E' de rang $r - r'$, tel qu'il existe un morphisme surjectif en tout point

$$g : E \to E/E'$$

de noyau égal au sous-fibré $f(E') \subset E$. On peut aussi voir E/E' comme le dual du noyau de la transposée $f^* : E^* \to (E')^*$.

1.2.3 Métriques et structures complexes

Définition 1.2.10. *Une métrique sur un fibré vectoriel $E \to X$ réel de rang r est la donnée pour tout $x \in X$ et $e, e' \in E_x$ d'un nombre réel $g_x(e, e')$, avec $g_x(e, e) > 0$ pour $e \neq 0$ in E_x, et donnée dans des trivialisations locales ϕ_U : $E_U \cong U \times \mathbb{R}^r$ par une matrice symétrique M (nécessairement définie positive en tout point) dont les coefficients sont des fonctions différentiables de $x \in U$:*

$$g_x(e, e') = {}^t v M_x v',\ \phi_U(e) = (x, v),\ \phi_U(e') = (x, v').$$

Théorème 1.2.11. *Supposons que X est compacte (bien que ce ne soit pas strictement nécessaire). Alors tout fibré vectoriel réel sur X admet une métrique.*

Démonstration. Pour tout ouvert U où E est trivialisé, i.e. $E \cong U \times \mathbb{R}^r$, il existe une métrique g_U sur E_U (la métrique constante de $\mathbb{R}^r$). Prenons un recouvrement de X par des ouverts U_i et une partition de l'unité donnée par des fonctions $f_i \geq 0$ nulles en dehors de U_i, et telles que $\sum_i f_i = 1$. Posons pour $x \in X$, $u, v \in E_x$,

$$g_x(u, v) = \sum_i f_i(x) g_{i,x}(u, v), \tag{1.2.5}$$

où $f_i(x)g_{i,x}(u, v) := 0$ si $x \notin U_i$. Pour x fixé, $g_x(u, v)$ est une somme de formes bilinéaires symétriques semipositives sur E_x, dont l'une au moins est > 0 (puisque l'un des $f_i(x)$ est non nul et que la forme $g_{i,x}$ est définie positive sur U_i). Donc $(u, v) \mapsto g_x(u, v)$ est définie positive en tout point. La différentiabilité de la matrice de g dans une trivialisation est claire d'après la formule (1.2.5) puisque chaque terme est une forme bilinéaire dont la matrice est à coefficients différentiables.

■

Corollaire 1.2.12. *Soit E un fibré vectoriel réel sur X et soit $E' \subset E$ un sous-fibré vectoriel. Alors il existe un sous-fibré vectoriel $E'' \subset E$ tel que $E \cong E' \oplus E''$.*

Démonstration. On met une métrique g sur E et prend pour E'' l'orthogonal de E' relativement à g, ou encore le noyau de l'application $E \to E'^*$ composée de $g : E \to E^*$ et de l'application de restriction $E^* \to E'^*$. On vérifie localement que $E \cong E' \oplus E''$. ∎

Fibrés vectoriels complexes

Soit E un fibré vectoriel réel de rang pair $r = 2s$ sur une variété différentiable X. On dit que E est muni d'une structure complexe si on dispose d'un système de trivialisations

$$\phi_U : E_U \cong U \times \mathbb{R}^{2s} \cong U \times \mathbb{C}^s,$$

tel que les matrices de transitions

$$\phi_U \circ \phi_V^{-1} : (U \cap V) \times \mathbb{C}^s \cong (U \cap V) \times \mathbb{C}^s$$

soient des matrices M_{UV} d'applications $\mathbb{C}$-linéaires de $\mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{C}^s$. Les coefficients de M_{UV} sont des fonctions différentiables de $U \cap V$ dans $\mathbb{C}$.

Lemme 1.2.13. *La donnée d'une structure complexe sur E est équivalente à la donnée d'un endomorphisme I de E satisfaisant $I^2 = -Id_E$.*

Démonstration. Si on a une structure complexe sur E, on définit l'endomorphisme I comme étant la multiplication par i agissant sur $\mathbb{C}^n$ dans les trivialisations ci-dessus. Dans l'autre direction, étant donné I, on considère le fibré vectoriel $E \otimes \mathbb{C}$ sur lequel I agit (on note $I_{\mathbb{C}}$ l'extension de I à $E \otimes \mathbb{C}$). Ce fibré est la somme directe de deux sous-fibrés $E' := \mathrm{Ker}\, I_{\mathbb{C}} - iId$ et $E'' := \mathrm{Ker}\, I_{\mathbb{C}} + iId$. Le fibré E' est un fibré vectoriel complexe et est isomorphe à E comme fibré vectoriel réel. Comme $I_{\mathbb{C}}$ agit par i sur E', il est clair que ces deux constructions sont inverses l'une de l'autre. ∎

1.2.4 Fibrés vectoriels holomorphes

Soit X une variété complexe. On a vu la notion de fonction holomorphe sur X : ce sont les fonctions qui sont holomorphes dans des cartes holomorphes.

Définition 1.2.14. *Un fibré vectoriel holomorphe E sur X (de rang r) est un fibré vectoriel complexe de rang r muni d'un système de trivialisations, dites holomorphes,*

$$\phi_U : E_U \cong U \times \mathbb{C}^r$$

tel que les matrices de transition M_{UV}, définies sur $U \cap V$ par

$$\phi_V \circ \phi_U^{-1}(x, v) = (x, M_{UV} v),\ v \in \mathbb{C}^r$$

sont à coefficients holomorphes en x.

Une section holomorphe σ d'un fibré holomorphe est une section qui est donnée dans des trivialisations holomorphes locales de E comme ci-dessus par

$$\phi_U(x) = (x, f(x))$$

où $f : U \to \mathbb{C}^r$ est holomorphe. Cette condition ne dépend pas de la trivialisation holomorphe choisie, car si M est une matrice de fonctions holomorphes et $f : U \to \mathbb{C}^r$ est holomorphe, alors $M_{UV} f : U \to \mathbb{C}^r$ est aussi holomorphe.

Contrairement au cas différentiable, où un fibré vectoriel admet toujours beaucoup de sections (cf. Théorème 1.2.2), les fibrés vectoriels holomorphes peuvent n'avoir aucune section holomorphe non nulle. Voici un exemple : Prenons la “droite projective” $\mathbb{CP}^1$. C'est la sphère $\mathbb{S}^2$ que l'on voit comme la réunion de deux copies de $\mathbb{C}$ (l'une, notée $\mathbb{C}_N$, paramétrant $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, où N est le “pôle Nord”, l'autre notée $\mathbb{C}_S$, paramétrant $\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$, où S est le “pôle Sud”), chacune étant munie de sa coordonnée z_N centrée en N, resp. z_S centrée en S, recollées par le changement de variables

$$z_S = \frac{1}{z_N}$$

sur $\mathbb{C}_N \cap \mathbb{C}_S$ qui est une copie de $\mathbb{C}^*$ dans chacun des ouverts $\mathbb{C}_N$ et $\mathbb{C}_S$. Considérons maintenant le fibré vectoriel holomorphe E de rang 1 qui est trivial sur $\mathbb{C}_N$ et sur $\mathbb{C}_S$ et dont la matrice de transition M_{NS} est donnée par la fonction $\frac{1}{z_S}$ sur $\mathbb{C}_N \cap \mathbb{C}_S \cong \mathbb{C}^*$.

Une section holomorphe de E est donné par une fonction holomorphe ϕ_N sur $\mathbb{C}_N$ et une fonction holomorphe ϕ_S sur $\mathbb{C}_S$, satisfaisant

$$\phi_S = \frac{\phi_N}{z_S} \tag{1.2.6}$$

sur l'intersection. Comme ϕ_S est holomorphe sur $\mathbb{C}_S$, la formule (1.2.6), vue sous la forme

$$\phi_N = z_S \phi_S$$

montre que la fonction ϕ_N s'étend holomorphiquement sur $\mathbb{CP}^1$ au point S, la fonction étendue s'annulant au point S. D'après le théorème 1.1.12, cette fonction holomorphe sur $\mathbb{CP}^1$ est constante, et comme elle est nulle en S, elle est identiquement nulle. Le fibré ainsi construit est le fibré de Hopf sur $\mathbb{CP}^1$.

Cet exemple nous montre aussi qu'un fibré vectoriel complexe peut avoir plusieurs (et même une infinité continue de) structures holomorphes. En effet, notons $\mathcal{H}$ le fibré holomorphe de rang 1 construit ci-dessus, et $\mathcal{H}^*$ son dual, qui est le fibré holomorphe dont les matrices de transition sont les inverses des transposées des matrices de transition de $\mathcal{H}$, soit dans le cas présent la fonction inversible z_S sur $\mathbb{C}_N \cap \mathbb{C}_S \cong \mathbb{C}^*$.

Notons H et H^* les fibrés vectoriels complexes différentiables sous-jacents à $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}^*$ respectivement. Cette notion est très importante ; elle signifie que l'on considère le même fibré avec les mêmes trivialisations et les mêmes matrices de transition, mais qu'on considère ces matrices comme des matrices à coefficients des fonctions différentiables, oubliant leur caractère holomorphe. On a le résultat suivant :

Lemme 1.2.15. *Le fibré holomorphe $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^*$ n'est pas isomorphe comme fibré vectoriel holomorphe au fibré holomorphe trivial $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2$, tandis que le fibré vectoriel différentiable sous-jacent $H \oplus H^*$ est différentiablement isomorphe au fibré vectoriel trivial.*

Démonstration. On a vu que toute section holomorphe de $\mathcal{H}$ est nulle. Donc $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^*$ n'est pas engendré en tout point par ses sections holomorphes, ce qui montre que $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^*$ n'est pas isomorphe au fibré holomorphe trivial. Pour montrer que $H \oplus H^*$ est différentiablement isomorphe au fibré vectoriel trivial, on montre d'abord qu'une section différentiable suffisamment générique de $H \oplus H^*$ n'a pas de 0 et fournit donc une inclusion du fibré constant $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}$ dans $H \oplus H^*$, injective en tout point. Mettant une métrique hermitienne sur $H \oplus H^*$, on en conclut que $H \oplus H^*$ est une somme directe $T \oplus T^\perp$, où T et $T^\perp$ sont deux sous-fibrés complexes de rang 1, avec T trivial. On montre finalement que $T^\perp$ est trivial par des arguments topologiques qu'on verra plus tard.

■

1.3 Exemples

1.3.1 Sphères et tores

La sphère $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est définie par l'équation $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$. Notons que la sphère $\mathbb{S}^n$ est l'union de ses deux hémisphères

$$\mathbb{S}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}),\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1,\ x_{n+1} \geq 0\},$$

$$\mathbb{S}^n_- = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}),\ \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1,\ x_{n+1} \leq 0\},$$

l'intersection $\mathbb{S}^n_+ \cap \mathbb{S}^n_-$ étant la sphère $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ définie par $x_{n+1} = 0$. Les hémisphères $\mathbb{S}^n_+$ et $\mathbb{S}^n_-$ sont difféomorphes comme variétés à bord au disque $\mathbb{D}_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \sum_i x_i^2 \leq 1$.

Ceci suggère plus généralement le procédé de construction suivant, pour des variétés de dimension n : Partant de deux variétés à bords X et Y de dimension n, on suppose qu'une composante connexe M du bord de X est difféomorphe à une composante connexe N du bord de Y. On construit alors la variété Z obtenue en recollant X et Y le long M et N, de la façon suivante : Un voisinage de M dans X est difféomorphe comme variété à bords à $]-1,0] \times M$ et un voisinage de N dans Y est difféomorphe à $[0,1[\times N$. Identifiant M à N via le difféomorphisme donné $M \cong N$, la variété $XU_{M=N}Y$ contient X, Y et $]-1,1[\times M$, avec $]-1,1[\times M \cap X =]-1,0] \times M \subset X$, $]-1,1[\times M \cap Y = [0,1[\times N \subset Y$.

Partons en particulier de deux variétés X et Y (sans bord) de dimension n, et choisissons $x \in X$, $y \in Y$. Soit B^n_x une boule ouverte de X centrée en x, et

B_y^n une boule ouverte de Y centrée en y. Soit $X_0 = X \setminus B_x^n$ et $Y_0 := Y \setminus B_y^n$. Chacune de ces variétés a un bord difféomorphe à S^{n-1}. La variété obtenue en recollant X_0 et Y_0 grâce au difféomorphisme $\partial X_0 \cong \partial Y_0$ est appelée la *somme connexe* de X et Y.

Ce procédé permet de construire toutes les surfaces de Riemann compactes en partant de $\mathbb{S}^2$ et du tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Les tores $\mathbb{T}^n$ peuvent être définis en tant que variétés différentiables comme les produits $(\mathbb{S}^1)^n$. Il est cependant beaucoup plus intéressant de les considérer comme des *variétés quotients*. Soit X un espace topologique et Γ un groupe discret agissant sur X. Cela signifie qu'on a un morphisme de groupes $\Gamma \to \operatorname{Aut} X$, où $\operatorname{Aut} X$ est l'ensemble des homéomorphismes de X dans lui-même.

On demande que l'action de Γ soit sans point fixe, c'est-à-dire que pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 1_\Gamma$, l'ensemble $\{x \in X,\, \gamma(x) = x\}$ soit vide. On demande par ailleurs que tout point de X ait un système de voisinages compacts (c'est le cas des variétés) et que l'action soit proprement discontinue, c'est-à-dire que pour tout compact $K \subset X$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma,\, \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$ soit fini. L'espace quotient X/Γ est défini ensemblistement comme l'ensemble des orbites $\Gamma x \subset X$. Notons qu'on a $\Gamma x = \Gamma x'$ si et seulement si $x' \in \Gamma x$. On a une application ensembliste évidente (dite application quotient)

$$q : X \to X/\Gamma$$

qui à X associe son orbite Γx. Cette application a pour fibre $q^{-1}(q(x))$ l'orbite Γx.

La topologie de X/Γ est la suivante : Un ensemble $U \subset X/\Gamma$ est ouvert si et seulement si $q^{-1}(U)$ est ouvert. Du fait que Γ agit de façon proprement discontinue et sans points fixes, pour tout $x \in X$, il existe un ouvert $U \subset X$ contenant x (et contenu dans un voisinage compact de x) ayant la propriété que $\gamma U \cap U \neq \emptyset$ si et seulement si $\gamma = 1_\Gamma$. L'application q restreinte à U est alors un homéomorphisme sur son image.

