Etude sur les fibrés en droites

Cong Xue
Tuteur: Claire Voisin

mars 2013

Table des matières

1 Introduction

Le but est d'étudier les fibrés en droites complexes sur une variété. Une raison pour laquelle on veut les étudier est que quand la variété X est complexe, les fibrés en droites holomorphes donnent des informations sur la structure complexe de X. Par exemple, le théorème de Kodaira dit que pour X une variété complexe compacte, si elle a une (1,1) forme fermée positive dont la classe est entière, alors il existe un plongement holomorphe de X dans $\mathbb{P}^M_{\mathbb{C}}$ pour un M assez grand. Ce plongement est donné par des sections holomorphes d'un fibré en droites holomorphe dont l'existence vient de ces conditions.

Ce que j'étudie ici, est grosso modo la classification des fibrés en droites complexes sur une variété.

On va voir que les classes d'isomorphisme (en un sens à préciser) des fibrés en droites complexes forment un groupe (qui s'appelle le groupe de Picard). Quand la variété X est différentiable de classe $\mathcal{C}^{\infty}$, ce groupe (des classes d'isomorphisme $\mathcal{C}^{\infty}$) peut être paramétré par $H^2(X,\mathbb{Z})$. Quand la variété X est complexe, le cas est plus subtil. Après quelques descriptions du groupe de Picard dans le chapitre 2, je vais traiter ce cas dans les chapitres 3 et 4 en étudiant l'image et le noyau du morphisme $Pic(X) \to H^2(X,\mathbb{Z})$ respectivement.

Toutes les cohomologies ci-dessous sont les cohomologies de faisceaux. En revanche, au lieu d'utiliser la langage des faisceaux, les résultats d'ici sont calculés à la cohomologie de Cech. Une raison de faire cela est que cela permet de décrire explicitement les groupes de cohomologie (au moins pour les petits degrés).

2 Le groupe de Picard

2.1 Première observation

Définition 2.1. *Soit X une variété topologique. Alors les classes d'isomorphisme C^0 des fibrés en droites complexes forment un groupe. C'est le groupe de Picard $Pic^{C^0}(X)$ de X.*

La multiplication est donnée par le produit tensoriel des fibrés, l'inverse d'une classe est la classe du fibré dual d'un représentant, l'élément neutre est la classe de fibré trivial.

Les fibrés sont triviaux localement. Ce qui n'est pas trivial, ce sont leur structures globales. Pour mesurer cela, on a besoin de cohomologie. Ainsi il y a une première observation :

Proposition 2.2. *$Pic^{C^0}(X) \simeq H^1(X, (\underline{\mathcal{C}}^0)^*)$, où $(\underline{\mathcal{C}}^0)^*$ est le faisceaux des fonctions continues à valeur dans $\mathbb{C}$ qui ne s'annulent en aucun point.*

Démonstration. Donner un fibré en droites L est la même chose que donner un recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ de X et les fonctions de transition $g_{\alpha\beta}$ continues dans $U_\alpha \cap U_\beta$ qui ne s'annulent pas.

Bien défini : Soit L un fibré en droites avec les fonctions de transition $g_{\alpha\beta}$. (En fait, soit φ_α : $\pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}$ une trivialisation, alors $\varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C} \to U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{C}$ est donnée par $(x,v) \mapsto (x, g_{\alpha\beta}(x)v)$.) On a $g_{\alpha\beta}g_{\beta\alpha} = 1$. Donc les $(g_{\alpha\beta})$ définissent un élément de $C^1(\mathcal{U}, (\underline{\mathcal{C}}^0)^*)$.

De plus, on a $g_{\alpha\alpha} = g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$ d'après les propositions des fonctions de transition. Donc $(g_{\alpha\beta}) \in Z^1(\mathcal{U}, (\underline{\mathcal{C}}^0)^*)$.

Si sur le même recouvrement ouvert on a une autre trivialisation (elle a certainement la forme $\varphi'_\alpha(e) = (x, f_\alpha(x)v)$ par apport à $\varphi_\alpha(e) = (x, v)$), alors les fonctions de transition deviennent $g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}f_\alpha/f_\beta$ où les f_α sont des fonctions continues à valeur dans $\mathbb{C}$ sur U_α qui ne s'annulent pas. Ainsi, $(g'_{\alpha\beta})$ a la même classe que $(g_{\alpha\beta})$ dans $H^1(\mathcal{U}, (\underline{\mathcal{C}}^0)^*)$.

Si L' est un fibré en droites avec $(h_{\alpha\beta})$ associé isomorphe C^0 à L, alors d'après la définition d'isomorphisme entre deux fibrés, on a $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}f_\alpha/f_\beta$ avec f_α des fonctions continues à valeur dans $\mathbb{C}$ sur U_α qui ne s'annulent pas. Ainsi $(h_{\alpha\beta})$ est dans la même classe que $(g_{\alpha\beta})$ dans $H^1(\mathcal{U}, (\underline{\mathcal{C}}^0)^*)$.

En fait cet élément ne dépend pas du recouvrement, donc il définit un élément g de $H^1(X, (\underline{\mathcal{C}}^0)^*)$. Donc l'application dans la proposition est bien définie. De plus, d'après la définition de structure de groupe de $Pic^{C^0}(X)$, c'est facile de voir que cette application est un morphisme de groupe.

Injectivité : Soit L un fibré en droites avec les fonctions de transition $(g_{\alpha\beta})$. Si $(g_{\alpha\beta}) = 0$ dans $H^1(X, (\underline{\mathcal{C}}^0)^*)$, alors il existe un recouvrement ouvert (peut-être plus fin que $\mathcal{U}$) tel que pour la restriction $g' = (g'_{\alpha'\beta'})$ de $g = (g_{\alpha\beta})$, on a $g'_{\alpha'\beta'} = f_{\alpha'}/f_{\beta'}$ avec $f_{\alpha'}$ des fonctions continues à valeur dans $\mathbb{C}$ sur $U_{\alpha'}$ qui ne s'annulent pas. D'après la définition, L est trivial (isomorphe au fibré en droite complexe trivial).

