Géométrie différentielle complexe, faisceaux et cohomologie

Claire Voisin
CNRS et École Polytechnique

Table des matières

Chapitre 1

Variétés et fibrés vectoriels

1.1 Variétés et sous-variétés

1.1.1 Coordonnées locales

Définition 1.1.1. *Une sous-variété de $\mathbb{R}^N$ (de classe C^k) de dimension n est la donnée d'un fermé $X \subset \mathbb{R}^N$ ayant la propriété suivante : Pour tout $x \in X$, il existe une boule $B_x \subset \mathbb{R}^N$ centrée en x, telle que*

$$X \cap B_x = \{y \in B_x, f_1(y) = 0, \ldots, f_{N-n}(y) = 0\} \tag{1.1.1}$$

où les f_i sont des fonctions de classe C^k sur B_x telles que les différentielles $df_i = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$ sont indépendantes en tout point de B_x.

Une telle variété est compacte lorsqu'elle est contenue dans une boule $B \subset \mathbb{R}^N$.

L'espace tangent $T_{X,x}$ à une telle sous-variété en $x \in X$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ défini par

$$T_{X,x} = \{v = (v_, \ldots, v_N) \in \mathbb{R}^N,\, df_i(v) := \sum_j v_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 0, \forall i = 1, \ldots, N-n\}.$$

On va montrer que l'espace $T_{X,x}$ ainsi défini ne dépend pas du choix des équations locales f_i.

Dans la situation précédente, le théorème d'inversion locale fournit pour tout $x \in X$ des fonctions différentiables (de classe C^k) $g_1, \ldots, g_n$ définies dans une boule éventuellement restreinte $B'_x \subset B_x$, telles que

$$(g_1, \ldots, g_n, f_1 \ldots, f_{N-n}) : B'_x \to \mathbb{R}^N$$

est un difféomorphisme Ψ sur son image. Les fonctions $g_1(x), \ldots, g_n(x), f_1(x) \ldots, f_{N-n}(x)$ fournissent donc des coordonnées locales $x'_1, \ldots, x'_N$ sur B'_x, telles que

$$X \cap B'_x \supseteq \{(x'_1, \ldots, x'_n, 0, \ldots, 0,\, |x'_i| < \epsilon\} \subset B'_x, \tag{1.1.2}$$

pour un ϵ suffisamment petit.

Corollaire 1.1.2. *Si une fonction différentiable f définie sur B'_x s'annule sur $B'_x \cap X$, alors $\frac{\partial f}{\partial x'_i}(x)$ s'annule pour $i \leq n$. Ceci montre que la définition précédemment donnée de $T_{X,x}$ est indépendante du choix des équations locales.*

Les fonctions $g_1, \dots, g_n$ restreintes à $X \cap B'_x$ sont appelées des coordonnées locales sur X.

Remarque 1.1.3. On peut choisir pour les g_i certaines des coordonnées originales, par exemple $x_1, \dots, x_n$ quitte à effectuer une permutation des indices : il suffit en effet que leurs différentielles au voisinage de x soient indépendantes des différentielles $df_1, \dots, df_{N-n}$, ce qui équivaut au fait que la fonction continue $\det\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_{i=n+1,\dots,N,\, j=1,\dots,N-n}$ soit non nulle en x, donc au voisinage de x.

Supposons qu'on ait $g_1 = x_1, \dots, g_n = x_n$. Le difféomorphisme Ψ s'écrit donc

$$\Psi(x) = (x_1, \dots, x_n, f_1, \dots, f_{N-n})$$

où les f_i sont des fonctions de classe C^k de $x_1, \dots, x_N$. L'inverse Ψ^{-1} s'écrit donc de la même façon (là où il est défini) :

$$\Psi^{-1}(x') = (x'_1, \dots, x'_n, \psi_1, \dots, \psi_{N-n})$$

où les ψ_i sont des fonctions de classe C^k de $x'_1, \dots, x'_N$. L'image par Ψ d'un petit ouvert de $X \cap B'_x$ centré en x étant décrit par (1.1.2), nous trouvons en appliquant Ψ^{-1} que (dans les coordonnées initiales $x_1, \dots, x_N$),

$$X \cap B_x \supseteq \{(x_1, \dots, x_n, F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_{N-n}(x_1, \dots, x_n)),\ |x_i| < \epsilon'\}, \quad (1.1.3)$$

où l'inclusion est ouverte et $F_i(x_1, \dots, x_n) = \psi_i(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ sont des fonctions de classe C^k de n variables. L'existence du paramétrage (1.1.3) de $X \cap B_x$ est le contenu du *théorème des fonctions implicites*.

Lemme 1.1.4. *Soient $g_1, \dots, g_n$, $g'_1, \dots, g'_n$ deux systèmes de coordonnées locales sur un ouvert U de X. Alors on a localement sur U :*

$$g'_i = \psi_i(g_1, \dots, g_n),$$

où $\psi := (\psi_1, \dots, \psi_n)$ est un difféomorphisme de classe C^k d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. Comme $g = (g_i)$ et $g' = (g'_j)$ donnent des homéomorphismes locaux d'un voisinage U de x sur un ouvert V, resp. V' de $\mathbb{R}^n$, on dispose d'un homéomorphisme $\psi = g' \circ g^{-1}$ de V sur V'. On a

$$\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n),\ g'_i = \psi_i(g_1, \dots, g_n)$$

et on doit montrer que les fonctions ψ_i sont différentiables de classe C^k. Cela résulte du fait que les g_i sont les restrictions à X de fonctions de classe C^k sur

$\mathbb{R}^N$ (qu'on appellera aussi g_i), ainsi que les g'_i, et qu'il existe un difféomorphisme G (resp. G') de classe C^k d'un voisinage W de x dans $\mathbb{R}^N$ tel que

$$G = (g_1, \ldots, g_n, f_1, \ldots, f_{N-n}),$$

$$X \cap U' = \{x = (x_1, \ldots, x_N),\ f_1(x) = 0, \ldots, f_{N-n}(x) = 0\}.$$

et de même pour

$$G' = (g'_1, \ldots, g'_n, f_1, \ldots, f_{N-n}).$$

Le difféomorphisme $\Psi := G' \circ G^{-1}$ de W est alors de classe C^k. Or il s'écrit

$$\Psi(y_1, \ldots, y_N) = (\Psi_1(y), \ldots, \Psi_n(y), y_{n+1}, \ldots, y_N)$$

avec

$$\Psi_i(y_1, \ldots, y_n, 0, \ldots, 0)) = \psi_i(y_1, \ldots, y_n).$$

■

Définition 1.1.5. *Les coordonnées locales $g_1, \ldots, g_n$ fournissent un homéomorphisme local de $X \cap B_x$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ qui est appelé une carte locale.*

Le difféomorphisme ψ est appelé un difféomorphisme de changement de cartes.

Ceci nous permet de définir les "variétés abstraites" de la façon suivante :

Définition 1.1.6. *Une variété différentiable est un espace métrisable recouvert par des ouverts U_i munis d'homéomorphismes*

$$\phi_i : U_i \cong B_i \subset \mathbb{R}^n$$

où les B_i sont des boules de $\mathbb{R}^n$, tels que les homéomorphismes locaux

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1}$$

soient des difféomorphismes locaux de $\mathbb{R}^n$. (Plus précisément, ce sont des difféomorphismes de $\phi_j(U_i \cap U_j)$ sur $\phi_i(U_i \cap U_j)$, ces deux ensembles étant des ouverts de $\mathbb{R}^n$).

Une fonction f sur une variété X est dite différentiable si elle l'est dans des cartes locales, c'est-à-dire avec les notations précédentes : $f \circ \phi_i^{-1}$ est différentiable sur B_i.

Le fait qu'on considère des espaces métrisables X, c'est-à-dire pouvant être munis d'une distance d_X définissant la topologie, est destiné à écarter les espaces dits non séparés. En effet, on a la résultat suivant :

Lemme 1.1.7. *Soit X un espace métrisable. Alors pour deux points $x \neq y$ de X, il existe des ouverts U_x et U_y disjoints contenant respectivement x et y. De plus, pour tout point x de X, et tout ouvert $U \subset X$ contenant x, il existe un ouvert $V \subset U$ contenant x, tel que la clôture $\overline{V}$ de V dans X soit contenue dans U.*

Démonstration. Comme $x \neq y$, $d(x,y) = \epsilon > 0$. On prend pour U_x la boule $B_{x,\frac{\epsilon}{2}} = \{z \in X,\ d_X(x,z) < \frac{\epsilon}{2}\}$ et de même $U_y = B_{y,\frac{\epsilon}{2}}$. Clairement, $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Si $x \in U$, U contient une petite boule $B_{x,\eta}$, $\eta > 0$ suffisamment petit. On prend pour V la boule $B_{x,\frac{\eta}{2}} = \{z \in X,\ d_X(x,z) < \frac{\eta}{2}\}$. La clôture $\overline{V}$ de V dans X est alors contenue dans la boule fermée $\overline{B}_{x,\frac{\eta}{2}} = \{z \in X,\ d_X(x,z) \leq \frac{\eta}{2}\}$ qui est clairement contenue dans $B_{x,\eta}$, et donc dans U. ∎

1.1.2 Partition de l'unité, théorème de plongement

Proposition 1.1.8. *Soit X une variété et $x \in X$. Soit $U \subset X$ un ouvert de X contenant x. Alors il existe une fonction f différentiable sur X qui vaut 1 au voisinage de x et 0 en dehors de V, où $V \subset U$ est un ouvert tel que $\overline{V} \subset U$.*

Démonstration. On peut supposer que U est un ouvert où il existe des coordonnées locales rendant U difféomorphe à une boule ouverte B de $\mathbb{R}^n$ centrée en 0 (point correspondant à x). De plus, comme X est un espace métrisable, on sait d'après le lemme 1.1.7 que U contient la clôture $\overline{V}$ d'un ouvert V centré en x. Comme V contient une boule ouverte B' de $\mathbb{R}^n$ centrée en 0, on conclut que la clôture $\overline{B}'$ de B' dans X est contenue dans B. Sur la boule B on met une fonction de classe C^∞ qui vaut 1 au voisinage de 0 et 0 en dehors de B'. On étend cette fonction par 0 en dehors de U et la fonction ainsi obtenue est clairement continue (ce qui utilise la condition $\overline{B}' \subset B$) et différentiable, comme on le vérifie localement.

∎

Corollaire 1.1.9. *(Partition de l'unité) Soit X une variété différentiable compacte, et soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X. Il existe un nombre fini d'indices $i \in I$ et des fonctions différentiables f_i sur X, nulles en dehors d'ouverts V_i tels que $\overline{V}_i \subset U_i$, telles que $\sum_i f_i = 1$.*

Démonstration. Comme on a $X = \cup_i U_i$, pour tout $x \in X$, il existe i_x tel que $x \in U_{i_x}$. D'après la proposition précédente, il existe une fonction $f_{i_x,x}$ qui vaut 1 sur un voisinage V_x de x dans U_{i_x} et 0 en dehors de $\overline{W}_x \subset U_{i_x}$. Quitte à remplacer $f_{i_x,x}$ par $f^2_{i_x,x}$, on peut supposer que $f_{i_x,x} \geq 0$. Comme X est compacte et que la réunion des V_x est égale à X, X est une union finie $X = \cup_{j=1,\ldots,N} V_{x_j}$. Pour chaque $i \in I$ tel que l'ensemble $\{j \in \{1,\ldots,N\},\ i_{x_j} = i\}$ est non vide, posons $g_i = \sum_{i_{x_j}=i} f_{i_{x_j}}$. Il existe donc un ensemble fini J d'indices $i \in I$ concernés. En général, on sait que g_i est nulle en dehors de $\cup_{j,\, i_{x_j}=i} \overline{W}_{x_j} \subset U_i$, et par ailleurs, on a

$$g := \sum_{i\in J} g_i = \sum_j f_{i_{x_j}},$$

et c'est une fonction > 0 sur X, comme somme de fonctions ≥ 0, l'une au moins étant égale à 1. Posons enfin $f_i := \frac{g_i}{g}$ pour $i \in J$. Les f_i sont des fonctions différentiables satisfaisant la conclusion du corollaire.

∎

Théorème 1.1.10. *(Théorème de plongement) Soit X une variété différentiable compacte connexe de dimension n. Alors X est difféomorphe à une sous-variété de $\mathbb{R}^N$, pour N suffisamment grand.*

Démonstration. Pour tout $x \in X$, il existe un ouvert $U_x \subset X$ contenant x et des coordonnées locales $f_i : U \to \mathbb{R}$ telles que $(f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ soit un difféomorphisme de U sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Choisissons une fonction f différentiable sur X égale à 1 dans un voisinage W_x de x et égale à 0 sur $U \setminus V_x$, où $V_x \subset U$ est un ouvert contenant W_x et dont la clôture est contenue dans U. Les fonctions $ff_i : U \to \mathbb{R}$ s'étendent alors en des fonctions différentiables $F_{i,x}$ sur X, nulles en dehors de V_x et fournissant des coordonnées sur l'ouvert W_x. Comme X est compacte, et X est couvert par les ouverts W_x, il existe un nombre fini d'ouverts W_{x_i}, $i = 1, \ldots, M$, tels que $X = \cup_i W_{x_i}$. Considérons les Mn fonctions

$$F_{1,x_1}, \ldots, F_{n,x_1}, F_{1,x_2}, \ldots, F_{n,x_2}, \ldots, F_{1,x_M}, \ldots, F_{n,x_M} : X \to \mathbb{R}.$$

Ces fonctions fournissent une application différentiable

$$F = (F_{1,x_1}, \ldots, F_{n,x_M}) : X \to \mathbb{R}^{Mn}.$$

Cette application est localement un plongement puisque pour tout $x \in X$, appartenant à l'un des ouverts W_{x_i}, la composée $\pi_i \circ F : X \to \mathbb{R}^n$, où π_i est la projection de $\mathbb{R}^{Mn}$ sur $\mathbb{R}^n$ donnée par les coordonnées allant de $(i-1)n+1$ à in, est égale à $(F_{1,x_i}, \ldots, F_{n,x_i})$ sur W_{x_i}. Il en résulte que pour tout $x \in X$, l'ensemble

$$\{y \in X, y \neq x,\ F(y) = F(x)\}$$

est fini, de cardinal M_x. Notons $\{y_1, \ldots, y_{M_x}\}$ cet ensemble. Choisissons une fonction f_x qui vaut 1 au voisinage de y_i et 0 au voisinage de x. Soit $u \neq 0 \in \mathbb{R}^{Mn}$ et considérons l'application différentiable

$$F_x : X \to \mathbb{R}^{Mn} \times \mathbb{R}$$

définie par

$$F_x(y) = (F, f_x).$$

Cette application différentiable est encore un plongement, puisque composée avec la projection sur le premier facteur $\mathbb{R}^{Mn}$, elle donne F. Par ailleurs, l'ensemble $\{y \in X, y \neq x,\ F_x(y) = F_x(x)\}$ est vide, car lorsque $F(y) = F(x)$, y est l'un des y_i et donc $f_x(y) \neq f_x(x)$.

Il en résulte facilement qu'il existe un voisinage W'_x de x dans X tel que pour tout $z \in W'_x$, l'ensemble $\{y \in X, y \neq z,\ F_x(y) = F_x(z)\}$ est vide.

Faisons cette construction pour tout $x \in X$. Par compacité de X, il existe un nombre fini d'ouverts W'_{x_l}, $l = 1, \ldots, K$ couvrant X. L'application différentiable

$$G := (F, f_{x_1}, \ldots, f_{x_K}) : X \to \mathbb{R}^{Mn+K}$$

est alors un plongement.

∎

1.1.3 Variétés complexes

On rappelle qu'une fonction $\phi : U \to \mathbb{C}$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{C}^n$ est holomorphe si elle est localement analytique complexe, i.e. pour tout $z_0 \in U$ et tout z proche de $z_0 \in U$

$$\phi(z) = \phi(z_0) + \sum_{K=(k_i), k_i \geq 0, \sum_i k_i > 0} a_K (z - z_0)^K$$

la convergence étant absolue pour $|z - z_0| < r_0$.

Une définition équivalente consiste à demander que ϕ soit différentiable, de différentielle

$$d\phi_z : T_{\mathbb{C}^n, z} = \mathbb{C}^n \to T_{\mathbb{C}, \phi(z)} = \mathbb{C}$$

$\mathbb{C}$-linéaire en tout point $z \in U$. La première condition entraîne clairement la seconde. L'équivalence des deux définitions est obtenue à l'aide de formules intégrales satisfaites par les fonctions ϕ satisfaisant la seconde condition (généralisant la formule de Cauchy $f(z) = \frac{1}{2\iota\pi} \int_{|\zeta - z_0| = 1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$, $|z - z_0| < 1$ pour les fonctions holomorphes d'une variable z).

Une application $\Phi : U \to V$ entre deux ouverts de $\mathbb{C}^m$, $\mathbb{C}^n$ respectivement est dite holomorphe si les composantes Φ_i de Φ (dans les coordonnées sur V induites par le plongement $V \subset \mathbb{C}^n$) sont holomorphes. De façon équivalente, la différentielle

$$d\Phi_z : T_{U,z} = \mathbb{C}^m \to T_{V, \Phi(z)} = \mathbb{C}^n$$

est $\mathbb{C}$-linéaire en tout point $z \in U$.

Notons que si de plus $m = n$ et Φ est un difféomorphisme, le difféomorphisme inverse est aussi holomorphe, comme on le voit immédiatement d'après la seconde définition.

La notion de variété abstraite ne s'est pas avérée très utile dans le cadre différentiable, à cause du théorème 1.1.10 qui nous ramène au cas des sous-variétés. Dans le cas complexe au contraire, cette notion est très utile :

Définition 1.1.11. *Une variété complexe est un espace métrique X muni d'un recouvrement par des ouverts U pour chacun desquels on s'est donné un homéomorphisme*

$$\phi_U : U \cong V \subset \mathbb{C}^n$$

avec la condition que les homéomorphismes de changement de cartes

$$\phi_U \circ \phi_{U'}^{-1}$$

sont des difféomorphismes holomorphes là où ils sont définis, c'est-à-dire de $\phi_{U'}(U \cap U')$ dans $\phi_U(U \cap U')$.

Une fonction $f : X \to \mathbb{C}$ sur une variété complexe est dite holomorphe si pour toute carte $U \subset X$, $\phi_U : U \cong V \subset \mathbb{C}^n$, la fonction $f \circ \phi_U^{-1}$ est holomorphe sur V.

Les ouverts U et les homéomorphismes locaux $\phi_U : U \cong V \subset \mathbb{C}^n$ sont alors appelés des cartes holomorphes et les fonctions $z_{i,U} := x_i \circ \phi_U$ sont appelées des coordonnées holomorphes locales sur X. Notons que pour vérifier que f est holomorphe au voisinage d'un point $x \in X$, il suffit de le faire dans une carte holomorphe, du fait que les homéomorphismes de changement de cartes sont holomorphes et que la composition de deux applications holomorphes est holomorphe.

Théorème 1.1.12. *Sur une variété complexe compacte connexe, les fonctions holomorphes sont constantes. En particulier, une variété complexe compacte de dimension $n > 0$ ne peut pas être plongée holomorphiquement dans $\mathbb{C}^N$, quel que soit N.*

Démonstration. Ceci résulte en effet du principe du maximum. Soit f une fonction holomorphe sur X. Comme X est compacte, la fonction $|f|$ atteint son maximum en un point $x \in X$. Soit $\phi_U : U \cong V \subset \mathbb{C}^n$ une carte holomorphe centrée en x. La fonction $f \circ \phi_U^{-1}$ est par définition holomorphe sur V et la fonction $|f \circ \phi_U^{-1}|$ atteint son maximum en 0. Elle est donc constante dans un voisinage de $0 \in V$. On a donc montré que la fonction f est constante au voisinage de x. Par prolongement analytique et connexité de X, on conclut que f est constante. ∎

1.2 Fibrés vectoriels

1.2.1 Fibrés vectoriels : définition, opérations

Soit X une variété différentiable de classe C^k. On va définir les fibrés vectoriels (de classe C^k) sur X. Supposant que X est connexe, un tel fibré possède un rang r. L'espace total E du fibré est alors une variété différentiable de dimension $n+r$, $n = \dim X$. La structure de fibré est donnée par une application différentiable $\pi : E \to X$. La structure de fibré vectoriel est décrite localement par les conditions suivantes :

1. X admet un recouvrement par des ouverts U_i tels que $E_{U_i} := \pi^{-1}(U_i) \subset E$ est difféomorphe à $U_i \times \mathbb{R}^r$, le difféomorphisme $\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{R}^n$ satisfaisant $pr_1 \circ \phi_i = \pi$.
2. Au-dessus de l'intersection $U_i \cap U_j$, les difféomorphismes ϕ_i et ϕ_j satisfont la propriété suivante :
$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^r \cong (U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^r$$
est de la forme
$$(x, v) \mapsto (x, M_{ij}(x)v), \tag{1.2.4}$$
où M_{ij} est une matrice (r, r) dont les coefficients sont des fonctions de classe C^k de x.

Les difféomorphismes ϕ_i sont appelés des trivialisations locales de E sur U_i. Les matrices M_{ij} sont appelées des matrices de transition.

Notons que le groupe $\mathbb{R}^*$ agit différentiablement sur E, l'action se faisant au-dessus de la base, ou encore commutant avec π : Si $\lambda \in \mathbb{R}^*$, la multiplication μ_λ agissant sur E est donnée dans les trivialisations locales comme la multiplication par λ agissant sur $\mathbb{R}^n$ (donc sur $U \times \mathbb{R}^n$, l'action sur U étant triviale). Le fait que les actions ainsi définies localement se recollent résulte immédiatement de (1.2.4), puisque les applications de changements de trivialisations étant linéaires le long des fibres, elles commutent avec la multiplication par λ.

Définition 1.2.1. *Une section (de classe C^k) d'un fibré vectoriel E sur X (de classe C^k) est une application différentiable (de classe C^k) $\sigma : X \to E$ telle que $\pi \circ \sigma = \pi$.*

Dans une trivialisation locale $\phi_U : E_U \cong U \times \mathbb{R}^r$ de E au-dessus de U, une telle section σ est donc donnée par une application différentiable f_U de U dans $\mathbb{R}^r$, telle que $\phi_U \circ \sigma_{|U}(x) = (x, f_U(x))$. Étant donné un système de trivialisations $\phi_i : E_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{R}^r$, et une section σ de E, les applications $f_i : U_i \to \mathbb{R}^r$ ainsi définies satisfont la "condition de recollement" suivante :

$$f_i = M_{ij} f_j \text{ sur } U_i \cap U_j, \tag{1.2.5}$$

où M_{ij} est la matrice de transition permettant de passer de de la trivialisation ϕ_j à la trivialisation ϕ_i. En effet, on a

$$(x, f_i(x)) = \phi_i \circ \sigma = \phi_{ij} \circ \phi_j \circ \sigma$$

sur $U_i \cap U_j$, d'où $f_i(x) = M_{ij}(x) f_j(x)$ puisque

$$\phi_{ij}(x, v) = (x, M_{ij}(x)(v)),\ \phi_i \circ \sigma(x) = (x, f_i(x)),\ \phi_j \circ \sigma(x) = (x, f_j(x)).$$

Inversement, si on se donne des $f_i : U_i \to \mathbb{R}^r$ de classe C^k satisfaisant (1.2.5), les sections $\sigma_i(x) = \phi_i^{-1}(x, f_i(x))$ sur U_i se recollent sur les intersections $U_i \cap U_j$ et donnent une section globale σ de E sur X. On note $\Gamma(X, E)$ l'ensemble des sections de E (la classe étant spécifiée). Un fibré vectoriel E possède toujours la section 0, qui dans les trivialisations locales est donnée par $x \mapsto (x, 0) \in U \times \mathbb{R}^r$. Le théorème suivant montre qu'un fibré vectoriel réel possède toujours beaucoup de sections.

Théorème 1.2.2. *Soit $E \to X$ un fibré vectoriel, et soit $\sigma : U \to E$ une section de E sur un ouvert U de X. Alors pour tout $x \in U$, il existe un voisinage $V \subset U$ de x dans U, et une section $\tilde{\sigma}$ de E sur X, telle que*

$$\tilde{\sigma}_{|V} = \sigma_{|V}.$$

Démonstration. D'après le lemme 1.1.7, il existe un voisinage W de x tel que $\overline{W} \subset U$ et une fonction différentiable $f : X \to \mathbb{R}$ telle que $f = 1$ dans un voisinage $V \subset W$ de x et $f = 0$ dans $U \setminus W$. Pour toute section σ de E sur U, la section $f\sigma : z \mapsto f(z)\sigma(z)$ est une section différentiable de E sur U qui s'annule dans $U \setminus W$ et qui vaut σ sur V. Cette section s'étend clairement en une section $\tilde{\sigma}$ de E sur X : on pose $\tilde{\sigma}(z) = 0$ en dehors de U. On vérifie la continuité et la différentiabilité comme dans le lemme 1.1.7. ∎

Le corollaire suivant utilise la notion d'évaluation d'une section en un point $x \in X$. Si $\sigma : X \to E$ est une section, et $x \in X$, $\sigma(x) \in \pi^{-1}(x) =: E_x$. L'application $\sigma \mapsto \sigma(x) \in E_x$ est appelée l'application d'évaluation. Notons que la fibre E_x est isomorphe (non canoniquement) à $\mathbb{R}^r$. L'ensemble des sections de E a naturellement une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel, la somme des sections σ et σ' étant définie dans les trivialisations locales comme ci-dessus par

$$\phi_U \circ \sigma_{|U}(x) = (x, f_U(x)),\ \phi_U \circ \sigma'_{|U}(x) = (x, f'_U(x)),$$

$$\phi_U \circ (\sigma + \sigma')_{|U}(x) = (x, f_U(x) + f'_U(x)).$$

Le produit par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est donné par $\lambda\sigma = \mu_\lambda \circ \sigma : X \to E$. L'application d'évaluation $ev_x : \Gamma(X, E) \to E_x$ est clairement un morphisme de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.