Si X est une variété différentiable (resp. holomorphe) et que Γ agit par transformations différentiables (resp. holomorphes), le quotient X/Γ admet une structure de variété différentiable, resp. holomorphe. On utilise pour cela les ouverts $U \subset X$ comme ci-dessus, homéomorphes à leurs images $q(U) \subset X/\Gamma$. Si U est muni de coordonnées différentiables (resp. holomorphes), on utilise ces coordonnées comme coordonnées locales sur l'ouvert $q(U) \subset X/\Gamma$. Les applications de changements de cartes pour le quotient X/Γ sont obtenues en observant que si U, V sont comme ci-dessus, $q(U) \cap q(V)$ est égal à l'union disjointe pour $\gamma \in \Gamma$ de $q(U \cap \gamma V)$ (cette union est en fait finie si U est relativement compact). Les applications de changement de carte dans chaque composante connexe $q(U \cap \gamma V)$ sont celles dont on dispose sur $U \cap \gamma V$.

L'exemple le plus simple d'espace quotient est donné par $X = \mathbb{R}$ et $\Gamma = \mathbb{Z}$ agissant par translation sur $\mathbb{R}$. Par l'application

$$x \mapsto \exp ix$$

le quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est difféomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$ des nombres complexes de module 1.

Plus généralement, soit $\Gamma = \mathbb{Z}^n \subset V = \mathbb{R}^n$. Alors le quotient V/Γ est difféomorphe à $(\mathbb{S}^1)^n$. Ici on a pris pour Γ le réseau standard de $\mathbb{R}^n$. Si on prend pour $\Gamma \subset V$ n'importe quel sous-groupe additif agissant par translations, la condition que Γ agisse de façon proprement discontinue est équivalente au fait que Γ soit discret, et la condition que le quotient soit compact équivaut au fait que Γ contienne une base de $\mathbb{R}^n$. On dit que Γ est un réseau cocompact de $\mathbb{R}^n$.

Dans cette dernière situation, supposons que n est pair, $n = 2m$, et posons $V = \mathbb{C}^m$. On a sur V une carte globale qui fournit des coordonnées holomorphes en tout point. Si $\Gamma \subset V$ est un réseau cocompact, le quotient V/Γ admet les cartes induites par le choix d'ouverts $U \subset V$ tels que $U \cap \gamma + U = \emptyset$ pour $\gamma \neq 0$. Les changements de cartes permettant de passer des U-coordonnées aux V-coordonnées sur $q(U) \cap q(V)$ sont donnés par les difféomorphismes

$$U \cap (\gamma + V) \subset \gamma + V \cong V.$$

Comme le groupe Γ agit par translations qui sont des difféomorphismes holomorphes de $\mathbb{C}^m$, les changements de cartes sont holomorphes et on a donc une structure complexe sur V/Γ. Cette construction donne des exemples importants de variétés complexes compactes.

1.3.2 Grassmanniennes et fibrés tautologiques

Soient r, n deux entiers avec $r \leq n$. On définit la grassmannienne $G_{\mathbb{R}}(r,n)$, resp. $G_{\mathbb{C}}(r,n)$, comme l'ensemble des sous-espaces vectoriels réels de rang r de $\mathbb{R}^n$ (resp. l'ensemble des sous-espaces vectoriels complexes de rang r de $\mathbb{C}^n$).

La topologie de $G_{\mathbb{R}}(r,n)$ est la topologie quotient, si on voit $G_{\mathbb{R}}(r,n)$ comme le quotient de $Gl_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices (n,n) inversibles à coefficients dans $\mathbb{R}$), par le sous-groupe $Gl_{n,r}(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures par blocs, dont les coefficients α_{ij} pour $i > r$ et $j \leq r$ sont nuls. Cette identification ensembliste est obtenue en observant que pour tout sous espace vectoriel de rang r de $\mathbb{R}^n$, il existe une matrice inversible M de taille (n,n) dont les r premiers vecteurs colonnes forment une base de V. De plus, si M' est une autre matrice satisfaisant cette propriété, alors $M'M^{-1} \in Gl_{n,r}(\mathbb{R})$.

La structure de variété différentiable de $G_{\mathbb{R}}(r,n)$ est obtenue de la façon suivante : Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel de rang r, et notons $[V]$ le point de $G_{\mathbb{R}}(r,n)$ correspondant. Choisissons un sous-espace vectoriel $K \subset V$ de rang $n-r$ de $\mathbb{R}^n$ supplémentaire de V, c'est-à-dire

$$V \oplus K \cong \mathbb{R}^n. \tag{1.3.7}$$

Soit $U_K \subset G_{\mathbb{R}}(r,n)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels $V' \subset \mathbb{R}^n$ de rang r satisfaisant la condition $V' \cap K = \{0\}$. On vérifie que U_K est ouvert dans $G(r,n)$. D'autre part, un point $[V']$ de U correspond à un sous-espace V' de $\mathbb{R}^n$ qui est isomorphe à V par la première projection $pr_V : \mathbb{R}^n \to V$ donnée par la décomposition (1.3.7). On peut donc voir V' comme le graphe de l'application linéaire $pr_K \circ pr_{V|V'}^{-1} : V \to K$, où pr_K est la seconde projection $\mathbb{R}^n \to K$ donnée par la décomposition (1.3.7). On a donc trouvé une bijection $U_K \cong \mathrm{Hom}\,(V,K)$

dont on vérifie qu'elle est un homéomorphisme. Les résultats suivants sont laissés en exercice :

Lemme 1.3.1. *Les fonctions de transition sont différentiables.*

Ce lemme fournit une structure de variété différentiable sur $G_{\mathbb{R}}(r,n)$.

Passant au cas complexe, la même construction donne des cartes pour $G_{\mathbb{C}}(r,n)$ au voisinage de $[V] \in G_{\mathbb{C}}(r,n)$, de la forme $U_K \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,K)$, où K est un sous-espace vectoriel complexe de $\mathbb{C}^n$ supplémentaire de V.

L'espace $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,K)$ étant un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, ces cartes fournissent des coordonnées complexes locales. La structure de variété complexe de $G_{\mathbb{C}}(r,n)$ résulte du lemme suivant laissé en exercice :

Lemme 1.3.2. *Les fonctions de transition pour les cartes ci-dessus sont holomorphes.*

Fibré tautologique

Les grassmanniennes $G(r,n)$ possèdent un fibré tautologique de rang r qui, dans le cas de la grassmannienne complexe $G_{\mathbb{C}}(r,n)$ est un fibré vectoriel holomorphe.

Ce fibré est défini de la façon suivante : comme précédemment, pour chaque sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{R}^n$, on note $[V]$ le point correspondant de $G_{\mathbb{R}}(r,n)$. On pose

$$E_{r,n} = \{(v,[V]) \in \mathbb{R}^n \times G_{\mathbb{R}}(r,n),\, v \in V\}. \tag{1.3.8}$$

On vérifie aisément que $E_{r,n}$ est une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^n \times G_{\mathbb{R}}(r,n)$. Montrons que c'est un fibré vectoriel : Dans les cartes $U_K \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,K)$ au voisinage de $[V] \in G_{\mathbb{R}}(r,n)$, on a un isomorphisme naturel entre E_{r,n,U_K} et $U_K \times V$ obtenu en rappelant que $\mathbb{R}^n \cong V \oplus K$: On pose

$$\phi_{K,V} : U_K \times V \cong E_{r,n,U_K},$$

$$\phi_{K,V}(f,v) = (f, v + f(v)).$$

On vérifie que les matrices de transition sont à coefficients différentiables. Dans le cas de $G_{\mathbb{C}}(r,n)$, ces matrices sont à coefficients holomorphes (voir TD).

Tirés en arrière et propriété universelle des grassmanniennes

Les grassmanniennes ont une propriété universelle : ce sont des espaces classifiants pour les fibrés de rang r engendrés par leurs sections. Introduisons tout d'abord la notion de "pull-back" ("tiré en arrière" en français) d'un fibré vectoriel : Soit $\phi : Y \to X$ une application différentiable entre variétés différentiables. Soit E un fibré vectoriel réel sur X. Le pull-back ϕ^*E de E sur Y est le fibré vectoriel sur Y défini de la façon suivante : L'espace total du fibré ϕ^*E est le produit fibré $Y \times_X E$. Le fibré E est trivialisé sur des ouverts U de X avec des matrices de transition M_{UV} à coefficients différentiables sur $U \cap V$. Le fibré $\phi^*E_{\phi^{-1}(U)}$

est alors trivialisé sur les ouverts de la forme $\phi^{-1}(U)$, et on prend pour matrices de transition sur $\phi^{-1}(U) \cap \phi^{-1}(V) = \phi^{-1}(U \cap V)$ les matrices $M_{UV} \circ \phi$, qu'on voit comme des matrices à coefficients différentiables sur $\phi^{-1}(U \cap V)$.

On peut faire cette construction dans le cadre des fibrés vectoriels complexes, et même, supposant que X et Y sont des variétés complexes, et que ϕ est holomorphe, dans le cadre des fibrés vectoriels holomorphes.

Théorème 1.3.3. *Soit E un fibré vectoriel réel de rang r sur une variété différentiable X, et soit $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, n sections engendrant E en tout point. Alors il existe une application différentiable $\phi : X \to G_{\mathbb{R}}(r, n)$ et un isomorphisme de fibrés vectoriels*

$$\alpha : \phi^*(E^*_{r,n}) \cong E$$

tels que les sections σ_i s'identifient aux n sections de $E^*_{r,n}$ données par la surjection de fibré vectoriels

$$G_{\mathbb{R}}(r, n) \times \mathbb{R}^n \to E^*_{r,n}$$

duale de l'inclusion $E_{r,n} \subset G_{\mathbb{R}}(r, n) \times \mathbb{R}^n$ de (1.3.8).

Démonstration. On dispose d'un morphisme surjectif en tout point

$$\mathrm{ev} : X \times \mathbb{R}^n \to E,$$

donné par l'évaluation des sections σ_i. Dualisons ce morphisme : nous obtenons un morphisme injectif en tout point

$$\mathrm{ev}^* : E^* \hookrightarrow X \times \mathbb{R}^n.$$

Cette inclusion fournit en chaque point $x \in X$ un sous-espace $E_x \subset \mathbb{R}^n$. Ceci nous donne l'application ensembliste $\phi : X \to G_{\mathbb{R}}(r, n)$, qui à x associe $[E_x] \in G_{\mathbb{R}}(r, n)$, ainsi que l'application linéaire fibre à fibre $\alpha : E^* \cong \phi^* E_{r,n}$, obtenue en notant que l'espace total de $\phi^* E_{r,n}$ est, d'après la formule (1.3.8) et la définition d'un produit fibré, décrit ensemblistement par

$$\phi^* E_{r,n} = \{(x, v) \in X \times \mathbb{R}^n,\ v \in E^*_x\}.$$

Il est évident que cette formule décrit également $E^* \subset X \times \mathbb{R}^n$.

Pour conclure, il suffit de montrer que l'application ϕ ci-dessus est une application différentiable et que l'application α décrite ci-dessus est un isomorphisme de fibrés vectoriels. Pour le premier point, soit $x \in X$ et soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un supplémentaire de $E^*_x \subset \mathbb{R}^n$. Soit p la projection de $\mathbb{R}^n$ sur E^*_x et q la projection de $\mathbb{R}^n$ sur K. Le morphisme de fibrés vectoriels

$$g : E^* \to X \times E^*_x$$

donné par la composition de $p \circ ev^*$ est un isomorphisme au point x et donc un isomorphisme dans un voisinage U de x, comme on le voit dans un ouvert où E

est trivialisé et le morphisme est donné par une matrice de taille (r, r) inversible au point x. Considérons le morphisme défini sur U :

$$q \circ g^{-1} : U \times E_x^* \to U \times K.$$

Ce morphisme est de la forme

$$(x, v) \mapsto (x, Mv),$$

où M est une matrice dont les coefficients sont des fonctions différentiables de x. Or la donnée de K et E_x^* déterminent une carte de $G_{\mathbb{R}}(r, n)$ homéomorphe à $\mathrm{Hom}\,(E_x^*, K)$ et par construction, l'application ϕ sur U est exactement donnée dans cette carte par $\phi(x) = M(x)$. Donc ϕ est bien différentiable.

On vérifie de même le dernier point. ∎

On a les variantes suivantes du théorème 1.3.3 :

1) On peut remplacer les fibrés vectoriels réels par les fibrés vectoriels complexes, et l'application ϕ est alors différentiable à valeurs dans $G_{\mathbb{C}}(r, n)$.

2) Si X est une variété complexe, on peut aussi remplacer les fibrés vectoriels complexes par les fibrés vectoriels holomorphes et alors ϕ est un morphisme de variétés complexes (c'est-à-dire donné dans des cartes locales par des fonctions holomorphes).

Pour finir, on a le corollaire suivant du théorème 1.3.3 et du corollaire 1.2.4 :

Corollaire 1.3.4. *Si X est une variété différentiable compacte, pour tout fibré vectoriel réel de rang r sur X, il existe un entier N et une application différentiable $\phi : X \to G_{\mathbb{R}}(r, N)$ telle que*

$$E \cong \phi^* E_{r,N}.$$

On a le même énoncé pour les fibrés complexes, $G_{\mathbb{R}}(r, N)$ étant remplacée par $G_{\mathbb{C}}(r, N)$.

On peut montrer de plus que la classe d'isomorphisme de E ne dépend que de la classe d'homotopie de ϕ (voir TD).

Chapitre 2

Champs de vecteurs et connexions

2.1 Flots

2.1.1 Dérivations et champs de vecteurs, fibrés tangent et cotangent

Soit X une variété différentiable de classe C^∞.

Définition 2.1.1. *Une dérivation de $C^k(X)$ centrée en x est la donnée d'une application linéaire $\delta : C^\infty(X) \to \mathbb{R}$ satisfaisant la règle de Leibniz :*

$$\delta(fg) = \delta(f)g(x) + f(x)\delta(g).$$

Lemme 2.1.2. *Une dérivation sur $\mathbb{R}^n$ centrée en 0 est de la forme*

$$\delta(f) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0),\ f \in C^\infty(X).$$

Démonstration. Une fonction de classe C^∞ s'écrit

$$f(x) = f(0) + \sum_i x_i f_i,$$

où les f_i sont des fonctions de classe C^∞, et de plus $f_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$. Les fonctions constantes sont annulées par δ : En effet on a $\delta(1) = \delta(1^2) = \delta(1) + \delta(1) = 2\delta(1)$ d'où $\delta(1) = 0$. On en déduit que

$$\delta(f) = \sum_i \delta(x_i) f_i(0) = \sum_i \delta(x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(0),$$

ce qui montre le résultat avec $\alpha_i = \delta(x_i)$. ∎

Soit X une variété de classe C^∞. Un vecteur tangent à X en x est une dérivation de $C^\infty(X)$ centrée en x. L'espace total du fibré tangent T_X de X est défini comme l'ensemble des dérivations de $C^\infty(X)$ centrées en un point de X.