Surjectivité : Pour un élément g de $H^1(X, (\underline{\mathcal{C}}^0)^*)$ correspond à un $\mathcal{U}$ et un $(g_{\alpha\beta}) \in \mathcal{U}$, il existe un fibré en droites avce fonctions de transition $(g_{\alpha\beta})$. Ce fibré est unique à isomorphisme C^0 près. L'image de la classe de ce fibré est bien la classe de g dans $H^1(X, (\underline{\mathcal{C}}^0)^*)$.

□

Définition 2.3. *Soit X une variété complexe. Alors les classes d'isomorphisme holomorphe des fibrés en droites holomorphes forment un groupe. C'est le groupe de Picard $Pic^{hol}(X)$ de X.*

La structure de groupe est donnée comme dans le cas précédent.

Proposition 2.4. *$Pic^{hol}(X) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, où $\mathcal{O}_X^*$ est le faisceaux des fonctions holomorphes qui ne s'annulent pas.*

La démonstration est la même que ci-dessus si on replace partout "continue" par "holomorphe".

On voit que les classes d'isomorphisme C^0 (resp. holomorphe) de fibré en droites peuvent donc être paramétrées par le groupe $H^1(X, (\underline{\mathcal{C}}^0)^*)$ (resp. $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$). Donc il suffit d'étudier $H^1(X, (\underline{\mathcal{C}}^0)^*)$ et $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$.

Remarque 2.5. *Pour X une variété complexe, on a un morphisme naturel de groupe $Div(X) \to Pic^{hol}(X)$ qui est en général ni injectif ni surjectif, où $Div(X)$ est le groupe de diviseurs de X.*

2.2 Fibrés en droite sur une variété différentiable

Dans cette sous section, X est toujours une variété différentiable de classe C^∞. Pour étudier $H^1(X, (\underline{\mathcal{C}}^0)^*)$, on a besoin de la suite exacte exponentielle :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \underline{\mathcal{C}}^0 \xrightarrow{exp} (\underline{\mathcal{C}}^0)^* \longrightarrow 1$$

où $exp(f) = e^{2\pi i f}$.

Proposition 2.6. *On obtient une suite exacte longue :*

$$0 \longrightarrow H^0(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(X,\underline{\mathcal{C}}^0) \longrightarrow H^0(X,(\underline{\mathcal{C}}^0)^*) \xrightarrow{c^*} H^1(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow$$

$$H^1(X,\underline{\mathcal{C}}^0) \xrightarrow{exp^*} H^1(X,(\underline{\mathcal{C}}^0)^*) \xrightarrow{c^*} H^2(X,\mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X,\underline{\mathcal{C}}^0) \longrightarrow H^2(X,(\underline{\mathcal{C}}^0)^*) \longrightarrow \dots$$

Démonstration. On donne seulement quelques points de la démonstration qui vont nous servir dans la suite.

Le morphisme $H^1(X,(\underline{\mathcal{C}}^0)^*) \xrightarrow{c^*} H^2(X,\mathbb{Z})$ est bien défini : soit $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ un recouvrement assez bon (les intersections finies d'ouverts de $\mathcal{U}$ sont contractiles ou vides). Soit $(g_{\alpha\beta}) \in H^1(\mathcal{U},(\underline{\mathcal{C}}^0)^*) = H^1(X,(\underline{\mathcal{C}}^0)^*)$, alors $\forall g_{\alpha\beta}, \exists h_{\alpha\beta} \in C^0(U_\alpha \cap U_\beta)$ tel que $g_{\alpha\beta} = e^{2\pi i h_{\alpha\beta}}$. Considérons le 2-cocycle $\sigma = (\sigma_{\alpha\beta\gamma})$ défini par $\sigma_{\alpha\beta\gamma} = h_{\alpha\beta}+h_{\beta\gamma}+h_{\gamma\alpha}$. On a $e^{2\pi i\sigma_{\alpha\beta\gamma}} = g_{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}g_{\gamma\alpha} = 1$, de sorte que $\sigma_{\alpha\beta\gamma}$ est un constant entier, i.e. $\sigma \in C^2(\mathcal{U},\mathbb{Z})$. Dans $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \cap U_\lambda$, on a $\delta(\sigma)_{\alpha\beta\gamma\lambda} = \sigma_{\beta\gamma\lambda} - \sigma_{\alpha\gamma\lambda} + \sigma_{\alpha\beta\lambda} - \sigma_{\alpha\beta\gamma} = 0$, où δ est cela défini dans Cech cohomologie. Donc $\sigma \in Z^2(\mathcal{U},\mathbb{Z})$.

Si on prend un autre $(h'_{\alpha\beta})$ tel que $g_{\alpha\beta} = e^{2\pi i h'_{\alpha\beta}}$, alors il existe $c_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$ tel que $h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + c_{\alpha\beta}$. Ainsi $\sigma'_{\alpha\beta\gamma} = \sigma_{\alpha\beta\gamma} + c_{\alpha\beta} + c_{\beta\gamma} + c_{\gamma\alpha} = \sigma_{\alpha\beta\gamma} + \delta(c)_{\alpha\beta\gamma}$, où $c = (c_{\alpha\beta}) \in C^1(\mathcal{U},\mathbb{Z})$ Donc σ est bien défini dans $H^2(\mathcal{U},\mathbb{Z})$ donc dans $H^2(X,\mathbb{Z})$.

Soit $(g'_{\alpha\beta})$ dans la même classe que $(g_{\alpha\beta})$; alors il existe des fonctions f_α continues sur U_α à valeur dans $\mathbb{C}$ telles que $g'_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}\delta(f)_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}f_\alpha/f_\beta$. Alors $h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + \tilde{f}_\alpha - \tilde{f}_\beta$ où $f_\alpha = e^{2\pi i\tilde{f}_\alpha}$. Donc $\sigma'_{\alpha\beta\gamma} = h_{\alpha\beta} + \tilde{f}_\alpha - \tilde{f}_\beta + h_{\beta\gamma} + \tilde{f}_\beta - \tilde{f}_\gamma + h_{\gamma\alpha} + \tilde{f}_\gamma - \tilde{f}_\alpha = \sigma_{\alpha\beta\gamma}$.

Donc pour chaque classe $[(g_{\alpha\beta})]$ de $H^1(X,(\underline{\mathcal{C}}^0)^*)$, on a un élément $[\sigma] = c^*[(g_{\alpha\beta})]$ bien défini de $H^2(X,\mathbb{Z})$. De la même manière, les autres morphismes c^* sont bien définis (on les appelle "flèches de connexion" de la suite exacte longue). Les morphismes autre que c^* sont induits directement par la suite exacte exponentielle.