Corollaire 1.2.3. *L'application d'évaluation $ev_x : \Gamma(X, E) \to E_x$ est surjective. (On dit aussi que les sections globales de E engendrent E au point x.)*

Démonstration. En effet, prenons une base $\tau_1, \dots, \tau_r$ de E_x. Il est clair que dans une trivialisation locale $E_U \cong U \times \mathbb{R}^r$ de E dans un voisinage U de x, il existe des sections $\tau_{i,U}$ de E sur U telles que $\tau_{i,U}(x) = \tau_i$. Pour chaque i il existe un voisinage V_i de x dans U tel que la section $\tau_{i,U}$ restreinte à V_i s'étende en une section σ_i de E sur X. Les sections σ_i satisfont alors $ev_x(\sigma_i) = \tau_i$. ■

Dans le cas compact, on a le résultat suivant :

Corollaire 1.2.4. *Si de plus X est compacte, il existe un nombre fini de sections $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ telle que notant $F \subset \Gamma(X, E)$ le $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\Gamma(X, E)$ engendré par les σ_i, l'application d'évaluation $ev_x : F \to E_x$ soit surjective en tout point $x \in X$.*

Démonstration. Pour tout $x \in X$, on sait qu'il existe des sections $\sigma_1, \dots \sigma_r$ de E telles que $ev_x(\sigma_i)$ engendrent E_x. Il existe alors un voisinage $V_x \subset X$ de x dans X tel que pour tout $x' \in V_x$, les $ev_{x'}(\sigma_i)$ engendrent $E_{x'}$. Ceci résulte du théorème 1.2.2 mais peut se voir aussi directement de la façon suivante : Dans une trivialisation locale de E sur un voisinage U de x dans X, les sections σ_i sont données par r applications différentiables $f_1, \dots, f_r : U \to \mathbb{R}^r$. On sait que les éléments $f_1(x), \dots, f_r(x)$ sont indépendants au point x, ce qui s'écrit comme la non-annulation au point x du déterminant de la matrice des vecteurs $f_1(x), \dots, f_r(x)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^r$. Ce déterminant étant une fonction différentiable et donc continue de x, il ne s'annule pas dans un voisinage V_x de x ce qui en retour entraîne que les sections σ_i engendrent $E_{x'}$ pour x' dans V_x.

Les ouverts V_x recouvrent X qui est compact. Un nombre fini de tels ouverts recouvrent X. Pour chaque tel ouvert, on dispose d'un nombre fini de sections de E sur X, et engendrant E sur cet ouvert. Ceci nous fournit un nombre fini de sections de E engendrant E en tout point.

■

Sommes directes

Soient E et E' deux fibrés vectoriels sur X, de rangs respectifs r et r'.

Définition 1.2.5. *La somme directe $E \oplus E'$ est le fibré vectoriel sur X obtenu de la façon suivante : Prenons un recouvrement ouvert de X par des U_i sur lesquels E et E' sont trivialisés : $\phi_i : E_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{R}^r$, $\phi_i' : E'_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{R}^{r'}$. On pose alors*

$$(E \oplus E')_{|U_i} \cong U_i \times (\mathbb{R}^r \oplus \mathbb{R}^{r'}),$$

les matrices de transition pour $E \oplus E'$ étant les matrices par blocs

$$\begin{pmatrix} M_{ij} & 0 \\ 0 & M'_{ij}, \end{pmatrix}$$

où les M_{ij}, resp. M'_{ij}, sont les matrices de transition pour E, resp. E'.

Remarque 1.2.6. L'opération décrite ci-dessus est un cas particulier de produit fibré : si $f : X \to B$, $g : Y \to B$ sont deux espaces topologiques au-dessus de B, le produit fibré $X \times_B Y$ est défini comme l'image inverse de la diagonale de B dans le produit $X \times Y$:

$$X \times_B Y := \{(x, y) \in X \times Y,\, f(x) = g(y)\}.$$

1.2.2 Dual, produit tensoriel, Hom

Voir TD.

Noyaux, Quotients

Soient $E \xrightarrow{\pi} X$, $E' \xrightarrow{\pi'} X$ deux fibrés vectoriels sur X.

Définition 1.2.7. *Un morphisme $f : E \to E'$ est une application différentiable $f : E \to E'$ au-dessus de X, c'est-à-dire telle que $\pi' \circ f = \pi$, et donnée dans des trivialisations locales $\phi_U : E_U \cong U \times \mathbb{R}^r$, $\phi_U' : E'_U \cong U \times \mathbb{R}^{r'}$ par une matrice de taille (r, r') à coefficients différentiables :*

$$\phi_U' \circ f \circ \phi_U^{-1}(x, v) = (x, M(x)v) \in U \times \mathbb{R}^{r'},\ \forall (x, v) \in U \times \mathbb{R}^r. \tag{1.2.6}$$

Notons qu'il suffit de vérifier (1.2.6) pour un choix de trivialisations pour E et E' au voisinage de chaque point. En effet, en appliquant les formules (1.2.4) pour les changements de trivialisation, on obtient alors une formule analogue à (1.2.6) pour toute autre trivialisation.

Un tel f induit en chaque point un morphisme $f_x : E_x \to E'_x$ de $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, donné dans des trivialisations comme ci-dessus par la matrice $M(x)$. On dit que f est surjectif en tout point si f_x est surjectif pour tout $x \in X$. On dit que f est injectif en tout point si f_x est injectif pour tout $x \in X$.

Définition 1.2.8. *Soit $E \to X$ un fibré vectoriel de rang r. Un sous-fibré vectoriel $E' \subset E$ de rang $r' \leq r$ est une sous-variété $E' \subset E$ telle que pour un choix adéquat de trivialisations locales*

$$\phi_U : E_U \cong U \times \mathbb{R}^r$$

de E, on ait $E'_U := E' \cap E_U = U \times \mathbb{R}^{r'}$, où $\mathbb{R}^{r'} \subset \mathbb{R}^r$ est engendré par les r' premiers vecteurs de la base canonique.

Proposition 1.2.9. *Soit $f : E \to E'$ un morphisme de fibrés vectoriels de rangs respectifs r et r' qui est surjectif en tout point. Alors $f^{-1}(0_{E'}) \subset E$ est un sous-fibré vectoriel de E de rang $r - r'$. On note ce fibré* $\operatorname{Ker} f$.

Démonstration. On sait qu'en tout point $x \in X$, l'application $f_x : E_x \to E'_x$ est surjective. Dans des trivialisations locales

$$\phi_U : E_U \cong U \times \mathbb{R}^r,\ \phi'_U : E'_U \cong U \times \mathbb{R}^{r'},$$

le morphisme f est donné par une matrice M de taille (r, r') dont les coefficients sont des fonctions différentiables de x et telle que $M(x) : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^{r'}$ est surjective pour tout $x \in U$. Soit $x \in U$. Quitte à changer l'ordre des vecteurs de base de $\mathbb{R}^r$, on peut supposer que les vecteurs $M(x)e_1, \ldots, M(x)e_{r'}$ forment une base de $\mathbb{R}^{r'}$. Notons $p_{r'+1,r} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^{r-r'}$ le projecteur sur l'espace vectoriel engendré par $e_{r'+1}, \ldots, e_r$. Considérons le morphisme de fibrés vectoriels de rang r sur U :

$$g : E_U \to E'_U \oplus \mathbb{R}^{r-r'},$$
$$g(e) = (f(e), p_{r'+1,r}(pr_2(\phi_U(e))))$$

ou encore, en utilisant les trivialisations ϕ_U et ϕ'_U :

$$g(x, v) = (x, M(x)v, p_{r'+1,r}(v)).$$

Ce morphisme est un isomorphisme au point x, donc dans un voisinage $U' \subset U$ de x (son inverse est obtenu en inversant la matrice de $v \mapsto (M(x)v, p_{r'+1,r}(v))$ et est donc différentiable de la même classe). Combinant ceci avec la trivialisation choisie de E' sur U', on obtient une nouvelle trivialisation $\phi''_{U'}$ de $E_{U'}$, qui est telle que le morphisme f s'écrit dans les trivialisations $\phi''_{U'}$ et $\phi'_{U'}$ comme le projecteur $p_{1,r'} : \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^{r'}$ sur les r' premiers facteurs. Il résulte alors de la définition que $f^{-1}(0)$ est un sous-fibré de E.

■

On peut définir de façon similaire le quotient d'un morphisme de fibrés vectoriels $f : E' \to E$ injectif en tout point. C'est un fibré noté E/E' de rang $r - r'$, tel qu'il existe un morphisme surjectif en tout point

$$g : E \to E/E'$$

de noyau égal au sous-fibré $f(E') \subset E$. On peut aussi voir E/E' comme le dual du noyau de la transposée $f^* : E^* \to (E')^*$.

1.2.3 Métriques et structures complexes

Définition 1.2.10. *Une métrique sur un fibré vectoriel $E \to X$ réel de rang r est la donnée pour tout $x \in X$ et $e, e' \in E_x$ d'un nombre réel $g_x(e,e')$, avec $g_x(e,e) > 0$ pour $e \neq 0$ in E_x, et donnée dans des trivialisations locales $\phi_U : E_U \cong U \times \mathbb{R}^r$ par une matrice symétrique M (nécessairement définie positive en tout point) dont les coefficients sont des fonctions différentiables de $x \in U$:*

$$g_x(e,e') = {}^t v M_x v',\ \phi_U(e) = (x,v),\ \phi_U(e') = (x,v').$$

Théorème 1.2.11. *Supposons que X est compacte (bien que ce ne soit pas strictement nécessaire). Alors tout fibré vectoriel réel sur X admet une métrique.*

Démonstration. Pour tout ouvert U où E est trivialisé, i.e. $E \cong U \times \mathbb{R}^r$, il existe une métrique g_U sur E_U (la métrique constante de $\mathbb{R}^r$). Prenons un recouvrement de X par des ouverts U_i et une partition de l'unité donnée par des fonctions $f_i \geq 0$ nulles en dehors de U_i, et telles que $\sum_i f_i = 1$. Posons pour $x \in X$, $u, v \in E_x$,

$$g_x(u,v) = \sum_i f_i(x) g_{i,x}(u,v), \tag{1.2.7}$$

où $f_i(x)g_{i,x}(u,v) := 0$ si $x \notin U_i$. Pour x fixé, $g_x(u,v)$ est une somme de formes bilinéaires symétriques semipositives sur E_x, dont l'une au moins est > 0 (puisque l'un des $f_i(x)$ est non nul et que la forme $g_{i,x}$ est définie positive sur U_i). Donc $(u,v) \mapsto g_x(u,v)$ est définie positive en tout point. La différentiabilité de la matrice de g dans une trivialisation est claire d'après la formule (1.2.7) puisque chaque terme est une forme bilinéaire dont la matrice est à coefficients différentiables.

■

Corollaire 1.2.12. *Soit E un fibré vectoriel réel sur X et soit $E' \subset E$ un sous-fibré vectoriel. Alors il existe un sous-fibré vectoriel $E'' \subset E$ tel que $E \cong E' \oplus E''$.*

Démonstration. On met une métrique g sur E et prend pour E'' l'orthogonal de E' relativement à g, ou encore le noyau de l'application $E \to E'^*$ composée de $g : E \to E^*$ et de l'application de restriction $E^* \to E'^*$. On vérifie localement que $E \cong E' \oplus E''$. ■

Fibrés vectoriels complexes

Soit E un fibré vectoriel réel de rang pair $r = 2s$ sur une variété différentiable X. On dit que E est muni d'une structure complexe si on dispose d'un système de trivialisations

$$\phi_i : E_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{R}^{2s} \cong U_i \times \mathbb{C}^s,$$

tel que les applications de transition

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^s \cong (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^s$$

soient de la forme

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1}(x, v) = (x, M_{ij}(x)v)$$

pour des matrices M_{ij} d'applications $\mathbb{C}$-linéaires de $\mathbb{C}^s$ dans $\mathbb{C}^s$, dont les coefficients sont des fonctions différentiables de $U_i \cap U_j$ dans $\mathbb{C}$.

Lemme 1.2.13. *La donnée d'une structure complexe sur E est équivalente à la donnée d'un endomorphisme I de E satisfaisant $I^2 = -Id_E$.*

Démonstration. Si on a une structure complexe sur E, on définit l'endomorphisme I comme étant la multiplication par i agissant sur $\mathbb{C}^s$ dans les trivialisations ci-dessus. Dans l'autre direction, étant donné I, on considère le fibré vectoriel $E \otimes \mathbb{C}$ sur lequel I agit (on note $I_{\mathbb{C}}$ l'extension de I à $E \otimes \mathbb{C}$). Ce fibré est clairement un fibré vectoriel complexe, qui est la somme directe de deux sous-fibrés $E' := \operatorname{Ker} I_{\mathbb{C}} - iId$ et $E'' := \operatorname{Ker} I_{\mathbb{C}} + iId$. Le fibré E' est un fibré vectoriel complexe et est isomorphe à E comme fibré vectoriel réel. Comme $I_{\mathbb{C}}$ agit par i sur E', il est clair que ces deux constructions sont inverses l'une de l'autre. ■

1.2.4 Fibrés vectoriels holomorphes

Soit X une variété complexe. On a vu la notion de fonction holomorphe sur X : ce sont les fonctions qui sont holomorphes dans des cartes holomorphes.

Définition 1.2.14. *Un fibré vectoriel holomorphe E sur X (de rang r) est un fibré vectoriel complexe de rang r muni d'un système de trivialisations, dites holomorphes,*

$$\phi_i : E_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{C}^r$$

tel que les matrices de transition M_{ij}, définies sur $U_i \cap U_j$ par

$$\phi_i \circ \phi_j^{-1}(x, v) = (x, M_{ij}(x)v),\ v \in \mathbb{C}^r$$

sont à coefficients holomorphes en x.

Une section holomorphe σ d'un fibré holomorphe est une section qui est donnée dans des trivialisations holomorphes locales de E comme ci-dessus par

$$\phi_i \circ \sigma(x) = (x, f_i(x))$$

où $f_i : U \to \mathbb{C}^r$ est holomorphe. Cette condition ne dépend pas de la trivialisation holomorphe choisie, car si M est une matrice de fonctions holomorphes et $f : U \to \mathbb{C}^r$ est holomorphe, alors $Mf : U \to \mathbb{C}^r$ est aussi holomorphe. Or pour une autre trivialisation holomorphe ϕ_j de E sur $U_j \ni x$, on a sur $U_i \cap U_j$:

$$f_j(x) = M_{ji}(x) f_i(x).$$

Contrairement au cas différentiable, où un fibré vectoriel admet toujours beaucoup de sections (cf. Théorème 1.2.2), les fibrés vectoriels holomorphes peuvent n'avoir aucune section holomorphe non nulle. Voici un exemple : Prenons la “droite projective” $\mathbb{CP}^1$. C'est la sphère $\mathbb{S}^2$ que l'on voit comme la réunion de deux copies de $\mathbb{C}$ (l'une, notée $\mathbb{C}_N$, paramétrant $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, où N est le “pôle Nord”, l'autre notée $\mathbb{C}_S$, paramétrant $\mathbb{S}^2 \setminus \{S\}$, où S est le “pôle Sud”), chacune étant munie de sa coordonnée z_N centrée en N, resp. z_S centrée en S, recollées par le changement de variables

$$z_S = \frac{1}{z_N}$$

sur $\mathbb{C}_N \cap \mathbb{C}_S$ qui est une copie de $\mathbb{C}^*$ dans chacun des ouverts $\mathbb{C}_N$ et $\mathbb{C}_S$. Considérons maintenant le fibré vectoriel holomorphe E de rang 1 qui est trivial sur $\mathbb{C}_N$ et sur $\mathbb{C}_S$ et dont la matrice de transition M_{SN} est donnée par la fonction $\frac{1}{z_S}$ sur $\mathbb{C}_N \cap \mathbb{C}_S \cong \mathbb{C}^*$.

Une section holomorphe de E est donnée par une fonction holomorphe ϕ_N sur $\mathbb{C}_N$ et une fonction holomorphe ϕ_S sur $\mathbb{C}_S$, satisfaisant

$$\phi_S = \frac{\phi_N}{z_S} \tag{1.2.8}$$

sur l'intersection. Comme ϕ_S est holomorphe sur $\mathbb{C}_S$, la formule (1.2.8), vue sous la forme

$$\phi_N = z_S \phi_S$$

montre que la fonction ϕ_N s'étend holomorphiquement sur $\mathbb{CP}^1$ au point S, la fonction étendue s'annulant au point S. D'après le théorème 1.1.12, cette fonction holomorphe sur $\mathbb{CP}^1$ est constante, et comme elle est nulle en S, elle est identiquement nulle. Le fibré ainsi construit est le fibré de Hopf sur $\mathbb{CP}^1$.

Cet exemple nous montre aussi qu'un fibré vectoriel complexe peut avoir plusieurs (et même une infinité continue de) structures holomorphes. En effet, notons $\mathcal{H}$ le fibré holomorphe de rang 1 construit ci-dessus, et $\mathcal{H}^*$ son dual, qui est le fibré holomorphe dont les matrices de transition sont les inverses des transposées des matrices de transition de $\mathcal{H}$, soit dans le cas présent la fonction inversible z_S sur $\mathbb{C}_N \cap \mathbb{C}_S \cong \mathbb{C}^*$.

Notons H et H^* les fibrés vectoriels complexes différentiables sous-jacents à $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}^*$ respectivement. Cette notion est très importante ; elle signifie que l'on considère le même fibré avec les mêmes trivialisations et les mêmes matrices de transition, mais qu'on considère ces matrices comme des matrices à coefficients des fonctions différentiables, oubliant leur caractère holomorphe. On a le résultat suivant :

Lemme 1.2.15. *Le fibré holomorphe $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^*$ n'est pas isomorphe comme fibré vectoriel holomorphe au fibré holomorphe trivial $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}^2$, tandis que le fibré vectoriel différentiable sous-jacent $H \oplus H^*$ est différentiablement isomorphe au fibré vectoriel trivial.*

Démonstration. On a vu que toute section holomorphe de $\mathcal{H}$ est nulle. Donc $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^*$ n'est pas engendré en tout point par ses sections holomorphes, ce qui montre que $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^*$ n'est pas isomorphe au fibré holomorphe trivial. Pour montrer que $H \oplus H^*$ est différentiablement isomorphe au fibré vectoriel trivial, on montre d'abord qu'une section différentiable suffisamment générique de $H \oplus H^*$ n'a pas de 0 et fournit donc une inclusion du fibré constant $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{C}$ dans $H \oplus H^*$, injective en tout point. Mettant une métrique hermitienne sur $H \oplus H^*$, on en conclut que $H \oplus H^*$ est une somme directe $T \oplus T^\perp$, où T et $T^\perp$ sont deux sous-fibrés complexes de rang 1, avec T trivial. On montre finalement que $T^\perp$ est trivial par des arguments topologiques qu'on verra plus tard.

■

1.3 Exemples

1.3.1 Sphères et tores

La sphère $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ est définie par l'équation $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$. Notons que la sphère $\mathbb{S}^n$ est l'union de ses deux hémisphères

$$\mathbb{S}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}), \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1,\, x_{n+1} \geq 0\},$$

$$\mathbb{S}^n_- = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}), \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1,\, x_{n+1} \leq 0\},$$

l'intersection $\mathbb{S}^n_+ \cap \mathbb{S}^n_-$ étant la sphère $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{S}^n$ définie par $x_{n+1} = 0$. Les hémisphères $\mathbb{S}^n_+$ et $\mathbb{S}^n_-$ sont difféomorphes comme variétés à bord au disque $\mathbb{D}_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_i x_i^2 \leq 1$.

Ceci suggère plus généralement le procédé de construction suivant, pour des variétés de dimension n : Partant de deux variétés à bords X et Y de dimension n, on suppose qu'une composante connexe M du bord de X est difféomorphe à une composante connexe N du bord de Y. On construit alors la variété Z obtenue en recollant X et Y le long M et N, de la façon suivante : Un voisinage de M dans X est difféomorphe comme variété à bords à $]-1,0] \times M$ et un voisinage de N dans Y est difféomorphe à $[0,1[\times N$. Identifiant M à N via le difféomorphisme donné $M \cong N$, la variété $X \cup_{M=N} Y$ contient X, Y et $]-1,1[\times M$, avec $]-1,1[\times M \cap X =]-1,0] \times M \subset X$, $]-1,1[\times M \cap Y = [0,1[\times N \subset Y$.

Partons en particulier de deux variétés X et Y (sans bord) de dimension n, et choisissons $x \in X$, $y \in Y$. Soit B^n_x une boule ouverte de X centrée en x, et B^n_y une boule ouverte de Y centrée en y. Soit $X_0 = X \setminus B^n_x$ et $Y_0 := Y \setminus B^n_y$. Chacune de ces variétés a un bord difféomorphe à S^{n-1}. La variété obtenue en recollant X_0 et Y_0 grâce au difféomorphisme $\partial X_0 \cong \partial Y_0$ est appelée la *somme connexe* de X et Y.

Ce procédé permet de construire toutes les surfaces de Riemann compactes en partant de $\mathbb{S}^2$ et du tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Les tores $\mathbb{T}^n$ peuvent être définis en tant que variétés différentiables comme les produits $(\mathbb{S}^1)^n$. Il est cependant beaucoup plus intéressant de les considérer comme des *variétés quotients*. Soit X un espace topologique et Γ un groupe discret agissant sur X. Cela signifie qu'on a un morphisme de groupes $\Gamma \to \operatorname{Aut} X$, où $\operatorname{Aut} X$ est l'ensemble des homéomorphismes de X dans lui-même.

On demande que l'action de Γ soit sans point fixe, c'est-à-dire que pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq 1_\Gamma$, l'ensemble $\{x \in X, \gamma(x) = x\}$ soit vide. On demande par ailleurs que tout point de X ait un système de voisinages compacts (c'est le cas des variétés) et que l'action soit proprement discontinue, c'est-à-dire que pour tout compact $K \subset X$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma, \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$ soit fini. L'espace quotient X/Γ est défini ensemblistement comme l'ensemble des orbites $\Gamma x \subset X$. Notons qu'on a $\Gamma x = \Gamma x'$ si et seulement si $x' \in \Gamma x$. On a une application ensembliste évidente (dite application quotient)

$$q : X \to X/\Gamma$$

qui à X associe son orbite Γx. Cette application a pour fibre $q^{-1}(q(x))$ l'orbite Γx.

La topologie de X/Γ est la suivante : Un ensemble $U \subset X/\Gamma$ est ouvert si et seulement si $q^{-1}(U)$ est ouvert. Du fait que Γ agit de façon proprement discontinue et sans points fixes, pour tout $x \in X$, il existe un ouvert $U \subset X$ contenant x (et contenu dans un voisinage compact de x) ayant la propriété que $\gamma U \cap U \neq \emptyset$ si et seulement si $\gamma = 1_\Gamma$. L'application q restreinte à U est alors un homéomorphisme sur son image.

Si X est une variété différentiable (resp. holomorphe) et que Γ agit par transformations différentiables (resp. holomorphes), le quotient X/Γ admet une structure de variété différentiable, resp. holomorphe. On utilise pour cela les ouverts $U \subset X$ comme ci-dessus, homéomorphes à leurs images $q(U) \subset X/\Gamma$. Si U est muni de coordonnées différentiables (resp. holomorphes), on utilise ces coordonnées comme coordonnées locales sur l'ouvert $q(U) \subset X/\Gamma$. Les applications de changements de cartes pour le quotient X/Γ sont obtenues en observant que si U, V sont comme ci-dessus, $q(U) \cap q(V)$ est égal à l'union disjointe pour $\gamma \in \Gamma$ de $q(U \cap \gamma V)$ (cette union est en fait finie si U est relativement compact). Les applications de changement de carte dans chaque composante connexe $q(U \cap \gamma V)$ sont celles dont on dispose sur $U \cap \gamma V$.

L'exemple le plus simple d'espace quotient est donné par $X = \mathbb{R}$ et $\Gamma = \mathbb{Z}$ agissant par translation sur $\mathbb{R}$. Par l'application

$$x \mapsto \exp 2\iota\pi x,$$

le quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est difféomorphe au cercle $\mathbb{S}^1$ des nombres complexes de module 1.