Lemme 2.1.3. *T_X a naturellement une structure de fibré vectoriel de classe C^∞ sur X.*

Démonstration. Le morphisme structurel $\pi : T_X \to X$ associe à une dérivation δ son centre. Le lemme 2.1.2 montre que si $\phi_U : U \cong V \subset \mathbb{R}^n$ est une carte de classe C^∞ de X, on a un isomorphisme $\partial\phi_U : T_{X,U} \cong U \times \mathbb{R}^n$, l'isomorphisme inverse associant à $(u, (\alpha_i))$, $u = \phi_U^{-1}(v)$ la dérivation $f \mapsto \sum_i \alpha_i \frac{\partial f \circ \phi_U^{-1}}{\partial x_i}(v)$ centrée en u.

Il reste à calculer les transformations

$$\partial\phi_{U'} \circ \partial\phi_U^{-1} : U \cap U' \times \mathbb{R}^n \to U \cap U' \times \mathbb{R}^n$$

associées à des changements de cartes, et à vérifier qu'elles sont linéaires en $\mathbb{R}^n$. Elles sont obtenues par la règle de dérivation des fonctions composées : En effet, étant donnée une fonction $f(y_1, \ldots, y_n)$ sur l'ouvert $\phi_{U'}(U \cap U')$ de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $y_1, \ldots, y_n$, et une dérivation $\delta = \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}(v)$ sur $\phi_U(U \cap U')$ centrée en $v = \phi_U \circ \phi_{U'}^{-1}(v')$, on veut exprimer $\delta(f)$ dans les coordonnées y_i données par $\phi_{U'}$. Ceci revient à calculer $\delta(f \circ \phi_{U'} \circ \phi_U^{-1})$. La fonction f est une fonction de classe C^∞ des coordonnées y_i. Notant $\phi_{U'U} := \phi_{U'} \circ \phi_U^{-1}$, et

$$\phi_{U'U} = (\phi_{U'U,1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \phi_{U'U,n}(x_1, \ldots, x_n)),$$

on a $y_i = \phi_{U'U,i}(x_1, \ldots, x_n)$ sur $\phi_U(U \cap V)$, d'où

$$f \circ \phi_{U'U}(x_1, \ldots, x_n) = f(\phi_{U'U,1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \phi_{U'U,n}(x_1, \ldots, x_n)), \quad (2.1.1)$$

et

$$\begin{aligned}\delta(f \circ \phi_{U'U}) &= \sum_i \alpha_i \frac{\partial f(\phi_{U'U,1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \phi_{U'U,n}(x_1, \ldots, x_n))}{\partial x_i}(v) \\ &= \sum_{ij} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial y_j}(v') \frac{\partial \phi_{U'U,j}}{\partial x_i}(v).\end{aligned}$$

La transformation $\partial\phi_{U'} \circ \partial\phi_U^{-1}$ est donc bien linéaire en les α_i, et est donnée par la *matrice jacobienne* de $\phi_{U'U}$, dont les coefficients $\frac{\partial \phi_{U'U,j}}{\partial x_i}(v)$ sont des fonctions de classe C^∞ des coordonnées.

■

Définition 2.1.4. *Un champ de vecteurs sur X est une section du fibré tangent T_X.*

Notons qu'un champ de vecteurs est aussi une dérivation de $C^\infty(X)$, c'est-à-dire une application $\mathbb{R}$-linéaire δ de $C^\infty(X)$ dans lui-même qui satisfait la règle de Leibniz $\delta(fg) = \delta(f)g + g(\delta(f)$. En effet, à une section $\sigma : X \to T_X$, on associe la dérivation δ_σ définie par

$$\delta_\sigma(f)(x) = \delta_{\sigma(x)}(f) \in \mathbb{R}.$$

Le fibré cotangent Ω_X de X est le fibré vectoriel dual de T_X. Ses sections sont les formes différentielles de degré 1 sur X. Les formes différentielles de degré k sur X sont les sections du fibré $\Omega_X^k := \bigwedge^k \Omega_X$.

Une forme différentielle α de degré 1 s'écrit donc en coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n$ sur X (identifiant un ouvert de X à un ouvert de $\mathbb{R}^n$)

$$\alpha = \sum_i \alpha_i dx_i,$$

où les α_i sont des fonctions différentiables de x et les dx_i forment la base duale de la base $\frac{\partial}{\partial x_i}$ de T_X, soit $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$. De même une forme différentielle α de degré s s'écrit

$$\alpha = \sum_I \alpha_I dx_I,$$

où $I = \{i_1, \ldots, i_s\} \subset \{1, \ldots, n\}$, $i_1 < \ldots < i_s$ et $dx_I := dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_s}$.

Définissons la différentielle df d'une fonction de classe C^∞, qui est une 1-forme de classe C^∞. Cette 1-forme est définie comme la forme linéaire sur T_X qui à un point $x \in X$ et un vecteur tangent $v \in T_{X,x}$ associe le scalaire $\delta_v(f)$. Écrivant en coordonnées locales $v = \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, on a

$$df(v) = \sum_i \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

ce qui équivaut, puisque $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$, à $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.

L'application $f \mapsto df$ de $C^\infty(X)$ vers l'espace $A^1(X) = \Gamma(X, \Omega_X)$ des formes différentielles de classe C^∞ et de degré 1 satisfait la règle de Leibniz :

$$d(fg) = fdg + gdf.$$

Covariance

Soient X et Y des variétés différentiables et $\phi : X \to Y$ une application différentiable (de classe C^∞). On a alors un morphisme de fibrés vectoriels

$$\phi_* : T_X \to \phi^* T_Y$$

défini ensemblistement de la façon suivante : Un point de $\phi^* T_Y$ est la donnée d'un point $x \in X$ et d'une dérivation de $C^\infty(Y)$ centrée au point $\phi(x)$. Partant d'une dérivation δ de $C^\infty(X)$ centrée en $x \in X$, on lui associe la dérivation $\phi_* \delta$ centrée en $y = f(x)$, donnée par

$$\phi_* \delta(f) = \delta(f \circ \phi)$$

de $C^\infty(Y)$.

Lemme 2.1.5. *L'application ϕ_* décrite ci-dessus est donnée dans des coordonnées locales x_i sur X et y_j sur Y par la matrice jacobienne de ϕ. En particulier ϕ_* est un morphisme de fibrés vectoriels de T_X vers $\phi^* T_Y$.*

Démonstration. En effet, soit $\delta = (\sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i})_x$ et soit ϕ donnée dans les coordonnées locales par $\phi = (\phi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \phi_m(x_1, \ldots, x_n))$, où $n = \dim X$, $m = \dim Y$. Le fibré tangent T_X est alors trivialisé dans ces coordonnées au voisinage de x par la base $\frac{\partial}{\partial x_i}$ et le fibré tangent T_Y est trivialisé au voisinage de $\phi(x)$ par la base $\frac{\partial}{\partial y_j}$. Si $g(y_1, \ldots, y_m)$ est une fonction de classe C^∞ sur Y, on a

$$\delta(f \circ \phi) = \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}(f(\phi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \phi_m(x_1, \ldots, x_n)))(x)$$

$$= \sum_{ij} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial y_j}(\phi(x)) \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(x),$$

d'où

$$\phi_* \delta = \sum_j (\sum_i \alpha_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(x)) \frac{\partial}{\partial y_j}_{\phi(x)}.$$

■

Dualement, on dispose du morphisme $\phi^* : \phi^* \Omega_Y \to \Omega_X$ de fibrés vectoriels, ainsi que des morphismes induits

$$\phi^* : \phi^* \Omega_Y^s \to \Omega_X^s.$$

La différentielle extérieure d'une forme $\alpha = \sum_I \alpha_I dx_I$ de degré s sur $\mathbb{R}^n$ est la forme

$$d\alpha = \sum_I d\alpha_I \wedge dx_I. \tag{2.1.2}$$

Lemme 2.1.6. *On a pour toute application différentiable de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$, et toute forme de classe C^∞ sur Y,*

$$\phi^*(d\alpha) = d(\phi^* \alpha).$$

Corollaire 2.1.7. *La différentielle $d\alpha$ d'une forme différentielle α sur une variété X, définie dans les coordonnées locales par la formule (2.1.2), est indépendante du choix des coordonnées. Ceci permet de définir la différentielle extérieure d'une forme α sur une variété X.*

Corollaire 2.1.8. *Pour toutes variétés X et Y, toute application différentiable $\phi : X \to Y$, et toute forme différentielle α sur Y, on a*

$$d(\phi^* \alpha) = \phi^*(d\alpha).$$

Orientation

Une variété différentielle de dimension n est dite orientée si on s'est donné une forme différentielle de degré n partout non nulle sur X et orientable si une telle forme existe. Il est aisé de montrer que l'orientabilité de X équivaut au fait qu'il existe des cartes locales sur X telles que les déterminants des matrices jacobiennes associées aux difféomorphismes de changements de cartes sont des fonctions > 0. Le choix d'une orientation permet d'intégrer les n-formes sur X, si X est de plus compacte, ou les n-formes à support compact si X ne l'est pas.

2.1.2 Théorème de Cauchy

Le théorème de Cauchy est le résultat fondamental suivant concernant l'existence des solutions d'équations différentielles du premier ordre :

Théorème 2.1.9. *1) Soit $\chi : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^∞ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Soit $x_0 \in U$. Alors il existe une boule $B \subset U$ centrée en x_0 et un réel $\epsilon > 0$ tels que pour tout $y \in B$, l'équation différentielle portant sur l'application $t \mapsto \phi(t) \in \mathbb{R}^n$*

$$\phi'(t) = \chi(\phi(t)),\ \phi(0) = y \tag{2.1.3}$$

admet une unique solution notée $\phi(y,t)$ sur l'intervalle $]-\epsilon, \epsilon[$.

2) L'application $(y,t) \mapsto \phi(y,t)$ est de classe C^∞ sur $B \times]-\epsilon, \epsilon[$.

Remarque 2.1.10. Même lorsque le champ est partout défini, l'existence de solutions pour t petit au voisinage de chaque point n'entraîne pas par prolongement l'existence d'une solution sur un grand intervalle $]-1, 1[$. En effet, la solution $\phi(y,t)$ peut ne pas rester bornée lorsque t tend vers $\pm\epsilon$. Prenons par exemple en dimension $n = 1$ le champ $\chi(x) = x^2$. La fonction $\phi(t) = \frac{1}{1-t}$ est solution sur $]-\infty, 1[$ et ne se prolonge pas au point 1.

Par contre, on a le résultat suivant :

Théorème 2.1.11. *Si le champ χ est défini et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, et si $\phi(y,t)$ reste borné dans l'intervalle $[0, \epsilon[$, $y_1 = \lim_{t\to\epsilon} \phi(y,t)$ existe et pour un $\epsilon' > 0$, l'application*

$$\psi(y,t) = \phi(y,t),\ t < \epsilon,\ \psi(y,t) = \phi(y_1, t-\epsilon),\ \epsilon' > t \geq \epsilon$$

est de classe C^∞ et solution de l'équation (2.1.3) sur $[0, \epsilon'[$.

Démonstration. Comme χ est continu sur $\mathbb{R}^n$ et $\phi(y,t)$ reste borné sur $[0, \epsilon[$, $\chi(\phi(y,t))$ reste borné sur $[0, \epsilon[$. Comme $\phi(y,t)$ satisfait l'équation différentielle (2.1.3), la dérivée par rapport à t de $\phi(y,t)$ reste bornée. Le théorème des accroissements finis montre alors que pour tout $\eta > 0$, il existe $\eta' > 0$, tel que pour $t, t' \in]\epsilon - \eta', \epsilon[$, $|\phi(y,t) - \phi(y,t')| < \eta$. Il en résulte que la limite $\lim_{t\to\epsilon} \phi(y,t)$ existe. La limite $\lim_{t\to\epsilon} \frac{d\phi(y,t)}{dt}$ existe alors aussi du fait de l'équation différentielle (2.1.3) et de la continuité de χ. Il est alors clair que l'application $\psi(y,t)$ définie ci-dessus est de classe C^1 et solution de (2.1.3) sur $[0, \epsilon'[$. Enfin, le fait qu'elle soit de classe C^1 entraîne qu'elle est de classe C^∞ par l'unicité des solutions C^1 et l'existence locale de solutions C^∞ dans le théorème de Cauchy. ∎

Remarque 2.1.12. Comme le montre la démonstration, dans le théorème précédent, il suffit de supposer que $\chi(\phi(y,t))$ reste borné sur $[0,\epsilon[$.

Notons le fait suivant : Soit $t_1 \in]-\epsilon,\epsilon[$ et soit $y_1 = \phi(y,t_1)$. Alors $\phi(y,t+t_1)$ est solution de l'équation différentielle

$$\phi'(t) = \chi(\phi(t)),\ \phi(0) = y_1.$$

On a donc $\phi(y,t+t_1) = \phi(y_1,t)$. Ceci se résume par l'équation

$$\phi(\cdot,t+t_1) = \phi(\cdot,t)\circ\phi(\cdot,t_1) \tag{2.1.4}$$

valable pour t et t_1 tels que t, t_1 et $t+t_1 \in]-\epsilon,\epsilon[$.

2.1.3 Flot associé à un champ de vecteurs

Soient X une variété différentiable compacte et χ un champ de vecteurs sur X. On suppose que X est compacte (ou que χ est à support compact). X et χ sont supposés de classe C^∞. Le flot associé à χ est un groupe de difféomorphismes Φ_t de X de classe C^∞, paramétrés par $t\in\mathbb{R}$, et satisfaisant

$$\Phi_{t+t'} = \Phi_t\circ\Phi_{t'} : X\to X, \tag{2.1.5}$$

$$\Phi(0) = Id_X. \tag{2.1.6}$$

Sa construction est locale : dans une carte locale $f_U : U\cong U'$ identifiant un ouvert U de X à un ouvert U' de $\mathbb{R}^n$, le champ χ est une application de classe C^∞ de U' dans $\mathbb{R}^n$. Quitte à restreindre U' en U_x au voisinage de chacun de ses points x, on sait qu'il existe un ϵ_x et une solution $\phi(y,t)$ de l'équation différentielle

$$\phi(y,t)\in U',\ \frac{d\phi(y,t)}{dt} = \chi(\phi(y,t)),\ \phi(y,0) = y\in U_x$$

pour $t\in]-\epsilon_x,\epsilon_x[$.

Posons $\Phi_t(y) = f_U^{-1}(\phi(y,t))\in U\subset X$. Φ_t est alors défini dans les ouverts U_x au voisinage de chaque point de U. On vérifie que $\Phi_t(y)$ ne dépend pas du choix de coordonnées locales. Comme X est compacte, X est couverte par un nombre fini d'ouverts U_x comme ci-dessus, et il existe donc un ϵ valable pour tout x. Ceci permet de construire $\Phi_t : X\to X$ pour $-\epsilon<t<\epsilon$.