Il reste à vérifier que c'est une suite exacte. Par exemple, voyons que $H^1(X,\underline{\mathcal{C}}^0) \xrightarrow{exp^*} H^1(X,(\underline{\mathcal{C}}^0)^*) \xrightarrow{c^*} H^2(X,\mathbb{Z})$ est exacte : il est facile de voir que $Im(exp^*) \subset Ker(c^*)$, il reste à voir $Ker(c^*) \subset Im(exp^*)$. En fait, soit $[(g_{\alpha\beta})] \in Ker(c^*)$; en utilisant les notations précédentes, on a $\sigma_{\alpha\beta\gamma} = h_{\alpha\beta} + h_{\beta\gamma} + h_{\gamma\alpha} = 0$ dans $H^2(\mathcal{U},\mathbb{Z})$. Quitte à prendre un autre recouvretment plus fin que $\mathcal{U}$, on peut supposer qu'il existe $(c_{\alpha\beta}) \in C^1(\mathcal{U},\mathbb{Z})$ tel que $\sigma_{\alpha\beta\gamma} = c_{\alpha\beta} + c_{\beta\gamma} + c_{\gamma\alpha}$. Donc

$(h_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta}) \in Z^1(X, \underline{\mathcal{C}}^0)$. Posons $g'_{\alpha\beta} = exp(h_{\alpha\beta} - c_{\alpha\beta})$, alors $(g'_{\alpha\beta})$ est égal à $(g_{\alpha\beta})$. De plus, il est dans $Im(exp^*)$ donc $[(g_{\alpha\beta})] \in Im(exp^*)$. Les autres démonstrations de l'exactitude sont similaires.

□

Proposition 2.7. $H^p(X, \underline{\mathcal{C}}^0) = 0$ *pour* $p > 0$.

Démonstration. On vérifie le cas $H^1(X, \underline{\mathcal{C}}^0) = 0$, les autres sont similaires : soit $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ un recouvrement assez bon (localement fini). On peut trouver une partition de l'unité (ρ_α) des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur X tel que $\sum \rho_\alpha = 1$ et $supp(\rho_\alpha) \subset U_\alpha$. Soit $g = (g_{\alpha\beta}) \in H^1(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{C}}^0) = H^1(X, \underline{\mathcal{C}}^0)$. Considérons $\tau = (\tau_\alpha)$ défini par $\tau_\alpha = \sum_{\gamma \neq \alpha} \rho_\gamma g_{\gamma\alpha}$. $\tau_\alpha \in \mathcal{C}^0(U_\alpha)$ car les $\rho_\gamma g_{\gamma\alpha}$ se prolongent dans U_α par zero. τ est un élément de $C^0(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{C}}^0)$. On a $\delta(\tau) = g$ car $\delta(\tau)_{\alpha\beta} = \tau_\beta - \tau_\alpha = \sum_\gamma \rho_\gamma g_{\gamma\beta} - \sum_\gamma \rho_\gamma g_{\gamma\alpha} = \sum_\gamma \rho_\gamma (g_{\gamma\beta} - g_{\gamma\alpha}) + \rho_\alpha g_{\alpha\beta} + \rho_\beta g_{\alpha\beta} = \sum_\gamma \rho_\gamma g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}$. Cela implique que $g = 0$ dans $H^1(\mathcal{U}, \underline{\mathcal{C}}^0)$. □

Ainsi, on a

$$Pic^{C^0}(X) \simeq H^1(X, (\underline{\mathcal{C}}^0)^*) \simeq H^2(X, \mathbb{Z}).$$

Exemple 2.8. $Pic^{C^0}(\mathbb{S}^2) \simeq H^2(\mathbb{S}^2, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, $Pic^{C^0}(\mathbb{S}^n) \simeq H^2(\mathbb{S}^n, \mathbb{Z}) \simeq 0$ *pour* $n \geq 3$.
C'est cohérent avec l'exercice 1.7.

Remarque 2.9. *Les arguments ci-dessus restent vrais si on remplace* $\mathcal{C}^0$ *par* $\mathcal{C}^\infty$.

2.3 Fibrés en droite holomorphes sur une variété complexe

Dans cette sous section, X est toujours une variété complexe. Pour étudier $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, on a besoin de la suite exacte exponentielle :

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{exp} \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 1$$

où $exp(f) = e^{2\pi i f}$.

Proposition 2.10. *On a aussi une suite exacte longue :*

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X^*) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow$$

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{exp^*} H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{O}_X^*) \longrightarrow \dots$$

La démonstration est la même que la proposition précedente si on remplace "continue" par "holomorphe".

En revanche, la partition de l'unité (sur la variété différentiable sous-jacent à X) ne peut plus nous aider parce qu'il s'agit seulement des fonctions C^∞ mais pas des fonctions holomorphes.

Donc les $H^p(X, \mathcal{O}_X)$ peuvent être non nuls et $H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z})$ peut être ni injectif ni surjectif. On va étudier l'image et le noyau de ce morphisme dans les chapitres 3 et 4 respectivement.

Remarque 2.11. *Interprétation du fait que c_1 n'est pas injectif : on a*

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(X, \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H^1(X, \mathcal{O}_X^*) & \xrightarrow{c_1} & H^2(X, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(X, \mathcal{O}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \varphi & & \| & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & H^1(X, (\underline{\mathcal{C}}^0)^*) & \longrightarrow & H^2(X, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

où l'interprétation du morphisme φ est qu'on regarde les fibrés holomorphes sur X comme des fibrés complexes continus sur la variété différentiable sous-jacente à X. Le diagramme signifie donc que deux fibrés peuvent être différentiablement isomorphe (avoir la même classe de Chern) mais ne sont pas isomorphes comme fibrés holomorphes. Un exemple concret de ce phénomène est donné dans le Lemme 1.2.15 du cours.