Plus généralement, soit $\Gamma = \mathbb{Z}^n \subset V = \mathbb{R}^n$. Alors le quotient V/Γ est difféomorphe à $(\mathbb{S}^1)^n$. Ici on a pris pour Γ le réseau standard de $\mathbb{R}^n$. Si on prend pour $\Gamma \subset V$ n'importe quel sous-groupe additif agissant par translations, la condition que Γ agisse de façon proprement discontinue est équivalente au fait que Γ soit discret, et la condition que le quotient soit compact équivaut au fait que Γ contienne une base de $\mathbb{R}^n$. On dit que Γ est un réseau cocompact de $\mathbb{R}^n$.

Dans cette dernière situation, supposons que n est pair, $n = 2m$, et posons $V = \mathbb{C}^m$. On a sur V une carte globale qui fournit des coordonnées holomorphes en tout point. Si $\Gamma \subset V$ est un réseau cocompact, le quotient V/Γ admet les cartes induites par le choix d'ouverts $U \subset V$ tels que $U \cap \gamma + U = \emptyset$ pour $\gamma \neq 0$. Les changements de cartes permettant de passer des U-coordonnées aux V-coordonnées sur $q(U) \cap q(V)$ sont donnés par les difféomorphismes

$$U \cap (\gamma + V) \subset \gamma + V \cong V.$$

Comme le groupe Γ agit par translations qui sont des difféomorphismes holomorphes de $\mathbb{C}^m$, les changements de cartes sont holomorphes et on a donc une structure complexe sur V/Γ. Cette construction donne des exemples importants de variétés complexes compactes.

1.3.2 Grassmanniennes et fibrés tautologiques

Soient r, n deux entiers avec $r \leq n$. On définit la grassmannienne $G_{\mathbb{R}}(r, n)$, resp. $G_{\mathbb{C}}(r, n)$, comme l'ensemble des sous-espaces vectoriels réels de rang r de $\mathbb{R}^n$ (resp. l'ensemble des sous-espaces vectoriels complexes de rang r de $\mathbb{C}^n$).

La topologie de $G_{\mathbb{R}}(r, n)$ est la topologie quotient, si on voit $G_{\mathbb{R}}(r, n)$ comme le quotient de $Gl_n(\mathbb{R})$ (l'ensemble des matrices (n, n) inversibles à coefficients dans $\mathbb{R}$), par le sous-groupe $Gl_{n,r}(\mathbb{R})$ des matrices triangulaires supérieures par blocs, dont les coefficients α_{ij} pour $i > r$ et $j \leq r$ sont nuls. Cette identification ensembliste est obtenue en observant que pour tout sous espace vectoriel de rang r de $\mathbb{R}^n$, il existe une matrice inversible M de taille (n, n) dont les r premiers vecteurs colonnes forment une base de V. De plus, si M' est une autre matrice satisfaisant cette propriété, alors $M'M^{-1} \in Gl_{n,r}(\mathbb{R})$.

La structure de variété différentiable de $G_{\mathbb{R}}(r, n)$ est obtenue de la façon suivante : Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel de rang r, et notons $[V]$ le point de $G_{\mathbb{R}}(r, n)$ correspondant. Choisissons un sous-espace vectoriel $K \subset V$ de rang $n - r$ de $\mathbb{R}^n$ supplémentaire de V, c'est-à-dire

$$V \oplus K \cong \mathbb{R}^n. \tag{1.3.9}$$

Soit $U_K \subset G_{\mathbb{R}}(r, n)$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels $V' \subset \mathbb{R}^n$ de rang r satisfaisant la condition $V' \cap K = \{0\}$. On vérifie que U_K est ouvert dans $G(r, n)$. D'autre part, un point $[V']$ de U correspond à un sous-espace V' de $\mathbb{R}^n$ qui est isomorphe à V par la première projection $pr_V : \mathbb{R}^n \to V$ donnée par la décomposition (1.3.9). On peut donc voir V' comme le graphe de l'application linéaire $pr_K \circ pr_{V|V'}^{-1} : V \to K$, où pr_K est la seconde projection $\mathbb{R}^n \to K$ donnée par la décomposition (1.3.9). On a donc trouvé une bijection $U_K \cong \mathrm{Hom}\,(V, K)$ dont on vérifie qu'elle est un homéomorphisme. Les résultats suivants sont laissés en exercice :

Lemme 1.3.1. *Les fonctions de transition sont différentiables.*

Ce lemme fournit une structure de variété différentiable sur $G_{\mathbb{R}}(r,n)$.

Passant au cas complexe, la même construction donne des cartes pour $G_{\mathbb{C}}(r,n)$ au voisinage de $[V] \in G_{\mathbb{C}}(r,n)$, de la forme $U_K \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,K)$, où K est un sous-espace vectoriel complexe de $\mathbb{C}^n$ supplémentaire de V.

L'espace $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,K)$ étant un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, ces cartes fournissent des coordonnées complexes locales. La structure de variété complexe de $G_{\mathbb{C}}(r,n)$ résulte du lemme suivant laissé en exercice :

Lemme 1.3.2. *Les fonctions de transition pour les cartes ci-dessus sont holomorphes.*

Fibré tautologique

Les grassmanniennes $G(r,n)$ possèdent un fibré tautologique de rang r qui, dans le cas de la grassmannienne complexe $G_{\mathbb{C}}(r,n)$ est un fibré vectoriel holomorphe.

Ce fibré est défini de la façon suivante : comme précédemment, pour chaque sous-espace vectoriel $V \subset \mathbb{R}^n$, on note $[V]$ le point correspondant de $G_{\mathbb{R}}(r,n)$. On pose

$$E_{r,n} = \{(v,[V]) \in \mathbb{R}^n \times G_{\mathbb{R}}(r,n),\ v \in V\}. \tag{1.3.10}$$

On vérifie aisément que $E_{r,n}$ est une sous-variété différentiable de $\mathbb{R}^n \times G_{\mathbb{R}}(r,n)$. Montrons que c'est un fibré vectoriel : Dans les cartes $U_K \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,K)$ au voisinage de $[V] \in G_{\mathbb{R}}(r,n)$, on a un isomorphisme naturel entre E_{r,n,U_K} et $U_K \times V$ obtenu en rappelant que $\mathbb{R}^n \cong V \oplus K$: On pose

$$\phi_{K,V} : U_K \times V \cong E_{r,n,U_K},$$
$$\phi_{K,V}(f,v) = (f, v + f(v)).$$

On vérifie que les matrices de transition sont à coefficients différentiables. Dans le cas de $G_{\mathbb{C}}(r,n)$, ces matrices sont à coefficients holomorphes (voir TD).

Tirés en arrière et propriété universelle des grassmanniennes

Les grassmanniennes ont une propriété universelle : ce sont des espaces classifiants pour les fibrés de rang r engendrés par leurs sections. Introduisons tout d'abord la notion de "pull-back" ("tiré en arrière" en français) d'un fibré vectoriel : Soit $\phi : Y \to X$ une application différentiable entre variétés différentiables. Soit E un fibré vectoriel réel sur X. Le pull-back ϕ^*E de E sur Y est le fibré vectoriel sur Y défini de la façon suivante : L'espace total du fibré ϕ^*E est le produit fibré $Y \times_X E$. Le fibré E est trivialisé sur des ouverts U de X avec des matrices de transition M_{UV} à coefficients différentiables sur $U \cap V$. Le fibré $\phi^*E_{\phi^{-1}(U)}$ est alors trivialisé sur les ouverts de la forme $\phi^{-1}(U)$, et on prend pour matrices de transition sur $\phi^{-1}(U) \cap \phi^{-1}(V) = \phi^{-1}(U \cap V)$ les matrices $M_{UV} \circ \phi$, qu'on voit comme des matrices à coefficients différentiables sur $\phi^{-1}(U \cap V)$.

On peut faire cette construction dans le cadre des fibrés vectoriels complexes, et même, supposant que X et Y sont des variétés complexes, et que ϕ est holomorphe, dans le cadre des fibrés vectoriels holomorphes.

Théorème 1.3.3. *Soit E un fibré vectoriel réel de rang r sur une variété différentiable X, et soit $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$, n sections engendrant E en tout point. Alors il existe une application différentiable $\phi : X \to G_{\mathbb{R}}(r,n)$ et un isomorphisme de fibrés vectoriels*

$$\alpha : \phi^*(E^*_{r,n}) \cong E$$

tels que les sections σ_i s'identifient aux n sections de $E^*_{r,n}$ données par la surjection de fibré vectoriels

$$G_{\mathbb{R}}(r,n) \times \mathbb{R}^n \to E^*_{r,n}$$

duale de l'inclusion $E_{r,n} \subset G_{\mathbb{R}}(r,n) \times \mathbb{R}^n$ de (1.3.10).

Démonstration. On dispose d'un morphisme surjectif en tout point

$$\mathrm{ev} : X \times \mathbb{R}^n \to E,$$

donné par l'évaluation des sections σ_i. Dualisons ce morphisme : nous obtenons un morphisme injectif en tout point

$$\mathrm{ev}^* : E^* \hookrightarrow X \times \mathbb{R}^n.$$

Cette inclusion fournit en chaque point $x \in X$ un sous-espace $E_x \subset \mathbb{R}^n$. Ceci nous donne l'application ensembliste $\phi : X \to G_{\mathbb{R}}(r,n)$, qui à x associe $[E_x] \in G_{\mathbb{R}}(r,n)$, ainsi que l'application linéaire fibre à fibre $\alpha : E^* \cong \phi^* E_{r,n}$, obtenue en notant que l'espace total de $\phi^* E_{r,n}$ est, d'après la formule (1.3.10) et la définition d'un produit fibré, décrit ensemblistement par

$$\phi^* E_{r,n} = \{(x,v) \in X \times \mathbb{R}^n,\ v \in E^*_x\}.$$

Il est évident que cette formule décrit également $E^* \subset X \times \mathbb{R}^n$.

Pour conclure, il suffit de montrer que l'application ϕ ci-dessus est une application différentiable et que l'application α décrite ci-dessus est un isomorphisme de fibrés vectoriels. Pour le premier point, soit $x \in X$ et soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un supplémentaire de $E^*_x \subset \mathbb{R}^n$. Soit p la projection de $\mathbb{R}^n$ sur E^*_x et q la projection de $\mathbb{R}^n$ sur K. Le morphisme de fibrés vectoriels

$$g : E^* \to X \times E^*_x$$

donné par la composition de $p \circ ev^*$ est un isomorphisme au point x et donc un isomorphisme dans un voisinage U de x, comme on le voit dans un ouvert où E est trivialisé et le morphisme est donné par une matrice de taille (r,r) inversible au point x. Considérons le morphisme défini sur U :

$$q \circ g^{-1} : U \times E^*_x \to U \times K.$$

Ce morphisme est de la forme

$$(x,v) \mapsto (x, Mv),$$

où M est une matrice dont les coefficients sont des fonctions différentiables de x. Or la donnée de K et E^*_x déterminent une carte de $G_{\mathbb{R}}(r,n)$ homéomorphe à $\mathrm{Hom}\,(E^*_x, K)$ et par construction, l'application ϕ sur U est exactement donnée dans cette carte par $\phi(x) = M(x)$. Donc ϕ est bien différentiable.

On vérifie de même le dernier point. ∎

On a les variantes suivantes du théorème 1.3.3 :

1) On peut remplacer les fibrés vectoriels réels par les fibrés vectoriels complexes, et l'application ϕ est alors différentiable à valeurs dans $G_{\mathbb{C}}(r,n)$.

2) Si X est une variété complexe, on peut aussi remplacer les fibrés vectoriels complexes par les fibrés vectoriels holomorphes et alors ϕ est un morphisme de variétés complexes (c'est-à-dire donné dans des cartes locales par des fonctions holomorphes).

Pour finir, on a le corollaire suivant du théorème 1.3.3 et du corollaire 1.2.4 :

Corollaire 1.3.4. *Si X est une variété différentiable compacte, pour tout fibré vectoriel réel de rang r sur X, il existe un entier N et une application différentiable $\phi : X \to G_{\mathbb{R}}(r,N)$ telle que*

$$E \cong \phi^* E_{r,N}.$$

On a le même énoncé pour les fibrés complexes, $G_{\mathbb{R}}(r,N)$ étant remplacée par $G_{\mathbb{C}}(r,N)$.

On peut montrer de plus que la classe d'isomorphisme de E ne dépend que de la classe d'homotopie de ϕ (voir TD).

Chapitre 2

Formes différentielles

2.1 Formes et leurs différentielles

2.1.1 Dérivations et champs de vecteurs

Soit X une variété différentiable de classe C^k, $k \geq 1$.

Définition 2.1.1. *Une dérivation de $C^k(X)$ centrée en x est la donnée d'une application linéaire $\delta : C^k(X) \to \mathbb{R}$ satisfaisant la règle de Leibniz :*

$$\delta(fg) = \delta(f)g(x) + f(x)\delta(g).$$

Remarque 2.1.2. Il résulte de la règle de Leibniz que $\delta(f)$ ne dépend que de la donnée de f au voisinage de x. En effet, si $f = 0$ au voisinage de x, on peut écrire $f = \phi^2 g$, où $\phi(x) = 0$ et g, ϕ sont de classe C^k sur X. Alors

$$\delta(f) = \delta(\phi^2 g) = g(x)\delta(\phi^2) + \phi^2(x)\delta(g) = 2g(x)\phi(x)\delta(\phi) = 0.$$

Lemme 2.1.3. *Une dérivation de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ centrée en 0 est de la forme*

$$\delta(f) = \sum_i \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(0),\ f \in C^\infty(X).$$

Démonstration. Une fonction de classe C^∞ s'écrit

$$f(x) = f(0) + \sum_i x_i f_i,$$

où les f_i sont des fonctions de classe C^∞, et de plus $f_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$. Les fonctions constantes sont annulées par δ : En effet on a $\delta(1) = \delta(1^2) = \delta(1) + \delta(1) = 2\delta(1)$ d'où $\delta(1) = 0$. On en déduit que

$$\delta(f) = \sum_i \delta(x_i) f_i(0) = \sum_i \delta(x_i) \frac{\partial f}{\partial x_i}(0),$$

ce qui montre le résultat avec $\alpha_i = \delta(x_i)$. ■

Soit X une variété de classe C^k, $k \geq 1$. Un vecteur tangent à X en x est une dérivation de $C^k(X)$ centrée en x. L'espace total du fibré tangent T_X de X est défini comme l'ensemble des dérivations de $C^k(X)$ centrées en un point de X. Désormais, on supposera que X est de classe C^∞.

Lemme 2.1.4. *T_X a naturellement une structure de fibré vectoriel de classe C^∞ sur X.*

Démonstration. Le morphisme structurel $\pi : T_X \to X$ associe à une dérivation δ son centre. Le lemme 2.1.3 et la remarque 2.1.2 montrent que si $\phi_U : U \cong V \subset \mathbb{R}^n$ est une carte de classe C^∞ de X, on a un isomorphisme

$$d\phi_U : T_{X,U} \cong U \times \mathbb{R}^n,$$

l'isomorphisme inverse associant à $(u, (\alpha_i))$, $u = \phi_U^{-1}(v)$ la dérivation $f \mapsto \sum_i \alpha_i \frac{\partial f \circ \phi_U^{-1}}{\partial x_i}(v)$ centrée en u.

Il reste à calculer les transformations

$$d\phi_{U'} \circ d\phi_U^{-1} : U \cap U' \times \mathbb{R}^n \to U \cap U' \times \mathbb{R}^n$$

associées à des changements de cartes, et à vérifier qu'elles sont linéaires en $\mathbb{R}^n$. Elles sont obtenues par la règle de dérivation des fonctions composées : En effet, étant donnée une fonction $f(y_1, \ldots, y_n)$ sur l'ouvert $\phi_{U'}(U \cap U')$ de $\mathbb{R}^n$ de coordonnées $y_1, \ldots, y_n$, et une dérivation $\delta = \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}(v)$ sur $\phi_U(U \cap U')$ centrée en $v = \phi_U \circ \phi_{U'}^{-1}(v')$, on veut exprimer $\delta(f)$ dans les coordonnées y_i données par $\phi_{U'}$. Ceci revient à calculer $\delta(f \circ \phi_{U'} \circ \phi_U^{-1})$. La fonction f est une fonction de classe C^∞ des coordonnées y_i. Notant $\phi_{U'U} := \phi_{U'} \circ \phi_U^{-1}$, et

$$\phi_{U'U} = (\phi_{U'U,1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \phi_{U'U,n}(x_1, \ldots, x_n)),$$

on a $y_i = \phi_{U'U,i}(x_1, \ldots, x_n)$ sur $\phi_U(U \cap V)$, d'où

$$f \circ \phi_{U'U}(x_1, \ldots, x_n) = f(\phi_{U'U,1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \phi_{U'U,n}(x_1, \ldots, x_n)), \quad (2.1.1)$$

et

$$\begin{aligned}\delta(f \circ \phi_{U'U}) &= \sum_i \alpha_i \frac{\partial f(\phi_{U'U,1}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \phi_{U'U,n}(x_1, \ldots, x_n))}{\partial x_i}(v) \\ &= \sum_{ij} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial y_j}(v') \frac{\partial \phi_{U'U,j}}{\partial x_i}(v).\end{aligned}$$

La transformation $d\phi_{U'} \circ d\phi_U^{-1}$ est donc bien linéaire en les α_i, et est donnée par la *matrice jacobienne* de $\phi_{U'U}$, dont les coefficients $\frac{\partial \phi_{U'U,j}}{\partial x_i}(v)$ sont des fonctions de classe C^∞ des coordonnées.

■

2.1.2 Fibrés tangent et cotangent

Définition 2.1.5. *Un champ de vecteurs sur X est une section du fibré tangent T_X.*

Notons qu'un champ de vecteurs est aussi une dérivation de $C^\infty(X)$, c'est-à-dire une application $\mathbb{R}$-linéaire δ de $C^\infty(X)$ dans lui-même qui satisfait la règle de Leibniz $\delta(fg) = \delta(f)g + g\delta(f)$. En effet, à une section $\sigma : X \to T_X$, on associe la dérivation δ_σ définie par

$$\delta_\sigma(f)(x) = \delta_{\sigma(x)}(f) \in \mathbb{R}.$$

Dans l'autre direction, on utilise la construction du fibré tangent et le lemme 2.1.3 pour construire un champ de vecteurs en partant d'une dérivation.

Cette définition d'un champ de vecteurs fournit une définition élégante du crochet de deux champs de vecteurs qui repose sur le lemme suivant : Soient χ, χ' deux champs de vecteurs et soient δ_χ, $\delta_{\chi'}$ les dérivations associées.

Lemme 2.1.6. *L'application $\partial_\chi \circ \partial'_\chi - \partial'_\chi \circ \partial_\chi : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$ est une dérivation de $C^\infty(X)$.*

Démonstration. Il faut montrer que cette application satisfait la règle de Leibniz. On a

$$\partial_\chi \circ \partial_{\chi'}(fg) = \partial_\chi(f\partial_{\chi'}(g) + g\partial_{\chi'}(f)) = \partial_\chi(f)\partial_{\chi'}(g) + f\partial_\chi(\partial_{\chi'}(g)) + \partial_\chi(g)\partial_{\chi'}(f) + g\partial_\chi(\partial_{\chi'}(f)),$$

$$\partial_{\chi'} \circ \partial_\chi(fg) = \partial_{\chi'}(f\partial_\chi(g) + g\partial_\chi(f)) = \partial_{\chi'}(f)\partial_\chi(g) + f\partial_{\chi'}(\partial_\chi(g)) + \partial_{\chi'}(g)\partial_\chi(f) + g\partial_{\chi'}(\partial_\chi(f)).$$

D'où $\partial_\chi \circ \partial_{\chi'}(fg) - \partial_{\chi'} \circ \partial_\chi(fg) = f\partial_\chi(\partial_{\chi'}(g)) + g\partial_\chi(\partial_{\chi'}f)) - f\partial_{\chi'}(\partial_\chi(g)) - g\partial_{\chi'}(\partial_\chi(f))$, soit encore

$$(\partial_\chi \circ \partial_{\chi'} - \partial_{\chi'} \circ \partial_\chi)(fg) = f(\partial_\chi \circ \partial_{\chi'} - \partial_{\chi'} \circ \partial_\chi)(g) - g(\partial_\chi \circ \partial_{\chi'} - \partial_{\chi'} \circ \partial_\chi)(f).$$

■

Définition 2.1.7. *Le crochet de Lie $[\chi, \chi']$ des deux champs χ et χ' est le champ de vecteurs correspondant à la dérivation $\partial_\chi \circ \partial_{\chi'} - \partial_{\chi'} \circ \partial_\chi : C^\infty(X) \to C^\infty(X)$.*

Le fibré cotangent Ω_X de X est le fibré vectoriel dual de T_X. Ses sections sont les formes différentielles de degré 1 sur X. Les formes différentielles de degré k sur X sont les sections du fibré $\Omega_X^k := \bigwedge^k \Omega_X$.

Une forme différentielle α de degré 1 s'écrit donc en coordonnées locales $x_1, \ldots, x_n$ sur X (identifiant un ouvert de X à un ouvert de $\mathbb{R}^n$)

$$\alpha = \sum_i \alpha_i dx_i,$$

où les α_i sont des fonctions différentiables de x et les dx_i forment la base duale de la base $\frac{\partial}{\partial x_i}$ de T_X, soit $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$. De même une forme différentielle α de degré s s'écrit

$$\alpha = \sum_I \alpha_I dx_I,$$

où $I = \{i_1, \ldots, i_s\} \subset \{1, \ldots, n\}$, $i_1 < \ldots < i_s$ et $dx_I := dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_s}$.

Définissons la différentielle df d'une fonction de classe C^∞, qui est une 1-forme de classe C^∞. Cette 1-forme est définie comme la forme linéaire sur T_X qui à un point $x \in X$ et un vecteur tangent $v \in T_{X,x}$ associe le scalaire $\delta_v(f)$. Écrivant en coordonnées locales $v = \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, on a

$$df(v) = \sum_i \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x),$$

ce qui équivaut, puisque $dx_i(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \delta_{ij}$, à $df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$.

L'application $f \mapsto df$ de $C^\infty(X)$ vers l'espace $A^1(X) = \Gamma(X, \Omega_X)$ des formes différentielles de classe C^∞ et de degré 1 satisfait la règle de Leibniz :

$$d(fg) = fdg + gdf.$$

Covariance

Soient X et Y des variétés différentiables et $\phi : X \to Y$ une application différentiable (de classe C^∞). On a alors un morphisme de fibrés vectoriels

$$\phi_* : T_X \to \phi^* T_Y$$

défini ensemblistement de la façon suivante : Un point de $\phi^* T_Y$ est la donnée d'un point $x \in X$ et d'une dérivation de $C^\infty(Y)$ centrée au point $\phi(x)$. Partant d'une dérivation δ de $C^\infty(X)$ centrée en $x \in X$, on lui associe la dérivation $\phi_*\delta$ centrée en $y = \phi(x)$, donnée par

$$\phi_*\delta(f) = \delta(f \circ \phi) \tag{2.1.2}$$

de $C^\infty(Y)$.

Lemme 2.1.8. *L'application ϕ_* décrite ci-dessus est donnée dans des coordonnées locales x_i sur X et y_j sur Y par la matrice jacobienne de ϕ. En particulier ϕ_* est un morphisme de fibrés vectoriels de T_X vers $\phi^* T_Y$.*

Démonstration. En effet, soit $\delta = (\sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i})_x$ et soit ϕ donnée dans les coordonnées locales par $\phi = (\phi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \phi_m(x_1, \ldots, x_n))$, où $n = \dim X$, $m = \dim Y$. Le fibré tangent T_X est alors trivialisé dans ces coordonnées au voisinage de x par la base $\frac{\partial}{\partial x_i}$ et le fibré tangent T_Y est trivialisé au voisinage de $\phi(x)$ par la base $\frac{\partial}{\partial y_j}$. Si $g(y_1, \ldots, y_m)$ est une fonction de classe C^∞ sur Y, on a

$$\begin{aligned}\delta(f \circ \phi) &= \sum_i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}(f(\phi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \phi_m(x_1, \ldots, x_n)))(x) \\ &= \sum_{ij} \alpha_i \frac{\partial f}{\partial y_j}(\phi(x)) \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(x),\end{aligned}$$

d'où

$$\phi_*\delta = \sum_j (\sum_i \alpha_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i}(x)) \frac{\partial}{\partial y_j}_{\phi(x)}.$$

■

Dualement, on dispose du morphisme $\phi^* : \phi^*\Omega_Y \to \Omega_X$ de fibrés vectoriels, ainsi que des morphismes induits

$$\phi^* : \phi^*\Omega^s_Y \to \Omega^s_X.$$

La différentielle extérieure d'une forme $\alpha = \sum_I \alpha_I dx_I$ de degré s sur $\mathbb{R}^n$ est la forme

$$d\alpha = \sum_I d\alpha_I \wedge dx_I. \tag{2.1.3}$$

Proposition 2.1.9. *La différentielle $d\alpha$ d'une forme différentielle α sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, définie dans les coordonnées standard par la formule (2.1.3) satisfait :*

$$d(fdg_1 \wedge \ldots \wedge dg_k) = df \wedge dg_1 \wedge \ldots \wedge dg_k.$$

Démonstration. Nous donnons la démonstration pour $k = 1$. On veut montrer que

$$d(fdg) = df \wedge dg.$$

Or on a $dg = \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i} dx_i$, d'où

$$d(fdg) = d(\sum_i f\frac{\partial g}{\partial x_i}dx_i) = \sum_i d(f\frac{\partial g}{\partial x_i}) \wedge dx_i$$

$$= \sum_{i,j} f\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i + \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_i} dx_j \wedge dx_i.$$

Or $\sum_{i,j} \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i$ est nul car $dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i$ tandis que les dérivées partielles $\frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}$ sont symétriques en i et j. D'où

$$d(fdg) = \sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial g}{\partial x_i} dx_j \wedge dx_i = df \wedge dg.$$

■

Lemme 2.1.10. *On a pour toute application différentiable de classe C^∞ de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}^m$, et toute forme de classe C^∞ sur Y,*

$$\phi^*(d\alpha) = d(\phi^*\alpha).$$

Cela résulte en effet immédiatement de la proposition 2.1.9, et de l'égalité

$$\phi^*(df) = d(\phi^*(f))$$

qui est duale de (2.1.2).