La condition (2.1.6) résulte de la définition de ϕ et la condition (2.1.5) pour $t,t',t+t'\in]-\epsilon,\epsilon[$ résulte de la formule (2.1.4). Pour étendre le flot, on utilise le théorème 2.1.11 (et la remarque 2.1.12) ainsi que le fait que X est compacte. On a alors construit $\Phi_t : X\to X$ pour $t\in\mathbb{R}$ satisfaisant les conditions (2.1.5) et (2.1.6). ■

Comme première application, on a le résultat suivant :

Théorème 2.1.13. *Soit X une variété compacte connexe et soient y, $y' \in X$. Alors il existe un difféomorphisme $\Phi : X \to X$ isotope à l'identité tel que $\Phi(y) = y'$.*

Démonstration. Soit $\gamma : [0,1] \to X$ un arc de classe C^∞ plongé dans X tel que $\gamma(0) = y$, $\gamma(1) = y'$. Soit $\chi_0(\gamma(t)) = \frac{d}{ds}(\gamma(s))_{s=t}$. Ceci définit une section du fibré tangent de X restreint à la courbe $\Gamma := \gamma([0,1]) \subset X$. Il existe un champ de vecteurs χ de classe C^∞ sur X tel que $\chi_{|\Gamma} = \chi_0$ (construire χ localement puis utiliser une partition de l'unité). Soit Φ_t le flot associé à χ. Les trajectoires $\Phi_t(y_0)$ pour y_0 fixé sont exactement les solutions de l'équation

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t(y_0)) = \chi(\Phi_t(y_0))$$

et en particulier γ est la trajectoire $\Phi_t(y)$. Donc $\gamma(1) = y' = \Phi_1(y)$.

■

2.2 Dérivée de Lie et crochets de Lie

2.2.1 Crochets de Lie et identité de Jacobi

Comme on l'a vu, un champ de vecteurs χ de classe C^∞ sur une variété X de classe C^∞ équivaut à la donnée d'une dérivation à valeurs dans $C^\infty(X)$, c'est-à-dire une application $\partial_\chi : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$ telle que

$$\partial_\chi(fg) = g\partial_\chi(f) + f\partial_\chi(g).$$

Soient maintenant deux champs de vecteurs χ et χ' de classe C^∞ sur X.

Lemme 2.2.1. *L'application $\partial_\chi \circ \partial'_\chi - \partial'_\chi \circ \partial_\chi : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$ est une dérivation de $C^\infty(X)$.*

Démonstration. Il faut montrer que cette application satisfait la règle de Leibniz. On a

$$\partial_\chi \circ \partial_{\chi'}(fg) = \partial_\chi(f\partial_{\chi'}(g) + g\partial_{\chi'}(f)) = \partial_\chi(f)\partial_{\chi'}(g) + f\partial_\chi(\partial_{\chi'}(g)) + \partial_\chi(g)\partial_{\chi'}(f) + g\partial_\chi(\partial_{\chi'}(f)),$$

$$\partial_{\chi'} \circ \partial_\chi(fg) = \partial_{\chi'}(f\partial_\chi(g) + g\partial_\chi(f)) = \partial_{\chi'}(f)\partial_\chi(g) + f\partial_{\chi'}(\partial_\chi(g)) + \partial_{\chi'}(g)\partial_\chi(f) + g\partial_{\chi'}(\partial_\chi(f)).$$

D'où $\partial_\chi \circ \partial_{\chi'}(fg) - \partial_{\chi'} \circ \partial_\chi(fg) = f\partial_\chi(\partial_{\chi'}(g)) + g\partial_\chi(\partial_{\chi'} f)) - f\partial_{\chi'}(\partial_\chi(g)) - g\partial_{\chi'}(\partial_\chi(f))$, soit encore

$$(\partial_\chi \circ \partial_{\chi'} - \partial_{\chi'} \circ \partial_\chi)(fg) = f(\partial_\chi \circ \partial_{\chi'} - \partial_{\chi'} \circ \partial_\chi)(g) - g(\partial_\chi \circ \partial_{\chi'} - \partial_{\chi'} \circ \partial_\chi)(f).$$

■

Définition 2.2.2. *Le crochet de Lie $[\chi, \chi']$ des deux champs χ et χ' est le champ de vecteurs correspondant à la dérivation $\partial_\chi \circ \partial_{\chi'} - \partial_{\chi'} \circ \partial_\chi : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$.*

Calculons le crochet dans des coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n$ sur X : On a

Lemme 2.2.3. *Soient* $\chi = \sum_i \chi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\chi' = \sum_i \chi'_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. *Alors*

$$[\chi, \chi'] = \sum_i (\partial_\chi(\chi'_i) - \partial_{\chi'}(\chi_i)) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Démonstration. On doit montrer que

$$(\partial_\chi \circ \partial_{\chi'} - \partial_{\chi'} \circ \partial_\chi)(f) = \sum_i (\partial_\chi(\chi'_i) - \partial_{\chi'}(\chi_i)) \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

sachant que pour toute fonction f

$$\partial_\chi(f) = \sum_i \chi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \ \partial_{\chi'}(f) = \sum_i \chi'_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

On trouve

$$\partial_\chi \circ \partial_{\chi'}(f) = \partial_\chi(\sum_i \chi'_i \frac{\partial f}{\partial x_i}) = \sum_{ij} \chi_j \frac{\partial \chi'_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + M,$$

$$\partial_{\chi'} \circ \partial_\chi(f) = \sum_{ij} \chi'_j \frac{\partial \chi_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + M',$$

où les fonctions M et M' font intervenir les dérivées d'ordre 2 de f et doivent disparaître dans la différence car on sait qu'on doit obtenir une dérivation. D'où

$$\partial_\chi \circ \partial_{\chi'}(f) - \partial_{\chi'} \circ \partial_\chi(f) = \sum_i (\sum_j \chi_j \frac{\partial \chi'_i}{\partial x_j} - \chi'_j \frac{\partial \chi_i}{\partial x_j}) \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$= \sum_i (\partial_\chi(\chi'_i) - \partial_{\chi'}(\chi_i)) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Identité de Jacobi

Théorème 2.2.4. *Soient U, V, W trois champs de vecteurs sur une variété X. On a l'identité suivante :*

$$[U, [V, W]] = [[U, V], W] - [[U, W], V]. \tag{2.2.7}$$

Démonstration. Notons a, b, c les dérivations ∂_U, ∂_V, ∂_W. Voyons-les comme des éléments de $\operatorname{End} C^\infty(X)$. On a vu que les crochets des champs correspondent à la commutation des dérivations dans l'algèbre $\operatorname{End} C^\infty(X)$ qui est une algèbre associative. La formule (2.2.7) résulte donc de la formule suivante, valable dans toute algèbre associative : Le commutateur $[a, b]$ étant défini comme $ab - ba$, on a

$$[a, [b, c]] = [[a, b], c] - [[a, c], b]. \tag{2.2.8}$$

Ceci est entièrement formel : on a $[a,[b,c]] = a(bc-cb)-(bc-cb)a = abc - acb - bca + cba$ soit encore

$$[a,[b,c]] = abc - bac + bac - acb - bca + cab - cab + cba,$$
$$= [a,b]c + b[a,c] - c[a,b] - [a,c]b = [[a,b],c] - [[a,c],b].$$

■

2.2.2 Dérivée de Lie

On a vu que les champs de vecteurs agissaient par dérivation sur les fonctions. Par définition du flot Φ_t associé à un champ de vecteurs χ, on peut aussi voir la dérivation ∂_χ de la façon suivante :

$$\partial_\chi(f) = \frac{d}{dt}(\Phi_t^* f)_{t=0}.$$

Ceci permet d'étendre ces dérivations en une action des champs de vecteurs sur les formes différentielles.

Définition 2.2.5. *Soit χ un champ de vecteurs sur une variété X. La dérivée de Lie ∂_χ agissant sur les formes différentielles $\alpha \in A^k(X) = \Gamma(X, \Omega_X^k)$ est définie par*

$$\partial_\chi(\alpha) = \frac{d}{dt}(\Phi_t^* \alpha)_{t=0}. \tag{2.2.9}$$

Nous allons maintenant calculer explicitement la dérivée de Lie. Rappelons qu'un champ de vecteurs χ est une section du fibré T_X tandis qu'une forme différentielle est une section du fibré Ω_X^k, avec $\Omega_X = T_X^*$. On a donc une opération de contraction (appelée produit intérieur) qui à une k-forme α et un champ de vecteurs χ associe le produit intérieur

$$\chi \lrcorner \alpha \in A^{k-1}(X).$$

de α par χ. Voyons une $k-1$-forme comme associant à $k-1$ champs de vecteurs une fonction, qui dépend de façon C^∞-linéaire des champs en question, et est alternée. La forme $\chi \lrcorner \alpha \in A^{k-1}(X)$ est calculée de la façon suivante : Si $\chi_1, \ldots, \chi_{k-1}$ sont des champs de vecteurs sur X,

$$\chi \lrcorner \alpha(\chi_1, \ldots, \chi_{k-1}) = \alpha(\chi, \chi_1, \ldots, \chi_{k-1}).$$

Par exemple, si α est de degré 1, $\chi \lrcorner \alpha$ est simplement la fonction obtenue en contractant $\chi \in \Gamma(X, T_X)$ et $\alpha \in \Gamma(X, T_X^*)$. En particulier on a aussi la formule, pour une fonction différentiable f sur X,

$$\partial_\chi(f) = \chi \lrcorner df.$$

Cette formule se généralise de la façon suivante :

Théorème 2.2.6. *(Formule de Cartan-Lie) Étant donnés une forme différentielle α et un champ de vecteurs χ sur X, on a*

$$\partial_\chi(\alpha) = d(\chi \lrcorner \alpha) + \chi \lrcorner d\alpha. \tag{2.2.10}$$

Démonstration. Il suffit de montrer la formule (2.2.10) pour une forme $\alpha = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$, où les x_i sont des coordonnées locales sur X, dans lesquelles $\chi = \sum_i \chi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$. On a alors $\Phi_t^* \alpha = \Phi_t^* f d(\Phi_t^* x_1) \wedge \ldots \wedge d(\Phi_t^* x_k)$, et donc

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t^*\alpha)_{t=0} = \frac{d}{dt}(\Phi_t^* f)_{t=0} dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k + \sum_{i=1}^k f dx_1 \wedge \ldots \wedge d(\frac{d}{dt}(\Phi_t^* x_i)_{t=0}) \wedge \ldots \wedge dx_k.$$

Comme on a $\frac{d}{dt}(\Phi_t^* f)_{t=0} = \chi \lrcorner df = \sum_i \chi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ et $\frac{d}{dt}(\Phi_t^* x_i)_{t=0} = \chi \lrcorner dx_i = \chi_i$, on trouve :

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t^*\alpha)_{t=0} = \chi \lrcorner df dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k + \sum_{i=1}^k f dx_1 \wedge \ldots \wedge d\chi_i \wedge \ldots \wedge dx_k, \tag{2.2.11}$$

où le $d\chi_i$ est mis à la place de dx_i. Par ailleurs, $\chi \lrcorner \alpha = f \sum_{i=1}^k (-1)^i \chi_i dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_k$ et $d\alpha = df \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$. Il vient donc

$$\begin{aligned} d(\chi \lrcorner \alpha) &= df \wedge \sum_{i=1}^k (-1)^i \chi_i dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_k \\ &+ f \sum_{i=1}^k (-1)^i d\chi_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_k, \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

$$\begin{aligned} \chi \lrcorner d\alpha &= \chi \lrcorner df \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k \\ &+ \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} \chi_i df \wedge dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_k. \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

Sommant (2.2.12) et (2.2.13), on obtient, compte tenu de l'égalité $(-1)^i d\chi_i \wedge dx_1 \wedge \ldots \widehat{dx_i} \ldots \wedge dx_k = dx_1 \wedge \ldots \wedge d\chi_i \wedge \ldots \wedge dx_k$:

$$\begin{aligned} d(\chi \lrcorner \alpha) + \chi \lrcorner d\alpha &= \sum_{i=1}^k f dx_1 \wedge \ldots \wedge d\chi_i \wedge \ldots \wedge dx_k \\ &+ \chi \lrcorner df \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k, \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

ce qui donne le résultat au vu de (2.2.11). ■

2.2.3 Le théorème de Moser

La formule de Cartan-Lie a l'application remarquable suivante : soit X une variété différentiable compacte connexe et orientée de dimension n. On sait alors que l'espace des formes de degré n modulo les formes exactes de degré n est isomorphe à $\mathbb{R}$, l'isomorphisme étant donné par le volume, c'est-à-dire l'intégrale $\int_X \omega$ qui par la formule de Stokes est nulle pour ω exacte.

Théorème 2.2.7. *(Moser) Soient ω, ω' deux formes volumes sur X telles que $\int_X \omega = \int_X \omega'$. Alors il existe un difféomorphisme $\Phi : X \to X'$ isotope à l'identité tel que $\Phi^*\omega = \omega'$.*

Démonstration. Comme ω et ω' sont des formes volume,

$$\omega_t := t\omega + (1-t)\omega'$$

est une forme volume sur X pour tout $t \in [0,1]$ et bien sûr on a

$$\omega_0 = \omega',\, \omega_1 = \omega.$$

On va construire $\Phi_t : X \to X$ tel que pour tout $t \in [0,1]$,

$$\Phi_t^*\omega_t = \omega', \tag{2.2.15}$$

avec $\Phi_0 = Id_X$. Pour $t = 1$, ceci répondra à notre problème. Φ_t est obtenu par le flot associé à un champ de vecteurs χ_t sur X dépendant du temps. (On peut voir un tel champ comme un champ de vecteurs sur $X \times [0,1]$ qui est tangent aux tranches $X \times \{t\}$; on peut donc prendre son flot Ψ_t sur $X \times [0,1]$ et il est de la forme $(x,t) \mapsto (\Phi_t(x), t)$.)

Comme $\int_X \omega = \int_X \omega'$, on a

$$\frac{d}{dt}\omega_t = \omega - \omega' = d\eta,$$

pour une $n-1$-forme η sur X. Il existe un unique champ de vecteurs χ_t tel que

$$-\eta = \chi_t \lrcorner \omega_t,\ t \in [0,1].$$

Soit Φ_t le flot associé à χ_t. Notons que comme $\Phi_0^*\omega_0 = \omega'$, (2.2.15) équivaut à $\frac{d}{dt}(\Phi_t^*\omega_t) = 0$. On applique la formule de Cartan-Lie à $\Phi_t^*\omega_t$. Elle nous donne pour tout $t_0 \in [0,1]$, et compte tenu de $d\omega_t = 0$,

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t^*\omega_t)_{t=t_0} = \Phi_{t_0}^*(d(\chi_{t_0} \lrcorner \omega_{t_0})) + \Phi_{t_0}^*((\frac{d}{dt}\omega_t)_{t=t_0}). \tag{2.2.16}$$

Comme $d(\chi_{t_0} \lrcorner \omega_{t_0}) = -(\frac{d}{dt}\omega_t)_{t=t_0}$, on trouve bien que $\frac{d}{dt}(\Phi_t^*\omega_t)_{t=t_0} = 0$.