Remarque 2.12. *Soit L un fibré en droites holomorphe sur X, alors l'image de la classe de L dans $Pic^{hol}(X)$ par le morphisme de groupe c_1 s'appelle la première classe de Chern de L et notée $c_1(L)$. Le noyau de c_1 est noté $Pic^0(X)$.*

3 La première classe de Chern

X est une variété complexe dans cette section sauf dans la Proposition 3.3. Le but de ce chapitre est d'étudier $Im(c_1)$. Pour cela, on peut étudier $Ker(H^2(X, \mathbb{Z}) \to H^2(X, \mathcal{O}_X))$ qui est la même chose que $Im(c_1)$.

3.1 Formes différentielles

On a $T_{X,\mathbb{C}} = T_X^{1,0} \oplus T_X^{0,1}$, où $T_{X,\mathbb{C}} := T_{X,\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$, $T_{X,\mathbb{R}}$ est le fibré tangent de la variété différentiable sous-jacent à X. $T_X^{1,0}$ (resp. $T_X^{0,1}$) est l'espace propre de la valeur propre i (resp. $-i$) de l'opérateur I agissant sur $T_{X,\mathbb{R}}$. En fait, $T_X^{1,0} = T_X$ comme fibré complexe où T_X est le fibré tangent holomorphe de X.

Cela induit que $\Omega_{X,\mathbb{C}} = \Omega_X^{1,0} \oplus \Omega_X^{0,1}$. Où $\Omega_{X,\mathbb{C}} = Hom_{\mathbb{R}}(T_{X,\mathbb{R}}, \mathbb{C})$ est le fibré des 1-formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ complexes sur la variété différentiable sous-jacent à X. $\Omega_X^{1,0}$ (resp. $\Omega_X^{0,1}$) est le fibré des formes différentielles complexes $\mathbb{C}$-linéaire (resp. $\mathbb{C}$-antilinéaire ou $\bar{\mathbb{C}}$-linéaire). Ainsi on a $\bigwedge^k \Omega_{X,\mathbb{C}} = \sum_{p+q=k} \Omega_X^{p,q}$. Les k-formes dans $\Omega_X^{p,q} = \bigwedge^p \Omega_X^{1,0} \oplus \bigwedge^q \Omega_X^{0,1}$ sont dites de type (p,q).

Remarque 3.1. *On va utiliser beaucoup l'opérateur $\bar{\partial}$ dans la suite. C'est important de considérer cet opérateur quand on veut considérer la structure holomorphe. C'est parce que f est une fonction* *holomorphe si et seulement si $\bar\partial f = 0$ et que $\bar\partial(f\omega) = f\bar\partial\omega$ pour f une fonction holomorphe et ω une forme.*

Il y a deux correspondances importantes. Ces sont les deux propositions suivantes.

Proposition 3.2. *Soit X une variété complexe. On a*

$$H^i(X, \mathcal{O}_X) = H^i_{Dolb}(X) := \frac{Ker(\bar\partial : A_X^{0,i} \to A_X^{0,i+1})}{Im(\bar\partial : A_X^{0,i-1} \to A_X^{0,i})},$$

où $A_X^{0,i}$ est l'espace des i-forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$ complexe sur X de type $(0,i)$ (les sections globales $\mathcal{C}^\infty$ de $\Omega_X^{0,i}$).

Démonstration. On démontre le cas où $i = 1$ directement. La démonstration pour les i supérieurs est similaire.

Soit $(g_{\alpha\beta}) \in H^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X) = H^1(X, \mathcal{O}_X)$, où $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ est un bon recouvrement de X. D'après la démonstration de Proposition2.7, on peut trouver une partition de l'unité (ρ_α) sur X. Posons $f_\alpha = \sum_{\gamma\neq\alpha} \rho_\gamma g_{\alpha\gamma}$ pour tout α. Alors $f_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha)$ et $g_{\alpha\beta} = f_\beta - f_\alpha$.

Notons $\omega_\alpha = (\bar\partial f_\alpha)$. Sur $U_\alpha \cap U_\beta$, on a

$$\omega_\beta - \omega_\alpha = \bar\partial f_\beta - \bar\partial f_\alpha = \bar\partial g_{\alpha\beta} = 0$$

car $g_{\alpha\beta}$ est holomorphe sur $U_\alpha \cap U_\beta$. Donc les ω_α se recollent en une 1-forme $\omega \in A_X^{0,1}$. Comme $\bar\partial^2 = 0$, $\omega \in Ker(\bar\partial : A_X^{0,1} \to A_X^{0,2})$.

Choisissons un autre cocycle (f'_α) tel que $f'_\beta - f'_\alpha = g_{\alpha\beta}$. Notons $h_\alpha = f'_\alpha - f_\alpha$. Alors $h_\beta - h_\alpha = 0$ donc $(h_\alpha) \in \mathcal{C}^\infty(X)$. Cela implique que $(\bar\partial f'_\alpha) - (\bar\partial f_\alpha) = (\bar\partial h_\alpha) \in Im(\bar\partial : A_X^{0,0} \to A_X^{0,1})$. Donc $\omega = (\bar\partial f_\alpha)$ est un élément bien défini de $H^1_{Dolb}(X)$. On peut aussi vérifier que le noyau de ce morphisme est $\delta(\Gamma(X, \mathcal{O}_X))$, c'est-à-dire que l'on a un morphisme injectif de $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ à $H^1_{Dolb}(X)$.

Ce morphisme est surjectif : soit $\omega = (\omega_\alpha) \in Ker(\bar\partial : A_X^{0,1} \to A_X^{0,2})$ pour un recouvrement $\mathcal{U} = (U_\alpha)$ assez bon. On a $\bar\partial\omega_\alpha = 0$ sur U_α. D'après le lemme de Dolbeault (Proposition 2.31 dans [Voisin 1]), il existe des $\sigma_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U_\alpha)$ tel que $\omega_\alpha = \bar\partial\sigma_\alpha$. Posons $g_{\alpha\beta} = \sigma_\beta - \sigma_\alpha$, alors $g_{\alpha\beta}$ est holomorphe sur $U_\alpha \cap U_\beta$ car $\bar\partial g_{\alpha\beta} = \bar\partial\sigma_\beta - \bar\partial\sigma_\alpha = \omega_\beta - \omega_\alpha = 0$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$. Ainsi $(g_{\alpha\beta}) \in C^1(X, \mathcal{O}_X)$, donc la classe de ω est l'image de la classe de $(g_{\alpha\beta})$. □

Proposition 3.3. *Soit X une variété différentiable. On a*

$$H^i(X, \mathbb{C}) = H^i_{DR}(X, \mathbb{C}) := \frac{Ker(d : A^i_{\mathbb{C}}(X) \to A^{i+1}_{\mathbb{C}}(X))}{Im(d : A^{i-1}_{\mathbb{C}}(X) \to A^i_{\mathbb{C}}(X))},$$

où $A^i_{\mathbb{C}}(X)$ est l'espace des i-formes différentielles $\mathcal{C}^\infty$ à coefficients complexes sur X.

