J. reine angew. Math. **387** (1988), 111—121

Journal für die reine und angewandte Mathematik

Courbes tétragonales et cohomologie de Koszul

Par *Claire Voisin* à Paris

Introduction

Les groupes de cohomologie de Koszul $K_{p,q}(V, B)$ sont définis de la façon suivante: V est un espace vectoriel, $B = \bigoplus_q B_q$ est une algèbre graduée sur l'anneau de polynômes $S = \bigoplus_q \mathrm{Sym}^q V$; il existe une différentielle naturelle

$$d_{p,q}: \Lambda^p V \otimes B_q \to \Lambda^{p-1} V \otimes B_{q+1},$$

qui fait de $(\Lambda^p V \otimes B_q)_{p+q=r}$ un complexe dont les groupes de cohomologie sont notés $K_{p,q}(V, B)$.

Ces groupes sont introduits et discutés en toute généralité dans [3]: soit X une variété algébrique, munie d'un faisceau inversible L: on pose $V = H^0(X, L)$ et $B = \bigoplus_q H^0(X, L^q)$: on note alors $K_{p,q}(V, B) = K_{p,q}(X, L)$. On se propose d'étudier dans un cas particulier la conjecture suivante ([3], p. 165).

Conjecture. *Soit C une courbe lisse, K_C son fibré canonique. Alors*

$$K_{p,1}(C, K_C) \neq 0 \Leftrightarrow C \textit{ possède un } g_d^r,$$

avec $d \leqq g-1$, $r \geqq 1$ et $d - 2r \leqq g - 2 - p$.

Le sens $\Leftarrow$ de cette assertion est prouvé par M. Green et R. Lazarsfeld dans un appendice au même article. Leur démonstration utilise essentiellement l'application naturelle:

$$\Lambda^2 H^0(\mathcal{O}_C(D)) \otimes \Lambda^2 H^0(K_C(-D)) \to I_2(C),$$

(où $I_k(C)$ dénote la composante de degré k de l'idéal de C dans son plongement canonique), ainsi que la nullité des $K_{p,q}(V, B)$, lorsque $B = S$.

Pour ce qui est du sens $\Rightarrow$, il est établi dans les cas $p = g-2$, $p = g-3$: utilisant le théorème de dualité ([3], p. 144):

$$K_{p,q}(C, K_C)^* = K_{g-2-p,3-q}(C, K_C),$$

on voit que pour $p=g-2$, $K_{p,1}(C, K_C)\neq 0 \Leftrightarrow (\mathrm{Sym}^2 H^0(K_C) \to H^0(K_C^{\otimes 2}))$ n'est pas surjective, soit, par le théorème de Noether, C hyperelliptique. Tandis que pour $p=g-3$, $K_{p,1}(C, K_C)\neq 0 \Leftrightarrow (H^0(K_C)\otimes I_2(C) \to I_3(C))$ n'est pas surjective, soit, par le théorème de Pétri, C trigonale ou une quintique plane.

Le résultat obtenu ici est le suivant

Théorème. *Soit C une courbe lisse de genre $g\geqq 11$, alors:*

$$K_{g-4,1}(C, K_C)\neq 0 \Rightarrow C$$

est hyperelliptique, trigonale ou tétragonale.

Dans un premier temps, on reprend la méthode de [4], qui relie essentiellement les $K_{p,1}(C, K_C)$ à la structure du faisceau $\Omega_{\mathbb{P}^{g-1}|C}$, ce qui permet d'obtenir le critère suivant, valable pour tout $g\geqq 8$:

Proposition I. 1. *Soit C une courbe lisse de genre g, satisfaisant les conditions* (H) *suivantes:*

(H_1) *il existe un diviseur D de degré $g-2$, avec $h^0(\mathcal{O}_C(D))=2$, tel que $\mathcal{O}_C(D)$ et $K_C(-D)$ sont engendrés par leurs sections globales.*

(H_2) *il existe une section $s\neq 0$ de $\mathcal{O}_C(D)$, telle que pour tout diviseur effectif D' de degré 2 ou 3, avec $D'\leqq \mathrm{Div}(s)$, on ait: l'application $\mu_{D'}$ donnée par le cup-produit:*

$$H^0(K_C(-D))\otimes H^0(K_C(-D')) \xrightarrow{\mu_{D'}} H^0(K_C^{\otimes 2}(-D-D')),$$

est surjective.

Alors $$K_{g-4,1}(C, K_C)=0.$$

Le reste du travail consiste à prouver que pour $g\geqq 11$, (non H) entraîne: C hyperelliptique, trigonale, ou tétragonale.

Il est probable que ce schéma de démonstration permet de traiter la conjecture pour $p=g-4$, et tout $g\geqq 8$: par contre, pour $g=7$, les conditions (H) ne sont jamais vérifiées, bien qu'une courbe générique de genre 7 ne soit pas tétragonale.

Enfin il est clair que pour $p\leqq g-5$, les calculs deviennent inextricables, et que cette méthode ne prête pas à une généralisation.