■

2.3 Connexions

2.3.1 Définition et interprétation géométrique

Soit X une variété et $E \to X$ un fibré vectoriel. On supposera comme plus haut que X et E sont de classe C^∞ pour éviter les difficultés de définition liées aux pertes de régularité lors des différentiations.

Définition 2.3.1. *Une connexion ∇ sur E est une application linéaire*

$$\nabla : \Gamma(X, E) \to \Gamma(X, E \otimes \Omega_X),$$

(où $\Gamma(X, \cdot)$ est l'espace des sections de classe C^∞ du fibré considéré,) satisfaisant la règle de Leibniz

$$\nabla(f\sigma) = f\nabla(\sigma) + \sigma \otimes df,$$

pour toute fonction f de classe C^∞ sur X et toute section σ de classe C^∞ de E.

En d'autres termes, une connexion nous donne un moyen de différentier les sections d'un fibré vectoriel, au même titre que les fonctions. Dans la définition ci-dessus, on peut supposer que le fibré E est réel, auquel cas ∇ est simplement $\mathbb{R}$-linaire, ou complexe, auquel cas on dit que ∇ est une connexion complexe de E si $\nabla : \Gamma(X, E) \to \Gamma(X, E \otimes \Omega_X)$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

Les connexions complexes sont cruciales dans la définition des classes de Chern des fibrés vectoriels complexes.

Expliquons la signification géométrique d'une connexion : une section $\sigma \in \Gamma(X, E)$ est une application de classe C^∞

$$\sigma : X \to E$$

telle que $\pi \circ \sigma = Id_X$. La différentielle de σ au point $x \in X$ est alors une application linéaire

$$\sigma_{*x} : T_{X,x} \to T_{E,\sigma(x)}.$$

L'espace tangent $T_{E,\sigma(x)}$ contient l'espace tangent à la fibre E_x, qui est le noyau de l'application $\pi_* : T_{E,\sigma(x)} \to T_{X,x}$ et est canoniquement isomorphe à E_x. On a $\pi_* \circ \sigma_{*x} = Id_{T_{X,x}}$.

La suite exacte

$$0 \to E_x \to T_{E,\sigma(x)} \stackrel{\pi_*}{\to} T_{X,x} \to 0 \tag{2.3.17}$$

n'est pas naturellement scindée. Lorsqu'elle l'est, c'est-à-dire qu'on a un isomorphisme $T_{E,\sigma(x)} \cong E_x \oplus T_{X,x}$ tel que l'inclusion $E_x = E_x \times \{0\} \subset T_{E,\sigma(x)}$ soit la première inclusion dans (2.3.17) et la seconde projection $T_{E,\sigma(x)} \cong E_x \oplus T_{X,x} \to T_{X,x}$ soit égale à π_*, on peut déduire de $\sigma_{*x} \in \mathrm{Hom}\,(T_{X,x}, T_{E,\sigma(x)})$ un élément de $E_x \otimes \Omega_{X,x} \cong \mathrm{Hom}\,(T_{X,x}, E_x)$ obtenu en composant σ_{*x} avec la première projection $T_{E,\sigma(x)} \to E_x$. C'est exactement ce que fait une connexion.

Théorème 2.3.2. *Une connexion est la donnée d'un scindage*

$$T_{E,e} \cong E_x \oplus T_{X,x},\ x = \pi(e) \tag{2.3.18}$$

en tout point $e \in E$, variant de façon C^∞ avec e, et compatible avec la structure de fibré vectoriel de E, i.e. :

1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$ (ou $\mathbb{C}^*$ dans le cas complexe) les scindages aux point e et λe se déduisent l'un de l'autre par l'application $\mu_{\lambda *} : T_{E,e} \cong T_{E,\lambda e}$.

2) Considérons l'application somme

$$\Sigma : E \times_X E \to E,$$

$$((e, e'),\ \pi(e) = \pi(e')) \mapsto e + e'.$$

L'application $\Sigma_* : T_{E\times_X E,(e,e')} \to T_{E,e+e'}$ *est compatible aux scindages : On a* $T_{E\times_X E,(e,e')} = \{(u, v) \in T_{E,e} \times T_{E,e'},\ \pi_* u = \pi_* v\}$ *de sorte que des scindages*

$$T_{E,e} \cong E_x \oplus T_{X,x},\ T_{E,e'} \cong E_x \oplus T_{X,x},\ x = \pi(e) = \pi(e'),$$

fournissent naturellement un scindage

$$T_{E\times_X E,(e,e')} \cong E_x \oplus E_x \oplus T_{X,x}.$$

On demande que $\Sigma_{*,(e,e')} : E_x \oplus E_x \oplus T_{X,x} \to E_x \oplus T_{X,x}$ *soit simplement l'application somme sur les deux premiers facteurs et l'identité sur le dernier facteur.*

Démonstration. Si on a un scindage de T_E comme dans (2.3.18), on définit pour $\sigma \in \Gamma(X, E)$ l'élément $\nabla\sigma \in \Gamma(X, E \otimes \Omega_X) = \Gamma(X, \mathrm{Hom}\,(T_X, E))$ par

$$\nabla(\sigma)(x) = pr_1 \circ \sigma_{*x} : T_{X,x} \to E_x,$$

où $pr_1 : T_{E,\sigma(x)} \to E_x$ est la première projection associée à la décomposition (2.3.18).

Dans l'autre direction, si on a la connexion, on construit un scindage comme dans (2.3.18) de la façon suivante : soit $e \in E$, $x = \pi(e)$. Soit σ une section de E définie au voisinage de x telle que $\sigma(x) = e$. Considérons le sous-espace $V \subset T_{E,e}$ défini comme l'image de $\sigma_* - \nabla(\sigma) : T_X, x \to T_{E,e}$. Comme on a $\pi_* \circ (\sigma_* - \nabla(\sigma)) = Id_{T_{X,x}}$, ce sous-espace satisfait $V \cong T_{X,x}$ et $T_{E,e} \cong E_x \oplus V$. Si on change σ en σ', la différence $\sigma - \sigma' =: \tau$ s'annule en x et s'écrit donc $\tau = \sum_i f_i e_i$, où les e_i forment une base de E au voisinage de x et $f_i(x) = 0$ pour tout i. La règle de Leibniz appliquée à la différentielle usuelle ainsi qu'à ∇ montre alors que

$$\sigma_* - \nabla(\sigma) = (\sigma - \tau)_{*x} - \nabla(\sigma - \tau) = \sigma'_* - \nabla(\sigma') : T_{X,x} \to T_{E,e},$$

de sorte que $\mathrm{Im}\,(\sigma_* - \nabla(\sigma) : T_X, x \to T_{E,e})$ ne dépend que de $\sigma(x)$. Pour terminer la démonstration, il faut vérifier que le fait que ∇ construit ci-dessus soit une connexion équivaut aux propriétés de compatibilité 1) et 2) ci-dessus. En fait ces propriétés sont équivalentes à la $\mathbb{R}$-linéarité de ∇, la règle de Leibniz étant facile à vérifier.

■

2.3.2 Existence ; connexions préservant une métrique

Théorème 2.3.3. *Soit* X *une variété compacte,* $\pi : E \to X$ *un fibré vectoriel. Alors* E *admet une connexion.*

Démonstration. On utilise pour cela le lemme suivant :

Lemme 2.3.4. *Soit $\nabla_i : \Gamma(U, E) \to \Gamma(U, E \otimes \Omega_X)$ des connexions définies sur un ouvert $U \subset X$ et soient f_i des fonctions de classe C^∞ sur U satisfaisant $\sum_i f_i = 1$. Alors*

$$\nabla : \Gamma(U, E) \to \Gamma(U, E \otimes \Omega_X),$$

$$\nabla(\sigma) = \sum_i f_i \nabla_i(\sigma),$$

est une connexion définie sur U.

Démonstration. On a $\nabla_i(\sigma + \sigma') = \nabla_i(\sigma) + \nabla_i(\sigma')$ pour tout i, d'où $\nabla(\sigma + \sigma') = \nabla(\sigma) + \nabla(\sigma')$ pour deux sections quelconques σ, σ' de E. Par ailleurs, soit f une fonction C^∞ sur X. On a pour tout i

$$\nabla_i(f\sigma) = f\nabla_i(\sigma) + \sigma \otimes df$$

soit

$$\nabla(f\sigma) = \sum_i f_i \nabla_i(f\sigma) = \sum_i f f_i \nabla_i(\sigma) + \sum_i f_i \sigma \otimes df.$$

Or on a $\sum_i f_i df = df$ puisque $\sum_i f_i = 1$. Donc $\nabla(f\sigma) = f\nabla(\sigma) + \sigma \otimes df$. ■

Comme le fibré E est trivial sur les ouverts U d'un recouvrement : $\phi_U : E_U \cong U \times \mathbb{R}^n$, on peut mettre sur E_U la connexion triviale ∇_U pour laquelle $\nabla_U(\sigma) = \phi_U^{-1}(d(pr_2 \circ \sigma))$. Pour tout $x \in X$, on choisit un ouvert de trivialisation U_x contenant x. On extrait du recouvrement de X par les U_x un recouvrement fini U_{x_i} et on construit une partition de l'unité f_i subordonnée à ce recouvrement : $f_i = 0$ en dehors de $\overline{V}_{x_i} \subset U_{x_i}$, $\sum_i f_i = 1$. Pour $\sigma \in \Gamma(X, E)$, $f_i \nabla_{U_{x_i}}(\sigma)$ est bien définie et est une section de $E \otimes \Omega_X$ (comme d'habitude, on pose $f_i \nabla_{U_{x_i}}(\sigma)(y) = 0$ pour $y \notin U_{x_i}$).

L'application

$$\nabla : \Gamma(X, E) \to \Gamma(X, E \otimes \Omega_X),$$

$$\nabla(\sigma) = \sum_i f_i \nabla_{U_{x_i}}(\sigma),$$

est une connexion d'après le lemme 2.3.4.

■

Connexions préservant une métrique

Soit X une variété, $E \to X$ un fibré vectoriel sur X, et g une métrique sur E.

Définition 2.3.5. *Une connexion ∇ sur E préserve la métrique g si pour toutes sections σ, σ' de E, on a*

$$d(g(\sigma, \sigma')) = g(\sigma, \nabla(\sigma')) + g(\nabla(\sigma), \sigma').$$

On doit expliquer ici le sens de $g(\sigma, \nabla(\sigma'))$. C'est une 1-forme sur X qui est obtenue de la façon suivante : Dans des ouverts de trivialisation, $E_U \cong U \times \mathbb{R}^r$ et σ, σ' sont des fonctions f_σ, $f_{\sigma'}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^r$, $\nabla(\sigma)$, $\nabla(\sigma')$ sont des 1-formes à coefficients dans $\mathbb{R}^r$, c'est-à-dire des r-uples de 1-formes et la métrique g est donnée par une matrice M_x de taille (r, r) à coefficients différentiables en $x \in U$ telle que

$$< \sigma, \sigma' > (x) = {}^t f_\sigma M_x f_{\sigma'} \in \mathbb{R}.$$

De même $\nabla(\sigma')$ est un vecteur colonne $\Omega_{\nabla(\sigma')}$ dont les coefficients sont des 1-formes sur X et on pose

$$< \sigma, \nabla(\sigma') > (x) = {}^t f_\sigma M_x \Omega_{\nabla(\sigma')} \in \Gamma(U, \Omega_U).$$

On vérifie que les 1-formes ainsi calculées localement se recollent sur les intersections.

Des connexions préservant les métriques existent toujours. On utilise pour cela le lemme suivant :

Lemme 2.3.6. *Soit E un fibré vectoriel sur X et g une métrique sur E (le tout de classe C^∞). Alors X admet un recouvrement par des ouverts U sur lesquels on dispose de trivialisations*

$$\phi_U : E_U \cong U \times \mathbb{R}^r,\ r = \operatorname{rank} E,$$

dans lesquelles $g_{|U}$ est la métrique constante : si $\phi_U(e) = (x, v)$, $\phi_U(e') = (x, v')$,

$$g_x(e, e') = < v, v' >,$$

où $<,>$ est la métrique euclidienne sur $\mathbb{R}^r$.

Démonstration. X est couvert par des ouverts U tels que $E_{|U}$ est trivial. Soit σ une section partout non nulle de E sur un tel ouvert U de X. Quitte à remplacer σ par $\frac{\sigma}{||\sigma||_g}$, on peut supposer que $\sigma = \sigma_1$ est partout de norme 1 pour la métrique g. Soient $\sigma_2, \dots, \sigma_r$ des sections de E sur U telles que $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ forment une base de E en tout point de U. Alors $\sigma_i' = \sigma_i - g(\sigma_i, \sigma_1)\sigma_1$ satisfait

$$g(\sigma_i', \sigma_1) = 0$$

en tout point de U. Les σ_i', $i \geq 2$ forment en tout point une base de $\sigma_1(x)^\perp$. En particulier σ_2' est non nul en tout point de U et peut être remplacé par $\sigma_2'' = \frac{\sigma_2'}{||\sigma_2'||_g}$ qui est de norme 1 en tout point. Modifiant petit à petit la base initiale $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ en tout point (procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt), on obtient ainsi une famille $\tau_1, \dots, \tau_r$ de sections de classe C^∞ qui forment une base en tout point de U, satisfaisant $g(\tau_i, \tau_j) = \delta_{ij}$. Cette base de sections donne la trivialisation

$$\phi_U : E \cong U \times \mathbb{R}^r$$

cherchée.

■

Théorème 2.3.7. *Soit X une variété compacte, et soit E un fibré vectoriel sur X muni d'une métrique g (le tout de classe C^∞). Alors E admet une connexion préservant la métrique g.*

Démonstration. Dans chaque trivialisation compatible avec la métrique donnée par le lemme 2.3.6, on dispose de la connexion triviale qui consiste à différentier les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^r$. La connexion triviale est compatible avec la métrique constante, puisque cela revient à dire que

$$d(<\phi, \phi'>) = <\phi, d\phi'> + <d\phi', \phi>,$$

pour deux fonctions ϕ, ϕ' à valeurs dans $\mathbb{R}^r$, ce qui est une conséquence immédiate de la règle de Leibniz et de $<\phi, \phi'> = \sum_i \phi_i \phi'_i$.