Le lemme 2.1.10 permet de définir la différentielle extérieure d'une forme α sur une variété X. On a aussi la conséquence suivante :

Corollaire 2.1.11. *Pour toutes variétés X et Y, toute application différentiable $\phi : X \to Y$, et toute forme différentielle α sur Y, on a*

$$d(\phi^*\alpha) = \phi^*(d\alpha).$$

2.1.3 Lemme de Poincaré

Soit X une variété de classe C^∞. Notons tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 2.1.12. *La différentielle extérieure $d : A^k(X) \to A^{k+1}(X)$ sur les formes différentielles d'une variété X satisfait $d \circ d = 0 : A^k(X) \to A^{k+2}(X)$.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $d \circ d(\alpha) = 0$ pour $\alpha = f dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$. On a alors

$$d\alpha = df \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k$$

et

$$d \circ d(\alpha) = d \circ d(f) \wedge dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_k.$$

Il suffit donc de montrer que $d \circ d(f) = 0$. Or

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,\ d(df) = \sum_{j,i} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i.$$

Comme on a $dx_j \wedge dx_i = -dx_i \wedge dx_j$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, on trouve bien $d \circ d(f) = 0$.

■

Le lemme de Poincaré est l'énoncé suivant :

Théorème 2.1.13. *Soit α une forme différentielle sur X telle que $d\alpha = 0$. Alors si $\deg \alpha = k > 0$, α est localement exacte, i.e. il existe un recouvrement ouvert $X = \cup_i U_i$ avec $\alpha_{|U_i} = d\beta_i$, $\beta_i \in A^{k-1}(U_i)$.*

Démonstration. Comme X est localement difféomorphe à $\mathbb{R}^n$, X est couverte par des ouverts U difféomorphes à $]0,1[^n$, et on peut supposer que la forme $\alpha_{|U}$ s'étend différentiablement à la variété à bords $[0,1]^n = V \times [0,1]$, $V = [0,1]^{n-1}$.

Notons $t \in [0,1]$ la dernière coordonnée sur $V \times [0,1]$. Écrivons

$$\alpha_{|V\times[0,1]} = dt \wedge \gamma_1 + \gamma_2,$$

où les formes γ_1 et γ_2 ne font pas intervenir dt, avec $\deg \gamma_1 = k-1$, $\deg \gamma_2 = k$. On peut donc voir γ_1, γ_2 comme des formes sur V dépendant du paramètre t. On observe maintenant qu'il existe une forme Γ_1 sur V à coefficients dépendant de façon C^∞ de t, telle que $\frac{d}{dt}(\Gamma_1) = \gamma_1$ (il suffit de prendre une primitive en t de chacun des coefficients de γ_1). Voyant Γ_1 comme une forme sur U (ne faisant pas intervenir dt), on a alors

$$d\Gamma_1 = d_v\Gamma_1 + dt \wedge \frac{d}{dt}(\Gamma_1) = d_v\Gamma_1 + dt \wedge \gamma_1,$$

où d_v est la différentielle des formes extérieures sur V (ou des familles de formes dépendant de t). On a alors

$$\alpha' := \alpha - d\Gamma_1 = \gamma_2 - d_v\Gamma_1.$$

Il suffit de montrer que α' est localement exacte puisque α' diffère de α par une forme exacte. Or α' est fermée et elle ne contient pas dt. On en déduit qu'elle est indépendante de t et qu'elle est d_v-fermée. En effet, on a

$$d\alpha' = 0 = d_v\alpha' + dt \wedge \frac{d}{dt}(\alpha').$$

Comme $d_v\alpha'$ et $\frac{d}{dt}(\alpha')$ ne font pas intervenir dt, on en tire bien $\frac{d}{dt}(\alpha') = 0$ et $d_v\alpha' = 0$. La forme α' est donc le tiré en arrière d'une forme fermée sur V. On conclut en raisonnant par récurrence sur le nombre n de variables. ∎

2.2 Opérateur $\overline{\partial}$ sur les variétés complexes

2.2.1 Structure holomorphe sur le fibré tangent

Soit X une variété complexe. On a le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. *Le fibré tangent T_X admet une structure naturelle de fibré holomorphe.*

Ici on considère le fibré tangent réel. Le contenu du théorème est d'abord que ce fibré réel admet une structure complexe, et d'autre part que pour des trivialisations adéquates de ce fibré complexe, les matrices de transition sont holomorphes.

Démonstration du théorème 2.2.1. La structure complexe du fibré tangent est obtenue à l'aide d'un système de cartes holomorphes pour X. Soit donc un recouvrement ouvert $X = \cup_i U_i$, où les U_i sont munis de coordonnées holomorphes $\phi_i : U_i \cong V_i \subset \mathbb{C}^n$ définissant la structure complexe de X. Par hypothèse, $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \cong \phi_i(U_i \cap U_j)$ est un difféomorphisme holomorphe.

Sur U_i, la différentielle

$$d\phi_i : T_{U_i} \cong \phi_i^*(T_{\mathbb{C}^n}) \cong U_i \times \mathbb{C}^n$$

fournit une trivialisation ψ_i de T_{U_i}. On a au point x de $U_i \cap U_j$,

$$\psi_i \circ \psi_j^{-1} = (d\phi_i)_x \circ (d\phi_j)^{-1}_{\phi_j(x)} : \phi_j^* T_{\mathbb{C}^n} \cong \phi_i^* T_{\mathbb{C}^n}.$$

Comme $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ est holomorphe, sa différentielle au point $y = \phi_j(x)$ de $\phi_j(U_i \cap U_j)$ est $\mathbb{C}$-linéaire, et s'identifie à $(d\phi_i)_x \circ (d\phi_j)^{-1}_{\phi_j(x)}$. On a donc bien montré que les isomorphismes de transition pour ces trivialisations sont $\mathbb{C}$-linéaires. Il reste à voir que les matrices correspondantes sont à coefficients holomorphes. Or si on écrit

$$\phi := \phi_i \circ \phi_j^{-1} =: (f_1, \ldots, f_n)$$

où les f_i sont des fonctions holomorphes des coordonnées $(z_1,\ldots,z_n)$ sur $\phi_j(U_i\cap U_j)$, la matrice de $d\phi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ en un point $y \in U_i \cap U_j$ est simplement la matrice dite jacobienne holomorphe

$$M = (\frac{\partial f_i}{\partial z_j}(y)),$$

où l'on pose $z_j = x_j + \iota y_j$ et

$$\frac{\partial}{\partial z_j} := \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{1}{2\iota}\frac{\partial}{\partial y_j}.$$

En effet, il est clair que $\frac{\partial}{\partial z_j}$ est la base naturelle sur $\mathbb{C}$ de $T_{\mathbb{C}^n}$ en tout point de $\mathbb{C}^n$, étant duale de la base dz_i. Par ailleurs, il faut vérifier qu'on a bien

$$d\phi_y(\frac{\partial}{\partial z_j}) = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(y)\frac{\partial}{\partial z'_i}, \tag{2.2.4}$$

où les $z'_i = x'_i + \iota y'_i$ sont les nouvelles coordonnées, et $\phi^* z'_i = f_i$. Mais comme ϕ est holomorphe, $d\phi_y$ est $\mathbb{C}$-linéaire, ce qui entraîne immédiatement que son extension $\mathbb{C}$-linéaire à $T_{\mathbb{C}^n,y}\otimes\mathbb{C}$ envoie l'espace engendré par les $\frac{\partial}{\partial z_j}$ sur l'espace engendré par les $\frac{\partial}{\partial z'_j}$. On a donc

$$d\phi_y(\frac{\partial}{\partial z_j}) = \sum_i \alpha_{ij}\frac{\partial}{\partial z'_i} \tag{2.2.5}$$

et il faut simplement montrer que

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(y). \tag{2.2.6}$$

Mais on a d'après (2.2.5),

$$dz'_j(d\phi_y(\frac{\partial}{\partial z_j})) = \alpha_{ij}$$

et par définition de $d\phi$,

$$dz'_j(d\phi_y(\frac{\partial}{\partial z_j})) = df_{i,y}(\frac{\partial}{\partial z_j}).$$

L'égalité (2.2.6) résulte donc de $df_{i,y}(\frac{\partial}{\partial z_j}) = \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(y)$ (voir (2.2.7), (2.2.8) ci-dessous).

Comme les f_i sont des fonctions holomorphes des coordonnées $z_1,\ldots,z_n$, il est clair que les $\frac{\partial f_i}{\partial z_j}$ sont aussi des fonctions holomorphes des z_j, ce qui conclut la démonstration.

∎

2.2.2 Opérateur $\overline{\partial}$ sur les fonctions

Soit X une variété complexe. On a un opérateur $\overline{\partial}$ agissant sur les fonctions de classe C^∞ de X et défini de la façon suivante. Considérons le fibré $\Omega_{X,\mathbb{C}}$ des 1-formes à coefficients complexes sur X. Comme X est une variété complexe, le fibré tangent T_X admet une structure de fibré vectoriel complexe, et l'espace des 1-formes à coefficients complexes sur X, ou encore des sections du fibré $\mathrm{Hom}\,(T_X, \mathbb{C})$, est somme directe de l'espace $A^{1,0}(X)$ des 1-formes $\mathbb{C}$-linéaires, c'est-à-dire des sections du fibré $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_X, \mathbb{C}) =: \Omega_X^{1,0}$, et de l'espace $A^{0,1}(X)$ des 1-formes $\mathbb{C}$-antilinéaires, qui est son conjugué complexe. L'espace $A^{0,1}(X)$ est l'espace des sections du fibré vectoriel $\Omega_X^{0,1}$ dont la fibre en x est l'espace des applications $\mathbb{C}$-antilinéaires sur $T_{X,x}$.

Soient $z_1, \ldots, z_n$ des coordonnées holomorphes locales sur un ouvert U de X, $n = \dim_{\mathbb{C}} X$. Alors $dz_1, \ldots, dz_n$ donnent une trivialisation locale de $\Omega_X^{1,0}$ et $d\overline{z}_1, \ldots, d\overline{z}_n$ donnent une trivialisation locale de $\Omega_X^{0,1}$.

Définition 2.2.2. *Soit f une fonction de classe C^∞ sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors $\overline{\partial} f \in A^{0,1}(X)$ est défini comme la projection de $df \in A^1(X)$ dans $A^{0,1}(X)$, où l'on utilise la décomposition $A^1(X) \cong A^{1,0}(X) \oplus A^{0,1}(X)$ pour définir la projection.*

Dans des coordonnées holomorphes locales, on écrit $z_i = x_i + \iota y_i$, d'où $dx_i = \frac{1}{2}(dz_i + d\overline{z}_i)$, et

$$dy_i = \frac{1}{2\iota}(dz_i - d\overline{z}_i).$$

On a alors

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i \tag{2.2.7}$$

$$= \frac{1}{2}(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(dz_i + d\overline{z}_i)) + \frac{1}{2\iota}(\sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i}(dz_i - d\overline{z}_i)),$$

$$= \sum_i \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i + \sum_i \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i} d\overline{z}_i,$$

avec

$$\frac{\partial f}{\partial z_i} := \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2\iota}\frac{\partial f}{\partial y_i}, \tag{2.2.8}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i} := \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{1}{2\iota}\frac{\partial f}{\partial y_i}. \tag{2.2.9}$$

On a alors $\overline{\partial} f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i} d\overline{z}_i$.

Lemme 2.2.3. *Une fonction f définie sur un ouvert U de X est holomorphe si et seulement si $\overline{\partial} f = 0$.*

Démonstration. En effet f est holomorphe si et seulement si df est $\mathbb{C}$-linéaire, ou encore $df \in A^{1,0}(U)$. ∎

Lemme 2.2.4. *On a* $\overline{\partial}(fg) = f\overline{\partial}g + g\overline{\partial}f$ *pour deux fonctions à valeurs complexes sur* X.

Démonstration. Cela résulte de la formule de Leibniz $d(fg) = fdg + gdf$ dans $A^1(X)$ où l'on prend de part et d'autre la composante $\mathbb{C}$-antilinéaire. ∎

On admettra le résultat suivant :

Proposition 2.2.5. *Soit* $f(x, z)$ *une fonction de classe* C^∞ *à valeurs dans* $\mathbb{C}$ *en la variable* $(x, z) \in U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{C}$. *Alors localement sur* U, *il existe une fonction* g *de classe* C^∞ *à valeurs dans* $\mathbb{C}$ *telle que* $\frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = f$. *Si* f *dépend de façon holomorphe de* $x \in U$, *où* $U \subset \mathbb{C}^m$ *est un ouvert, on peut aussi choisir localement* g *dépendant de façon holomorphe de* x.

2.2.3 Formes de type $(0, i)$ et lemme de Dolbeault

Soit X une variété complexe. On a donc comme expliqué plus haut une décomposition du fibré cotangent complexifié (le fibré des 1-formes à coefficients complexes)

$$\Omega_{X,\mathbb{C}} = \Omega_X^{1,0} \oplus \Omega_X^{0,1}, \tag{2.2.10}$$

le premier terme s'identifiant au fibré des 1-formes $\mathbb{C}$-linéaires $T_X \to \mathbb{C}$, le second terme s'identifiant au fibré des 1-formes $\mathbb{C}$-antilinéaires $T_X \to \mathbb{C}$. Dans des coordonnées holomorphes locales, $\Omega_X^{1,0}$ admet pour base $dz_1, \ldots, dz_n$ et $\Omega_X^{0,1}$ admet pour base $d\overline{z}_1, \ldots, d\overline{z}_n$.

Définition 2.2.6. *Une forme de type* $(0, i)$ *sur une variété complexe* X *est une section de classe* C^∞ *du fibré* $\bigwedge^i \Omega_X^{0,1}$.

On notera $A^{0,i}(X)$ l'espace des formes de type $(0, i)$. Construisons maintenant l'opérateur

$$\overline{\partial} : A^{0,i}(X) \to A^{0,i+1}(X).$$

Notons qu'une forme de type $(0, i)$ s'écrit localement dans des coordonnées holomorphes $z_1, \ldots, z_n$

$$\alpha = \sum_{I \subset \{1,\ldots,n\}, |I| = i} \alpha_I d\overline{z}_I,$$

avec α_I de classe C^∞, et la convention $d\overline{z}_I = d\overline{z}_{l_1} \wedge \ldots \wedge \overline{z}_{l_i}$ pour $I = \{l_1, \ldots, l_i\}$, $l_1 < \ldots < l_i$.

On pose

$$\overline{\partial}\alpha = \sum_I \overline{\partial}\alpha_I \wedge d\overline{z}_I.$$

Lemme 2.2.7. *On a*

$$\overline{\partial} \circ \overline{\partial} = 0 : A^{0,k}(X) \to A^{0,k+2}(X).$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $\overline{\partial} \circ \overline{\partial}(\alpha) = 0$ pour $\alpha = f d\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_k$. On a alors

$$\overline{\partial}\alpha = \overline{\partial} f \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_k$$

et

$$\overline{\partial} \circ \overline{\partial}(\alpha) = \overline{\partial} \circ \overline{\partial}(f) \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ldots \wedge d\overline{z}_k.$$

Il suffit donc de montrer que $\overline{\partial} \circ \overline{\partial}(f) = 0$. Or

$$\overline{\partial} f = \sum_i \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_i} d\overline{z}_i,\ \overline{\partial}(\overline{\partial} f) = \sum_{j,i} \frac{\partial^2 f}{\overline{z}_j \overline{z}_i} d\overline{z}_j \wedge d\overline{z}_i.$$

Comme on a $d\overline{z}_j \wedge d\overline{z}_i = -d\overline{z}_i \wedge d\overline{z}_j$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z}_j \partial \overline{z}_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial \overline{z}_i \partial \overline{z}_j}$ comme le montre la formule (2.2.9), on trouve bien $\overline{\partial} \circ \overline{\partial}(f) = 0$. ■

On a le "lemme de Dolbeault", qui est l'analogue du lemme de Poincaré pour l'opérateur $\overline{\partial}$:

Théorème 2.2.8. *Soit α une $(0, i)$-forme $\overline{\partial}$-fermée sur X, c'est-à-dire $\overline{\partial}\alpha = 0$. Alors si $i > 0$, α est localement $\overline{\partial}$-exacte sur X, c'est-à-dire $\alpha = \overline{\partial}\beta$.*

Démonstration. La preuve est très semblable à celle du théorème 2.1.13. Soit α une $(0, i)$-forme $\overline{\partial}$-fermée sur X. Comme l'énoncé est local, on peut se placer dans une carte munie de coordonnées holomorphes $z_1, \ldots, z_n$ dans lesquelles α s'écrit

$$\alpha = \sum_{I, |I| = i} \alpha_I d\overline{z}_I.$$

Séparant la variable z_n, on a aussi

$$\alpha = \alpha_1 + d\overline{z}_n \wedge \alpha_2,$$

où $d\overline{z}_n$ n'apparaît ni dans α_1, ni dans α_2. La forme α_1 est de degré i et la forme α_2 est de degré $i - 1$. On peut voir α_2 comme une forme (ou plutôt une famille de formes) sur un ouvert de $\mathbb{C}^{n-1}$ muni de coordonnées $z_1, \ldots, z_{n-1}$, dépendant de façon C^∞ de z_n. Appliquons à chaque coefficient de α_2 la proposition 2.2.5. Il en résulte qu'il existe localement sur cet ouvert de $\mathbb{C}^{n-1}$ une $(0, i - 1)$-forme β, dépendant de façon C^∞ de z_n, telle que

$$\frac{\partial \beta}{\partial \overline{z}_n} = \alpha_2.$$

Voyant maintenant β comme une $(0, i - 1)$-forme sur $\mathbb{C}^n$, il en résulte que

$$\overline{\partial}\beta = d\overline{z}_n \wedge \alpha_2 + \beta'$$

où la forme β' ne contient pas $d\overline{z}_n$. On trouve donc que modulo la forme $\overline{\partial}$-exacte $\overline{\partial}\beta$, α est égale à

$$\alpha' = \alpha_1 - \beta',$$

qui ne contient pas $d\bar{z}_n$. Comme α' est aussi $\overline{\partial}$-fermée, on en déduit que les coefficients α'_I de

$$\alpha' = \sum_{I\subset\{1,\ldots,n-1\},|I|=i} \alpha'_I d\bar{z}_I$$

sont holomorphes en z_n. De plus on peut voir α' comme une famille de formes $\overline{\partial}$-fermées sur un ouvert de $\mathbb{C}^{n-1}$ dépendant de façon holomorphe du paramètre z_n.

Le raisonnement se fait alors par récurrence sur n, l'énoncé faisant l'objet de la récurrence étant l'énoncé plus précis suivant :

Si α est une famille de $(0,i)$-formes $\overline{\partial}$-fermées sur un ouvert V de $\mathbb{C}^n$ dépendant de façon holomorphe du paramètre $z \in T$, où $T \subset \mathbb{C}^k$ est un ouvert. Alors localement sur $V \times T$, $\alpha = \overline{\partial}\beta$, où β est une famille de $(0,i-1)$-formes sur V dépendant de façon holomorphe du paramètre $z \in T$.

La réduction du nombre de variables effectuée précédemment s'applique tout aussi bien si notre forme α initiale est une famille de formes $\overline{\partial}$-fermées sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$, dépendant holomorphiquement d'un paramètre $t \in T \subset \mathbb{C}^k$. Il suffit pour cela d'utiliser le dernier énoncé de la proposition 2.2.5. Appliquant l'hypothèse de récurrence à la famille de formes α', on a alors

$$\alpha' = \overline{\partial}_{n-1}\alpha'',$$

où α'' dépend holomorphiquement de (t, z_n). Ici, l'opérateur $\overline{\partial}_{n-1}$ apparaissant dans cette dernière égalité est celui de $\mathbb{C}^{n-1}$ qui ne dérive que par rapport aux variables z_i, $i < n$. Mais comme α'' est holomorphe en z_n, on a tout aussi bien

$$\alpha' = \overline{\partial}_n\alpha'',$$

où l'on voit cette fois α' et α'' comme des formes sur U, dépendant holomorphiquement d'un paramètre t. D'où finalement la formule désirée

$$\alpha = \overline{\partial}\beta + \overline{\partial}\alpha'',$$

où β et α'' dépendent holomorphiquement de t.

∎

Chapitre 3

Faisceaux

3.1 Faisceaux et préfaisceaux

3.1.1 Définitions générales, exemples

Soit X un espace topologique.

Définition 3.1.1. *(i) Un préfaisceau de groupes $\mathcal{F}$ sur X est la donnée pour tout ouvert $U \subset X$ d'un groupe $\mathcal{F}(U)$, et de morphismes de groupes ρ_{UV} : $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$, dits "applications de restriction" pour toute paire $V \subset U$ d'ouverts, satisfaisant :*

- $\mathcal{F}(\emptyset) = \{e\}$.

- $\rho_{UU} = Id : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(U)$.

- $\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$ pour tous ouverts W, V, U tels que $W \subset V \subset U$.

(ii) Un tel préfaisceau est un préfaisceau d'anneaux si chaque $\mathcal{F}(U)$ est un anneau et les morphismes de restriction sont des morphismes d'anneaux.

(iii) Étant donné un préfaisceau d'anneaux $\mathcal{A}$ sur X, un préfaisceau de $\mathcal{A}$-modules est un préfaisceau $\mathcal{F}$ sur X tel que pour tout ouvert U de X, $\mathcal{F}(U)$ est un $\mathcal{A}(U)$-module et les applications de restriction $\rho^{\mathcal{F}}_{UV} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ sont des morphismes de $\mathcal{A}(U)$-modules (où l'on voit $\mathcal{F}(V)$ comme un $\mathcal{A}(U)$-module via le morphisme $\rho^{\mathcal{A}}_{UV} : \mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(V)$ et la structure de $\mathcal{A}(V)$-module sur $\mathcal{F}(V)$).

Les éléments de $\mathcal{F}(U)$ sont appelés les sections de $\mathcal{F}$ sur U. On notera pour plus de légèreté $\sigma_{|V}$ la restriction $\rho_{UV}(\sigma)$, où $\sigma \in \mathcal{F}(U)$, $V \subset U$.

Définition 3.1.2. *Un faisceau sur X est un préfaisceau qui de plus satisfait la condition suivante : Pour tout ouvert U de X et tout recouvrement ouvert U_i, $i \in I$, de U, on a*

$$\mathcal{F}(U) \cong \{(\sigma_i)_{i\in I} \in \prod_i \mathcal{F}(U_i),\ \sigma_{i|U_i\cap U_j} = \sigma_{j|U_i\cap U_j},\ \forall i,\ j \in I\}, \tag{3.1.1}$$

où l'application de $\mathcal{F}(U)$ vers le terme de droite associe à $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ ses restrictions $\sigma_{|U_i}$, $i \in I$.

Ainsi, la donnée d'une section d'un faisceau $\mathcal{F}$ sur un ouvert U est équivalente à la donnée de ses restrictions sur de petits ouverts, qui doivent coïncider sur les intersections. La notion de faisceau est de ce fait le langage adéquat pour le passage du local au global.

On a la notion évidente de morphismes de (pré)faisceaux :

Définition 3.1.3. *Soit X un espace topologique, et soient $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ deux préfaisceaux sur X. Un morphisme $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est la donnée pour tout ouvert U de X d'une application $\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ satisfaisant les compatibilités suivantes : Pour tous ouverts $V \subset U$, on a*

$$\phi_V \circ \rho^{\mathcal{F}}_{UV} = \rho^{\mathcal{G}}_{UV} \circ \phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(V).$$

Si les (pré)faisceaux sont des (pré)faisceaux de groupes, d'anneaux, de $\mathcal{A}$-modules, les morphismes ϕ_U doivent être des morphismes de groupes (resp. d'anneaux, resp. de $\mathcal{A}(U)$-modules) pour tout U.

Exemple 3.1.4. (Faisceaux de fonctions) : Soit X une variété de classe C^k. Alors $U \mapsto C^k(U, \mathbb{R})$ est un faisceau d'anneaux (en fait de $\mathbb{R}$-algèbres). Les applications de restriction ρ_{UV} sont bien sûr les applications de restriction au sens usuel. On note ce faisceau $\underline{\mathcal{C}^k}$.