I

Outre les notations introduites plus haut, on notera ϕ_D le morphisme $C \to \mathbb{P}(H^0(\mathcal{O}_C(D))^*)$ associé à un diviseur D tel que $\mathcal{O}_C(D)$ est engendré par ses sections globales; pour un sous-ensemble algébrique A de l'espace projectif $\mathbb{P}^r$ on note $\langle A\rangle$ le sous-espace projectif engendré par A.

— Soit C une courbe lisse de genre g, et soit $\mathscr{E}=\phi_{K_C}^*(\Omega_{\mathbb{P}^{g-1}}(1))$: on a la suite exacte, dite d'Euler:

$$0\to \mathscr{E}\to H^0(K_C)\otimes \mathcal{O}_C \to K_C \to 0.$$

On en déduit les suites exactes suivantes:

$$0 \to \Lambda^{g-3}\mathscr{E} \to \Lambda^{g-3}H^0(K_C)\otimes\mathscr{O}_C \xrightarrow{\alpha} \Lambda^{g-4}\mathscr{E}\otimes K_C \to 0,$$
$$0 \to \Lambda^{g-4}\mathscr{E}\otimes K_C \to \Lambda^{g-4}H^0(K_C)\otimes K_C \to \Lambda^{g-5}\mathscr{E}\otimes K_C^{\otimes 2} \to 0,$$
$$0 \to \Lambda^{g-5}\mathscr{E}\otimes K_C^{\otimes 2} \to \Lambda^{g-5}H^0(K_C)\otimes K_C^{\otimes 2} \to \Lambda^{g-6}\mathscr{E}\otimes K_C^{\otimes 3} \to 0.$$

On a: $K_{g-4,1}(C, K_C) =$

$$\operatorname{Ker}[\Lambda^{g-4}H^0(K_C)\otimes H^0(K_C)\, d_{g-4,1} \to \Lambda^{g-5}H^0(K_C)\otimes H^0(K_C^{\otimes 2})]/\operatorname{Im} d_{g-3,0}(\Lambda^{g-3}H^0(K_C)).$$

On en déduit, en prenant les sections globales, l'identification:

$$K_{g-4,1}(C, K_C) = H^0(\Lambda^{g-4}\mathscr{E}\otimes K_C)/\alpha(\Lambda^{g-3}H^0(K_C)).$$

On voit aisément que α est injective puisque l'application

$$d_{g-3,0}\colon \Lambda^{g-3}H^0(K_C) \to \Lambda^{g-4}H^0(K_C)\otimes H^0(K_C)$$

l'est, et donc que:

$$K_{g-4,1}(C, K_C) = 0 \Leftrightarrow h^0(\Lambda^{g-4}\mathscr{E}\otimes K_C) \leqq \binom{g}{g-3}.$$

Par ailleurs, $\operatorname{Det}\mathscr{E} = K_C^{-1}$ et $\operatorname{rang}(\mathscr{E}) = g-1$, entraînent $\Lambda^{g-4}\mathscr{E}\otimes K_C = \Lambda^3\mathscr{E}^*$.

Démonstration de la proposition I. 1. Supposons l'hypothèse (H) vérifiée. Soient D et s satisfaisant (H_1) et (H_2) et posons $\operatorname{Div}(s) = x_1 + \cdots + x_{g-2}$. Suivant [4], on construit une filtration de $\mathscr{E}$ permettant de majorer $h^0(\Lambda^3\mathscr{E}^*)$.

Par le théorème de Riemann-Roch, on a $h^0(K_C(-D)) = 3$, et comme $|K_C(-D)|$ est sans point base, posant $\mathscr{F} = \phi^*_{K_C(-D)}(\Omega_{\mathbb{P}^2}(1))$, on a la suite exacte:

(E) $$0 \to \mathscr{F} \to H^0(K_C(-D))\otimes\mathscr{O}_C \to K_C(-D) \to 0$$

qui s'insère dans le diagramme suivant:

(D)
$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F} \arrow[r] \arrow[d] & H^0(K_C(-D))\otimes\mathscr{O}_C \arrow[r] \arrow[d, "s"] & K_C(-D) \arrow[r] \arrow[d, "s"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{E} \arrow[r] \arrow[d] & H^0(K_C)\otimes\mathscr{O}_C \arrow[r] \arrow[d] & K_C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{G} \arrow[r] \arrow[d] & V\otimes\mathscr{O}_C \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_i K_{C|x_i} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

où $V \underset{\text{def}}{=} H^0(K_C)/H^0(K_C(-D))$, et $\mathscr{G} = \mathscr{E}/\mathscr{F}$ est libre, par exactitude de la dernière ligne, et parce que $V \otimes \mathcal{O}_C$ l'est.