On applique alors le lemme 2.3.4 et on utilise une partition de l'unité pour recoller les connexions ∇_i préservant la métrique et définies localement comme ci-dessus. Il est immédiat de vérifier que la connexion $\sum_i f_i \nabla_i$ préserve la métrique. ■

2.3.3 Fibrés holomorphes et connexions $\overline{\partial}$

Soit X une variété complexe. On a un opérateur $\overline{\partial}$ agissant sur les fonctions de classe C^∞ de X et défini de la façon suivante. Considérons le fibré $\Omega_{X,\mathbb{C}}$ des 1-formes à coefficients complexes sur X. Comme X est une variété complexe, le fibré tangent T_X admet une structure de fibré vectoriel complexe, et l'espace des 1-formes à coefficients complexes sur X, ou encore des sections du fibré $\mathrm{Hom}\,(T_X, \mathbb{C})$, est somme directe de l'espace $A^{1,0}(X)$ des 1-formes $\mathbb{C}$-linéaires, c'est-à-dire des sections du fibré $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_X, \mathbb{C}) := \Omega_X^{1,0}$, et de l'espace $A^{0,1}(X)$ des 1-formes $\mathbb{C}$-antilinéaires, qui est son conjugué complexe. L'espace $A^{0,1}(X)$ est l'espace des sections du fibré vectoriel $\Omega_X^{0,1}$ dont la fibre en x est l'espace des applications $\mathbb{C}$-antilinéaires sur $T_{X,x}$.

Soient $z_1, \ldots, z_n$ des coordonnées holomorphes locales sur un ouvert U de X, $n = \dim_{\mathbb{C}} X$. Alors $dz_1, \ldots, dz_n$ donnent une trivialisation locale de $\Omega_X^{1,0}$ et $d\overline{z}_1, \ldots, d\overline{z}_n$ donnent une trivialisation locale de $\Omega_X^{0,1}$.

Définition 2.3.8. *Soit f une fonction de classe C^∞ sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors $\overline{\partial} f \in A^{0,1}(X)$ est défini comme la projection de $df \in A^1(X)$ dans $A^{0,1}(X)$, où l'on utilise la décomposition $A^1(X) \cong A^{1,0}(X) \oplus A^{0,1}(X)$ pour définir la projection.*

Dans des coordonnées holomorphes locales, on écrit $z_i = x_i + \iota y_i$, d'où $dx_i = \frac{1}{2}(dz_i + d\overline{z}_i)$, et

$$dy_i = \frac{1}{2\iota}(dz_i - d\overline{z}_i).$$

On a alors

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i$$

$$= \frac{1}{2}(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(dz_i + d\overline{z}_i)) + \frac{1}{2\iota}(\sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i}(dz_i - d\overline{z}_i)),$$

$$= \sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i} d\overline{z}_i,$$

avec

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} := \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2\iota}\frac{\partial f}{\partial y_i}, \ \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i} := \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{1}{2\iota}\frac{\partial f}{\partial y_i}.$$

On a alors $\overline{\partial} f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i} d\overline{z}_i$.

Lemme 2.3.9. *Une fonction f définie sur un ouvert U de X est holomorphe si et seulement si $\overline{\partial} f = 0$.*

Démonstration. En effet f est holomorphe si et seulement si df est $\mathbb{C}$-linéaire, ou encore $df \in A^{1,0}(U)$. ■

Lemme 2.3.10. *On a $\overline{\partial}(fg) = f\overline{\partial} g + g\overline{\partial} f$ pour deux fonctions à valeurs complexes sur X.*

Démonstration. Cela résulte de la formule de Leibniz $d(fg) = fdg + gdf$ dans $A^1(X)$ où l'on prend de part et d'autre la composante $\mathbb{C}$-antilinéaire. ■

Soit X une variété complexe et $E \to X$ un fibré vectoriel complexe sur X.

Définition 2.3.11. *Une connexion $\overline{\partial}$ sur E est un opérateur $\mathbb{C}$-linéaire $\overline{\partial}_E$: $\Gamma(X, E) \to \Gamma(X, E \otimes \Omega_X^{0,1})$ qui satisfait la règle de Leibniz partielle :*

$$\overline{\partial}_E(f\sigma) = f\overline{\partial}_E(\sigma) + \sigma \otimes \overline{\partial} f$$

pour toute section σ de E et toute fonction f à valeurs complexes sur X, de classe C^∞.

Soit X une variété complexe et E un fibré vectoriel *holomorphe* sur X.

Théorème 2.3.12. *Un tel fibré E possède une connexion $\overline{\partial}$ canoniquement déterminée par la structure holomorphe de E.*

Démonstration. La structure holomorphe de E est donnée par les trivialisations holomorphes $\phi_U : E_U \cong U \times \mathbb{C}^r$ ayant la propriété que $\phi_V \circ \phi_U^{-1}$: $U \cap V \times \mathbb{C}^r \to U \cap V \times \mathbb{C}^r$ est donné par $(x, u) \mapsto (x, M(x)u)$ où $M(x)$ est une matrice (r, r) à coefficients holomorphes en x.

Soit σ une section de E. On définit $\overline{\partial}_E(\sigma)$ dans les ouverts U comme ci-dessus par

$$\overline{\partial}_E(\sigma)(x) = \phi_U^{-1}(x, (\overline{\partial}\sigma_1, \dots, \overline{\partial}\sigma_r))$$

avec $(x, (\sigma_1, \dots, \sigma_r)) = \phi_U(\sigma)$.

Il faut vérifier que $\overline{\partial}_E(\sigma)^U \in A^{0,1}(U)$ ainsi construite ne dépend pas du choix de la trivialisation holomorphe choisie, ou encore que sur $U \cap V$, on a

$$\phi_V \circ \phi_U^{-1}(x, (\overline{\partial}\sigma_1, \dots, \overline{\partial}\sigma_r)) = (x, (\overline{\partial}\tau_1, \dots, \overline{\partial}\tau_r)), \tag{2.3.19}$$

avec $(x, (\tau_1, \ldots, \tau_r)) = \phi_V \circ \phi_U^{-1}(x, (\sigma_1, \ldots, \sigma_r))$. Or on a

$$(\tau_1, \ldots, \tau_r) = M_{UV}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r),$$

où la matrice M_{UV} est holomorphe en x. Appliquant les lemmes (2.3.9) et (2.3.10), on trouve que

$$(\overline{\partial}\tau_1, \ldots, \overline{\partial}\tau_r) = M_{UV}(\overline{\partial}\sigma_1, \ldots, \overline{\partial}\sigma_r)$$

ce qui est exactement (2.3.19). ■

L'intérêt de cet opérateur $\overline{\partial}_E$ réside dans l'énoncé suivant :

Lemme 2.3.13. *Les sections holomorphes de E sont exactement les sections différentiables σ de E satisfaisant la condition*

$$\overline{\partial}_E\sigma = 0.$$

Démonstration. Une section σ de E est holomorphe si et seulement si dans des trivialisations holomorphes locales de E,

$$\phi_U : E \cong U \times \mathbb{C}^r,$$

on a $\phi_U \circ \sigma(x) = (x, (\sigma_1(x), \ldots, \sigma_r(x)))$, où les fonctions $\sigma_i(x)$ sont holomorphes en x. Par ailleurs, dans une telle trivialisation, on a aussi par définition :

$$\phi_U(\overline{\partial}_E\sigma)(x) = (x, (\overline{\partial}\sigma_1, \ldots, \overline{\partial}\sigma_r)).$$

Le lemme résulte donc immédiatement du fait que les fonctions σ_i définies sur U sont holomorphes si et seulement si elles sont annulées par l'opérateur $\overline{\partial}$ (cf. Lemme 2.3.9).

Chapitre 3

Courbure et holonomie

3.1 Transport parallèle

Soit X une variété différentiable et $E \to X$ un fibré vectoriel muni d'une connexion $\nabla : \Gamma(X, E) \to \Gamma(X, E \otimes \Omega_X)$. Soit $\gamma : [0,1] \to X$ une application différentiable (on peut supposer que tout est de classe C^∞ pour simplifier). On va définir le *transport parallèle* des éléments de E le long de γ.

Restreignons le fibré à la courbe $\gamma([0,1])$, ou plus précisément, considérons le tiré en arrière

$$E_\gamma := \gamma^* E$$

qui est un fibré sur $[0,1]$ muni d'une connexion ∇_γ.

Théorème 3.1.1. *Pour tout élément $e \in E_{\gamma,0} = E_{\gamma(0)}$, il existe une unique section*

$$e_\gamma \in \Gamma([0,1], E_\gamma)$$

satisfaisant :

i) $e_\gamma(0) = e$.

ii) $\nabla_\gamma e_\gamma = 0$.

De plus l'application $T_\gamma : (e,t) \mapsto e_\gamma(t) \in E_{\gamma,t}$ est un isomorphisme de fibrés vectoriels entre $E_{\gamma,0} \times [0,1]$ et E_γ.

Les sections de E annulées par ∇ sont dites "plates". Les sections e_γ utilisées ci-dessus ne sont plates que le long de γ. L'élément $e_\gamma(1) \in E_{\gamma,1} = E_{\gamma(1)}$ est appelé le transporté parallèle de e au point $\gamma(1)$. L'application T_γ est appelée l'application de transport parallèle le long de γ.

Notons le corollaire suivant (qui peut se montrer plus simplement mais est utile néanmoins) :

Corollaire 3.1.2. *Le fibré E_γ est trivial. Plus généralement, tout fibré vectoriel différentiable sur $[0,1]$ est trivial.*

Démonstration. Le second énoncé résulte du premier puisqu'on a vu que tout fibré admettait une connexion. La trivialité de E_γ est donnée par l'isomorphisme de transport parallèle T_γ. ∎

Démonstration du théorème 3.1.1. On observe tout d'abord qu'il suffit de montrer le résultat localement sur de petits intervalles de $[0,1]$, sur lesquels on peut supposer que E_γ est le fibré trivial. En effet, on obtient alors par compacité une décomposition de $[0,1]$ en petits intervalles $[\epsilon_i, \epsilon_{i+1}]$ sur chacun desquels on dispose d'une application de transport parallèle T_i donnant un isomorphisme entre $E_{\gamma,\epsilon_i} \times [\epsilon_i, \epsilon_{i+1}]$ et $E_{\gamma,[\epsilon_i,\epsilon_{i+1}]}$. Ces applications fournissent T_γ de la manière suivante : chaque T_i fournit en particulier un isomorphisme $E_{\gamma,\epsilon_i} \cong E_{\gamma,\epsilon_{i+1}}$, et en composant ces isomorphismes, on obtient des isomorphismes $\alpha_i : E_{\gamma,0} \cong E_{\gamma,\epsilon_i}$. On pose $T_\gamma = T_i \circ (\alpha_i, I_d)$ sur $E_{\gamma,0} \times [\epsilon_i, \epsilon_{i+1}]$ et on vérifie que T_γ est un difféomorphisme à l'aide de la condition i) ci-dessus).

L'avantage de supposer que E_γ est trivial, soit

$$E_\gamma = E_{\gamma,0} \times [0,1], \tag{3.1.1}$$

est que dans ce cas la connexion est donnée par une matrice de 1-formes (si on s'est donné de plus une base e_i de $E_{\gamma,0}$) : Une section de E_γ est alors une fonction σ de $[0,1]$ vers $E_{\gamma,0}$ et on a par la règle de Leibniz

$$\nabla_\gamma \sigma = d\sigma + A_\gamma \sigma, \tag{3.1.2}$$

où la matrice A_γ est une matrice dont les coefficients sont des 1-formes $a_{ij}(t)dt$ sur $[0,1]$, donnée par

$$\nabla_\gamma e_i = A_i = \sum_j a_{j_i} e_j,$$

où on note aussi e_i la section constante de $E_{\gamma,0} \times [0,1]$ correspondant au vecteur de base e_i de $E_{\gamma,0}$.

On doit résoudre l'équation

$$\nabla_\gamma e_\gamma = 0,\ e_\gamma(0) = e,$$

pour tout $e \in E_{\gamma,0}$. D'après (3.1.2), ceci s'écrit aussi (en voyant, grâce à la trivialisation (3.1.1), e_γ comme une fonction de $[0,1]$ dans $E_{\gamma,0}$) :

$$de_\gamma = -A_\gamma e_\gamma.$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre, et on dispose donc d'une unique solution dès qu'on impose la valeur initiale $e_\gamma(0)$. Ceci montre i) et ii). Plus généralement, avec la trivialisation donnée de E_γ et la base donnée de $E_{\gamma,0}$, $T_\gamma(t)$ est donné par la matrice $M(t)$ solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre en t :

$$dM(t) = -A(t)M(t),$$

où $A(t) = B(t)dt$ est une matrice dont les coefficients sont les 1-formes $a_{ij}(t)dt$ sur $[0,1]$, soit encore

$$\frac{d}{dt}M(t) = B(t)M(t),$$

avec la condition initiale $M(0) = 1_r$, $r = \text{rang}\,(E)$. Le fait que l'application T_γ, qui est donnée dans ces trivialisations par

$$(e,t) \mapsto (M(t)e,t)$$

est différentiable et même de classe C^∞ est alors une conséquence de la théorie des équations différentielles linéaires.

■

3.1.1 Holonomie

Soit X une variété différentiable et $E \to X$ un fibré vectoriel muni d'une connexion $\nabla : \Gamma(X,E) \to \Gamma(X, E \otimes \Omega_X)$. Pour tout $x \in X$ et tout chemin différentiable $\gamma : [0,1] \to X$ tel que $\gamma(0) = \gamma(1) = x$, on construit un automorphisme

$$H_\gamma \in \mathrm{Aut}\, E_x$$

défini à l'aide de l'application de transport parallèle

$$T_\gamma : E_x \times [0,1] \cong E_\gamma,$$

soit au point 1, puisque $E_{\gamma(1)} \cong E_x$ canoniquement, un isomorphisme

$$H_\gamma = T_\gamma(1) : E_x \cong E_x.$$

Cet automorphisme est appelé l'automorphisme d'holonomie le long de γ. Il dépend en général de γ lui-même, et pas seulement de sa classe d'homotopie.

Le groupe d'holonomie H_x de la connexion au point x est le sous-groupe de $\mathrm{Aut}\, E_x$ engendré par les automorphismes H_γ, pour tous les lacets γ basés en x.