Exemple 3.1.5. (Faisceaux de sections d'un fibré vectoriel) : Soit X une variété de classe C^k et E un fibré vectoriel de classe C^k sur X. Alors $U \mapsto \Gamma(U, E)$ est un faisceau de $\underline{\mathcal{C}^k}$-modules. On le notera $\underline{\mathcal{C}^k}(E)$. La structure de $C^k(U)$-module sur $\Gamma(U, E)$ est donnée par l'addition des sections et la multiplication d'une section par une fonction, qui se définissent dans des trivialisations locales, à l'aide de de la formule (1.2.5).

Exemple 3.1.6. (i) Soit X une variété complexe. Alors on a un faisceau noté $\mathcal{O}_X$ (pour "holomorphe" !) donné par $\mathcal{O}(U) = \{\text{fonctions holomorphes sur } U\}$.

C'est un faisceau d'anneaux, et même de $\mathbb{C}$-algèbres.

(ii) Soit X une variété complexe et $E \to X$ un fibré vectoriel holomorphe. On a le faisceau noté $\mathcal{E}$ qui à U associe les sections holomorphes de E sur U. C'est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules

On prendra garde au fait qu'un fibré vectoriel holomorphe donne lieu à plusieurs faisceaux de sections, dépendant de la classe des sections considérées : faisceau $\mathcal{E}$ de sections holomorphes, faisceau $\underline{\mathcal{C}^k}(E)$ de sections de classes C^k pour tout k.

Tous les exemples donnés ci-dessus sont des faisceaux. Voici un exemple de préfaisceau qui n'est pas un faisceau et qui va motiver la construction qui suit :

Exemple 3.1.7. Sur un espace topologique X, considérons le préfaisceau $\exp(\underline{\mathcal{C}}^0(\mathbb{C}))$ suivant : À tout ouvert U, $exp(\underline{\mathcal{C}}^0(\mathbb{C}))$ associe

$$\{f : U \to \mathbb{C}^* \text{ continue}, \exists g : U \to \mathbb{C} \text{ continue}, f = \exp g\}.$$

Ceci est un préfaisceau de groupes (la structure de groupe est donnée par le produit). Ce n'est pas un faisceau en général. En effet, si $X = \mathbb{S}^1$, considérons la fonction $z \mapsto z$, où l'on voit $\mathbb{S}^1$ comme contenu dans $\mathbb{C}^*$. Le cercle $\mathbb{S}^1$ est couvert par des ouverts difféomorphes via l'application exponentielle à des intervalles ouverts $]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$, sur lesquels la fonction z est de la forme

$$\exp \iota\theta,\ \theta = \arg z \in]\theta_0, \theta_0 + 2\pi[,$$

et donc est une section du préfaisceau ci-dessus. Pourtant la fonction z sur $\mathbb{S}^1$ n'est pas l'exponentielle d'une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Faisceau associé à un préfaisceau

Définissons tout d'abord les limites directes. On se donne des ensembles A_i indicés par un ensemble dirigé I. Cela signifie que I est muni d'un ordre $\geq$ ayant la propriété que pour tous $i, j \in I$, il existe k avec $i \geq k$, $j \geq k$. Par exemple les ouverts contenant un point donné dans un espace topologique ordonnés par $U \geq V$ si $V \subset U$ forment un ensemble dirigé. On suppose données pour $i \geq j$ des applications $\alpha_{ij} : A_i \to A_j$, satisfaisant la transitivité évidente $\alpha_{ik} = \alpha_{jk} \circ \alpha_{ij} : A_i \to A_k$ si $i \geq j \geq k$.

La limite directe

$$\lim_{\overrightarrow{I}} A_i$$

est alors définie comme l'ensemble des classes d'équivalence (a, i) avec $a \in A_i$, sous la relation d'équivalence

$$(a, i) \equiv (b, j) \Leftrightarrow \alpha_{ik}(a) = \alpha_{jk}(b) \text{ pour un } k \text{ tel que } i \geq k,\ j \geq k.$$

Si les A_i sont des groupes (resp. des anneaux) et les α_{ij} sont des morphismes de groupes, alors $\lim_{\overrightarrow{I}} A_i$ est un groupe (resp. un anneau). De plus, chaque A_i admet un morphisme naturel vers $\lim_{\overrightarrow{I}} A_i$ qui à $a \in A_i$ associe la classe d'équivalence de (a, i).

Définition 3.1.8. *Soit $\mathcal{F}$ un préfaisceau sur un espace topologique X. Soit $x \in X$. Le germe $\mathcal{F}_x$ de $\mathcal{F}$ en x est défini comme la limite directe $\lim_{\overrightarrow{U \ni x}} \mathcal{F}(U)$, où U parcourt l'ensemble des ouverts de X contenant x.*

Notons que pour tout ouvert V de X contenant x, et toute section $\sigma \in \mathcal{F}(V)$, σ admet un germe $\sigma_x \in \mathcal{F}_x$ en x défini comme l'image de σ par la flèche naturelle $\mathcal{F}(V) \to \lim_{\overrightarrow{U \ni x}} \mathcal{F}(U)$.

Avec cette définition, nous montrons :

Théorème 3.1.9. *Soit X un espace topologique et ${}^p\mathcal{F}$ un préfaisceau de groupes sur X. Il existe un unique faisceau de groupes $\mathcal{F}$ (appelé le faisceau associé) tel que*

a) Il existe un morphisme de préfaisceaux $f : {}^p\mathcal{F} \to \mathcal{F}$.

b) Pour tout faisceau $\mathcal{G}$ et tout morphisme de préfaisceau $g : {}^p\mathcal{F} \to \mathcal{G}$, il existe un unique morphisme $g' : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ tel que $g = g' \circ f$.

Démonstration. Étant donné un préfaisceau ${}^p\mathcal{F}$, de germe ${}^p\mathcal{F}_x$ en $x \in X$, nous construisons le faisceau $\mathcal{F}$ associé de la manière suivante : on définit d'abord un préfaisceau $\mathcal{F}$ par la formule suivante : $\mathcal{F}(U) \subset \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x$, et

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(U) = \{(\sigma_y)_{y\in U},\, \sigma_y \in {}^p\mathcal{F}_y,\ &\text{telles que } \forall y \in U, \exists V \ni y \text{ ouvert et} \\ &\sigma_V \in {}^p\mathcal{F}(V), \text{ tels que} \forall x \in V, \sigma_x = \sigma_{V,x}\},\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

les flèches de restriction étant évidentes.

On montre ensuite que le préfaisceau ainsi défini est bien un faisceau, ce qui est presque immédiat au vu de (3.1.2).

Il faut ensuite établir la propriété universelle b), ce qui se fait de la manière suivante. Pour tout faisceau $\mathcal{G}$ sur X, et tout ouvert $U \subset X$, on a l'égalité (3.1.2) :

$$\mathcal{G}(U) = \{(\sigma_y)_{y\in U},\, \sigma_y \in \mathcal{G}_y,\ \text{telles que } \forall y \in U, \exists V \ni y \text{ ouvert et}$$

$$\sigma_V \in \mathcal{G}(V), \text{ tels que} \forall x \in V, \sigma_x = \sigma_{V,x}\}.$$

En effet, ceci est équivalent à (3.1.1).

Il est clair qu'un morphisme de préfaisceau ${}^p\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ va alors induire un morphisme de groupes

$$\mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$$

pour tout ouvert U, et ces morphismes fournissent le morphisme de faisceaux $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ cherché. ∎

Exemple 3.1.10. Le faisceau associé au préfaisceau (3.1.7) est le faisceau des applications continues sur X à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, noté $\underline{\mathcal{C}}^0(\mathbb{C}^*)$.

3.1.2 Opérations, sections globales et suites exactes

Opérations

La plupart des opérations dont on dispose sur les groupes ou sur les modules peuvent être effectuées également sur les faisceaux.

Somme directe. Soient $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ deux faisceaux de groupes. On définit leur somme directe

$$\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$$

comme le préfaisceau

$$U \mapsto \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U),$$

et on vérifie que ceci définit bien un faisceau.

Noyaux. Soit $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux de groupes. On définit le préfaisceau $\mathrm{Ker}\,\phi$ par

$$\mathrm{Ker}\,\phi_U := \mathrm{Ker}\,(\phi_U : \mathcal{F}_U \to \mathcal{G}_U),$$

pour tout ouvert $U \subset X$.

Lemme 3.1.11. *Le préfaisceau ainsi défini est un faisceau. C'est même un sous-faisceau de groupes de $\mathcal{F}$.*

Démonstration. Il faut montrer qu'étant donné un ouvert U de X, un recouvrement ouvert U_i de U et des sections

$$\sigma_i \in \operatorname{Ker} \phi(U) := \operatorname{Ker}(\phi_{U_i} : \mathcal{F}_{U_i} \to \mathcal{G}_{U_i}),$$

telles que $\sigma_{i|U_i \cap U_j} = \sigma_{j|U_i \cap U_j}$ pour tous i, j, il existe une section $\sigma \in \operatorname{Ker}(\phi_U : \mathcal{F}_U \to \mathcal{G}_U)$, telle que $\sigma_{|U_i} = \sigma_i$ pour tout i.

Or il existe $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ telle que $\sigma_{|U_i} = \sigma_i$ pour tout i par la propriété (3.1.1) pour $\mathcal{F}$. Regardons $\tau := \phi_U(\sigma) \in \mathcal{G}(U)$. On a $\tau_{|U_i} = 0$ pour tout i, et la propriété de faisceau pour $\mathcal{G}$ entraîne donc que $\tau = 0$. Donc $\sigma \in \operatorname{Ker} \phi_U$. L'unicité de σ résulte de son unicité comme section de $\mathcal{F}$. ■

Images

Soit $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux de groupes. L'exemple 3.1.7 montre que le préfaisceau ${}^p\operatorname{Im} \phi$

$$U \mapsto \operatorname{Im}(\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U))$$

n'est pas toujours un faisceau. Dans cet exemple, $\mathcal{F}$ est le faisceau des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{C}$, et $\mathcal{G}$ est le faisceau $\underline{\mathcal{C}}^0(\mathbb{C}^*)$ des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, muni de la structure de groupe donnée par le produit. Si on est sur une variété complexe et qu'au lieu des fonctions continues, on considère les fonctions holomorphes à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, on utilise la notation $\mathcal{O}_X^*$.

Définition 3.1.12. *Le faisceau image de ϕ, noté $\operatorname{Im} \phi$, est le faisceau associé au préfaisceau*

$$U \mapsto \operatorname{Im}(\phi_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)).$$

On dira qu'un morphisme $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de faisceaux de groupes est surjectif si le morphisme

$$\operatorname{Im} \phi \to \mathcal{G}$$

associé à l'inclusion de préfaisceaux

$${}^p\operatorname{Im} \phi \subset \mathcal{G}$$

est un isomorphisme. Le morphisme ϕ peut donc être surjectif sans que les morphismes ϕ_U soient surjectifs. Néanmoins on a le résultat suivant :

Lemme 3.1.13. *Un morphisme $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est surjectif si et seulement si le morphisme $\phi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ est surjectif pour tout $x \in X$.*

Démonstration. Notons que par définition, un préfaisceau et le faisceau associé ont les mêmes germes en tout point de x. Si ϕ est surjectif, ϕ induit un isomorphisme $\operatorname{Im} \phi \cong \mathcal{G}$, d'où un isomorphisme de germes en tout point

$(\mathrm{Im}\,\phi)_x \cong \mathcal{G}_x$. On en déduit qu'on a aussi un isomorphisme de germes $({}^p\mathrm{Im}\,\phi)_x \cong \mathcal{G}_x$. Or l'application

$$\mathcal{F}_x \to ({}^p\mathrm{Im}\,\phi)_x$$

est clairement surjective pour tout x (les limites directes préservent la surjectivité). Donc $\phi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ est surjective. Inversement, si $\phi_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ est surjective, le sous-faisceau $\mathcal{K} := \mathrm{Im}\,\phi \subset \mathcal{G}$ a la propriété que

$$\mathcal{K}_x \to \mathcal{G}_x$$

est un isomorphisme pour tout $x \in X$. Il reste alors à prouver que $\mathcal{K} = \mathcal{G}$. Soit U un ouvert de X et $\sigma \in \mathcal{G}(U)$ une section de $\mathcal{G}$ sur U. Alors comme $\mathcal{K}_x = \mathcal{G}_x$ pour tout $x \in U$, on trouve pour tout $x \in U$ un ouvert $V \subset U$ contenant x et une section τ_V de $\mathcal{K}$ sur V telle que $\tau_V = \sigma_{|V}$ dans $\mathcal{G}(V)$. Comme l'application $\mathcal{K} \to \mathcal{G}$ est injective, on conclut que $\tau_{V|V\cap W} = \tau_{W|V\cap W}$ pour tous ouverts $V, W \subset U$. Comme $\mathcal{K}$ est un faisceau, les τ_V se recollent pour donner une section τ de $\mathcal{K}$ sur U. Clairement l'image de τ dans $\mathcal{G}(U)$ est égale à σ, puisque cela devient vrai après restriction aux ouverts V ci-dessus, et en utilisant la propriété de faisceau pour $\mathcal{G}$. Donc la flèche $\mathcal{K}(U) \to \mathcal{G}(U)$ est surjective et comme elle est aussi injective, on conclut que c'est un isomorphisme.

■

Suites exactes

Soient X un espace topologique, et $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ trois faisceaux de groupes sur X, munis de morphismes

$$\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}, \;\; \psi : \mathcal{G} \to \mathcal{H}.$$

Définition 3.1.14. *On dit que*

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$$

est une suite exacte au milieu si $\psi \circ \phi = 0$, *et* $\mathrm{Im}\,\phi \subset \mathcal{G}$ *est égal à* $\mathrm{Ker}\,\psi$.

Si de plus ϕ *est injective, et* ψ *est surjective, on dit que*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0$$

est une suite exacte (courte).

(Lorsque les groupes sont non commutatifs ou multiplicatifs, on préfère utiliser la notation $\{e\}$ ou 1 au lieu de 0.)

Exemple 3.1.15. (Suite exacte exponentielle) Soit X un espace topologique ; alors on a une suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathbb{Z} \to \underline{\mathcal{C}}^0(\mathbb{C}) \xrightarrow{\exp 2i\pi} \underline{\mathcal{C}}^0(\mathbb{C}^*) \to 1.$$

Dans l'exemple ci-dessus, le faisceau $\mathbb{Z}$ est le faisceau dit constant associé à l'anneau de coefficients $\mathbb{Z}$, qui est défini comme le faisceau associé au préfaisceau constant $U \mapsto \mathbb{Z}$. Concrètement, ce faisceau est donné par

$$U \mapsto \{\text{applications localement constantes de } U \text{ dans } \mathbb{Z}\},$$

le terme de droite étant aussi égal à $\mathbb{Z}^{c(U)}$ où $c(U)$ est l'ensemble des composantes connexes de U.

Sections globales

Soit X un espace topologique. Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ de groupes sur X, on dispose du groupe des sections globales $\mathcal{F}(X)$ de $\mathcal{F}$ sur X. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau de groupes abéliens, $\mathcal{F}(X)$ est un groupe abélien.

Pour tout morphisme de faisceaux $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, on dispose d'un morphisme correspondant : $\phi_X : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$. On note parfois $\mathcal{F}(X) = \Gamma(X, \mathcal{F})$. Lorsque $\mathcal{F}$ est un faisceau de groupes abéliens, on utilise aussi la notation

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) = H^0(X, \mathcal{F})$$

provenant de l'égalité (3.1.3). Si $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un morphisme de faisceaux, on note $\Gamma(\phi) : \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{G})$ ou $H^0(\phi) : H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{G})$ le morphisme induit au niveau des sections globales.

Notons que grâce à la propriété de faisceaux (3.1.1), $H^0(X, \mathcal{F})$ se calcule de la manière suivante : Pour tout recouvrement ouvert U_i, $i \in I$ de X,

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) = \operatorname{Ker}\,(\prod_i \mathcal{F}(U_i) \stackrel{\delta}{\to} \prod_{i,j} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)), \tag{3.1.3}$$

où l'application δ est le premier exemple d'une différentielle de Čech : pour $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I}$, $\alpha_i \in \mathcal{F}(U_i)$,

$$(\delta\alpha)_{i,j} = \alpha_{i|U_i \cap U_j} - \alpha_{j|U_i \cap U_j}.$$

Si l'ensemble I est totalement ordonné, il est commode de ne considérer que les paires (i, j) pour $i < j$.

Notons les faits suivants : Si $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un morphisme injectif de faisceaux, alors $\Gamma(\phi)$ est injectif. Par contre, si $\phi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un morphisme surjectif de faisceaux, alors $\Gamma(\phi)$ n'est pas nécessairement surjectif. Encore une fois, l'exemple 3.1.7 repris dans l'exemple 3.1.15 de l'application exponentielle

$$\underline{\mathcal{C}}^0(\mathbb{C}) \stackrel{\exp 2i\pi}{\to} \underline{\mathcal{C}}^0(\mathbb{C}^*)$$

fournit une très bonne illustration du problème : la fonction inversible z sur $\mathbb{S}^1$ n'est pas globalement l'image par l'exponentielle d'un fonction continue à valeurs dans $\mathbb{C}$, alors qu'elle l'est localement, ce qui est exprimé par la surjectivité de l'application exponentielle au niveau des faisceaux.

3.2 Cocycles de Čech et cohomologie

3.2.1 Cocycles de Čech et fibrés

Soit X un espace topologique, et soit $\pi : E \to X$ un fibré vectoriel réel. On dispose d'un recouvrement ouvert $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de X, tel que les U_i soient des ouverts de trivialisation de E :

$$\phi_i : E_{U_i} \cong U_i \times \mathbb{R}^n,\ pr_1 \circ \phi_i = \pi_{|E_{U_i}}.$$

Soit

$$\phi_{ij} := \phi_i \circ \phi_j^{-1} : U_i \cap U_j \times \mathbb{R}^n \to U_i \cap U_j \times \mathbb{R}^n.$$

Par définition, les fonctions ϕ_{ij} sont de la forme

$$(x, v) \mapsto (x, M_{ij}(x)v),$$

où les matrices de transition M_{ij} sont continues en x et inversibles. On peut donc voir ces matrices comme des fonctions continues à valeurs dans le groupe Gl_n, ou encore des sections du faisceau de groupes $\underline{\mathcal{C}^0}(Gl_n)$ qui à U associe le groupe des fonctions continues de U dans Gl_n.

Lemme 3.2.1. *Les matrices M_{ij} satisfont $M_{ij} = M_{ji}^{-1}$ et la "condition de cocycle"*

$$M_{ij}M_{jk}M_{ki} = I_n, \tag{3.2.4}$$

pour tout triplet (i, j, k).

Démonstration. On a sur $\mathbb{R}^n \times U_i \cap U_j$

$$(x, M_{ij}(x)v) = \phi_i \circ \phi_j^{-1}(x, v),\ (x, M_{ji}(x)w) = \phi_j \circ \phi_i^{-1}(x, w),$$

ce qui rend évidente la première relation.

D'autre part, on a aussi sur $U_i \cap U_j \cap U_k \times \mathbb{R}^n$,

$$(x, M_{jk}(x)w) = \phi_j \circ \phi_k^{-1}(x, w),\ (x, M_{ki}(x)z) = \phi_k \circ \phi_i^{-1}(x, z),$$

ce qui donne pour tout $(x, v) \in U_i \cap U_j \cap U_k \times \mathbb{R}^n$:

$$(x, M_{ij(x)}M_{jk}(x)M_{ki}(x)v) = \phi_i \circ \phi_j^{-1} \circ \phi_j \circ \phi_k^{-1} \circ \phi_k \circ \phi_i^{-1}(x, v) = (x, v)$$

d'où $M_{ij}(x)M_{jk}(x)M_{ki}(x) = I_n$, pour tout $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$. ■

Inversement, partons d'un cocycle de matrices $M_{ij}(x) = M_{ji}^{-1}(x)$, $x \in U_i \cap U_j$ satisfaisant (3.2.4).

Théorème 3.2.2. *Il existe un fibré continu E sur X dont les matrices de transition sont les M_{ij}.*

Démonstration. On va construire E par recollement des $U_i \times \mathbb{R}^n$ le long des $(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^n$, les identifications étant données par les homéomorphismes

$$\phi_{ij}(x,v) = (x, M_{ij}(x)v).$$

Concrètement, on part de l'union disjointe $\coprod_i U_i \times \mathbb{R}^n$, et on met la relation suivante :

$$(x,v) \in \mathbb{R}^n \times U_i \equiv (y,w) \in U_j \times \mathbb{R}^n$$

si $x = y \in U_i \cap U_j$ et

$$v = M_{ij}(x)w.$$

On montre maintenant que $\equiv$ définie ci-dessus est une relation d'équivalence : c'est clairement symétrique du fait que $M_{ij} = M_{ji}^{-1}$ et il faut vérifier la transitivité : Soient donc i, j, k et

$$U_i \times \mathbb{R}^n \ni (x,v) \equiv (y,w) \in U_j \times \mathbb{R}^n,\ U_j \times \mathbb{R}^n \ni (y,w) \equiv (z,t) \in U_k \times \mathbb{R}^n.$$

On a donc $x = y = z$ et en particulier $x \in U_i \cap U_k$. De plus

$$v = M_{ij}(x)w,\ w = M_{jk}(x)t.$$

On trouve donc

$$v = M_{ij}(x)M_{jk}(x)z.$$

Or la relation de cocycle (3.2.4 nous donne aussi $M_{ik} = M_{ij}M_{jk}$ puisque $M_{ki} = M_{ik}^{-1}$. Donc

$$v = M_{ik}(x)t$$

et la transitivité est établie.

On peut donc définir E comme le quotient de $\coprod_i U_i \times \mathbb{R}^n$ par cette relation d'équivalence et on vérifie que l'application continue évidente $E \to X$, qui vaut pr_1 composée avec l'inclusion de U_i dans X sur chaque morceau $U_i \times \mathbb{R}^n$, fait de E un fibré vectoriel. ∎

Notons aussi le lemme suivant :

Lemme 3.2.3. *Deux fibrés E et E' trivialisés dans un même recouvrement U_i de X et de matrices de transition associées $M_{ij}(x)$, $x \in U_i \cap U_j$, (resp. $M'_{ij}(x)$, $x \in U_i \cap U_j$) sont isomorphes comme fibrés réels topologiques sur X si et seulement si il existe des applications continues $N_i : U_i \to GL(n)$ telles que*

$$M'_{ij}(x) = N_i(x)M_{ij}(x)N_j^{-1}(x),\ \forall x \in U_i \cap U_j. \tag{3.2.5}$$

En particulier, le fibré vectoriel E de rang n est isomorphe au fibré trivial $\mathbb{R}^n \times X$ si et seulement si il existe des applications continues $N_i : U_i \to GL(n)$ telles que

$$M_{ij}(x) = N_i(x)N_j^{-1}(x),\ \forall x \in U_i \cap U_j.$$

Démonstration. En effet, si E et E' sont isomorphes, via un isomorphisme noté f, la restriction de f à $E_{U_i} \overset{\phi_i}{\cong} U_i \times \mathbb{R}^n$ fournit un isomorphisme

$$f_i : U_i \times \mathbb{R}^n \overset{\phi_i^{-1}}{\cong} E_{U_i} \cong E'_{U_i} \overset{\phi'_i}{\cong} U_i \times \mathbb{R}^n,$$

où les ϕ'_i sont les isomorphismes de trivialisation de E', qui est (par définition d'un morphisme de fibrés vectoriels) de la forme

$$f_i(x, v) = (x, N_i(x)v).$$

En d'autres termes, on a

$$f_i = \phi'_i \circ f_{|E_{U_i}} \circ \phi_i^{-1}.$$

Il vient donc

$$\phi'_{ij} := \phi'_i \circ {\phi'_j}^{-1} = f_i \circ \phi_i \circ f^{-1}_{|E_{U_i \cap U_j}} \circ f_{|E_{U_i \cap U_j}} \circ \phi_j^{-1} \circ f_j^{-1}$$

$$= f_i \circ \phi_i \circ \phi_j^{-1} \circ f_j^{-1} = f_i \circ \phi_{ij} \circ f_j^{-1}.$$

Ceci donne le résultat, en écrivant

$$f_i(x, v) = (x, N_i(x)),\ \phi_{ij}(x, v) = (x, M_{ij}(x)v) \text{ etc..}$$

■

Définition 3.2.4. *Les données de matrices $M_{ij}(x)$, $x \in U_i \cap U_j$ continues en x satisfaisant les conditions du lemme 3.2.1 sont appelées des 1-cocycles de Čech à coefficients dans le faisceau $\underline{\mathcal{C}}^0(GL_n)$ des fonctions continues à valeurs dans Gl_n, pour le recouvrement donné U_i de X.*

Les données de matrices $M_{ij} = N_i N_j^{-1}$, $x \in U_i \cap u_j$, où $N_i(x)$ est définie et continue sur U_i, sont appelées des 1-cobords de Čech.

L'espace des 1-cocycles modulo la relation de cobord donnée par la relation (3.2.5) est noté $\check{\mathrm{H}}^1(X, \mathcal{U}, \underline{\mathcal{C}}^0(GL_n))$, où $\mathcal{U}$ est le recouvrement $(U_i)_{i \in \mathbb{N}}$. La limite directe sur tous les recouvrements, ordonnés par la relation de raffinement, des ensembles $\check{\mathrm{H}}^1(X, \mathcal{U}, \underline{\mathcal{C}}^0(GL_n))$ (ce ne sont pas des groupes en général) est notée $H^1(X, \underline{\mathcal{C}}^0(GL_n))$.