La démonstration est la même que la proposition précédente.

On va utiliser dans la suite les groupes $H^{p,q}(X)$ définis comme l'ensemble des classes de $H^{p+q}(X,\mathbb{C})$ représentées par une forme fermée de type (p,q), ou comme { forme complexe fermée de type (p,q) sur X} / { forme complexe exacte de type (p,q) sur X}. Les éléments dans une classe définie par la première définition ne sons pas les mêmes que ces dans la classe correspondante définie par la deuxième définition. Mais le groupe de classe est le même.

3.2 Theorème de Lefschetz sur les (1,1)-classes

Théorème 3.4. *Soit X une variété complexe, alors* $Ker(H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathcal{O}_X)) = H^2(X,\mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X)$. *C'est-à-dire que (l'image dans* $H^2(X,\mathbb{C})$ *de) la classe de Chern d'un fibré en droites peut être représentée par une forme réelle fermée de type (1,1). Inversement, soit une classe* $[\alpha]$ *de* $H^2(X,\mathbb{Z})$ *(dont l'image dans* $H^2(X,\mathbb{C})$ *peut être) représentée par une forme fermée de type (1,1), alors* $[\alpha]$ *est la classe de Chern d'un fibré en droites.*

Démonstration. On a
$$\begin{tikzcd} H^2(X,\mathbb{Z}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^2(X,\mathcal{O}_X) \\ & H^2(X,\mathbb{C}) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Comme $H^2(X,\mathbb{C}) = H^2_{DR}(X,\mathbb{C})$ et $H^2(X,\mathcal{O}_X) = H^2_{Dolb}(X)$, on peut vérifier que $H^2(X,\mathbb{C}) \to H^2(X,\mathcal{O}_X)$ est donné par $[\omega] \mapsto [\omega^{0,2}]$ (c'est bien défini car $\bar{\partial}\omega^{0,2} = (d\omega)^{0,3} = 0$). Soit $\alpha = \alpha^{2,0} + \alpha^{1,1} + \alpha^{0,2} \in Ker(H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathcal{O}_X))$, alors $\alpha^{0,2} = 0$ dans $H^2(X,\mathcal{O}_X)$. Donc il existe $\beta \in A^{0,1}_X$ tel que $\alpha^{0,2} = \bar{\partial}\beta$. Considérons $\omega = \alpha - d(\beta + \bar{\beta})$. ω est fermée car $d\omega = d\alpha = 0$. De plus, comme $\beta + \bar{\beta}$ est une forme réelle, ω est réelle. Elle est dans la même classe que α dans $H^2(X,\mathbb{R})$.

De plus, comme $\alpha = \overline{\alpha}$, on a $\alpha^{2,0} = \overline{\alpha^{0,2}}$, donc $\alpha^{2,0} = \partial\bar{\beta}$. Donc $\omega = \alpha^{2,0} + \alpha^{1,1} + \alpha^{0,2} - \partial\beta - \bar{\partial}\beta - \bar{\beta} - \bar{\partial}\bar{\beta} = \alpha^{1,1} - \partial\beta - \bar{\partial}\bar{\beta}$ est de type (1,1).

Inversement, soit une classe $[\alpha]$ de $H^2(X,\mathbb{Z})$ (dont l'image dans $H^2(X,\mathbb{C})$ peut être) représentée par une forme fermée de type (1,1), alors son image dans $H^2_{Dolb}(X)$ est 0. Donc $[\alpha] \in Ker(H^2(X,\mathbb{Z}) \to H^2(X,\mathcal{O}_X))$.

En fait, on peut donner explicitement la classe de $c_1(L)$ dans $H^2_{DR}(X,\mathbb{C})$ pour un fibré en droites holomorphe L. On a vu que L est correspondant à $(g_{\alpha\beta})$ les fonctions de transition holomorphes. Cela correspond à une classe $[(g_{\alpha\beta})]$ dans $H^1(X,\mathcal{O}^*_X)$. D'après la Proposition 2.10, on sait que l'image de cette classe dans $H^2(X,\mathbb{Z})$ (ainsi son image dans $H^2(X,\mathbb{C})$) est la classe de $(a_{\alpha\beta\gamma})$ où $a_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2\pi i}(\log g_{\alpha\beta} + \log g_{\beta\gamma} + \log g_{\gamma\alpha})$. D'après la Proposition 3.3, on sait qu'il existe $(f_{\alpha\beta})$ tel que $a_{\alpha\beta\gamma} = f_{\alpha\beta} + f_{\beta\gamma} + f_{\gamma\alpha}$ et (θ_α) tel que $df_{\alpha\beta} = \theta_\beta - \theta_\alpha$. L'image de $[(a_{\alpha\beta\gamma})]$ dans $H^2_{DR}(X,\mathbb{C})$ est la classe de $(d\theta_\alpha)$. On peut trouver les $f_{\alpha\beta}$ et θ_α comme ci-dessous :

Soit σ_α une section holomorphe qui ne s'annule pas sur U_α correspondant à la trivialisation sur U_α. Alors on a $\sigma_\alpha = g_{\alpha\beta}\sigma_\beta$ sur $U_\alpha \cap U_\beta$. Soit h une métrique Hermitienne sur L. Posons

$$\omega_{L,h|U_\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\partial\bar{\partial}\log h_\alpha, \quad h_\alpha = h(\sigma_\alpha).$$

Comme $\partial\bar{\partial}\log|g_{\alpha\beta}|^2 = 0$, les $\omega_{L,h|U_\alpha}$ définissent une 2-forme réelle $\omega_{L,h}$ sur X. Comme $\omega_{L,h|U_\alpha} = d\tau_\alpha$ où $\tau_\alpha = \frac{1}{2\pi i}\bar{\partial}\log h_\alpha$, on voit que $\omega_{L,h}$ est fermée.