Lemme 3.1.3. *Si X est connexe, les groupes H_x et H_y sont conjugués pour tous points x, $y \in X$.*

Ceci signifie qu'il existe un isomorphisme $g : E_x \cong E_y$ tel que

$$H_y = g H_x g^{-1}.$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que l'automorphisme d'holonomie $H_\gamma : E_x \cong E_x$ associé à un chemin γ basé en x ne dépend pas du paramétrage de γ : plus précisément, si $\gamma' = \gamma \circ \phi$, où $\phi : [0,1] \to [0,1]$ est différentiable et satisfait $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 1$, alors

$$H_{\gamma'} = H_\gamma : E_x \cong E_x.$$

Cela résulte du fait que pour tout $e \in E_x$, si e_γ est la section plate du fibré tiré en arrière E_γ ayant pour valeur e en 0, alors $\phi^*(e_\gamma)$ est la section plate du fibré tiré en arrière $E_{\gamma'}$ ayant pour valeur e en 0 et est donc égale à $e_{\gamma'}$. On a alors par définition :

$$H_{\gamma'}(e) = e_{\gamma'}(1) = \phi^*(e_\gamma)(1) = e_\gamma(\phi(1)) = e_\gamma(1) = H_\gamma(e).$$

Soit maintenant $\gamma_0 : [0,1] \to X$ un chemin différentiable de x à y. Grâce à la donnée de γ_0, on dispose de l'application de transport parallèle

$$T_{\gamma_0}(1) : E_x \cong E_y.$$

Pour tout lacet

$$\gamma_y : [0,1] \to X$$

basé en y, on a un lacet

$$\gamma_x : [0,1] \to Y$$

basé en x, obtenu de la façon suivante : sur l'intervalle $[0, \frac{1}{3}]$, on pose $\gamma_x(t) = \gamma_0(3t)$. Sur l'intervalle $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, on pose $\gamma_x(t) = \gamma_y(3t-1)$ et sur l'intervalle $[\frac{2}{3}, 1]$, on pose $\gamma_x(t) = \gamma_0(3-3t)$. Ce lacet est un lacet continu basé en x mais pas différentiable aux points $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$. On modifie son paramétrage au voisinage de ces points de façon à le rendre différentiable en ces points, ce qui comme mentionné plus haut ne change pas le transport parallèle sur chaque tronçon. Soit $\tilde{\gamma}_x$ le lacet ainsi modifié. Il est clair que l'holonomie $H_{\tilde{\gamma}_x} \in \operatorname{Aut} E_x$ est donnée par

$$H_{\tilde{\gamma}_x} = T_{\gamma_0}(1)^{-1} \circ H_{\gamma_y} \circ T_{\gamma_0}(1).$$

Posant $g = T_{\gamma_0}(1)$, on a donc montré que

$$H_x \subset g^{-1} H_y g,$$

et l'inclusion dans l'autre sens se montre en échangeant x et y.

■

3.2 Courbure

3.2.1 Courbure d'une connexion

Soit X une variété différentiable et $E \to X$ un fibré vectoriel muni d'une connexion

$$\nabla : \Gamma(X, E) \to \Gamma(X, E \otimes \Omega_X). \tag{3.2.3}$$

L'application linéaire ∇ n'est pas linéaire relativement à la multiplication par les fonctions différentiables $f \in C^\infty(X)$, puisqu'on a par la règle de Leibniz :

$$\nabla(f\sigma) = f\nabla(\sigma) + \sigma \otimes df.$$

Cette application n'est donc pas induite par un morphisme de fibrés vectoriels $E \to E \otimes \Omega_X$. C'est ce qu'on appelle un *opérateur différentiel d'ordre* 1, ce qui signifie que dans des trivialisations locales du fibré, son action sur une section σ se calcule à l'aide des composantes σ_i de σ et de leurs dérivées du premier ordre.

Nous allons maintenant construire un morphisme de fibrés vectoriels

$$R_\nabla : E \to E \otimes \Omega_X^2,$$

appelé *opérateur de courbure de* ∇, et qui au niveau des sections globales va donner une application (notée de la même manière)

$$R_\nabla : \Gamma(X, E) \to \Gamma(X, E \otimes \Omega_X^2) \tag{3.2.4}$$

qui est maintenant linéaire pour la multiplications par les fonctions différentiables sur X, i.e. $R_\nabla(f\sigma) = fR_\nabla(\sigma)$.

La construction est la suivante : La connexion ∇ nous fournit l'opérateur (3.2.3), qu'on va étendre en un opérateur différentiel du premier ordre

$$\nabla_1 : \Gamma(X, E \otimes \Omega_X) \to \Gamma(X, E \otimes \Omega_X^2),$$

défini par la règle de Leibniz : pour σ une section de E et α une 1-forme sur X (ou sur un ouvert de X), on pose

$$\nabla_1(\sigma \otimes \alpha) = \nabla(\sigma) \wedge \alpha + \sigma \otimes d\alpha.$$

L'opérateur R_∇ de (3.2.4) est défini par :

$$R_\nabla(\sigma) = \nabla_1(\nabla(\sigma)) \in \Gamma(X, E \otimes \Omega_X^2) \tag{3.2.5}$$

pour $\sigma \in \Gamma(X, E)$.

Théorème 3.2.1. *L'opérateur R_∇ défini par (3.2.5) sur les sections globales de E est induit par un morphisme de fibrés vectoriels (qu'on notera de la même manière)*

$$R_\nabla : E \to E \otimes \Omega_X^2.$$

Ce qui est remarquable dans ce résultat, c'est le fait que R_∇ a été défini comme la composition de deux opérateurs différentiels d'ordre 1 (faisant intervenir les différentielles $d\sigma_i$ des sections écrites sous la forme $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ dans des trivialisations locales), et qu'il est finalement un opérateur d'ordre 0, qui ne fait pas intervenir les différentielles $d\sigma_i$ mais seulement les σ_i.

Remarque 3.2.2. Il est clair que R_∇ peut-être défini localement, c'est-à-dire agit aussi bien comme un opérateur

$$R_\nabla : \Gamma(U, E_U) \to \Gamma(U, E_U \otimes \Omega_U^2)$$

pour tout ouvert U de X, puisque c'est le cas pour ∇.

Démonstration du théorème 3.2.1. Nous allons calculer explicitement l'opérateur de (3.2.5) sur des ouverts $U \subset X$ dans lesquels le fibré E est trivialisé, soit $E_U \cong U \times \mathbb{R}^r$. Une section de E sur U (de classe C^∞) est donc une application différentiable (de classe C^∞) de U dans $\mathbb{R}^r$. Soient $e_1, \ldots, e_r$ les r-sections canoniques de E_U, (correspondant via la trivialisation donnée aux applications constantes égales à e_i, e_i étant le i-ième vecteur de base de $\mathbb{R}^r$). Posons

$$A_i := \nabla(e_i) \in \Gamma(U, E \otimes \Omega_U).$$

Utilisant la base e_i de E sur U, A_i est donc un vecteur de r formes de degré 1 sur U :

$$\nabla(e_i) = A_i = \sum_j e_j \otimes a_{ji}. \tag{3.2.6}$$

Dans U, toute section σ de E s'écrit $\sigma = \sum_i \sigma_i e_i$ et la formule de Leibniz donne donc

$$\begin{aligned}\nabla\sigma &= \sum_i e_i \otimes d\sigma_i + \sum_i \sigma_i A_i \\ &= \sum_i e_i \otimes d\sigma_i + \sum_{ij} \sigma_i e_j \otimes a_{ji}\end{aligned}$$

soit encore

$$\nabla\sigma = \sum_i e_i \otimes (d\sigma_i + \sum_j a_{ij}\sigma_j).$$

Nous appliquons maintenant ∇_1 à cette expression et obtenons :

$$\nabla_1(\nabla(\sigma)) = \sum_i e_i \otimes d(d\sigma_i + \sum_j a_{ij}\sigma_j) + \sum_i \nabla(e_i) \wedge (d\sigma_i + \sum_j a_{ij}\sigma_j)) \tag{3.2.7}$$

Utilisant le fait que $d(d\sigma_i) = 0$, et remplaçant $\nabla(e_i)$ par sa valeur (3.2.6), nous obtenons

$$\begin{aligned}\nabla_1(\nabla(\sigma)) &= \sum_i e_i \otimes (-\sum_j a_{ij} \wedge d\sigma_j) \qquad (3.2.8)\\ &+ \sum_i (\sum_j e_j \otimes a_{ji} \wedge d\sigma_i + L(\sigma) = L(\sigma),\end{aligned}$$

où

$$L(\sigma) = \sum_i e_i \otimes (\sum_j da_{ij}\sigma_j) + \sum_i \nabla(e_i) \wedge (\sum_j a_{ij}\sigma_j) \tag{3.2.9}$$

est linéaire en les σ_i et ne fait pas intervenir leurs dérivées.

Nous avons donc montré que l'opérateur R_∇ défini sur les sections globales de E est donné localement (sur les ouverts U où E est trivial) par un morphisme de fibrés vectoriels $R_{\nabla,U} : E_U \to E_U \otimes \Omega^2_X$, dont la matrice dans la trivialisation donnée de E_U est écrite dans (3.2.9). Ces morphismes $R_{\nabla,U}$ doivent se recoller sur les intersections $U \cap V$ puisque leurs actions sur les sections de E sur $U \cap V$ coïncident, de sorte qu'on a bien un morphisme $R_\nabla : E \to E \otimes \Omega^2_X$ de fibrés vectoriels sur X induisant (3.2.5) au niveau des sections globales. ∎

Remarque 3.2.3. La matrice A dont les vecteurs colonnes sont les A_i est appelée la matrice de la connexion A dans la trivialisation donnée de E sur U.

3.2.2 Courbure d'une connexion $\overline{\partial}$

Soit X une variété complexe et soit $E \to X$ un fibré vectoriel complexe muni d'une connexion $\overline{\partial}$, qui nous fournit un opérateur différentiel du premier ordre

$$\overline{\partial}_E : \Gamma(X, E) \to \Gamma(X, E \otimes \Omega_X^{0,1}),$$

satisfaisant la règle de Leibniz relativement à l'opérateur $\overline{\partial}$ agissant sur les fonctions de X (cf. définition 2.3.11).

On va définir un opérateur de courbure $R_{\overline{\partial}_E} \in \Gamma(X, (\mathrm{End\,E}) \otimes \Omega_X^{0,2})$. Tout d'abord, nous étendons l'opérateur $\overline{\partial}$ défini sur les fonctions en un opérateur $\overline{\partial}$ défini sur les formes de type $(0,i)$ (ou encore les sections du fibré $\Omega_X^{0,i} = \bigwedge^i \Omega_X^{0,1}$ engendré par les $d\overline{z}_I$, $|I| = i$) par la formule :

$$\overline{\partial}(f d\overline{z}_I) = \overline{\partial} f \wedge d\overline{z}_I. \tag{3.2.10}$$

Il est immédiat de vérifier que

$$\overline{\partial} \circ \overline{\partial} = 0 : A^{0,i}(X) \to A^{0,i+2}(X),$$

où $A^{0,i}(X) := \Gamma(X, \Omega_X^{0,i})$. Cela résulte de la définition (3.2.10) et du fait que pour les fonctions f sur X, on a

$$\overline{\partial}(\overline{\partial} f) = 0$$

dans $A^{0,2}(X)$, ce qui est une conséquence de $d \circ d = 0$.

La définition de $R_{\overline{\partial}_E}$ est copiée de celle de la courbure d'une connexion : L'opérateur $\overline{\partial}_E$ s'étend, à l'aide de la formule de Leibniz pour l'opérateur $\overline{\partial}$ agissant sur les $(0,1)$-formes, en un opérateur

$$\overline{\partial}_{E,1} : \Gamma(X, E \otimes \Omega_X^{0,1}) \to \Gamma(X, E \otimes \Omega_X^{0,2}),$$

où l'on pose

$$\overline{\partial}_{E,1}(\sigma \otimes \alpha) = \overline{\partial}_E(\sigma) \wedge \alpha + \sigma \otimes \overline{\partial}\alpha.$$

L'opérateur de courbure $R_{\overline{\partial}_E}$ est défini par :

$$R_{\overline{\partial}_E}(\sigma) = \overline{\partial}_{E,1}(\overline{\partial}_E(\sigma)) \in \Gamma(X, E \otimes \Omega_X^{0,2}) \tag{3.2.11}$$

pour $\sigma \in \Gamma(X, E)$. On a alors le résultat suivant qui se montre comme le théorème 3.2.1.

Théorème 3.2.4. *L'opérateur $R_{\overline{\partial}_E}$ défini par (3.2.11) sur les sections globales de E est induit par un morphisme de fibrés vectoriels (qu'on notera de la même manière)*

$$R_{\overline{\partial}_E} : E \to E \otimes \Omega_X^{0,2},$$

ou encore une section de $(\mathrm{End}\, E) \otimes \Omega_X^{0,2}$.

Considérons le cas d'un fibré vectoriel *holomorphe* E sur X, muni de la connexion $\overline{\partial}_E$ décrite dans le paragraphe 2.3.3.

Proposition 3.2.5. *La connexion $\overline{\partial}_E$ d'un fibré holomorphe E sur X est à courbure $R_{\overline{\partial}_E}$ nulle.*

Démonstration. C'est un calcul explicite : rappelons que dans les trivialisations holomorphes $E_U \cong U \times \mathbb{C}^r$ de E, pour une section σ de E sur U, on a

$$\phi_U \circ \sigma(x) = (x, \sigma_1(x), \dots, \sigma_r(x)),\ \phi_U \circ (\overline{\partial}_E \sigma)(x) = (x, \overline{\partial}\sigma_1(x), \dots, \overline{\partial}\sigma_r(x)).$$

Il en résulte immédiatement que pour une section σ de E sur U et une $(0,1)$-forme α sur U,

$$\phi_U(\sigma \otimes \alpha)(x) = (x, \sigma_1\alpha, \dots, \sigma_r\alpha),$$

$$\phi_U(\overline{\partial}_{E,1}\sigma \otimes \alpha)(x) = (x, \overline{\partial}(\sigma_1\alpha)(x), \dots, \overline{\partial}(\sigma_r\alpha)(x)).$$

On trouve donc

$$\phi_U(\overline{\partial}_{E,1}(\overline{\partial}_E(\sigma)))(x) = (x, \overline{\partial}(\overline{\partial}\sigma_1)(x), \dots, \overline{\partial}(\overline{\partial}\sigma_r)(x)).$$

Le fait que $R_{\overline{\partial}_E} = 0$ résulte donc du fait que pour l'opérateur $\overline{\partial}$ agissant sur les formes, on a $\overline{\partial} \circ \overline{\partial} = 0$. ■

On verra comme conséquence du théorème de Newlander-Nirenberg que cette propriété est en fait caractéristique des connexions $\overline{\partial}$ associées à une structure holomorphe sur un fibré vectoriel.

3.2.3 Courbure d'une distribution

Soit X une variété différentiable.