On a alors

Lemme I. 1. *Il existe une suite exacte:*

$$0 \to \mathcal{O}_C(-x_1 - x_2) \to \mathscr{G} \to \bigoplus_{i=3}^{g-2} \mathcal{O}_C(-x_i) \to 0.$$

Démonstration. Comme $|D|$ est sans point base, avec $h^0(\mathcal{O}_C(D)) = 2$, pour tout diviseur D' effectif strictement inférieur à D, on a $h^0(\mathcal{O}_C(D')) = 1$, d'où, par Riemann-Roch:

$$\begin{aligned}\langle \phi_{K_C}(x_3 + \cdots + x_{g-2}) \rangle = \mathbb{P}^{g-5} &\subset \langle \phi_{K_C}(x_2 + \cdots + x_{g-2}) \rangle \\ &= \mathbb{P}^{g-4} = \langle \phi_{K_C}(x_3 + \cdots + x_{g-2} + x_1) \rangle;\end{aligned}$$

il existe donc une section de K_C, d'image $t \neq 0$ dans V, s'annulant sur $x_3, \ldots, x_{g-2}$ et ne s'annulant pas sur x_1, x_2. Posant $V'' = V/\langle t \rangle$, on obtient le diagramme suivant, avec $\mathscr{G}'$ et $\mathscr{G}''$ libres, exact horizontalement et verticalement:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{G}' \arrow[r] \arrow[d] & \langle t \rangle \otimes \mathcal{O}_C \arrow[r] \arrow[d] & K_{C|x_1} \otimes K_{C|x_2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{G} \arrow[r] \arrow[d] & V \otimes \mathcal{O}_C \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_i K_{C|x_i} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathscr{G}'' \arrow[r] \arrow[d] & V'' \otimes \mathcal{O}_C \arrow[r] \arrow[d] & \bigoplus_{i \geqq 3} K_{C|x_i} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 & .
\end{tikzcd}$$

Il est clair que $\mathscr{G}' = \mathcal{O}_C(-x_1 - x_2)$ et que $\mathscr{G}'' = \bigoplus_{i \geqq 3} \mathcal{O}_C(-x_i)$, compte tenu du fait que $V'' \to H^0(\bigoplus_{i \geqq 3} K_{C|x_i})$ est un isomorphisme.

Considérant la première colonne de (D), on obtient une filtration de $\Lambda^3 \mathscr{E}^*$ dont les quotients successifs sont: $\mathscr{G}^* \otimes \Lambda^2 \mathscr{F}^*$, $\Lambda^2 \mathscr{G}^* \otimes \mathscr{F}^*$, $\Lambda^3 \mathscr{G}^*$. D'où

$$h^0(\Lambda^3 \mathscr{E}^*) \leqq h^0(\Lambda^3 \mathscr{G}^*) + h^0(\Lambda^2 \mathscr{G}^* \otimes \mathscr{F}^*) + h^0(\mathscr{G}^* \otimes \Lambda^2 \mathscr{F}^*).$$

— D'après le lemme I. 1, on a une suite exacte:

$$0 \to \bigoplus_{3 \leqq i < j < k \leqq g-2} \mathcal{O}_C(x_i + x_j + x_k) \to \Lambda^3 \mathscr{G}^* \to \bigoplus_{3 \leqq i < j \leqq g-2} \mathcal{O}_C(x_1 + x_2 + x_i + x_j) \to 0$$

par l'hypothèse faite sur D, chacun des faisceaux de rang un qui apparaissent dans cette séquence vérifie $h^0(\cdot)=1$, d'où la majoration

$$h^0(\Lambda^3\mathscr{G}^*)\leqq\binom{g-4}{3}+\binom{g-4}{2}.$$

— D'après (E), et par le lemme I. 1, on a: $\operatorname{Det}\mathscr{F}^*=K_C(-D)$, et une suite exacte:

$$0\to\bigoplus_{3\leqq i\leqq g-2}\mathscr{O}_C(-D+x_i)\otimes K_C\to\mathscr{G}^*\otimes\Lambda^2\mathscr{F}^*\to\mathscr{O}_C(-D+x_1+x_2)\otimes K_C\to 0$$

comme $h^0(\mathscr{O}_C(D-x_i))=1=h^0(\mathscr{O}_C(D-x_1-x_2))$, on calcule par Riemann-Roch:

$$h^0(K_C(-D+x_i))=3 \quad \text{et} \quad h^0(K_C(-D+x_1-x_2))=4.$$

D'où la majoration:

$$h^0(\mathscr{G}^*\otimes\Lambda^2\mathscr{F}^*)\leqq 3(g-4)+4.$$

— Toujours par le lemme I. 1, on écrit:

$$0\to\bigoplus_{3\leqq i<j\leqq g-2}\to\mathscr{O}_C(x_i+x_j)\to\Lambda^2\mathscr{G}^*\to\bigoplus_{3\leqq i\leqq g-2}\mathscr{O}_C(x_i+x_1+x_2)\to 0;$$

on calcule $h^0(\mathscr{F}^*(x_i+x_j))$: d'après (E) on a:

$$0\to\mathscr{O}_C(D+x_i+x_j)\otimes K_C^{-1}\to H^0(K_C(-D))^*\otimes\mathscr{O}_C(x_i+x_j)\to\mathscr{F}^*(x_i+x_j)\to 0.$$