La classe de $\omega_{L,h}$ dans $H^2_{DR}(X,\mathbb{C})$ est égale à la classe du cocycle de Cech $[(a_{\alpha\beta\gamma})]$ dans $H^2(X,\mathbb{C})$. En fait, $\tau_\alpha - \tau_\beta = \dfrac{1}{2\pi i}\bar{\partial}(\log h_\alpha - \log h_\beta) = \dfrac{1}{2\pi i}\bar{\partial}(\log|g_{\alpha\beta}|^2) = \dfrac{1}{2\pi i}\bar{\partial}(\log g_{\alpha\beta} + \log\overline{g_{\alpha\beta}}) = \dfrac{1}{2\pi i}\bar{\partial}\log\overline{g_{\alpha\beta}}$. Comme il existe $f_{\alpha\beta}$ tel que $g_{\alpha\beta} = exp^{2\pi i f_{\alpha\beta}}$, $\tau_\alpha - \tau_\beta = -\overline{\partial f_{\alpha\beta}} = -d\overline{f_{\alpha\beta}}$. On a $\overline{f_{\alpha\beta}} + \overline{f_{\beta\gamma}} + \overline{f_{\gamma\alpha}} = f_{\alpha\beta} + f_{\beta\gamma} + f_{\gamma\alpha} = a_{\alpha\beta\gamma}$ car les coefficients de $a_{\alpha\beta\gamma}$ sont entiers. Donc $\overline{f_{\alpha\beta}}$ est comme $f_{\alpha\beta}$ ci-dessus et τ_α est comme θ_α ci-dessus, on voit que la classe de $(a_{\alpha\beta\gamma})$ est l'image de la classe de $\omega_{L,h}$ dans $H^2(X,\mathbb{C})$, i.e. $c_1(L) = \omega_{L,h}$ dans $H^2_{DR}(X,\mathbb{C})$.

□

3.3 Quelques exemples de la première classe de Chern

3.3.1 Tores complexes

Un tore complexe est $T = \mathbb{C}^n/\Gamma$ pour un réseau Γ dans $\mathbb{C}^n$. On va voir que $Pic^{hol}(T)$ depend de la position de Γ dans $\mathbb{C}^n$.

On a $\Gamma \simeq H_1(T,\mathbb{Z})$, donc $H^1(T,\mathbb{Z}) \simeq \Gamma^*$. $H^k(T,\mathbb{Z}) \simeq \bigwedge^k \Gamma^*$.

On sait que { k-forme différentielle sur T } = { k-forme différentielle sur $\mathbb{C}^n$ invariante par Γ }. En fait, Soit $\pi : \mathbb{C}^n \to T$ la projection canonique. Soit ω une k-forme différentielle sur T, alors $\pi^*\omega$ est une k-forme différentielle sur $\mathbb{C}^n$. Comme $\forall\gamma \in \Gamma$, on a $\pi \circ \tau_\gamma = \pi$ où $\tau_\gamma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n, x \mapsto x + \gamma$, on a ainsi que $\pi^*\omega$ est invariante par τ_γ. Inversement, soit ω' une k-forme différentielle sur $\mathbb{C}^n$ invariante par les τ_γ, alors pour un recouvrement par les ouverts (U_α) Γ-petits, les $\omega'|_{U_\alpha}$ se recollent en une k-forme sur T (la compatibilité vient du fait que les changements de cartes sont des translations).

Proposition 3.5. *Toute forme différentielle fermée sur T est cohomologue à une forme à coefficients constants. De façon similaire, toute forme $\bar{\partial}$-fermée sur T est $\bar{\partial}$-cohomologue à une forme constante.*

Démonstration. D'abord on peut montrer que si ω est une forme différentielle fermée sur T et τ_z est une translation sur T, alors $\tau_z^*\omega - \omega$ est exacte, où $\tau_z^*\omega(x) = \omega(x+z)$. On peut trouver la démonstration dans [Debarre, ChapIII].

Ensuite, considérons la moyennée de ω définie comme $\tilde{\omega} := \int_T \tau_z^*\omega\mu(z)$ où μ est une forme volume invariante par translation de volume 1. C'est une forme constante sur T. On a $\tilde{\omega} - \omega = \int_T(\tau_z^*\omega - \omega)\mu(z)$ qui est exacte car chaque $\tau_z^*\omega - \omega$ l'est. □

D'après la proposition, on a $H^1(T, \mathcal{O}_T) \simeq H^1_{Dolb}(T) \simeq \{$forme constante de type $(0,1)$ sur $\mathbb{C}^n\} \simeq \bigwedge^{0,1}(\mathbb{C}^n)^*$. Où l'espace des formes $\mathbb{R}$-linéaire à valeur dans $\mathbb{C}$ décompose à $\bigwedge^{1,0}(\mathbb{C}^n)^* \oplus \bigwedge^{0,1}(\mathbb{C}^n)^*$, $\bigwedge^{0,1}(\mathbb{C}^n)^*$ est l'espace des formes $\mathbb{C}$-antilinéaire. (Le deuxième isomorphisme vient du fait qu'une forme différentielle donne une forme $\mathbb{R}$-linéaire sur l'espace tangent ($\simeq \mathbb{C}^n$) en chaque point de T. Quand la forme différentielle est à coefficients constant, toutes les formes $\mathbb{R}$-linéaires sur $\mathbb{C}^n$ qu'elle donne sont la même.) On a aussi $H^k(T, \mathcal{O}_T) \simeq H^k_{Dolb}(X) \simeq \bigwedge^{0,k}(\mathbb{C}^n)^*$.

Ainsi, on a

$$\begin{array}{ccccc} H^1(T, \mathcal{O}_T^*) & \xrightarrow{c_1} & H^2(T, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^2(T, \mathcal{O}_T) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Pic^{hol}(T) & \longrightarrow & \bigwedge^2 \Gamma^* & \longrightarrow & \bigwedge^{0,2}(\mathbb{C}^n)^* \end{array}$$

donc d'après le théorème 3.4 :

$$0 \longrightarrow Pic^0(T) \longrightarrow Pic^{hol}(T) \xrightarrow{c_1} \bigwedge^{2} \Gamma^* \cap \bigwedge^{1,1}(\mathbb{C}^n)^* \longrightarrow 0,$$

où $Pic^0(T) = Ker(c_1)$.