Remarque 3.2.5. Rappelons d'après (3.1.3) que les données de matrices $N_i(x)$, $x \in U_i$ continues en x telles que $N_i N_j^{-1} = I_n$ sur $U_i \cap U_j$ décrivent exactement les sections globales du faisceau $\underline{\mathcal{C}}^0(GL_n)$.

Remarque 3.2.6. Toute la discussion qui précède peut se faire, si X est une variété différentiable de classe C^k, en remplaçant partout C^0 par C^k. De même si X est une variété complexe et qu'on considère $Gl_n(\mathbb{C})$, on peut remplacer les fonctions continues par les fonctions holomorphes, et la discussion précédente décrit alors les fibrés vectoriels holomorphes en termes de 1-cocycles de Čech à valeurs dans $\mathcal{O}(Gl_n(\mathbb{C}))$.

Différentielles de Čech

Notre espace X est désormais un espace topologique admettant une base d'ouverts dénombrable. On supposera aussi que les faisceaux considérés $\mathcal{F}$ sont des faisceaux de groupes abéliens sur X (avec souvent plus de structure, comme celle de K-espace vectoriel, $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{F}_p$). C'est pourquoi nous utiliserons la notation additive qui est beaucoup plus agréable, bien que dans le cas des faisceaux de fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{C}^*$, la structure de groupe soit donnée par le produit des fonctions.

Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I\subset\mathbb{N}}$ un recouvrement ouvert de X. Ici I peut être fini.

Définition 3.2.7. *Le groupe des k-cochaînes de Čech de X à valeurs dans $\mathcal{F}$ relativement à $\mathcal{U}$ est le groupe*

$$\check{C}^k(\mathcal{U},\mathcal{F}) := \prod_{J\subset I,|J|=k+1} \mathcal{F}(U_J),$$

où $U_J := \cap_{i\in J} U_i$.

La différentielle de Čech

$$\delta_k : \check{C}^k(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{C}^{k+1}(\mathcal{U},\mathcal{F})$$

est définie par :

$$\delta_k((a_J)_{J\subset I,|J|=k+1}) = (b_K)_{K\subset I,|K|=k+2}$$

où pour $K = \{i_0 < \ldots < i_{k+1}\}$,

$$b_K = b_{i_0,\ldots,i_{k+1}} = \sum_{l=0}^{l=k+1} (-1)^l a_{i_0,\ldots\hat{i_l}\ldots,i_{k+1}|U_K}.$$

Lemme 3.2.8. *On a $\delta_{k+1}\circ\delta_k = 0 : C^k(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to C^{k+2}(\mathcal{U},\mathcal{F})$.*

Démonstration. C'est un calcul explicite et les règles de signes sont précisément faites de façon à produire l'annulation $\delta_k\circ\delta_{k-1} = 0$. Avec les notations de la définition 3.2.7, on a

$$\delta_{k+1}((b_K)_{K\subset I,|K|=k+2}) = (c_L)_{L\subset I,|L|=k+3},$$

où pour $L = \{i_0 < \ldots < i_{k+2}\}$,

$$c_L = \sum_{l=0}^{l=k+2} (-1)^l b_{i_0,\ldots\hat{i_l}\ldots,i_{k+2}|U_L}. \tag{3.2.6}$$

Or on a, pour $b = \delta_k(a)$, $a = (a_J)_{J\subset I,|J|=k+1}$,

$$(-1)^l b_{i_0,\ldots\hat{i_l}\ldots,i_{k+2}} = \sum_{l'=0}^{l'=l-1} (-1)^{l+l'} a_{i_0,\ldots,\hat{i_{l'}}\ldots\hat{i_l}\ldots,i_{k+1}|U_K} - \sum_{l'=l+1}^{l'=k+1} (-1)^{l+l'} a_{i_0,\ldots,\hat{i_l}\ldots\hat{i_{l'}},i_{k+1}|U_K},$$

où $K = \{i_0,\ldots\hat{i_l}\ldots,i_{k+2}\}$. On s'aperçoit donc que chaque terme $a_{i_0,\ldots\hat{i_l}\ldots\hat{i_{l'}},i_{k+1}|U_L}$ apparaît deux fois et avec des signes opposés dans la somme (3.2.6), d'où le résultat.

∎

Définition 3.2.9. *Le groupe de cohomologie de Čech* $\check{H}^k(X,\mathcal{U},\mathcal{F})$ *est défini comme le quotient*

$$\frac{\operatorname{Ker}(\delta_k : \check{C}^k(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{C}^{k+1}(\mathcal{U},\mathcal{F}))}{\operatorname{Im}(\delta_{k-1} : \check{C}^{k-1}(\mathcal{U},\mathcal{F}) \to \check{C}^k(\mathcal{U},\mathcal{F}))}.$$

On définit finalement le k-ième groupe de cohomologie $H^k(X,\mathcal{F})$ comme la limite directe des groupes $\check{\mathrm{H}}^k(X,\mathcal{U},\mathcal{F})$ sur tous les recouvrements ordonnés par la relation de raffinement.

La formule (3.1.3) nous dit que

$$\Gamma(X,\mathcal{F}) = H^0(X,\mathcal{F}).$$

Le lemme 3.2.3 dans le cas $n = 1$ (où le groupe $Gl(n)$ est commutatif) nous donne :

Théorème 3.2.10. *L'ensemble des classes d'isomorphismes de fibrés en droites continus réels (fibrés vectoriels de rang* 1*) sur* X *est égal à* $H^1(X,\underline{\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^*)})$. *De même, l'ensemble des classes d'isomorphismes de fibrés en droites continus complexes (fibrés vectoriels complexes de rang* 1*) sur* X *est égal à* $H^1(X,\underline{\mathcal{C}^0(\mathbb{C}^*)})$. *Si* X *est une variété différentiable de classe* C^k*, l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés en droites de classe* C^k *est donné par la même formule, où le faisceau des fonctions continues inversibles est remplacé par le faisceau des fonctions inversibles de classe* C^k*. Enfin, si* X *est une variété complexe, l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés en droites holomorphes sur* X *est donné par la formule*

$$\operatorname{Pic}(X) = H^1(X,\mathcal{O}_X^*).$$

3.2.2 Suite exacte longue de cohomologie

On va montrer le théorème suivant :

Théorème 3.2.11. *Soit* X *un espace topologique à base d'ouverts dénombrable et soit*

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{\phi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H} \to 0$$

une suite exacte courte de faisceaux de groupes abéliens sur X*. Alors il existe une suite exacte longue de groupes abéliens*

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(X,\mathcal{F}) \to H^0(X,\mathcal{G}) \to H^0(X,\mathcal{H}) \to H^1(X,\mathcal{F}) \to H^1(X,\mathcal{G}) \\ \to H^1(X,\mathcal{H}) \to H^2(X,\mathcal{F}) \to \ldots \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Démonstration. Construisons les flèches dites de connexion

$$\alpha_i : H^i(X,\mathcal{H}) \to H^{i+1}(X,\mathcal{F}).$$

Soit $a \in H^i(X, \mathcal{H})$ et supposons que a est représentée, dans un recouvrement ouvert dénombrable $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de X, par un i-cocycle $(a_J)_{J \subset I, |J| = i+1}$ à coefficients dans $\mathcal{H}$ relativement au recouvrement $\mathcal{U}$, c'est-à-dire $a_J \in \mathcal{H}(U_J)$. Quitte à restreindre les ouverts du recouvrement, on peut supposer, puisque le morphisme de faisceaux $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$ est surjectif, qu'il existe $b_J \in \mathcal{G}(U_J)$ dont l'image dans $\mathcal{H}(U_J)$ est égale à a_J. On observe alors que $\delta_i(b_J)$, qui est a priori un $i+1$-cocycle (et même un cobord) à coefficients dans $\mathcal{G}$ est en fait un $i+1$-cocycle à coefficients dans $\mathcal{F}$, puisqu'il s'annule dans $\mathcal{H}$.

On pose $\alpha_i(a) =$ classe dans $H^{i+1}(X, \mathcal{F})$ du $i+1$-cocycle $\delta_i(b_J)$ à coefficients dans $\mathcal{F}$. Pour justifier cette définition, il faut montrer que $\alpha_i(a)$ ne dépend que de a et non des représentants choisis. Or si on change le choix des relèvements b_J en $b'_J = b_J + c_J$, on a $c_J \in \mathcal{F}(U_J)$ et donc

$$\delta_i(b'_J) = \delta_i(b_J) + \delta_i(c_J),$$

où $\delta_i(c_J)$ est un $i+1$-cobord de $\mathcal{F}$ et donc nul en cohomologie.

Si on change le représentant de a, soit $(a'_I) = (a_I) + \delta_{i-1}(c_J)$, où $(c_J)_{J \subset I, |J| = i}$ est une $i-1$-cochaîne de $\mathcal{H}$, on peut quitte à raffiner le recouvrement, supposer que les c_J se relèvent en c'_J dans $\mathcal{G}(U_J)$ et alors on a le relèvement $(b'_I) = (b_I) + \delta(c'_J)$ de (a'_I). Mais alors $\delta(b'_I) = \delta(b_I)$ comme cochaînes de $\mathcal{G}$ et donc de $\mathcal{F}$.

Ayant construit ces flèches de connexion α_i, il reste à montrer l'exactitude de la suite exacte longue (3.2.7). Notons qu'il est clair par définition de α_i que le composé de $\alpha_i : H^i(X, \mathcal{H}) \to H^{i+1}(X, \mathcal{F})$ et de la flèche naturelle

$$\phi_{i+1} : H^{i+1}(X, \mathcal{F}) \to H^{i+1}(X, \mathcal{G})$$

est nul. De même il est clair, également par la définition de α_i, que le composé de la flèche naturelle

$$\psi_i : H^i(X, \mathcal{G}) \to H^i(X, \mathcal{H})$$

et de $\alpha_i : H^i(X, \mathcal{H}) \to H^{i+1}(X, \mathcal{F})$ est nul, puisque l'image de $H^i(X, \mathcal{G}) \to H^i(X, \mathcal{H})$ consiste en classes de i-cocycles de $\mathcal{H}$ qui se relèvent en des i-cocycles de $\mathcal{G}$.

Il reste à montrer l'exactitude, ce qui n'est pas très difficile. Vérifions par exemple que $\operatorname{Ker} \alpha_i = \operatorname{Im} \psi_i$ et $\operatorname{Ker} \phi_{i+1} = \operatorname{Im} \alpha_i$: Si une classe $a \in H^i(X, \mathcal{H})$ est dans $\operatorname{Ker} \alpha_i$, elle est, à condition de prendre un recouvrement adéquat, représentée par un i-cocycle $(a_K)_{|K| = i+1}$ de $\mathcal{H}$ tel qu'un relèvement $(b_K)_{|K| = i+1}$ de (a_K) dans $\mathcal{G}$ satisfasse la propriété que

$$\delta(b_K) \in \check{\mathrm{C}}^{i+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$$

est un $i+1$-cobord de $\mathcal{F}$. On a donc $\delta((b_K)_{|K| = i+1}) = \delta((c_K)_{|K| = i+1})$ avec $c_K \in \mathcal{F}(U_K)$. Mais alors $(b'_K) = (b_K - c_K)$ est un relèvement de (a_K) dans $\mathcal{G}$ qui satisfait $\delta(b'_K) = 0$. Donc a est l'image par ψ_i de la classe de (b'_K) dans $H^i(X, \mathcal{G})$.

De même, si $c \in \operatorname{Ker} \phi_{i+1}$, c est représentée par un $i+1$-cocycle c_I de $\mathcal{F}$ qui est un cobord de $\mathcal{G}$: $\phi(c_I) = \delta(b_J)$, où b_J est une i-cochaîne de $\mathcal{G}$. Soit

$(a_J) := \psi(b_J)$, qui est donc une i-cochaîne de $\mathcal{H}$. On a clairement $\delta(a_J) = 0$ car $\delta(a_J) = \delta(\psi(b_J)) = \psi(\delta b_J)$ et $\delta(b_J)$ est à coefficients dans $\mathcal{F}$ donc annulée par ψ. Donc (a_J) est un i-cocycle de $\mathcal{H}$, et par construction l'image de sa classe dans $H^i(X, \mathcal{H})$ par α_i est égale à c.

■

3.2.3 Suite exacte exponentielle et première classe de Chern

Appliquons le théorème 3.2.11 à la suite exacte exponentielle (voir exemple 3.1.15). On obtient la suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 \to H^0(X, \mathbb{Z}) \to C^0(X, \mathbb{C}) \to C^0(X, \mathbb{C}^*) \to H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \underline{C}^0(\mathbb{C})) \\ \to H^1(X, \underline{C}^0(\mathbb{C})^*) \to H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X, \underline{C}^0(\mathbb{C})) \to \dots \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

On a maintenant :

Théorème 3.2.12. *Soit X comme ci-dessus et supposons que X admette des partitions de l'unité subordonnées à tout recouvrement ouvert. Alors pour tout faisceau $\mathcal{F}$ de $\underline{C}^0(\mathbb{R})$-modules, on a*

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0, \, \forall i > 0.$$

Si X est une variété de classe C^k, on a le même résultat avec les faisceaux de $\underline{C}^k$-modules.

Démonstration. Montrons d'abord que pour X, $\mathcal{F}$ comme ci-dessus, on a $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$. Un élément de $H^1(X, \mathcal{F})$ est représenté par un 1-cocycle $a_{ij} \in \mathcal{F}(U_{ij})$, $i < j$, pour un recouvrement dénombrable U_i de X. On a donc

$$a_{ij} + a_{jk} - a_{ik} = 0 \tag{3.2.9}$$

sur U_{ijk}, $i < j < k$.

Soit f_i une partition de l'unité subordonnée à ce recouvrement. On a donc $\sum_i f_i = 1$, f_i est nulle en dehors d'un fermé contenu dans U_i, et pour tout $x \in X$, il existe un voisinage $U_x \subset X$ de x dans X tel que $f_i = 0$ sur U_x sauf pour un nombre fini d'indices i.

Posons $a_i = \sum_l f_l a_{il}$ avec la convention $a_{ii} = 0$, $a_{il} = -a_{li}$ pour $i > l$. Notons que a_i est bien défini comme section de $\mathcal{F}$ sur U_i. En effet, la somme est localement finie, et $f_l a_{il}$ qui n'est a priori définie que sur U_{il} comme l'est a_{il}, s'étend en fait en une section de $\mathcal{F}$ sur U_i, qui est nulle sur $U_i \setminus U_{il}$.

On a sur U_{ij}

$$a_i - a_j = \sum_l f_l a_{il} - \sum_l f_l a_{jl}.$$

Comme $a_{il} - a_{jl} = a_{ij}$ d'après (3.2.9), on obtient

$$a_i - a_j = \sum_l f_l a_{ij} = a_{ij}$$

et donc (a_{ij}) est un 1-cobord.

On pourrait traiter le cas général de la même façon. Une autre manière consiste à exploiter la suite exacte longue (3.2.7) et d'en déduire par récurrence sur i que $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $i > 0$. Pour cela on utilise l'existence pour tout $\mathcal{F}$ d'un faisceau $\mathcal{G}$ de $\underline{\mathcal{C}}^0$-modules satisfaisant

$$H^i(X, \mathcal{G}) = 0 \text{ pour tout } i > 0 \tag{3.2.10}$$

et muni d'une application injective

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G}$$

de faisceaux de $\underline{\mathcal{C}}^0$-modules. On complète alors en une suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

où le quotient $\mathcal{H}$ est aussi un faisceau de $\underline{\mathcal{C}}^0$-modules. À cause de la propriété (3.2.10) satisfaite par $\mathcal{G}$, la suite exacte longue de cohomologie se réduit à

$$H^i(X, \mathcal{H}) \cong H^{i+1}(X, \mathcal{F})$$

pour $i \geq 1$, et comme on a déjà $H^1(X, \mathcal{F}) = 0$, on en déduit par récurrence $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ pour $i \geq 1$.

Pour la faisceau $\mathcal{G}$, on peut prendre le faisceau des sections discontinues de $\mathcal{F}$ (faisceau de Godement) :

$$\mathcal{G}(U) = \prod_{x \in U} \mathcal{F}_x.$$

∎

Notons que les hypothèses sont satisfaites si X est une variété topologique. On en déduit :

Corollaire 3.2.13. *Soit X une variété topologique. Alors le groupe $H^1(X, \mathbb{Z})$ s'identifie au quotient du groupe des fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ par celui des exponentielles de fonctions continues sur X à valeurs dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Cela résulte de la suite exacte courte

$$0 \to H^0(X, \mathbb{Z}) \to C^0(X, \mathbb{C}) \to C^0(X, \mathbb{C}^*) \to H^1(X, \mathbb{Z}) \to 0$$

déduite de (3.2.8) et de l'annulation $H^1(X, \underline{C}^0(\mathbb{C})) = 0$ donnée par le théorème 3.2.12. ∎

On a enfin :

Théorème 3.2.14. *Avec les mêmes hypothèses sur X, l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés en droites complexes de classe C^0 sur X s'identifie à $H^2(X, \mathbb{Z})$.*

Démonstration. La suite exacte longue (3.2.8) et les annulations

$$H^1(X, \underline{C}^0(\mathbb{C})) = 0,\ H^2(X, \underline{C}^0(\mathbb{C})) = 0$$

données par le théorème 3.2.12 fournissent l'isomorphisme

$$H^1(X, \underline{C}^0(\mathbb{C}^*)) \cong H^2(X, \mathbb{Z}).$$

On conclut alors avec le théorème 3.2.10 qui identifie $H^1(X, \underline{C}^0(\mathbb{C}^*))$ à l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés en droites complexes de classe C^0 sur X. ■

Définition 3.2.15. *Étant donné un fibré en droites complexes E de classe C^0 sur un espace topologique X, on note $c_1(E) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ et on appelle première classe de Chern de E la classe obtenue par le théorème 3.2.14.*

Chapitre 4

Cohomologies de de Rham et de Dolbeault

4.1 Cohomologie de de Rham et comparaison

Soit X une variété différentiable, de classe C^∞ pour simplifier. On a la différentielle extérieure $d : A^k(X) \to A^{k+1}(X)$ agissant sur les formes différentielles de classe C^∞, et la formule

$$d \circ d = 0 : A^k(X) \to A^{k+2}(X).$$

On peut donc définir le k-ième groupe de cohomologie de de Rham de X par

$$H^k_{dR}(X, \mathbb{R}) := \frac{\operatorname{Ker}(d : A^k(X) \to A^{k+1}(X))}{\operatorname{Im}(d : A^{k-1}(X) \to A^k(X))}. \tag{4.1.1}$$

On a alors (on peut attribuer ce résultat à Weil, mais il s'agit plutôt de la synthèse des résultats de de Rham et de Leray) :

Théorème 4.1.1. *On a un isomorphisme naturel*

$$H^k_{dR}(X, \mathbb{R}) \cong H^k(X, \mathbb{R}).$$

Remarque 4.1.2. On ne peut pas calculer la cohomologie à coefficients entiers $H^k(X, \mathbb{Z})$ via les formes différentielles. Cependant, on montre facilement que $H^i(X, \mathbb{R}) = H^i(X, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}$ (on pourrait mettre n'importe quel corps de caractéristique 0 dans cette égalité, dite de changement de coefficients). Ainsi le théorème 4.1.1 entraîne que les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de cohomologie de de Rham $H^k_{dR}(X, \mathbb{R})$ déterminent le rang des groupes correspondants $H^k(X, \mathbb{Z})$.

Démonstration du théorème 4.1.1. Montrons tout d'abord explicitement le résultat en petit degré, disons $k \leq 1$. Pour $k = 0$, le terme de gauche consiste par définition en les fonctions annulées par d, donc localement constantes, et le terme de droite en les sections globales du faisceau constant $\mathbb{R}$, donc on a bien l'égalité.

Soit maintenant $k = 1$. Partons d'une classe $a \in H^1_{dR}(X, \mathbb{R})$ qui est la classe d'une 1-forme fermée $\alpha \in A^1(X)$. Comme α est localement exacte par le lemme de Poincaré 2.1.13, on peut trouver un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i\in I}$ de X, avec $\alpha_{|U_i} = d\alpha_i$. Sur $U_i \cap U_j$, on a alors $d(\alpha_i - \alpha_j) = 0$ et donc, en supposant comme on peut le faire en restreignant le recouvrement, que $U_i \cap U_j$ est connexe, $\alpha_i - \alpha_j$ est une constante $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$. Il est évident que (α_{ij}) est un 1-cocycle de Čech à coefficients dans $\mathbb{R}$ pour le recouvrement (U_i). Si on change les primitives α_i en $\alpha'_i = \alpha_i + \beta_i$, les β_i sont constantes sur U_i (supposés connexes) et donc $\alpha'_{ij} = \alpha_{ij} + \beta_i - \beta_j$ différe de α_{ij} par un cobord de Čech. De même, si on change le représentant α de a, soit $\alpha' = \alpha + df$, où f est une fonction de classe C^∞ sur X, on peut prendre $\alpha'_i = \alpha_i + f$ et alors $\alpha'_{ij} = \alpha_{ij}$. Donc la classe du cocycle α_{ij} dans $H^1(X, \mathbb{R})$ ne dépend que de la classe $a \in H^1_{dR}(X, \mathbb{R})$.

Dans l'autre sens, partons d'une classe $\alpha \in H^1(X, \mathbb{R})$ représentée par un 1-cocycle de Čech $(\alpha_{ij})_{i<j}$, avec $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ pour $U_{ij} = U_i \cap U_j$ non vide, pour un recouvrement adéquat de X (on suppose en particulier que les U_i sont connexes, ainsi que les $U_i \cap U_j$). Soit f_i une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (U_i). Posons

$$a_i = \sum_j \alpha_{ij} f_j,$$

où l'on rappelle que $\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$ par convention. Les fonctions a_i sont de classe C^∞ sur U_i, et l'on a sur $U_i \cap U_j$

$$a_i - a_j = \sum_l \alpha_{il} f_l - \sum_l \alpha_{jl} f_l = \sum_l \alpha_{ij} f_l = \alpha_{ij}.$$

On en déduit que $da_i - da_j = 0$ sur $U_i \cap U_j$, et donc on a construit une 1-forme fermée η qui est égale à da_i sur U_i. On lui associe sa classe a dans $H^1_{dR}(X, \mathbb{R})$.

On vérifie que a ne dépend que de $\alpha \in H^1(X, \mathbb{R})$ et que ces deux constructions sont inverses l'une de l'autre.

Le cas général résulte de l'argument suivant qui illustre la puissance de la théorie des faisceaux : Tout d'abord, on a sur X la résolution suivante (dite de de Rham) du faisceau constant : Pour tout $i \geq 0$, notons $\mathcal{A}^i_X$ le faisceau des sections de classe C^∞ du fibré Ω^i_X des i-formes différentielles, qui à tout ouvert $U \subset X$ associe $A^i(U)$.

La différentielle extérieure sur les formes de degré i peut être vue comme un morphisme de faisceaux

$$d : \mathcal{A}^i_X \to \mathcal{A}^{i+1}_X.$$

On a

$$d \circ d = 0 : \mathcal{A}^i_X \to \mathcal{A}^{i+2}_X.$$

De plus, pour $i > 0$,

$$\mathrm{Ker}\,(d : \mathcal{A}^i_X \to \mathcal{A}^{i+1}_X) = \mathrm{Im}\,(d : \mathcal{A}^{i-1}_X \to \mathcal{A}^i_X)$$

par le lemme de Poincaré. Enfin, pour $i = 0$, $\ker d : \mathcal{A}^0_X \to \mathcal{A}^1_X$ s'identifie au faisceau des fonctions localement constantes.

On a donc établi qu'on a un complexe exact de faisceaux sur X :

$$0 \to \mathbb{R} \to \mathcal{A}^0_X \to \mathcal{A}^1_X \to \ldots \mathcal{A}^n_X \to 0,$$

où $n = \dim X$ et les morphismes sauf la première inclusion sont donnés par la différentielle extérieure.