Dans la suite exacte longue de cohomologie associée, on vérifie que la flèche:

$$H^1(K_C^{-1}(D+x_i+x_j))\to H^1(x_i+x_j)\otimes H^0(K_C(-D))^*$$

est, par la dualité de Serre, duale du cup-produit

$$\mu_{x_i+x_j}\colon H^0(K_C(-D))\otimes H^0(K_C(-x_i-x_j))\to H^0(K_C^{\otimes 2}(-x_i-x_j))$$

qui est surjectif par l'hypothèse (H_2): on en déduit $h^0(\mathscr{F}^*(x_i+x_j))=3$. On montre de même que $h^0(\mathscr{F}^*(x_i+x_1+x_2))=3$. D'où la majoration:

$$h^0(\Lambda^2\mathscr{G}^*\otimes\mathscr{F}^*)\leqq 3\left(g-4+\binom{g-4}{2}\right).$$

Sommant ces trois majorations, on obtient finalement

$$h^0(\Lambda^3\mathscr{E}^*)\leqq\binom{g-4}{3}+\binom{g-4}{2}+3(g-4)+4+3\left(g-4+\binom{g-4}{2}\right)=\binom{g}{3}.$$

Comme expliqué plus haut, ceci entraîne $K_{g-4,1}(C,K_C)=0$, et la proposition I. 1. est donc prouvée.

II

On supposera dans la suite que C est de genre $g \geqq 11$, et n'est pas tétragonale; on veut prouver que $K_{g-4,1}(C, K_C) = 0$, et d'après la proposition I.1, il suffit de montrer que C satisfait (H); raisonnant par l'absurde, on supposera donc que C ne satisfait pas (H), de manière à dégager une contradiction.

II. 0. On rappelle le théorème de Mumford ([9], [1]), qui caractérise les courbes d'indice de Clifford un, et les courbes bielliptiques:

Théorème. *Soit C une courbe lisse non-hyperelliptique de genre $g \geqq 4$; s'il existe des entiers d et r tels que $2 \leqq d \leqq g-2$, $d \geqq 2r > 0$, avec $\dim W_d^r \geqq d - 2r - 1$, C est trigonale, bielliptique, ou une quintique plane.*

Dans chacun de ces cas, C est en particulier tétragonale; l'hypothèse de non-tétragonalité entraîne donc, entre autres: toute composante de $W_{g-2}^1(C)$ est de dimension $g-6$.

On utilisera également le théorème suivant, dû à Keem ([1], p. 200):

Théorème. *Soit C une courbe lisse de genre $g \geqq 11$; s'il existe des entiers d et r, tels que $r \geqq 1$, $4 \leqq d \leqq g + r - 4$, et $\dim W_d^r(C) \geqq d - 2r - 2 \geqq 0$, C est tétragonale.*

A l'aide de ce théorème, on va prouver que C satisfait les conditions suivantes:

Proposition II. 0. *Soit D un point générique d'une composante de $W_{g-2}^1(C)$; on a:*

a) *$|D|$ est un g_{g-2}^1 complet sans point base et $|K_C(-D)|$ est un g_g^2 complet sans point base;*

b) *le morphisme $\phi_{K_C(-D)}$ est birationnel sur son image, une courbe plane qui a au plus des points singuliers de multiplicité deux;*

c) *un point singulier de multiplicité deux de $\phi_{K_C(-D)}(C)$ correspond à un $g_{g-2}^1|D'|$, inférieur à $|K_C(-D)|$. Alors D' satisfait également* a) *et* b).

On donne seulement la démonstration de a), les points b) et c) se traitant de façon analogue.

Démonstration de a). Le premier point est une application immédiate du théorème de Keem, qui entraîne en particulier que $W_{g-3}^1 + C$ est d'intérieur vide dans W_{g-2}^1. Pour le second point, il suffit de voir qu'il n'y a pas de composante X de W_{g-1}^2 de dimension supérieure à $g-7$; supposons par l'absurde qu'une telle composante existe; en appliquant le théorème de Keem, on voit qu'un point générique Δ de X vérifie: $|\Delta|$ est sans point base; de plus comme $K_C(-\Delta)$ parcourt également une composante de dimension $\geqq g-7$ de W_{g-1}^2, par le même argument, $|K_C(-\Delta)|$ doit être génériquement sans point base.

D'autre part, ϕ_Δ ne peut pas être un isomorphisme de C sur une courbe plane, et donc il existe un couple $(p, q) \in C^2$ et un $g_{g-3}^1|\Delta'|$, tels que $\Delta \equiv \Delta' + p + q$. Le fait que $|\Delta|$ et $|K_C(-\Delta)|$ soient sans point base entraîne facilement que $|K_C(-\Delta')|$ est sans point base. Si $\phi_{K_C(-\Delta')}$ est birationnel sur son image, pour Δ' fixé, il existe un nombre fini de couples (p, q) tels que $\dim|\Delta' + p + q| = \dim|\Delta'| + 1$. Sinon il existe au plus ∞^1 couples (p, q) satisfaisant cette condition, à savoir exactement les fibres de $\phi_{K_C(-\Delta')}$, si l'on impose de plus que $|K_C(-\Delta' - p - q)|$ soit sans point base.

Maintenant, soit

$Y = \{(\Delta', p, q)/|\Delta'|$ est un g^1_{g-3} complet, et $|\Delta' + p + q|$ est un g^2_{g-1} complet sans point base, de même que sa série résiduelle$\}$.