Définition 3.2.6. *Une distribution $V \subset T_X$ de rang r est la donnée d'un sous-fibré vectoriel de T_X de rang r.*

Exemple 3.2.7. Une distribution V de rang 1 est engendrée localement par un champ de vecteurs χ non nul sur X. Elle est engendrée globalement par un tel champ si le fibré V est orientable. Le champ détermine la distribution mais la distribution ne détermine le champ qu'à multiplication par une fonction différentiable près.

Exemple 3.2.8. Soit $\phi : X \to Y$ une application différentiable qui est de plus submersive en tout point, i.e. l'application

$$\phi_* : T_X \to \phi^* T_Y$$

est un morphisme de fibrés vectoriels qui est surjectif en tout point. Alors d'après la proposition 1.2.9, $\operatorname{Ker} \phi_*$ est une distribution sur X, appelée le fibré tangent vertical de ϕ, ou fibré tangent aux fibres de ϕ.

Étant donnée une distribution $V \subset T_X$, on introduit le *fibré normal* de la distribution V, défini par

$$N_V := T_X/V.$$

On va définir une section R_V de $\bigwedge^2 V^* \otimes N_V$ qui est un analogue de la courbure d'une connexion.

On va d'abord définir R_V au niveau des sections globales, comme une application linéaire

$$R_V : \bigwedge^2 \Gamma(X,V) \to \Gamma(X,N_V) \tag{3.2.12}$$

et on montrera ensuite par un calcul local que cette application est de la forme

$$\bigwedge^2 \Gamma(X,V) \to \Gamma(X, \bigwedge^2 V) \to \Gamma(X,N_V),$$

où la dernière flèche est induite par un morphisme de fibrés vectoriels $\bigwedge^2 V \to N_V$, ou encore une section du fibré $\bigwedge^2 V^* \otimes N_V$. L'application R_V de (3.2.12) envoie simplement deux sections χ, χ' de V, qui sont donc des champs de vecteurs sur X, sur la projection du crochet $[\chi,\chi'] \in \Gamma(X,T_X)$ dans $\Gamma(X,N_V)$. L'application ainsi définie est clairement $\mathbb{R}$-linéaire en chacun des champs de vecteurs et alternée, ce qui nous donne bien une flèche de $\bigwedge^2 \Gamma(X,V)$ vers $\Gamma(X,N_V)$.

Proposition 3.2.9. *L'application $R_V : \bigwedge^2 \Gamma(X,V) \to \Gamma(X,N_V)$ ainsi définie est induite par un morphisme de fibrés vectoriels*

$$R_V : \bigwedge^2 V \to N_V.$$

Démonstration. On utilisera le lemme 3.2.10 ci-dessous. Il suffit donc de montrer que l'application R_V est $C^\infty(X)$-linéaire au sens où

$$R_V((f\chi)\wedge\chi') = fR_V(\chi\wedge\chi')$$

pour tous champs de vecteurs χ, χ' sur X et toute fonction f différentiable sur X. En effet, cela implique par le lemme 3.2.10 que pour χ' fixé, $\chi \mapsto R_V(\chi\wedge\chi')$ est induit par un morphisme de fibrés vectoriels $R_V(\chi') : V \to N_V$, et l'application $\chi' \mapsto R_V(\chi')$ étant $C^\infty(X)$-linéaire, on conclut en appliquant encore le lemme 3.2.10 qu'elle est induite par un morphisme de fibrés $V \to V^* \otimes N_V$, d'où finalement une section de $V^* \otimes V^* \otimes N_V$, qui doit être en fait alternée, i.e. dans $\bigwedge^2 V^* \otimes N_V$, puisque (3.2.12) l'est.

Le fait que l'application R_V soit $C^\infty(X)$-linéaire résulte de l'identité

$$[f\chi,\chi'] = f[\chi,\chi'] - df(\chi')\chi, \tag{3.2.13}$$

qui est elle-même une conséquence immédiate du lemme 2.2.3. On trouve donc que $R_V((f\chi)\wedge\chi')$ est la projection dans $\Gamma(X,N_V)$ de $f[\chi,\chi'] - df(\chi')\chi \in \Gamma(X,V)$. Par définition de N_V, le terme $df(\chi')\chi$ a une projection nulle dans le quotient $\Gamma(X,N_V)$. D'où $R_V((f\chi)\wedge\chi') = fR_V(\chi\wedge\chi')$. De même $R_V(\chi\wedge(f\chi')) = fR_V(\chi\wedge\chi')$. ■

Lemme 3.2.10. *Soient G, H deux fibrés vectoriels réels sur X et $P : \Gamma(X,G) \to \Gamma(X,H)$ une application $\mathbb{R}$-linéaire telle que $P(fg) = fP(g)$ pour tout $g \in \Gamma(X,G)$ et toute fonction différentiable f sur X. Alors P est induit par un morphisme $p : G \to H$ de fibrés vectoriels.*

Démonstration. Soit U un ouvert de X. On montre tout d'abord que P induit une application une application $\mathbb{R}$-linéaire $P_U : \Gamma(X,G)_{|U} \to \Gamma(X,H)_{|U}$. On doit montrer pour cela que si σ est une section de F nulle sur U, alors $P(\sigma)$ est une section de H nulle sur U. Mais si $x \in U$, il existe une fonction $f \in C^\infty(X)$ qui est non nulle en x et nulle en dehors de U. Alors pour σ comme ci-dessus $f\sigma$ est identiquement nulle et donc $P(f\sigma) = 0 = fP(\sigma)$, soit $P(\sigma)(x) = 0$ puisque $f(x) \neq 0$.

Prenons maintenant pour U un ouvert sur lequel G et H sont triviaux. Alors $G_U \cong U \times \mathbb{R}^r$, et $H_U \cong U \times \mathbb{R}^s$ ce qui induit (quitte à restreindre U et à le remplacer par un ouvert relativement compact) des isomorphismes

$$\Gamma(X,G)_{|U} \cong C^\infty(X)^r_{|U},\ \Gamma(X,H)_{|U} \cong C^\infty(X)^s_{|U}.$$

Le morphisme

$$P_U : \Gamma(X,G)_{|U} \to \Gamma(X,H)_{|U}$$

induit par P nous donne donc un morphisme

$$C^\infty(X)^r_{|U} \to C^\infty(X)^s_{|U}$$

dont nous savons qu'il est $C^\infty(X_{|U})$-linéaire. Il est donc induit par une matrice de taille (r,s) à coefficients dans $C^\infty(X)_{|U}$. Nous pouvons voir cette matrice comme fournissant un morphisme p_U entre les fibrés vectoriels G_U et H_U, qui induit P_U au niveau des sections globales. Cette dernière condition entraîne que les différents p_U se recollent sur les intersections $U \cap V$ pour fournir $p : G \to H$. ∎

3.2.4 Comparaison

On a vu dans le théorème 2.3.2 qu'une connexion ∇ sur un fibré E est un scindage du fibré tangent T_E en somme directe de sa partie verticale, tangente au fibres de $\pi : E \to X$ et d'une partie horizontale H_∇, isomorphe via π_* au fibré $\pi^* T_X$.

Un tel scindage fournit donc une distribution H_∇ sur E, la distribution horizontale. Cette distribution n'est pas quelconque ; elle doit satisfaire les conditions de compatibilité avec la structure de fibré vectoriel mentionnées dans le théorème 2.3.2.

On dispose en tout cas de deux notions de courbure : on a tout d'abord la courbure de la distribution $H_\nabla \subset T_E$, qui est une section de $\bigwedge^2 H^*_\nabla \otimes \pi^* E$ sur E (on identifie ici le fibré normal N_{H_∇} à la partie verticale de T_E qui est canoniquement isomorphe à $\pi^* E$). Notant que H_∇ est isomorphe via π_* à $\pi^* T_X$, on a donc finalement :

$$R_{H_\nabla} \in \Gamma(E, \pi^*(E \otimes \Omega^2_X)).$$

Par ailleurs, on a la courbure R_∇ de la connexion ∇ qui est un élément de $\Gamma(X, \mathrm{End}\,(E) \otimes \Omega^2_X)$.

Théorème 3.2.11. *Soit $e \in E$ et soit $x = \pi_(e) \in X$. On a*

$$R_{H_\nabla}(e) = R_\nabla(x)(e).$$

Dans le terme de gauche, $R_{H_\nabla}(e)$ est un élément de $E_x \otimes \Omega^2_{X,x}$. Dans le terme de droite, $R_\nabla(x)$ est un élément de $\mathrm{End}\,(E_x) \otimes \Omega^2_{X,x}$ et appliqué à e, il fournit bien un élément de $E_x \otimes \Omega^2_{X,x}$.

La preuve du théorème est un calcul explicite qu'on laisse de côté. On obtient le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.12. *La courbure de la connexion ∇ est nulle si et seulement si la courbure de la distribution H_∇ est nulle.*

Les connexions à courbure nulle sont dites plates (ou intégrables). Les distributions à courbure nulle sont dites intégrables. La condition de courbure nulle pour une distribution est appelée la condition d'intégrabilité de Frobenius.

3.2.5 Crochets des champs et commutateurs des flots

Soit X une variété compacte et χ, χ' deux champs de vecteurs sur X. On dispose des flots $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ et $(\Phi'_t)_{t\in\mathbb{R}}$ associés respectivement à χ et χ'.

Théorème 3.2.13. *Les difféomorphismes $\Phi_t : X \to X$ et $\Phi'_{t'} : X \to X$ commutent pour tous t et t', i.e.*

$$\Phi'_{t'} \circ \Phi_t = \Phi_t \circ \Phi'_{t'},$$

si et seulement si le crochet $[\chi, \chi']$ est égal à 0.

Démonstration. Montrons d'abord le "seulement si" : Supposons donc que les flots commutent et montrons que le crochet $[\chi, \chi']$ est nul. Soit f une fonction de classe C^∞ sur X. Par définition du crochet de Lie, on a

$$\partial_{[\chi,\chi']}(f) = \partial_\chi(\partial_{\chi'}(f)) - \partial_{\chi'}(\partial_\chi(f)).$$

D'autre part, pour toute fonction g de classe C^∞ sur X, on a

$$\partial_\chi(f) = \frac{d}{dt}(\Phi_t^* f)_{t=0}. \tag{3.2.14}$$

On trouve donc que

$$\partial_\chi(\partial_{\chi'}(f)) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'}(\Phi_t^*({\Phi'_{t'}}^* f))_{t=t'=0}$$

et de même

$$\partial_{\chi'}(\partial_\chi(f)) = \frac{\partial^2}{\partial t \partial t'}({\Phi'_{t'}}^*(\Phi_t^* f))_{t=t'=0}.$$

Si les flots commutent, on a pour toute fonction f,

$$\Phi'^{*}_{t'}(\Phi^*_t f) = \Phi^*_t(\Phi'^{*}_{t'} f),$$

et donc

$$\partial_\chi(\partial_{\chi'}(f)) = \partial_{\chi'}(\partial_\chi(f)).$$

On conclut donc par (3.2.14) que $\partial_{[\chi,\chi']}(f) = 0$ pour toute fonction f de classe C^∞, soit $[\chi, \chi'] = 0$.

Nous montrons maintenant l'implication dans l'autre sens, c'est-à-dire que si le crochet $[\chi, \chi']$ est nul, les flots commutent.

Pour cela, nous utilisons le lemme suivant :

Lemme 3.2.14. *Soient χ, χ' deux champs de vecteurs sur X. Soit $(\Phi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ le flot associé à χ. Alors*

$$\frac{d}{dt}(\Phi_{t*}\chi')_{t=t_0} = -\Phi_{t_0*}([\chi, \chi']).$$

Remarque 3.2.15. Pour montrer cette formule, on peut en fait se placer au temps $t_0 = 0$, grâce à la formule $\Phi_{t_0+t} = \Phi_t \circ \Phi_{t_0}$ et au fait facile à démontrer que

$$\Phi_{t_0*}\chi = \chi.$$

Démonstration du lemme 3.2.14. Soit $x \in X$ et $y = \Phi_t(x)$. Soit f une fonction de classe C^∞ sur X. On a par définition de Φ_{t*} agissant sur les vecteurs tangents et Φ^*_t agissant sur les fonctions :

$$\partial_{\chi'}(\Phi^*_t f)(x) = \partial_{\Phi_{t*}\chi'}(f)(y).$$

Ces égalités ponctuelles se traduisent par la formule :

$$\partial_{\chi'}(\Phi^*_t f) = \Phi^*_t(\partial_{\Phi_{t*}\chi'}(f)). \tag{3.2.15}$$

Différentions les deux côtés de l'équation par rapport à t au temps $t = 0$. Nous obtenons :

$$\partial_{\chi'}(\partial_\chi(f)) = \partial_\chi(\partial_{\chi'}(f)) + \frac{d}{dt}(\partial_{\Phi_{t*}\chi'}(f))_{t=0}.$$

Compte tenu de l'égalité

$$\partial_{\chi'}(\partial_\chi(f)) - \partial_\chi(\partial_{\chi'}(f)) = -\partial_{[\chi,\chi']}(f),$$

ceci nous fournit bien

$$\frac{d}{dt}(\partial_{\Phi_{t*}\chi'}(f))_{t=0} = -\partial_{[\chi,\chi']}(f),$$

ou encore $\frac{d}{dt}(\Phi_{t*}\chi')_{t=0} = -[\chi, \chi']$. ■

Ce lemme nous montre que si $[\chi, \chi'] = 0$, on a $\frac{d}{dt}(\Phi_{t*}\chi') = 0$ et donc $\Phi_{t*}\chi' = \Phi_{0*}\chi' = \chi'$. Le champ χ' est donc préservé par Φ_t. Soit

$$\gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to X$$

une trajectoire de χ' telle que $\gamma(0) = x \in X$. On a donc $\frac{d}{dt}(\gamma)(t) = \chi'(\gamma(t))$ et

$$\frac{d}{dt}(\Phi_{t_0} \circ \gamma)(t) = \Phi_{t_0*}(\frac{d}{dt}(\gamma)(t)) = \Phi_{t_0*}(\chi'(\gamma(t_0))).$$

Comme $\Phi_{t_0*}\chi' = \chi'$,

$$\Phi_{t_0} \circ \gamma :]-\epsilon, \epsilon[\to X$$

est une trajectoire du champ χ' telle que $\Phi_{t_0} \circ \gamma(0) = \Phi_{t_0}(x)$. Donc par définition du flot Φ'_t, on a

$$\Phi'_t(\Phi_{t_0}(x)) = \Phi_{t_0} \circ \gamma(t).$$

Toujours par définition du flot Φ'_t, on a aussi :

$$\gamma(t) = \Phi'_t(x),$$

ce qui nous donne :

$$\Phi'_t(\Phi_{t_0}(x)) = \Phi_{t_0}(\Phi'_t(x)),$$

et conclut la preuve du théorème.

$\blacksquare$