Les faisceaux $\mathcal{A}^j_X$ sont des faisceaux de $\underline{\mathcal{C}}^\infty$-modules et donc, par le théorème 3.2.12, on a $H^i(X, \mathcal{A}^j_X) = 0$ pour $i > 0$. Le théorème 4.1.1 résulte alors du théorème 4.1.3 suivant :

■

Théorème 4.1.3. *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de groupes abéliens sur un espace topologique X. Supposons qu'on ait une résolution de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire un complexe exact*

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}^0 \to \mathcal{F}^1 \to \mathcal{F}^2 \to \ldots,$$

telle que $H^i(X, \mathcal{F}^j) = 0$ pour $i > 0$. Alors on a pour tout i :

$$H^i(X, \mathcal{F}) = \frac{\mathrm{Ker}\,(\Gamma(X, \mathcal{F}^i) \to \Gamma(X, \mathcal{F}^{i+1}))}{\mathrm{Im}\,(\Gamma(X, \mathcal{F}^{i-1}) \to \Gamma(X, \mathcal{F}^i))}.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{G}$ le quotient de $\mathcal{F}^0$ par $\mathcal{F}$, ou encore $\mathcal{G} = \mathrm{Im}\,(\mathcal{F}^0 \to \mathcal{F}^1)$. Alors d'une part on a une suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}^0 \to \mathcal{G} \to 0,$$

d'autre part on a une résolution de $\mathcal{G}$,

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{F}^1 \to \mathcal{F}^2 \ldots.$$

On en déduit une suite exacte longue

$$\begin{gathered} 0 \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{F}^0) \to H^0(X, \mathcal{G}) \\ \to H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{F}^0) \to H^1(X, \mathcal{G}) \\ \to H^2(X, \mathcal{F}) \to H^2(X, \mathcal{F}^0) \to H^2(X, \mathcal{G}) \ldots \end{gathered}$$

Comme $H^i(X, \mathcal{F}^0) = 0$ pour $i > 0$, cette suite exacte longue nous fournit

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong H^0(X, \mathcal{G})/H^0(X, \mathcal{F}^0) \tag{4.1.2}$$

et

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong H^{i-1}(X, \mathcal{G}) \tag{4.1.3}$$

pour $i \geq 2$. Comme on a

$$H^0(X, \mathcal{G}) = \mathrm{Ker}\,(H^0(X, \mathcal{F}^1) \to H^0(X, \mathcal{F}^2)),$$

(4.1.2) montre le résultat pour tout $\mathcal{F}$ et $i = 1$, tandis que (4.1.3) entraîne le résultat pour tout i par récurrence sur i.

■

Corollaire 4.1.4. *Si X est une variété différentiable de dimension n, on a $H^i(X, \mathbb{R}) = 0$ pour $i > n$.*

En effet, comme $A^i(X) = 0$ pour $i > n$, on a aussi $H^i_{dR}(X, \mathbb{R}) = H^i(X, \mathbb{R}) = 0$ pour $i > n$.

Le théorème 4.1.1 permet aussi de calculer $H^n(X, \mathbb{R})$:

Théorème 4.1.5. *Soit X une variété compacte connexe orientée de dimension n. Alors on a $H^n(X, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, l'isomorphisme étant donné par*

$$\alpha \mapsto \int_X \alpha,$$

où α est une n-forme sur X. (Cette intégrale ne dépend, d'après la formule de Stokes, que de la classe de cohomologie de α.)

Démonstration. On veut montrer qu'une n-forme α sur X est exacte si et seulement si son intégrale $\int_X \alpha$ est nulle. Comme noté ci-dessus, le fait que ce soit une condition nécessaire résulte de le formule de Stokes. Dans l'autre sens, supposons $\int_X \alpha = 0$. Le fait que $_alpha$ est exacte va découler de la proposition suivante :

Proposition 4.1.6. *Soit α une n-forme de classe C^∞ à support compact sur la boule ouverte $\mathbb{B}^n$. Si $\int_{\mathbb{B}^n} \alpha = 0$, on a $\alpha = d\beta$, où β est une $n-1$-forme de classe C^∞ à support compact sur $\mathbb{B}^n$.*

Montrons d'abord comment la proposition 4.1.6 entraîne le résultat. Choisissons un point $x \in X$. Comme X est connexe et compacte, on peut couvrir X par un nombre fini d'ouverts U_i difféomorphes à $\mathbb{B}^n$ et contenant x. Choisissons une boule U_x contenant x et contenue dans chacun des U_i, et soit μ une n-forme à support compact contenu dans U_x, telle que $\int_{U_x} \mu = 1$. Notons que μ, étant à support compact, s'étend en une n-forme de classe C^∞ sur U_i ou sur X, nulle en dehors de U_x. Soit f_i une partition de l'unité subordonnée au recouvrement U_i.Pour chaque i, la forme $f_i\alpha_i$ est à support compact contenu dans U_i. Soit $\mu_i := \int_{U_i} f_i\alpha = \int_X f_i\alpha$. D'après la proposition 4.1.6, on a

$$f_i\alpha - \mu_i\mu = d\beta_i,$$

où β_i est à support compact contenu dans U_i, et donc s'étend en une $n-1$-forme de classe C^∞ sur X, nulle en dehors de U_i. On a $\alpha = \sum_i f_i\alpha$ et donc

$$0 = \int_X \alpha = \sum_i \int_X f_i\alpha = \sum_i \mu_i.$$

Il vient alors :

$$\alpha = \sum_i f_i\alpha = \sum_i (f_i\alpha - \mu_i\mu) = \sum_i d\beta_i = d(\sum_i \beta_i).$$

■

Preuve de la proposition 4.1.6. C'est une généralisation du cas $n = 1$, qui dit que si f est une fonction à support compact dans $]0, 1[$ et d'intégrale nulle, elle admet une primitive à support compact dans $]0, 1[$, à savoir $F(t) = \int_0^t f(u)du$.

Dans le cas général, on va raisonner par récurrence sur n. Remarquons tout d'abord que la preuve donnée ci-dessous montre que si la proposition 4.1.6 est vraie en dimension $n-1$, alors le théorème 4.1.5 est vrai en dimension $n-1$. On peut donc supposer par l'hypothèse de récurrence qu'une forme de degré $n-1$ sur $\mathbb{S}^{n-1}$ est exacte si et seulement si son intégrale sur $\mathbb{S}^{n-1}$ est nulle. Notons maintenant qu'une n-forme α sur $\mathbb{B}^n$ s'écrit

$$\alpha = d\beta,$$

pour une $n-1$-forme de classe C^∞ sur un voisinage de $\overline{\mathbb{B}^n}$. Lorsque α est à support compact, β est fermée au voisinage de $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{B}^n$ et satisfait

$$\int_{\mathbb{S}^{n-1}} \beta_{|\mathbb{S}^{n-1}} = \int_{\mathbb{B}^n}$$

par la formule de Stokes. On a donc $\beta_{|\mathbb{S}^{n-1}} = d\phi$, et plus généralement, puisqu'un voisinage de $\mathbb{S}^{n-1}$ dans la boule fermée $\overline{\mathbb{B}^n}$ est difféomorphe à $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, \epsilon]$, on a aussi $\beta = d\phi$ dans un voisinage de $\mathbb{S}^{n-1}$ dans $\overline{\mathbb{B}^n}$. La forme ϕ s'étend en une $n-1$-forme $\tilde{\phi}$ sur $\mathbb{B}^n$, et $\beta - d\tilde{\phi}$ est alors à support compact dans $\mathbb{B}^n$, et satisfait aussi $d\beta' = \alpha$.

■

4.2 Cohomologie des fibrés vectoriels holomorphes

4.2.1 Opérateur $\overline{\partial}$ sur un fibré holomorphe

Soit X une variété complexe et $E \to X$ un fibré vectoriel complexe sur X.

Définition 4.2.1. *Une connexion-$\overline{\partial}$ sur E est un opérateur $\mathbb{C}$-linéaire*

$$\overline{\partial}_E : \Gamma(X, E) \to \Gamma(X, E \otimes \Omega_X^{0,1}) =: A^{0,1}(X, E)$$

qui satisfait la règle de Leibniz relativement à l'opérateur $\overline{\partial}$:

$$\overline{\partial}_E(f\sigma) = f\overline{\partial}_E(\sigma) + \sigma \otimes \overline{\partial} f$$

pour toute section σ de E et toute fonction f à valeurs complexes sur X, de classe C^∞.

Remarque 4.2.2. La formule de Leibniz entraîne immédiatement que si U est un ouvert de X, alors $\overline{\partial}_E(\sigma)_{|U}$ ne dépend que de $\sigma_{|U}$.

Remarque 4.2.3. La formule de Leibniz entraîne aussi par le lemme 2.2.3 que $\overline{\partial}_E(f\sigma) = f\overline{\partial}_E(\sigma)$ si f est une fonction holomorphe sur $U \subset X$ et σ est une section de E sur U.

Soient maintenant X une variété complexe et E un fibré vectoriel *holomorphe* sur X.

Théorème 4.2.4. *Un tel fibré E possède une connexion-$\overline{\partial}$ canoniquement déterminée par la structure holomorphe de E.*

Démonstration. La structure holomorphe de E est donnée par les trivialisations holomorphes $\phi_U : E_U \cong U \times \mathbb{C}^r$ ayant la propriété que $\phi_V \circ \phi_U^{-1} : U \cap V \times \mathbb{C}^r \to U \cap V \times \mathbb{C}^r$ est donné par $(x, u) \mapsto (x, M(x)u)$ où $M(x)$ est une matrice (r, r) à coefficients holomorphes en x.

Soit σ une section de E. On définit $\overline{\partial}_E(\sigma)$ dans les ouverts U comme ci-dessus par

$$\overline{\partial}_E(\sigma) = \phi_U^{-1}(\overline{\partial}\sigma_1, \ldots, \overline{\partial}\sigma_r)$$

avec $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r) = \phi_U(\sigma)$. Ici on a pratiqué un petit abus de notation en appelant également ϕ_U les isomorphismes induits par ϕ_U :

$$\Gamma(U, E_U) \cong C^\infty(U, \mathbb{C})^r,$$

$$A^{0,1}(U, E_U) \cong A^{0,1}(U)^r.$$

Il est clair que $\overline{\partial}_E(\sigma)^U \in A^{0,1}(U, E)$ ainsi définie satisfait la règle de Leibniz, puisque l'opérateur $\overline{\partial}$ sur les fonctions la satisfait (cf. Lemme 2.2.4).

Il faut vérifier que la connexion $\overline{\partial}$ ainsi construite sur E_U ne dépend pas du choix de la trivialisation holomorphe choisie, ou encore que sur $U \cap V$, on a

$$\phi_V \circ \phi_U^{-1}(\overline{\partial}\sigma_1, \ldots, \overline{\partial}\sigma_r) = (\overline{\partial}\tau_1, \ldots, \overline{\partial}\tau_r), \tag{4.2.4}$$

avec $(\tau_1, \ldots, \tau_r) = \phi_V \circ \phi_U^{-1}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$. Or on a

$$(\tau_1, \ldots, \tau_r) = M_{VU}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r),$$

où la matrice M_{VU} est holomorphe en x. Appliquant les lemmes (2.2.3) et (2.2.4), on trouve que

$$(\overline{\partial}\tau_1, \ldots, \overline{\partial}\tau_r) = M_{VU}(\overline{\partial}\sigma_1, \ldots, \overline{\partial}\sigma_r)$$

ce qui est exactement (4.2.4). ∎

L'intérêt de cet opérateur $\overline{\partial}_E$ réside dans l'énoncé suivant :

Lemme 4.2.5. *Les sections holomorphes de E sont exactement les sections différentiables σ de E satisfaisant la condition*

$$\overline{\partial}_E \sigma = 0.$$

Démonstration. Une section σ de E est holomorphe si et seulement si dans des trivialisations holomorphes locales de E,

$$\phi_U : E \cong U \times \mathbb{C}^r,$$

on a $\phi_U \circ \sigma(x) = (x, (\sigma_1(x), \ldots, \sigma_r(x)))$, où les fonctions $\sigma_i(x)$ sont holomorphes en x. Par ailleurs, dans une telle trivialisation, on a aussi par définition :

$$\phi_U(\overline{\partial}_E \sigma) = (\overline{\partial}\sigma_1, \ldots, \overline{\partial}\sigma_r).$$

Le lemme résulte donc immédiatement du fait que les fonctions σ_i définies sur U sont holomorphes si et seulement si elles sont annulées par l'opérateur $\overline{\partial}$ (cf. Lemme 2.2.3).

4.2.2 Résolution de Dolbeault

Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang n sur une variété complexe X. On lui associe le faisceau $\mathcal{E}$ des sections holomorphes de E. C'est un fibré de $\mathcal{O}_X$-modules libres de rang $r = \text{rang}(E)$, c'est-à-dire localement isomorphe à $\mathcal{O}_X^r$. Notons que le faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{E}$ détermine E de la façon suivante : Notre faisceau $\mathcal{E}$ de $\mathcal{O}_X$-modules libres de rang r admet des trivialisations locales

$$\phi_i : \mathcal{E}_{|U_i} \cong \mathcal{O}_{U_i}^r$$

sur les ouverts U_i d'un recouvrement de X. Sur $U_i \cap U_j$, $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ est un automorphisme de $\mathcal{O}_{U_i \cap U_j}^r$, donné par une matrice inversible M_{ij} de fonctions holomorphes. On obtient ainsi un 1-cocycle de matrices à coefficients dans le faisceau $Gl_r(\mathcal{O}_X)$ qui détermine E (cf. Théorème 3.2.2).

Par définition, on pose

$$H^i(X, E) := H^i(X, \mathcal{E})$$

et on va donner un moyen de calculer $H^i(X, \mathcal{E})$.

Tout d'abord, on notera $\mathcal{A}^0(E)$ le faisceau des sections de classe C^∞ de E, et $\mathcal{A}^{0,i}(E)$ le faisceau des sections C^∞ du fibré vectoriel complexe $E \otimes \Omega_X^{0,i}$. En particulier $\mathcal{A}^0(E) = \mathcal{A}^{0,0}(E)$. L'opérateur $\overline{\partial}_E$ fournit (par la remarque 4.2.2) un morphisme de faisceaux

$$\overline{\partial}_E : \mathcal{A}^0(E) \to \mathcal{A}^{0,1}(E).$$

(Notons que ce morphisme n'est pas induit par un morphisme de fibrés vectoriels, ou encore n'est pas un morphisme de faisceaux de $\underline{\mathcal{C}}^\infty$-modules ; en fait c'est un opérateur différentiel d'ordre 1.) Plus généralement, il fournit un opérateur

$$\overline{\partial}_E : \mathcal{A}^{0,i}(E) \to \mathcal{A}^{0,i+1}(E)$$

pour tout i, défini dans des trivialisations locales holomorphes $\phi_U : E_U \cong U \times \mathbb{C}^r$ par

$$\overline{\partial}_E(\sigma) := \phi_U^{-1}(\overline{\partial}\sigma_1, \ldots, \overline{\partial}\sigma_r), \ \phi_U(\sigma) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r).$$

On a

$$\overline{\partial}_E \circ \overline{\partial}_E = 0 : A^{0,i}(E) \to A^{0,i+2}(E),$$

comme on le vérifie dans des trivialisations locales, où cela résulte du lemme 2.2.7. On a une inclusion naturelle de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{A}^0(E)$ et le lemme 4.2.5 nous dit que

$$\mathcal{E} = \mathrm{Ker}\,(\overline{\partial}_E : \mathcal{A}^0(E) \to \mathcal{A}^{0,1}(E)). \tag{4.2.5}$$

Le théorème suivant établit la résolution de Dolbeault d'un fibré vectoriel holomorphe :

Théorème 4.2.6. *Soit E un fibré vectoriel holomorphe sur une variété complexe X de dimension n. On a une suite exacte longue de faisceaux*

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{A}^0(E) \to \mathcal{A}^{0,1}(E) \to \mathcal{A}^{0,2}(E) \ldots \to \mathcal{A}^{0,n}(E) \to 0,$$

où toutes les flèches sauf la première sont données par l'opérateur $\overline{\partial}_E$.

Démonstration. La première flèche est l'inclusion naturelle de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{A}^0(E)$ et on a déjà vu l'exactitude en $\mathcal{A}^0(E)$, donnée par (4.2.5). Le fait qu'on ait un complexe de faisceau est dû à l'identité

$$\overline{\partial}_E \circ \overline{\partial}_E = 0 : \mathcal{A}^{0,i}(E) \to \mathcal{A}^{0,i+2}(E),$$

qui se démontre localement : comme localement E est trivial et $\overline{\partial}_E$ est une somme de copies de $\overline{\partial}$ agissant sur les fonctions où les $(0,i)$-formes de X, cette identité résulte du lemme 2.2.7. Finalement, l'exactitude en $\mathcal{A}^{0,i}(E)$, $i > 0$, se montre localement et est une conséquence du lemme de Dolbeault 2.2.8, qui est le cas où le fibré E est le fibré trivial $\mathbb{C} \times X$. ■

On en déduit maintenant

Théorème 4.2.7. *Soit E un fibré vectoriel holomorphe sur une variété complexe X. On a un isomorphisme canonique*

$$H^i(X,E) = \frac{\mathrm{Ker}\,(\overline{\partial}_E : A^{0,i}(E) \to A^{0,i+1}(E))}{\mathrm{Im}\,(\overline{\partial}_E : A^{0,i-1}(E) \to A^{0,i}(E))}, \tag{4.2.6}$$

où $A^{0,i}(X,E)$ est l'espace des sections globales de $\mathcal{A}^{0,i}(E)$.

Démonstration. Cela résulte en effet du théorème 4.2.6 et du théorème 4.1.3, du fait que les faisceaux $\mathcal{A}^{0,j}(E)$ satisfont $H^i(X, \mathcal{A}^{0,j}(E)) = 0$ pour $i > 0$ car ce sont des faisceaux de $\underline{\mathcal{C}}^\infty$-modules (voir théorème 3.2.12). ■

Corollaire 4.2.8. *On a $H^i(X,E) = 0$ pour $i > \dim_{\mathbb{C}} X$.*

En effet, on a $A^{0,i}(E) = 0$ pour $i > \dim_{\mathbb{C}} X$.

4.3 Application de la cohomologie des faisceaux aux surfaces de Riemann compactes

Soit X une surface de Riemann compacte, c'est-à-dire une variété complexe compacte de dimension 1. On sait (cf. Théorème 1.1.12) qu'il n'existe pas de fonctions holomorphes non constantes sur X. On va montrer le théorème fondamental suivant :

Théorème 4.3.1. *Il existe une fonction méromorphe non constante sur X.*

Remarque 4.3.2. Une amélioration de ce théorème permet de montrer qu'on peut plonger X dans un espace projectif à l'aide de fonctions méromorphes. Il suffit pour cela de montrer que les fonctions méromorphes sur X séparent les points de X, et d'observer que l'application méromorphe de X vers $\mathbb{C}^n$ donnée par n-fonctions méromorphes $f_1, \ldots, f_n$ sur X s'étend aux pôles des f_i comme une application holomorphe à valeurs dans $\mathbb{P}^n$.

Preuve du théorème 4.3.1. Soit k un entier ≥ 0, et soient x_i, $i = 1, \ldots, k$, k points distincts de X. On note $D = \{x_1, \ldots, x_k\}$ et on considère le faisceau $\mathcal{O}_X(D)$ de $\mathcal{O}_X$-modules donné par

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D)) = \{\text{fonctions meromorphes sur } U, \text{ holomorphes sur } U \cap X \backslash \{x_1, \ldots, x_k\},$$

$$\text{ayant au pire un pole d'ordre 1 en les } x_i \in U\}.$$

C'est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules libres de rang 1, c'est-à-dire localement isomorphe à $\mathcal{O}_X$, car en dehors des x_i, $\mathcal{O}_X$ est clairement isomorphe à $\mathcal{O}_X$ et au voisinage de $x_i \in X$, choisissant une coordonnée holomorphe z_i centrée en x_i, les sections de $\mathcal{O}_X(D)$ sont de la forme f/z_i, avec f holomorphe, ce qui donne aussi un isomorphisme local entre $\mathcal{O}_X(D)$ et $\mathcal{O}_X$.

Le théorème peut être reformulé en disant :

(*) Si k est suffisamment grand, $\mathcal{O}_X(D)$ possède au moins deux sections linéairement indépendantes, l'une des sections étant donnée par les fonctions constantes.

(Cela fournit en fait la précision qu'il existe une fonction méromorphe avec des pôles simples.)

On a une inclusion évidente

$$\mathcal{O}_X \hookrightarrow \mathcal{O}_X(D)$$

qui est un isomorphisme en dehors des x_i et qui fournit une suite exacte courte :

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_X(D) \to \oplus_i \mathbb{C}_{x_i} \to 0. \tag{4.3.7}$$

Ici $\mathbb{C}_{x_i}$ est le "faisceau gratte-ciel" $\mathcal{F}$ supporté en x_i, défini par $\mathcal{F}(U) = 0$ si $x_i \notin U$, $\mathcal{F}(U) = \mathbb{C}$ si $x_i \in U$.

Pour identifier le quotient de droite dans (4.3.7) à $\oplus_i \mathbb{C}_{x_i}$, on choisit une coordonnée holomorphe z_i sur X au voisinage de chaque x_i et centrée en x_i, et on observe que si $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X(D))$, $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ si et seulement si pour $x_i \in D$

$$(z_i f)(x_i) = 0.$$

L'application $\phi_D : \mathcal{O}_X(D) \to \oplus_i \mathbb{C}_{x_i}$ est donc l'application qui à $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X(D))$ associe les scalaires $(z_i f)(x_i)$ pour $x_i \in U$.

On a la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte (4.3.7), qui se résume par le corollaire 4.2.8 à

$$\begin{aligned} &\to H^0(X, \mathcal{O}_X) \to H^0(X, \mathcal{O}_X(D)) \xrightarrow{\phi_D} \oplus_i \mathbb{C}_{x_i} \\ &\quad \to H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X(D)) \to 0. \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

L'assertion (*) est équivalente au fait que ϕ_D est non nulle si k est suffisamment grand, ou encore que l'application $\oplus_i \mathbb{C}_{x_i} \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ n'est pas injective.

Comme le terme de droite est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension k, le dernier fait résulte alors du théorème suivant :

Théorème 4.3.3. *Soit X une variété complexe compacte et soit E un fibré vectoriel holomorphe sur X. Alors $H^i(X, E)$ est de dimension finie pour tout i.*

On applique en effet ce résultat au fibré trivial $\mathbb{C} \times X$ dont le faisceau des sections holomorphes est $\mathcal{O}_X$. On a donc pour k assez grand $\dim H^1(X, \mathcal{O}_X) < k$ ce qui termine la démonstration. ■

Il n'y a pas de preuve facile du théorème 4.3.3 sauf dans le cas $i = 0$ (voir TD) mais dans le cas où X est une surface de Riemann compacte, le fait que $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est de dimension finie (qui est le seul énoncé dont on a vraiment besoin pour la démonstration ci-dessus) peut se montrer en prouvant que l'application naturelle

$$H^1(X, \mathbb{C}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

induite par l'inclusion du faisceau constant $\mathbb{C}$ dans le faisceau des fonctions holomorphes est surjective. On sait par ailleurs que $H^1(X, \mathbb{C})$ est de dimension finie, étant calculé comme la cohomologie de Čech d'un recouvrement fini adéquat de X. La preuve de la surjectivité de $H^1(X, \mathbb{C}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ peut se faire en notant que l'on a la suite exacte courte de faisceaux

$$0 \to \mathbb{C} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega_X \to 0,$$

où Ω_X est le faisceau des différentielles holomorphes sur X. La suite exacte longue associée fournit

$$H^1(X, \mathbb{C}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(X, \Omega_X) \to H^2(X, \mathbb{C}) \to 0$$

et on conclut qu'il suffit de montrer l'injectivité de la flèche $H^1(X, \Omega_X) \to H^2(X, \mathbb{C})$, ce qui se fait en montrant que $H^1(X, \Omega_X) \cong \mathbb{C}$.

Remarque 4.3.4. Concrètement, lorsqu'on a montré que l'application

$$\delta : \oplus_i \mathbb{C}_{x_i} \to H^1(X, \mathbb{O}_X)$$

n'est pas injective, on obtient une fonction méromorphe ϕ non constante sur X de la manière suivante : Soit $(\alpha_i) \in \oplus_i \mathbb{C}_{x_i}$. Alors $\delta(\alpha_i)$ est représenté en cohomologie de Dolbeault par la $(0,1)$-forme suivante : soit f une fonction de classe C^∞ qui vaut α_i/z_i au voisinage de x_i. La $(0,1)$-forme $\mu = \overline{\partial} f$ est de classe C^∞ sur X. Sa classe de cohomologie de Dolbeault représente $\delta(\alpha_i)$.

Si maintenant cette classe est nulle, il existe une fonction g de classe C^∞ telle que

$$\mu = \overline{\partial} g.$$

Alors $\overline{\partial}(f-g) = 0$ et donc $f-g$ est holomorphe là où elle est de classe C^∞, c'est-à-dire en dehors des x_i. Au voisinage de x_i, $z_i(f-g)$ est holomorphe car de classe C^∞ et annulée par $\overline{\partial}$. Donc $\phi := f-g$ est méromorphe. Elle n'est pas constante si $(\alpha_i) \neq 0$ car $f-g$ a les mêmes pôles que f qui a un pôle en x_i lorsque $\alpha_i \neq 0$.

Chapitre 5

Cohomologie des sphères et des espaces projectifs

5.1 Cohomologie des sphères et des fibrés en cercles

5.1.1 Fonctorialité

On va calculer dans ce chapitre la cohomologie des sphères et des espaces projectifs complexes. Commençons par l'énoncé général de fonctorialité (contravariante) de la cohomologie :

Théorème 5.1.1. *Toute application continue*

$$\phi : Y \to X$$

entre deux espaces topologiques induit des applications

$$\phi^* : H^i(X, \mathbb{Z}) \to H^i(Y, \mathbb{Z}).$$

Si $\phi : Y \to X$, $\psi : X \to Z$ sont deux applications continues, on a

$$(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^* : H^i(Z, \mathbb{Z}) \to H^i(Y, \mathbb{Z}).$$

Si $\phi = Id_X$, $\phi^* = Id_{H^i(X,\mathbb{Z})}$.