Par ce qui précède, une composante Y_0 de Y domine X; de plus les fibres de $\mathrm{pr}_1: Y_0 \to W^1_{g-3}$ sont de dimension au plus un; enfin, par le théorème de Keem, $\dim W^1_{g-3} \leqq g-8$, tandis que par hypothèse, $\dim X \geqq g-7$.

On déduit de cela que $\mathrm{pr}_1(Y_0)$ est ouvert dans une composante W de W^1_{g-3}, et qu'un point générique Δ' de W vérifie: $|K_C(-\Delta')|$ est un g^3_{g+1} complet sans point base, et le morphisme $\phi_{K_C(-\Delta')}$ est de degré deux sur son image. Cette image C' a pour normalisée $\tilde{C}'$, qui admet un système linéaire complet de degré $(g+1)/2$ et de dimension trois, et donc n'est pas rationnelle. On peut donc supposer que la courbe $\tilde{C}'$ ne dépend pas de Δ', non plus que le morphisme $\eta: C \to \tilde{C}'$, dont le composé avec le morphisme naturel $\tilde{C}' \to C' \subset \mathbb{P}^3$ est $\phi_{K_C(-\Delta')}$. Il résulte enfin de la description ci-dessus que le point générique $K_C(-\Delta)$ de $K_C - X$ provient par bull-back d'un $g^2_{(g-1)/2}$ de $\tilde{C}'$. $\tilde{C}'$ satisfait donc $\dim W^2_{(g-1)/2}(\tilde{C}') \geqq g-7$. Soit g' le genre de $\tilde{C}'$. La formule de Riemann-Hurwitz donne par ailleurs la majoration: $g' \leqq (g+1)/2$; de $g-7 \leqq g' \leqq (g+1)/2$ on tire $g \leqq 15$. De plus g est impair et $g \geqq 11$: voici la liste des cas à envisager:

$g=15$, et $g-7 \leqq g' \leqq g+1/2 \Rightarrow g'=8$, et $\dim W^2_7(\tilde{C}') \geqq 8$: impossible;

$$g=13: \begin{cases} \quad\;\; g'=7 \quad \text{et} \quad \dim W^2_6(\tilde{C}') \geqq 6: \text{impossible,} \\ \text{ou} \quad g'=6 \quad \text{et} \quad \dim W^2_6(\tilde{C}') \geqq 6: \text{impossible;} \end{cases}$$

$$g=11: \begin{cases} \quad\;\; g'=6 \quad \text{et} \quad \dim W^2_5(\tilde{C}') \geqq 4: \text{impossible,} \\ \text{ou} \quad g'=5 \quad \text{et} \quad \dim W^2_5(\tilde{C}') \geqq 4: \text{impossible,} \\ \text{ou} \quad g'=4 \quad \text{et} \quad \dim W^2_5(\tilde{C}') \geqq 4: \text{impossible.} \end{cases}$$

L'existence de X mène donc à une contradiction, et a) est démontré.

La proposition II. 0 a) montre que C satisfait la condition (H_1); on utilise maintenant les points b) et c) pour traiter le cas $\deg D' = 2$ de la condition (H_2):

Proposition II. 1. *Soit $|D|$ un g^1_{g-2} satisfaisant les conditions* a), b) *et* c) *de proposition* II. 0; *alors il existe un nombre fini de diviseurs effectifs de degré deux D', inférieurs à $|D|$ et tels que l'application*

$$\mu_{D'}: H^0(K_C(-D)) \otimes H^0(K_C(-D')) \to H^0(K_C^{\otimes 2}(-D-D'))$$

ne soit pas surjective.

Démonstration. On a $h^0(K_C^{\otimes 2}(-D-D')) = 2g-3$. Soit $W \subset H^0(K_C(-D))$ le pinceau associé à un point double de $\phi_{K_C(-D)}(C)$, et soit B son base locus, qui est de degré deux, vu les hypothèses faites sur D. La "ruse du pinceau sans point base" entraîne $\dim \mu_{D'}(W \otimes H^0(K_C(-D'))) = 2g-4-h^0(D-D'+B)$; mais par l'hypothèse c), $|D+B|$ est sans point base et définit un morphisme birationnel de C sur une courbe plane. Il existe donc un nombre fini de diviseurs effectifs D' de degré deux tels que $h^0(\mathcal{O}_C(D+B-D')) > 1$. D'autre part, l'image $\mu_{D'}(W \otimes H^0(K_C(-D')))$ s'annule sur B. Or, comme C n'est pas tétragonale, B impose deux conditions indépendantes à $|K_C - D'|$, donc aussi à $\mathrm{Im}\,\mu_{D'}$, puisque $|K_C(-D)|$ est sans point base. Si $h^0(\mathcal{O}_C(D+B-D')) = 1$ on a donc $\mathrm{rang}(\mu_{D'}) \geqq 2g-5+2 = 2g-3$, et donc $\mu_{D'}$ est surjective.