Le groupe $\bigwedge^2 \Gamma^* \cap \bigwedge^{1,1}(\mathbb{C}^n)^*$ peut être très différent pour des $\Gamma \in \mathbb{C}^n$ différents. Les deux exemples suivants illustrent ce phénomène.

Exemple 3.6. *Soit $n \geq 2$, Γ un réseau dans $\mathbb{C}^n$ tel qu'il a un endomorphisme ϕ dont les valeurs propres ont multiplication 1 et sont toutes non réelles. On choisit n valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n$ telles que λ_i, λ_j ne sont pas conjugués entre eux pour tout $1 \leq i \neq j \leq n$. Posons Γ' le somme des espaces propres de ces valeurs propres et $T := \Gamma \otimes \mathbb{C}/(\Gamma' \oplus \Gamma)$. On peut montrer qu'il existe des Γ et ϕ tel que le groupe galoisien du corps de décomposition de son polynôme caractéristique agit sur ses racines comme le groupe symétrique. Dans ce cas, toutes les premières classes de Chern des fibrés en droites sur T sont nulles. [Voisin 2]*

Exemple 3.7. *Si $\Gamma \in \mathbb{C}^n$ vérifie la condition de Riemann, alors il existe des fibrés en droites dont la classe de Chern est non nulle. En fait il existe même des fibrés en droites amples fournissant un plongement du tore dans l'espace projectif [Debarre, Chap VI]*

3.3.2 Variété Kahlerienne

Pour X une variété Kahlerienne compacte, on a

Théorème 3.8. *(Décomposition de Hodge)*

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X).$$

De plus, $H^{p,q}(X) \simeq H^q(X, \Omega_X^p)$. Les $H^{p,q}(X)$ sont définis comme dans 3.1. On peut trouver la démonstration dans [Voisin 1, Chap6].

Grosso modo, une variété Kahlerienne est une variété dont la structure complexe et la structure riemannienne sont bien compatibles. Dans ce cas, on a l'égalité des laplaciens $\Delta_d = 2\Delta_\partial = 2\Delta_{\bar{\partial}}$. Cela implique la décomposition ci-dessus.

Dans ce cas, le morphisme $H^2(X, \mathbb{C}) \to H^2(X, \mathcal{O}_X)$ dans le théorème 3.4 est la projection $H^2(X, \mathbb{C}) \to H^{0,2}(X)$.

3.3.3 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

Pour $X = \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, on a $H^i(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}) = 0$ pour $i > 0$. Donc $Pic^{hol}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) \simeq H^2(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. On peut même écrire explicitement cet isomorphisme.

D'abord voir pourquoi $H^i(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}) = 0$ pour $i > 0$: la décomposition de Hodge donne une projection $H^i(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) \to H^i(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}) = H^{0,i}(X)$. Quand i est impair, $H^i(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) = 0$ donc $H^i(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}) = 0$. Quand i est pair, $H^i(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$. Comme $dim\, H^{i,0}(X) = dim\, H^{0,i}(X)$ et $dim\, H^{i,0}(X) + dim\, H^{0,i}(X) \leq dim\, H^i(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathbb{C}) = 1$, on a $dim\, H^{0,i}(X) = 0$ donc $H^i(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}) = 0$.

Considérons le fibré en droites tautologique sur $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. On le note $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$. On a $\mathbb{Z}[\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)] \in Pic^{hol}(\mathbb{P}^n)$. Soit σ_i la section telle que $\sigma_i(x)$ soit le point $(z_0, \cdots, z_n)$ dont $z_i = 1$ dans la droite representée par $x = [z_0 : \cdots : z_n]$. Sur la trivialisation correspondante, on a $\sigma_j = \frac{Z_i}{Z_j}\sigma_i$. Soit h la métrique Hermitienne standard sur $\mathbb{C}^{n+1}$, alors d'après la démonstration du théorème 3.4, les $\omega_i = \dfrac{1}{2\pi i}\partial\bar{\partial}\log h(\sigma_i)$ définissent une forme ω réelle fermée de type (1,1) qui représent la classe $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1))$. On peut montrer que $\int_{\mathbb{P}^n} \omega = -1$. Comme $\int_{\mathbb{P}^n} c_1(L) \in \mathbb{Z}$, on voit que la classe de $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1))$ n'est pas divisible dans $Pic^{hol}(\mathbb{P}^n)$. Donc $Pic^{hol}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)]$.

Remarque 3.9. *Considérons le fibré dual de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$: $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ et σ_i^* et h^* associé. Les $\omega_i^* = \dfrac{1}{2\pi i}\partial\bar{\partial}\log h^*(\sigma_i^*)$ définissent ω^* qui représent la classe $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1))$. Comme $h^*(\sigma_i^*) = 1/h(\sigma_i)$, on a $\omega^* = -\omega$. La forme ω^* est la forme Fubini-Study sur $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Souvent c'est mieux d'écrire $Pic^{hol}(\mathbb{P}^n) = \mathbb{Z}[\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)]$.*

3.4 Plongement dans des espaces projectifs

Le théorème de Kodaira dit que pour X une variété complexe compacte, si elle a une (1,1) forme ω fermée positive dont la classe est entière, alors il existe un plongement holomorphe de X dans $\mathbb{P}^M_{\mathbb{C}}$ pour un M assez grand.

D'après le théorème 3.4, les conditions de type (1,1), fermée et de classe entière impliquent que $[\omega]$ est la première classe de Chern d'un fibré en droites L. Avec la condition positive, on peut démontrer que pour un N assez grand, certaines sections holomorphes de $L^{\otimes N}$ donnent un plongement holomorphe de X dans $\mathbb{P}^M_{\mathbb{C}}$ pour un M assez grand.

Exemple 3.10. *Soit X une variété Kahlerienne compacte et $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$, alors X est projective.*

L'ensemble des classes qui peuvent être représentées par une forme positive est ouvert dans $H^2(X, \mathbb{R}) \cap H^{1,1}(X)$. Cet ensemble est non vide parce que la classe de forme Kahlerienne est dedans. De plus, $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$ implique que $H^2(X, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}(X) = H^2(X, \mathbb{Z})$, donc $H^2(X, \mathbb{Z}) \subset H^{1,1}(X)$ et $H^2(X, \mathbb{Q}) \subset H^{1,1}(X)$. Comme $H^2(X, \mathbb{Q})$ est dense dans $H^2(X, \mathbb{R}) \cap H^{1,1}(X)$, il existe des classes de $H^2(X, \mathbb{Q})$ qui peuvent être représentées par une forme positive. Donc il existe une (1,1) forme fermée positive dont la classe est entière. D'après le théorème de Kodaira, X est projective.