Démonstration. En effet, soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X, et soit $\mathcal{V}$ le recouvrement ouvert de Y donné par $V_i = \phi^{-1}(U_i)$. On a un morphisme de complexes de Čech

$$\phi^* : \check{\mathrm{C}}^*(X, \mathcal{U}, \mathbb{Z}) \to \check{\mathrm{C}}^*(Y, \mathcal{V}, \mathbb{Z})$$

induit par les applications évidentes

$$\phi^* : \Gamma(U_I, \mathbb{Z}) \to \Gamma(V_I, \mathbb{Z}).$$

Ce morphisme de complexes induit en cohomologie des applications

$$\phi^* : \check{\mathrm{H}}^i(X, \mathcal{U}, \mathbb{Z}) \to \check{\mathrm{H}}^i(Y, \mathcal{V}, \mathbb{Z})$$

qui fournissent par passage à la limite directe les applications ϕ^* désirées. ∎

On admettra l'invariance par homotopie de la cohomologie $H^*(X, \mathbb{Z})$, ce qui signifie que $H^*(X, \mathbb{Z}) \cong H^*(X \times [0,1], \mathbb{Z})$, l'isomorphisme étant donné par pr_1^*, (notons qu'on a montré cette invariance pour la cohomologie à coefficients réels et lorsque X est une variété de classe C^∞, à l'aide du théorème 4.1.1 (cf. TD)). L'invariance par homotopie entraîne en particulier :

Théorème 5.1.2. *i) Soient Y, X deux espaces topologiques et ϕ_0, $\phi_1 : Y \to X$ deux applications homotopes. Alors $\phi_0^* = \phi_1^* : H^i(X, \mathbb{Z}) \to H^i(Y, \mathbb{Z})$.*
ii) En particulier, si X est un espace contractile, $H^i(X, \mathbb{Z}) = 0$ pour $i > 0$.

Démonstration. i) Soit $H : Y \times [0,1] \to X$ une application continue telle que $H_0 : Y \to X$ est égale à ϕ_0 et H_1 est égale à ϕ_1. Comme l'application $pr_1^* : H^*(Y, \mathbb{Z}) \to H^*(Y \times [0,1], \mathbb{Z})$ est un isomorphisme, les applications de restriction

$$j_t^* : H^*(Y \times [0,1], \mathbb{Z}) \to H^*(Y, \mathbb{Z})$$

induites par les inclusions $j_t : Y \cong Y \times \{t\} \hookrightarrow Y \times [0,1]$ ne dépendent pas de $t \in [0,1]$ et donc

$$H_0^* = j_0^* \circ H^* = j_1^* \circ H^* = H_1^* : H^*(X, \mathbb{Z}) \to H^*(Y, \mathbb{Z}).$$

Comme $H_0^* = \phi_0^*$ et $H_1^* = \phi_1^*$, i) suit.
ii) Dire que X est contractile équivaut à dire qu'il existe une application continue $H : X \times [0,1] \to X$ qui est une homotopie entre Id_X et p_x, où $p_x : X \to X$ est l'application constante d'image égale à $\{x\}$, x étant un point donné de X. Comme $H_0^* = Id$ et $H_1^* = 0$ sur $H^i(X, \mathbb{Z})$ pour $i > 0$, le théorème suit. ∎

5.1.2 Sphères

Soit $\mathbb{S}^n$ la sphère de dimension $n \geq 1$.

Théorème 5.1.3. *On a $H^i(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}) = 0$ pour $i \neq 0, n$.*

$$H^0(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z},\ H^n(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

On utilisera pour cela la suite exacte de Mayer-Vietoris, qui est le résultat suivant :

Théorème 5.1.4. *Soit X un espace topologique et soient X_1, X_2 deux fermés de X dont les intérieurs recouvrent X. On a une suite exacte longue*

$$0 \to H^0(X, \mathbb{Z}) \to H^0(X_1, \mathbb{Z}) \oplus H^0(X_2, \mathbb{Z}) \to H^0(X_1 \cap X_2, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathbb{Z})$$
$$\to H^1(X_1, \mathbb{Z}) \oplus H^1(X_2, \mathbb{Z}) \to H^1(X_1 \cap X_2, \mathbb{Z}) \to \dots$$
$$\to H^i(X, \mathbb{Z}) \to H^i(X_1, \mathbb{Z}) \oplus H^i(X_2, \mathbb{Z}) \to H^i(X_1 \cap X_2, \mathbb{Z}) \to H^{i+1}(X, \mathbb{Z}) \to \dots.$$

Démonstration. Pour toute inclusion fermée

$$i : W \hookrightarrow Y$$

entre espaces topologiques, et tout faisceau $\mathcal{F}$ de groupes abéliens sur W, on dispose du faisceau $i_*\mathcal{F}$ sur Y, défini par

$$i_*\mathcal{F}(U) = \mathcal{F}(U \cap i(W)).$$

On vérifie que $H^i(Y, i_*\mathcal{F}) = H^i(W, \mathcal{F})$. Appliquons ceci aux inclusions fermées j_1, j_2, j_{12} de X_1, X_2, $X_1 \cap X_2$ respectivement dans X.

On dispose donc des faisceaux $j_{1*}\mathbb{Z}$, $j_{2*}\mathbb{Z}$, $j_{12*}\mathbb{Z}$ sur X. La suite exacte suivante se vérifie facilement (il faut utiliser le fait que les intérieurs des X_i recouvrent X pour avoir la surjectivité à droite) :

$$0 \to \mathbb{Z} \to j_{1*}\mathbb{Z} \oplus j_{2*}\mathbb{Z} \to j_{12*}\mathbb{Z} \to 0. \tag{5.1.1}$$

La suite exacte longue de Mayer-Vietoris est la suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte (5.1.1).

■

Preuve du théorème 5.1.3. On applique le théorème 5.1.4 à la sphère $\mathbb{S}^n$, qui est recouverte par les deux hémisphères supérieur ($x_{n+1} \geq -\epsilon$) et inférieur $x_{n+1} \leq \epsilon$, où ϵ est fixé, petit et > 0, leur intersection s'identifiant au produit $\mathbb{S}^{n-1} \times [-\epsilon, \epsilon]$. On utilise alors le fait que chacun des hémisphères X_1, X_2 est contractile et satisfait donc d'après le théorème 5.1.2

$$H^i(X_j, \mathbb{Z}) = 0,\ i > 0,\ H^0(X_j, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

Par ailleurs, la cohomologie est invariante par homotopie et on a donc

$$H^i(\mathbb{S}^{n-1} \times [-\epsilon, \epsilon], \mathbb{Z}) \cong H^i(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{Z})$$

pour tout i. La suite exacte longue de Mayer-Vietoris fournit donc pour $n > 1$ la suite exacte courte

$$0 \to H^0(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to H^0(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{Z}) \to 0$$

et

$$H^{i+1}(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}) \cong H^i(\mathbb{S}^{n-1}, \mathbb{Z})$$

pour $i \geq 1$. Ceci permet, partant du cas $n = 1$, de montrer le théorème par récurrence sur n pour $n \geq 1$. Pour $n = 1$, on applique le même raisonnement, et comme $H^0(\mathbb{S}^0, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, car $\mathbb{S}^0$ est constitué de deux points, on en déduit $H^1(\mathbb{S}^1, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ comme annoncé.

■

5.1.3 Fibrés en cercles orientés et première classe de Chern

Soit M un espace topologique. Soit $E \to M$ un fibré en droites complexes, ou de façon équivalente, un fibré de rang 2 réel orienté. Mettons une métrique hermitienne g sur E et soit

$$X \subset E,\ \pi : X \to M$$

le fibré en $\mathbb{S}^1$ correspondant :

$$X = \{e \in E,\ g(e) = 1\}.$$

Le résultat suivant calcule la cohomologie de X en fonction de celle de X et de la première classe de Chern $c_1(E) \in H^2(M, \mathbb{Z})$ de E. C'est le premier exemple d'une suite spectrale sphérique :

Théorème 5.1.5. *On a une suite exacte longue*

$$\begin{aligned} 0 \to H^1(M,\mathbb{Z}) \to H^1(X,\mathbb{Z}) \to H^0(M,\mathbb{Z}) &\overset{c_1(E)}{\to} H^2(M,\mathbb{Z}) \\ \to H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^1(M,\mathbb{Z}) &\overset{c_1(E)}{\to} H^3(M,\mathbb{Z}) \dots \\ H^i(M,\mathbb{Z}) \overset{c_1(E)}{\to} H^{i+2}(M,\mathbb{Z}) &\to H^{i+2}(X,\mathbb{Z}) \to H^{i+1}(M,\mathbb{Z}) \dots \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

Dans cette suite exacte longue, les flèches $H^i(M,\mathbb{Z}) \to H^i(X,\mathbb{Z})$ sont données par π^*, et les flèches

$$c_1(E) : H^i(M,\mathbb{Z}) \to H^{i+2}(M,\mathbb{Z})$$

sont les *flèches de cup-produit* avec la classe $c_1(E)$. Le cup-produit est très facile à définir sur la cohomologie réelle d'une variété différentiable : grâce au théorème 4.1.1, on calcule cette cohomologie à l'aide des formes fermées, et le cup-produit est alors induit par le produit extérieur des formes. On peut aussi donner une définition explicite du cup-produit en cohomologie de Čech. Il est plus simple de le comprendre grâce à la fonctorialité contravariante de la cohomologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ donnée par le théorème 5.1.1 : Pour toute application continue

$$\phi : X \to Y,$$

on dispose d'une application $\phi^* : H^i(Y,\mathbb{Z}) \to H^i(X,\mathbb{Z})$. Le cup-produit est alors la composition d'un produit externe facile à définir

$$H^i(X,\mathbb{Z}) \otimes H^j(X,\mathbb{Z}) \to H^{i+j}(X \times X,\mathbb{Z})$$

et de l'application de restriction

$$i_\Delta^* : H^{i+j}(X \times X,\mathbb{Z}) \to H^{i+j}(X,\mathbb{Z}),$$

induite par l'inclusion diagonale

$$i_\Delta : X \to X \times X.$$

Démonstration du théorème 5.1.5. On va donner la démonstration à coefficients dans $\mathbb{R}$, et dans le cas où M est une variété de classe C^∞ et $E \to M$ est un fibré en droites complexes de classe C^∞. On peut alors utiliser le théorème 4.1.1 pour calculer la cohomologie de X et M à l'aide de formes différentielles. Soit ω une 2-forme fermée sur M qui est un représentant de la classe de Chern réelle $c_1(E) \in H^2_{dR}(M\mathbb{R}) \cong H^2(M, \mathbb{R})$. Notons que

$$\pi^*\omega = d\theta, \tag{5.1.3}$$

pour une 1-forme θ sur X. En effet, $\pi^*\omega$ est une 2-forme réelle fermée sur X qui représente $c_1(\pi^*E)$. Or le fibré en droites complexes π^*E est trivial sur X, puisqu'il admet une section tautologique partout non nulle, donnée par l'inclusion diagonale de X dans $X \times_M X \subset X \times_M E = \pi^*E$. Donc $\pi^*c_1(E) = 0$ et $\pi^*\omega = d\theta$. De plus on peut supposer que la forme θ est d'intégrale 1 sur les fibres de $\pi : X \to M$.

La preuve du théorème va utiliser le lemme suivant :

Lemme 5.1.6. *Soit $B^k(X) \subset A^k(X)$ l'ensemble des formes différentielles de la forme*

$$\alpha = \pi^*\alpha_1 + \theta \wedge \pi^*\alpha_2,$$

où α_1, α_2 sont des formes différentielles sur M de degrés respectifs k et $k-1$. Alors la cohomologie de X peut se calculer comme

$$H^k(X, \mathbb{R}) = \frac{\mathrm{Ker}\,(B^k(X) \to B^{k+1}(X))}{\mathrm{Im}\,(B^{k-1}(X) \to B^k(X))}. \tag{5.1.4}$$

Remarque 5.1.7. D'après (5.1.3), on a pour $\alpha = \pi^*\alpha_1 + \theta \wedge \pi^*\alpha_2$,

$$\begin{aligned} d\alpha &= \pi^*(d\alpha_1) - \theta \wedge \pi^*(d\alpha_2) + d\theta \wedge \pi^*\alpha_2 \\ &= \pi^*(\omega \wedge \pi^*\alpha_2 + d\alpha_1) - \theta \wedge \pi^*(d\alpha_2). \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

Ceci montre que $B^*(X) \subset A^*(X)$ est stable par d.

Démonstration du lemme 5.1.6. Considérons les faisceaux suivants sur M : les faisceaux $\mathcal{B}^i$ associent à l'ouvert $U \subset M$ l'espace $B^i(U) = A^i(U) \oplus \theta \wedge A^{i-1}(U)$. Les faisceaux $\pi_*\mathcal{A}^i_X$ associent à l'ouvert $U \subset M$ l'espace $A^i(X_U)$. L'espace des sections globales $\mathcal{B}^i(M)$ de $\mathcal{B}^i$ s'identifie alors à $B^i(X)$, tandis que l'espace des sections globales $(\pi_*\mathcal{A}^i)(M)$ s'identifie à $A^i(X)$. On a une inclusion évidente de faisceaux :

$$\mathcal{B}^i \subset \pi_*\mathcal{A}^i.$$

Ces inclusions commutent aux différentielles, où la différentielle

$$\mathcal{B}^i \to \mathcal{B}^{i+1}$$

est donnée par (5.1.5).

En se plaçant sur des ouverts contractiles U_i de M au-dessus desquels le fibré E est trivial, de sorte que X_{U_i} est homéomorphe à $\mathbb{S}^1 \times U_i$ et donc a le type d'homotopie de $\mathbb{S}$, on vérifie que les deux complexes de faisceaux $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{A}^*$ ont les mêmes faisceaux de cohomologie, à savoir les faisceaux constants en degré 0 et 1, et 0 en degré > 1. Il en résulte alors que le complexe quotient $\mathcal{C}^*$, qui s'insère dans la suite exacte de complexes de faisceaux

$$0 \to \mathcal{B}^* \to \pi_*\mathcal{A}^* \to \mathcal{C}^* \to 0, \tag{5.1.6}$$

est exact. En effet, cela revient d'après le lemme **??** à montrer que pour tout $m \in M$, le complexe de groupes abéliens des germes $\mathcal{C}^*_m$ est exact. Or on a une suite exacte de complexes de germes au point m :

$$0 \to \mathcal{B}^*_m \to (\pi_*\mathcal{A}^*)_m \to \mathcal{C}^*_m \to 0. \tag{5.1.7}$$

Ceci induit une suite exacte longue de cohomologie (voir TD)

$$\dots H^i(\mathcal{B}^*_m) \to H^i((\pi_*\mathcal{A}^*)_m) \to H^i(\mathcal{C}^*_m) \to H^{i+1}(\mathcal{B}^*_m)\dots$$

et comme les flèches $H^i(\mathcal{B}^*_m) \to H^i((\pi_*\mathcal{A}^*)_m)$ sont des isomorphismes, on en déduit $H^i(\mathcal{C}^*_m) = 0$ pour tout i.

Par ailleurs, les $\mathcal{C}^i$ sont des faisceaux de $\underline{\mathcal{C}}^\infty$-modules sur M, et donc le théorème 4.1.3 (avec $\mathcal{F} = 0$) montre que le complexe C^* des sections globales de $\mathcal{C}^*$ est exact. Comme on a une suite exacte induite par (5.1.6) au niveau des sections globales du fait que les faisceaux $\mathcal{B}^i$ sont des faisceaux de $\underline{\mathcal{C}}^\infty$-modules sur M, donc acycliques (théorème 3.2.12), on a une suite exacte de complexes

$$0 \to B^*(X) \to A^*(X) \to C^* \to 0.$$

La suite exacte longue de cohomologie et le fait que le complexe C^* soit exact entraînent alors que $B^*(X) \to A^*(X)$ induit un isomorphisme en cohomologie.

■

Le lemme 5.1.6 dit qu'on a un complexe $B^*(X)$ dont la cohomologie calcule $H^*(X, \mathbb{R})$ et qui s'inscrit dans une suite exacte de complexes :

$$0 \to A^*(M) \to B^*(X) \to A^{*-1}(M) \to 0. \tag{5.1.8}$$

Ici, l'application $B^*(X) \to A^{*-1}(M)$ associe à une forme $\pi^*\alpha + \theta\wedge\pi^*\alpha'$ la forme α'. C'est bien (aux signes près) un morphisme de complexes car

$$d(\pi^*\alpha + \theta \wedge \pi^*\alpha') = \pi^*(d\alpha) + \pi^*\omega \wedge \pi^*\alpha' - \theta \wedge \pi^*(d\alpha')$$

et donc l'image de $\pi^*\alpha + \theta \wedge \pi^*\alpha'$ étant α', l'image de $d(\pi^*\alpha + \theta \wedge \pi^*\alpha')$ est $-d\alpha'$.

La suite exacte courte de complexes (5.1.8) fournit une suite exacte longue de leurs groupes de cohomologie

$$\dots \to H^k(A^*(M)) \to H^k(B^*(X)) \to H^k(A^{*-1}(M)) \to H^{k+1}(A^*(M)) \to \dots \tag{5.1.9}$$

et si l'on note que

$$H^k(A^{*-1}(M)) = H^{k-1}(M, \mathbb{R}),\ H^k(A^*(M)) = H^k(M, \mathbb{R}),$$

et $H^k(B^*(X)) = H^k(X, \mathbb{R})$ d'après le lemme 5.1.6, on obtient bien la suite exacte longue (5.1.2). Pour conclure, il reste à voir que la flèche de connexion $H^k(M, \mathbb{R}) \to H^{k+2}(M, \mathbb{R})$ est bien donnée par le cup-produit avec la classe $c_1(E)$, ou encore induite par le produit extérieur avec ω. Or ceci résulte de la manière dont est construite la "flèche de connexion"

$$H^k(A^{*-1}(M)) \to H^{k+1}(A^*(M))$$

dans la suite exacte longue (5.1.9) : si on part d'un élément fermé α dans $A^{*-1}(M)$, on le relève en un élément $\theta \wedge \pi^*\alpha$ de $B^*(X)$, dont la différentielle est $d\theta \wedge \pi^*\alpha = \omega \wedge \pi^*\alpha \in A^{k+1}(M) \subset B^{k+1}(M)$. La flèche de connexion associe alors à la classe de α celle de $\omega \wedge \alpha$. ■

5.2 Application : cohomologie de l'espace projectif

On a construit la variété complexe $\mathbb{P}^n$ de dimension complexe n et le fibré de Hopf sur $\mathbb{CP}^n$, qui est un fibré en droites défini comme le sous-fibré universel $\mathcal{S} \subset \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{P}(V)$: Au-dessus d'un point $[l] \in \mathbb{CP}^n$ qui paramètre une droite complexe $L \subset \mathbb{C}^{n+1}$, la fibre de $\mathcal{S}_{[l]} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ est précisément la droite $L \subset \mathbb{C}^{n+1}$. On pose $\mathcal{L} := \mathcal{S}^*$. C'est un fibré en droites complexe holomorphe, et il admet donc une première classe de Chern $h \in H^2(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z})$.

La cohomologie $H^*(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z})$ est donnée par le théorème suivant :

Théorème 5.2.1. *On a $H^i(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) = 0$ pour i impair et*

$$H^{2i}(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}h^i,\ i \leq n.$$

On a aussi $H^i(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = 0$ pour $i > 2n$.

Démonstration. On montre ce résultat par récurrence sur n, en utilisant le fait que $\mathbb{CP}^n = \mathbb{C}^n \bigsqcup \mathbb{CP}^{n-1}$, où $\mathbb{CP}^{n-1} \subset \mathbb{CP}^n$ est l'hyperplan à l'infini $x_n = 0$ et $\mathbb{C}^n$ s'identifie à l'hyperplan affine $x_n = 1$ de $\mathbb{C}^{n+1}$. Soit $X_1 = U_\epsilon$ un voisinage tubulaire fermé de rayon ϵ de $\mathbb{CP}^{n-1}$ dans $\mathbb{P}^n$, soit $U^0_{\epsilon/2}$ un voisinage tubulaire ouvert de rayon ϵ de $\mathbb{CP}^{n-1}$ dans $\mathbb{CP}^n$ et soit $X_2 := \mathbb{CP}^n \setminus U^0_{\epsilon/2}$. Ces deux fermés satisfont la propriété que leurs intérieurs recouvrent $\mathbb{CP}^n$. De plus X_1 a le type d'homotopie de (se rétracte par déformation sur) $\mathbb{CP}^{n-1}$ et X_2 a le type d'homotopie de $\mathbb{C}^n$. Enfin $X_1 \cap X_2$ a le type d'homotopie du fibré en cercles ∂U_ϵ sur $\mathbb{CP}^{n-1}$. Par le théorème 5.1.2, la cohomologie de X_2 est nulle en degré > 0 et la cohomologie de X_1 s'identifie à celle de $\mathbb{CP}^{n-1}$. Enfin, la cohomologie de $X_1 \cap X_2$ s'identifie à celle d'un fibré en cercles ∂U_ϵ sur $\mathbb{CP}^{n-1}$. Notons pour finir que ce fibré en cercles est le fibré en cercles du fibré normal de $\mathbb{CP}^{n-1}$ dans

$\mathbb{CP}^n$, qui est le fibré $\mathcal{L}'$, restriction à $\mathbb{CP}^{n-1}$ du fibré en droites $\mathcal{L}$. Comme la cohomologie de X_2 est triviale en degré > 0, la suite exacte de Mayer-Vietoris donne

$$0 \to H^1(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) \to H^1(\mathbb{CP}^{n-1}, \mathbb{Z}) \to H^1(\partial U_\epsilon, \mathbb{Z}) \to H^2(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) \to$$

$$H^2(\mathbb{CP}^{n-1}, \mathbb{Z}) \to H^2(\partial U_\epsilon, \mathbb{Z}) \to H^3(\mathbb{CP}^n, \mathbb{Z}) \to \ldots$$

Nous appliquons maintenant le théorème 5.1.5 qui nous dit que la cohomologie de ∂U_ϵ s'insère dans la suite exacte longue :

$$\begin{aligned} 0 \to H^1(\mathbb{CP}^{n-1}, \mathbb{Z}) \to H^1(\partial U_\epsilon, \mathbb{Z}) \to H^0(\mathbb{CP}^{n-1}, \mathbb{Z}) \stackrel{h'}{\to} \\ H^2(\mathbb{CP}^{n-1}, \mathbb{Z}) \to H^2(\partial U_\epsilon, \mathbb{Z}) \to H^1(\mathbb{CP}^{n-1}, \mathbb{Z}) \stackrel{h'}{\to} \\ H^3(\mathbb{CP}^{n-1}, \mathbb{Z}) \to \ldots \to H^i(\mathbb{P}^{n-1}, \mathbb{Z}) \stackrel{h'}{\to} H^{i+2}(\mathbb{P}^{n-1}, \mathbb{Z}) \to \\ H^{i+2}(\partial U_\epsilon, \mathbb{Z}) \to H^{i+1}(\mathbb{CP}^{n-1}, \mathbb{Z}) \to \ldots \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

L'hypothèse de récurrence nous dit que la flèche

$$\cup h' : H^{i-2}(\mathbb{P}^{n-1}, \mathbb{Z}) \to H^i(\mathbb{P}^{n-1}, \mathbb{Z})$$

de cup-produit par $h' = c_1(\mathcal{L}')$, où $\mathcal{L}'$ est le dual du fibré de Hopf sur $\mathbb{P}^{n-1}$, est surjective pour tout $i > 0$ et est en fait un isomorphisme pour $i > 0$ sauf en degré $2n-2$ où elle vaut 0. La suite exacte longue (5.2.10) nous donne donc $H^i(\partial U_\epsilon, \mathbb{Z}) = 0$ pour $i > 0$, $i \neq 2n-1$, $H^{2n-1}(\partial U_\epsilon, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

La suite exacte longue de Mayer-Vietoris appliquée au recouvrement $(X_1,\, X_2)$ de $\mathbb{P}^n$ nous dit alors que

$$H^i(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \to H^i(X_1, \mathbb{Z}) \cong H^i(\mathbb{P}^{n-1}, \mathbb{Z})$$

est un isomorphisme pour $i < 2n$ et pour $i > 2n$. Comme l'hypothèse de récurrence nous dit que $H^{2i}(\mathbb{P}^{n-1}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ est engendré par h'^i pour $2 \leq 2i \leq 2n-2$, on en déduit que $H^{2i}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ est engendré par h^i pour $2 \leq 2i \leq 2n-2$. De même, on trouve que $H^{2i+1}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) = 0$ pour $i \geq 0$. Pour $i = 2n$, on trouve $H^{2n-1}(\partial U_\epsilon, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z} \cong H^{2n}(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$ et il est aisé de voir qu'un générateur est donné par h^n, ce qui termine la démonstration. ■

Remarque 5.2.2. On peut aussi appliquer le théorème 5.1.3 pour montrer que $H^i(\partial U_\epsilon, \mathbb{Z}) = 0$ pour $i > 0$, $i \neq 2n-1$, $H^{2n-1}(\partial U_\epsilon, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. En effet, ∂U_ϵ est homéomorphe à une sphère $\mathbb{S}^{2n-1}$.