Comme $|D|$ est sans point base, ces diviseurs D' déterminent la section s de $\mathcal{O}_C(D)$, telle que $D' \leqq \operatorname{Div} s$, et donc un nombre fini de sections de $\mathcal{O}_C(D)$ contredisent la condition H_2, cas $\deg D' = 2$. $\square$

Pour exploiter l'hypothèse (non H) on aura besoin du lemme suivant, dont la preuve, peu éclairante, est reportée à la fin du texte:

Lemme II. 1. *Soit X une composante de W^1_{g-2}.* Soit $Z \subset W^1_{g-2} \times C^{(3)}$,

$$Z \underset{\text{def}}{=} \{(D, D')/h^0(\mathcal{O}_C(D - D')) \neq 0\}.$$

Soit Y une composante de Z dominant X par la projection pr_1. *Soit $\psi: Y \to C^{(g-5)}$ l'application rationnelle qui à (D, D') associe l'unique diviseur effectif de degré $g-5$ équivalent à $D - D'$. Alors ψ est dominante.*

On prouve alors

Proposition II. 2. *C satisfait la condition suivante: pour tout diviseur Δ effectif de degré $g-5$, avec $h^0(\mathcal{O}_C(\Delta)) = 1$, l'image de C dans $\mathbb{P}^4$, par l'application rationnelle associée à $|K_C(-\Delta)|$, est contenue dans une quadrique.*

Démonstration. D'après les propositions II. 0 et II. 1, C satisfait la condition (H_1) et le cas $\deg D' = 2$ de la condition (H_2). Donc l'hypothèse (non H) entraîne que pour toute composante X de $W^1_{g-2}(C)$, il existe une composante Y de Z dominant X, telle que pour $(D, D') \in Y$, l'application

$$\mu_{D'}: H^0(K_C(-D)) \otimes H^0(K_C(-D')) \to H^0(K_C^{\otimes 2}(-D - D'))$$

n'est pas surjective. L'application duale:

$$\mu^*_{D'}: H^1(K_C^{-1}(D + D')) \to \operatorname{Hom}(H^0(K_C(-D)), H^1(\mathcal{O}_C(D'))),$$

n'est donc pas injective, et il existe un fibré vectoriel E de rang deux, extension non triviale de $K_C(-D)$ par $\mathcal{O}_C(D')$, tel que $h^0(E) = h^0(\mathcal{O}_C(D')) + h^0(K_C(-D)) = 4$. E est bien sûr génériquement engendré par ses sections globales et fournit donc une application rationnelle $C \to \operatorname{Grass}(2, H^0(E))$, la grassmannienne des sous-espaces linéaires de dimension deux de $H^0(E)$, qui par le plongement de Plücker s'identifie à une quadrique de $\mathbb{P}(\Lambda^2 H^0(E)^*)$. D'où une application rationnelle $C \to \mathbb{P}(\Lambda^2 H^0(E)^*)$ qui se factorise par l'application rationnelle associée au système linéaire $\operatorname{Det}(E)$, via l'application linéaire naturelle $\Lambda^2 H^0(E) \to H^0(\Lambda^2 E)$. On en déduit que l'image de C par l'application rationnelle associée à $\operatorname{Det} E$ est également contenue dans une quadrique, non triviale, sauf si l'image de $\mathbb{P}(H^0(\operatorname{Det} E)^*)$ est contenu dans un plan de la grassmannienne; il est facile de voir que E contiendrait alors un sous-fibré isomorphe à $K_C(-D + B)$ avec $B \geqq 0$, ce qui contredit la non-trivialité de l'extension. Comme $\operatorname{Det} E = K_C(-D + D')$, et que par le lemme II. 1, $D - D'$ est un point générique de $C^{(g-5)}$, la proposition II. 2 est démontrée.

Remarquons que la condition décrite en proposition II. 2 est satisfaite si C est tétragonale; mais les quadriques qu'on obtient de cette façon sont de rang quatre. Le lemme suivant montre que cela caractérise les courbes tétragonales.

Lemme II. 2. *Pour un diviseur Δ effectif de degré $g-5$ générique, l'image $\phi_{K_C(-\Delta)}(C) \subset \mathbb{P}^4$ n'est pas contenue dans une quadrique singulière.*

Démonstration. Si $\phi_{K_C(-\Delta)}(C)$ est contenue dans une quadrique de rang inférieur ou égal à quatre pour Δ générique dans $C^{(g-5)}$, il existe des fibrés inversibles $\mathscr{L}_1$ et $\mathscr{L}_2$ sur C, avec $h^0(\mathscr{L}_1) \geqq 2$, $h^0(\mathscr{L}_2) \geqq 2$ et $\mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_2 \cong K_C(-\Delta)$; il existe donc des entiers d_1 et d_2 tels que $d_1 + d_2 = g+3$ et $W^4_{g+3} \subset W^1_{d_1} + W^1_{d_2}$; comme C n'est pas tétragonale, on peut supposer $d_1 \geqq d_2 \geqq 5$: si $d_2 = 5$, par le théorème de Keem, $\dim W^1_{d_2} = 0$, et $d_1 = g-2 \Rightarrow \dim W^1_{d_1} = g-6$, (voir II. 0), ce qui contredit $\dim W^4_{g+3} = g-5$; si $d_2 \geqq 6$, on applique le théorème de Keem à d_1 et d_2, ce qui donne:

$$\dim W^1_{d_1} + \dim W^1_{d_2} \leqq d_1 + d_2 - 10 = g-7,$$

ce qui est encore une contradiction. □

Le lemme II. 2 montre en particulier que si C n'est pas tétragonale, mais satisfait la condition de proposition II. 2, pour Δ générique, effectif de degré $g-5$ l'image $\varphi_{K_C(-\Delta)}(C) \subset \mathbb{P}^4$ est contenue dans une quadrique unique, qui est de rang 5.