Exemple 3.11. *Les tores complexes construits dans l'exemple 3.6 ne peuvent plonger dans aucun espace projectif. Sinon, la restriction de la forme Fubini-Study de cet espace projectif sur T serait une forme réelle fermée positive de type (1,1) dont la classe dans $H^2(T, \mathbb{C})$ est entière, i.e. la classe de cette forme est la première classe de Chern non nulle d'un fibré en droites. Cela est contradictoire avec le fait que toutes les premières classes de Chern de T sont nulles.*

En revanche, on peut démontrer qu'un tore complexe $T = \mathbb{C}^n/\Gamma$ avec Γ satisfaisant la condition de Riemann peut en fait se plonger dans un espace projectif. [Debarre, Chap VI]

4 Le groupe $Pic^0(X)$

X est une variété complexe dans cette section. $Pic^0(X)$ est le groupe qui paramètre les classes des fibrés en droites holomorphes dont la première classe de Chern sont nulle. D'après la Proposition 2.10, on a

$$\begin{aligned} Pic^0(X) &= Ker(H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \xrightarrow{c_1} H^2(X, \mathbb{Z})) \\ &= Im(H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X^*)) \\ &\simeq H^1(X, \mathcal{O}_X)/Ker(H^1(X, \mathcal{O}_X) \to H^1(X, \mathcal{O}_X^*)) \\ &= H^1(X, \mathcal{O}_X)/Im(H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)). \end{aligned}$$

Quand X est compacte, $H^0(X, \mathcal{O}_X) \to H^0(X, \mathcal{O}_X^*)$ est surjectif. Donc $H^1(X, \mathbb{Z}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est injectif et $Pic^0(X) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X)/H^1(X, \mathbb{Z})$.

Comme $H^1(X, \mathbb{Z}) \hookrightarrow H^1(X, \mathbb{R}) \hookrightarrow H^1(X, \mathbb{C}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$, $H^1(X, \mathbb{Z})$ peut être vu comme un réseau dans $H^1(X, \mathbb{C})$.

Mais en général, $Pic^0(X)$ n'est pas un tore complexe. En fait, soit $\Gamma \subset V \simeq \mathbb{C}^m$ et $\Gamma \simeq \mathbb{Z}^n$. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que V/Γ soit un tore complexe est que le morphisme $\Gamma_{\mathbb{R}} \to V$ est un isomorphisme des espaces vectoriels réels, où $\Gamma_{\mathbb{R}} = \Gamma \otimes \mathbb{R}$. (L'injectivité vient du fait que Γ doit être un sous-groupe discret dans V. La surjectivité vient du fait que V/Γ doit être compact.)

$H^1(X, \mathbb{R}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est toujours injectif. En effet, soit la classe de α est dans $Ker(H^1(X, \mathbb{R}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X))$ avec $\alpha = \alpha^{1,0} + \alpha^{0,1}$, alors il existe une fonction $\mathcal{C}^\infty$ complexe β telle que $\alpha^{0,1} = \bar{\partial}\beta$. Comme α est une forme réelle, $\alpha^{1,0} = \overline{\alpha^{0,1}}$. Considerons la forme $\lambda_1 = \alpha - d\beta$, alors λ_1 est une 1-forme fermée de type (1,0) dans la même classe que α. De même, la 1-forme fermée $\lambda_2 = \alpha - d\bar{\beta}$ est de type (0,1). $\lambda_1 - \lambda_2 = d(\bar{\beta} - \beta)$. On a donc $\partial\bar{\partial}(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$. Cela implique que $\lambda_1 - \lambda_2$ est constante sur X compacte. Pour une 1-forme, cela implique qu'elle cohomologue à 0. Donc $[\lambda_1] = 0$ et $[\lambda_2] = 0$ respectivement. Ainsi $[\alpha]$ est 0.

En revanche, en général, on n'a pas la surjectivité. Un cas spécial est pour X une variété Kahlerienne compacte, dans ce cas, $Pic^0(X)$ est un tore complexe. En effet, la décomposition de Hodge donne $H^1(X, \mathbb{C}) = H^{1,0}(X) \oplus H^{0,1}(X)$ avec $H^{0,1}(X) = \overline{H^{1,0}(X)} = H^1(X, \mathcal{O}_X)$. Le morphisme composé $\varphi : H^1(X, \mathbb{R}) \hookrightarrow H^1(X, \mathbb{C}) \to H^{0,1}(X) = H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est un isomorphisme. La surjectivité vient de la projection dans la décomposition (pour tout $[\beta] \in H^{0,1}(X)$, on a $[\overline{\beta} + \beta] \in H^1(X, \mathbb{R})$ et $\varphi([\overline{\beta} + \beta]) = [\beta]$). Donc $Pic^0(X) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X)/H^1(X, \mathbb{Z}) \simeq H^{0,1}(X)/H^1(X, \mathbb{Z}))$ est un tore complexe.

Généralement, on a seulement

Proposition 4.1. *Si X est une variété complexe compacte, alors $Pic^0(X)$ est un tore complexe si et seulement si $H^1(X, \mathbb{C}) = H^{(1,0)} \oplus \overline{H^{(1,0)}}$, et l'application $H^1(X, \mathbb{C}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est surjective. où $H^{(1,0)} := Ker(H^1(X, \mathbb{C}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X))$. Dans ce cas, $Pic^0(X) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X)/H^1(X, \mathbb{Z}) \simeq H^1(X, \mathbb{C})/(H^{(1,0)} \oplus H^1(X, \mathbb{Z}))$.*

Référence

[Debarre] Olivier Debarre, *Tores et variétés abéliennes complexes*.

[Voisin 1] Claire Voisin, *Hodge Theory and Complex Algebraic Geometry I*.

[Voisin 2] Claire Voisin, *On the homotopy types of compact Kahler and complex projective manifolds*.