On choisit maintenant un diviseur Δ' effectif de degré $g-6$, tel que $K_C(-\Delta')$ est très ample, et que pour $p \in C$ générique, $\Delta' + p$ satisfait la condition précédente. Soit $\phi_{K_C(-\Delta')}: C \longrightarrow \mathbb{P}^5$, et notons $I \subset H^0(\mathbb{P}^5, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(2))$, le système des quadriques contenant C. Par construction, il existe une application rationnelle $\alpha: C \longrightarrow \mathbb{P}(I)$, qui à un point générique p de C associe l'unique élément de I singulier en p. Notons $\mathbb{P}(H) \subset \mathbb{P}(I)$, le sous-espace engendré par $\alpha(C)$; on a une application naturelle $H \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow N^*_{C/\mathbb{P}^5}(2)$, dont le noyau L est de rang un, et l'application α est donnée par le sous-système $H^* \hookrightarrow H^0(L^*)$. Notons que l'application α est de degré un sur son image puisqu'en général la quadrique $\alpha(p)$ possède p comme unique point singulier. On a donc l'encadrement: $3 \leqq \dim H \leqq 5$, la dernière inégalité résultant de l'injection: $(H \otimes \mathcal{O}_C)/L \hookrightarrow N^*_{C/\mathbb{P}^5}(2)$. On étudie les trois cas possibles, de façon à obtenir la contradiction cherchée.

a) $\dim H = 5$: l'application $H \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow N^*_{C/\mathbb{P}^5}(2)$ est alors génériquement surjective, et a pour image $M \hookrightarrow N^*_{C/\mathbb{P}^5}(2)$, soit $\deg L^* = \deg M \leqq \deg N^*_{C/\mathbb{P}^5}(2) = 10$. Donc C possède un g^4_d avec $d \leqq 10$; par le théorème de Keem, C est tétragonale: contradiction.

b) $\dim H = 3$: si un élément générique de H correspond à une quadrique non-singulière, α envoie C birationnellement sur une composante d'une courbe plane de degré six (définie par l'annulation du discriminant). Cela entraîne encore que C est tétragonale.

Si un point général de H paramètre une quadrique de rang 5; il est facile de voir que la variété définie par H n'a pas de composante de degré 3 ou 4 et de dimension trois (une telle variété serait une composante de l'intersection complète de deux quadriques de rang cinq et la composante restante serait de degré un, impossible car une quadrique de rang cinq dans $\mathbb{P}^5$ ne contient pas de $\mathbb{P}^3$, ou de degré zéro, impossible également car $\dim H = 3 \Rightarrow H$ ne peut s'annuler sur l'intersection complète de deux quadriques). De plus une composante de degré deux et de dimension trois n'engendre pas $\mathbb{P}^5$ et donc ne peut pas contenir C. Les seules composantes de la variété définie par H qui contiennent C sont donc de dimension deux. D'autre part, comme un point général de H est de rang cinq, le lieu Σ des points singuliers des quadriques paramétrées par H est de dimension deux et contient C: or, par Bertini, ce lieu est contenu dans le base locus de H puisque par hypothèse tout élément de H est singulier; c'en est donc une composante, mais non réduite. En effet $\Sigma \subset \mathbb{P}^5$ est définie localement par trois équations, et pour tout point p de Σ, une combinaison linéaire de ces équations définit une hypersurface singulière en p ce qui signifie que le rang jacobien de H de long de Σ est au plus deux; Σ est donc de degré au plus quatre, et non-dégénérée dans $\mathbb{P}^5$, puisqu'elle contient C. En la projetant depuis un de ses points, sommet d'une quadrique de rang cinq la contenant, on obtient en général une surface de degré trois dans $\mathbb{P}^4$ contenue dans une quadrique non singulière, ce qui n'existe pas. Le cas b) mène donc également à une contradiction.

c) $\dim H = 4$: le long de C le rang jacobien de H est trois, génériquement: si C est une composante du base locus de H, c'en est une composante non-réduite, et donc de degré au plus 8, or C est de degré $g+4$ dans $\mathbb{P}^5$; absurde. Soit S une composante de dimension deux du base locus de H contenant C (en fait, vu le rang jacobien, il y en a une seule, génériquement lisse de long de C). Comme S est contenue dans quatre quadriques, un raisonnement facile montre que le degré de S est au plus six (utiliser le principe de position générale et le lemme de ([1]), p. 115). Comme pour un point général p de S, il existe une quadrique de rang cinq contenant S et de sommet p, on obtient aisément une contradiction en projetant S depuis p dans $\mathbb{P}^4$. Le cas c) est donc également contradictoire.

Donc l'hypothèse $K_{g-4,1}(C, K_C) = 0$ et C non-tétragonale est absurde, et le théorème est démontré au lemme II. 1 près.

Démonstration du lemme II. 1. D'après II. 0, on a $\dim X = g-6$, et comme un point générique de X est dans $W^1_{g-2} \backslash W^2_{g-2}$, la fibre générique de $\mathrm{pr}_1 \colon Y \to X$ est de dimension un et $\dim Y = g-5$. Suivant la proposition II. 0 on peut choisir $D \in X$, tel que $h^0(\mathcal{O}_C(D)) = 2$, $|D|$ est sans point base, $|K_C(-D)|$ est sans point base, et $\phi_{K_C(-D)}$ est birationnel sur son image.

Soit $D' \in C^{(3)}$ tel que $(D, D') \in Y$, et soit $\Delta = \Psi((D, D'))$; alors $h^0(\mathcal{O}_C(\Delta)) = 1$. Donc $h^0(K_C(-\Delta)) = 5$, et la fibre de Ψ au-dessus de Δ s'identifie à une composante de la famille des trisécantes du système linéaire $|K_C(-\Delta)|$. Or, vu les hypothèses faites sur D, $|K_C(-\Delta)|$ est sans point base et $\Phi_{K_C(-\Delta)}$ est de degré un sur son image. La famille de ces trisécantes est donc au plus de dimension un, et donc $\dim \Psi(Y) \geqq g-6$.

Supposons qu'on ait l'égalité, (c'est-à-dire Ψ non dominante): pour Δ générique dans $\Psi(Y)$, $|K_C(-\Delta)|$ possède ∞^1 trisécantes, et donc il en passe au moins une par un point générique de C.

Utilisant $\dim \Psi(Y) \geqq g-6$, on vérifie assez facilement que pour (Δ, p) générique dans $\Psi(Y) \times C$, une trisécante de $|K_C(-\Delta)|$ passant par p est unique et n'est pas une quadrisécante de $|K_C(-\Delta)|$, et que pour Δ générique dans $\Psi(Y)$ les trisécantes de $|K_C(-\Delta)|$ ne passent pas par un point fixe de C. Soit C'_Δ la courbe des trisécantes de $|K_C(-\Delta)|$, pour $\Delta \in \Psi(Y)$, et $\tilde{C}'_\Delta$ sa normalisée; la description qui précède montre l'existence d'un morphisme $\eta_\Delta \colon C \to \tilde{C}'_\Delta$, de degré exactement trois, dont les fibres s'identifient aux diviseurs découpés par une trisécante de $|K_C(-\Delta)|$.

Comme C n'est pas trigonale, $\tilde{C}'_\Delta$ n'est pas rationnelle, et on peut donc supposer que $\tilde{C}'_\Delta$ et η_Δ ne dépendent pas de Δ. On les notera donc $\tilde{C}'$ et η. Or, par construction, pour un point générique D de X, il existe ∞^1 triplets $D' \leqq D$, tels que $(D, D') \in Y$, et donc D' correspond à une trisécante de $|K_C(-D+D')|$. D' est donc une fibre de η, et l'on voit aisément que si $|D|$ est sans point base, de dimension un, il existe alors un diviseur D_1 sur $\tilde{C}'$ tel que $D \equiv \eta^*(D_1)$. On aboutit alors facilement à une contradiction en utilisant la formule de Riemann-Hurwitz, le fait que $\dim X = g - 6$, et $g \geqq 11$. $\square$

Note. Dans [5], il est signalé que le résultat a été prouvé par Schreyer dans les cas $g = 7, 8$.

Bibliographie

[1] *E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, J. Harris*, Geometry of algebraic curves, Grundlehren der math. Wiss. **267**, Berlin-Heidelberg-New York 1984.

[2] *E. Arbarello, M. Cornalba*, A few remarks about the variety of irreducible plane curves of given degree and genus, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. (4) **16** (1983), 467—488.

[3] *M. Green*, Koszul cohomology and the geometry of projective varieties, J. of diff. geom. **19** (1984), 125—171.

[4] *M. Green, R. Lazarsfeld*, A simple proof of Petri's theorem on canonical curves, geometry today, Giornale di geometria, Roma (1984), 129—142, Basel-Stuttgart-Boston 1985.

[5] *M. Green, R. Lazarsfeld*, On the projective normality of complete linear series on an algebraic curve, Invent. math. **83** (1986), 73—90.

[6] *R. Lazarsfeld*, Brill-Noether-Petri without degenerations, J. diff. geom. **23** (1986), 299—307.

[7] *H. Lange, G. Martens*, Normal generation and presentation of line bundles of low degree, J. reine angew. Math. **356** (1985), 1—18.

[8] *G. Martens*, Über den Clifford-Index algebraischer Kurven, J. reine angew. Math. **320** (1980), 68—85.

[9] *D. Mumford*, Prym varieties I, contributions to analysis, New York (1974), 325—350.

[10] *D. Mumford*, Varieties defined by quadratic equations, Questions on Algebraic varieties, CIME (1970), 29—100.

[11] *B. Saint-Donat*, On Petri's analysis of the linear system of quadrics through a canonical curve, Math. Ann. **206** (1973), 157—175.

Université de Paris-Sud, Mathématique, F-91405 Orsay, Cedex, Frankreich

Eingegangen 19. Juni 1987