Géométrie algébrique et espaces de modules

Claire Voisin, CNRS et IHÉS

Table des matières

Chapitre 0

Introduction

Ce cours se propose de présenter divers aspects de la théorie des déformations et des espaces de modules, essentiellement en géométrie algébrique, mais également en géométrie analytique. On verra aussi dans la suite la possibilité de construire des espaces de modules similaires en géométrie riemannienne ou symplectique, faisant de certains invariants dépendant a priori de la structure algébrique (du type “géométrie énumérative”) des invariants beaucoup plus stables. Cet aspect des choses a été longtemps ignoré (avant les travaux de Donaldson et Gromov) du fait du caractère très complexe et instable de la théorie des déformations en géométrie algébrique :

Exemple 0.1 Si on considère une courbe lisse C de genre g, on peut introduire la variété des g^r_d sur C, qui paramètre les systèmes linéaires de degré d et rang r sur C. Cette variété est munie d'une structure schématique (déterminantielle, cf [1]). Ce schéma dépend de C et même sa dimension peut dépendre de C. Son étude est la théorie de Brill-Noether. Dans ce cas, il est cependant facile d'appliquer des méthodes de théorie de l'intersection [5] pour comprendre quelles sont la dimension attendue et la classe virtuelle de ce schéma, qui se trouvent être ceux d'une courbe *générique* C. Ceci est beaucoup moins évident pour d'autres types d'invariants.

Ce cours est constitué de plusieurs parties correspondant à des aspects différents de la théorie des espaces de modules.

Le premier aspect est la théorie formelle des déformations. Cette théorie permet en général, sans savoir si un espace de modules existe, d'étudier les déformations à l'ordre fini d'un objet donné. On étudie formellement le foncteur local de déformations, défini sur des bases locales artiniennes. Ceci est décrit dans le chapitre 1.

Le second aspect concerne les aspects globaux de la théorie des espaces de modules. Pour construire un espace de modules, qui ensemblistement est (ou devrait être) un ensemble de classes d'isomorphisme d'objets d'un type donné, et s'assurer que cet ensemble a une structure raisonnable, on est confronté à deux types de problèmes :

1. Il faut tout d'abord étudier des questions de finitude : existe-t-il un nombre fini de familles de tels objets paramétrées par des bases quasi-projectives, telles que tout objet déformé est une fibre d'une telle famille ? Cette question fait l'objet des chapitres 2 et 3. On rencontrera déjà ici (dans le cas des espaces de

modules de faisceaux cohérents) la notion de (semi)-stabilité, nécessaire pour obtenir de tels énoncés de finitude.

2. En général, les familles ci-dessus sont obtenues en faisant des choix supplémentaires (par exemple, on classifie les courbes de genre g en les représentant par leur plongement 3-canonique, mais cela suppose de choisir une base de $H^0(C, K_C^{\otimes 3})$. La question est alors de comprendre comment oublier la structure supplémentaire, ce qui revient en général à effectuer un quotient par une action de groupe. La construction de tels quotients, la nécessité de se restreindre à des objets au comportement raisonnable (stables ou semi-stables relativement à cette action de groupe) sont l'objet des chapitres 4 et 5.

Le dernier chapitre donne un avant-goût de la suite de ce cours, présentant une caractérisation remarquable via l'analyse complexe de la stabilité pour les fibrés vectoriels sur les variétés polarisées (ou plus généralement kählériennes).

On donnera deux applications de ce résultat fondamental, dû à Uhlenbeck-Yau et Donaldson.

La suite de cette introduction est consacrée à la description des objets que l'on va considérer au long de ce cours et chercher à déformer. Le cas des structures complexes (section 0.0.1) n'apparaîtra en fait que dans le chapitre 1, pour décrire une approche alternative de la théorie des déformations formelles dans ce cas, et aussi pour d'autres raisons : ce cas illustre clairement les difficultés globales de la théorie des espaces de modules : l'absence de polarisation est une source de pathologies majeures dans ce cas. On expliquera enfin un cas intermédiaire fondamendal et le mieux compris classiquement, qui est celui du schéma de Hilbert, qui se situe à l'intersection des sujets évoqués dans les sections 0.0.2 et 0.0.3 ci-dessous.

0.0.1 Variétés complexes compactes

Une variété complexe compacte (de dimension n) est une variété différentiable compacte pour laquelle on s'est donné des cartes différentiables locales $\phi_i : U_i \cong V_i$ à valeurs dans des ouverts V_i de $\mathbb{C}^n$, telles que les applications de changement de cartes

$$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to V_j$$

soient holomorphes (cf 6.1.1, [19]).

A une telle structure complexe correspond une structure presque complexe, c'est-à-dire une structure complexe J, $J^2 = -1$, agissant sur le fibré tangent réel $T_{X,\mathbb{R}}$ de X. En effet, les difféomorphismes ϕ_i identifient le fibré tangent $T_{X,\mathbb{R}|U_i}$ au fibré tangent de $\mathbb{C}^n$ restreint à V_i, qui s'identifie au fibré trivial de fibre $\mathbb{C}^n$. La structure complexe induite sur $T_{X,\mathbb{R}|U_i}$ ne dépend pas de la carte ϕ_i, du fait que les difféomorphismes $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ sont holomorphes, c'est-à-dire par définition à différentielle $\mathbb{C}$-linéaire.

La structure presque complexe J induit une décomposition du fibré cotangent complexe $\Omega_{X,\mathbb{C}} := T^*_{X,\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ en partie de type $(1,0)$ notée $\Omega_X^{1,0}$ et partie de type $(0,1)$, notée $\Omega_X^{0,1}$, correspondant respectivement aux formes $\mathbb{C}$-linéaires et $\mathbb{C}$-antilinéaires. Dans des coordonnées holomorphes locales, $\Omega_X^{1,0}$ est engendré par les dz_i, $i = 1, \ldots, n$

et $\Omega_X^{0,1}$ est engendré par les $d\bar{z}_i$, $i = 1, \ldots, n$. La structure complexe de X est déterminée par l'opérateur

$$\overline{\partial} : \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}) \to A^{0,1}(X) := \Gamma(X, \Omega_X^{0,1})$$

défini comme la composition de l'opérateur d, à valeurs dans l'espaces A_X^1 des 1-formes complexes et de la projection sur la partie de type $(0,1)$. Un calcul local montre que $\overline{\partial} \circ \overline{\partial} = 0$. La réciproque est le difficile théorème de Newlander- Nirenberg (cf [19]).

Théorème 0.2 *Une structure presque complexe J sur X provient d'une structure complexe sur X si et seulement si l'opérateur $\overline{\partial}$ associé satisfait l'équation d'intégrabilité $\overline{\partial} \circ \overline{\partial} = 0$.*

0.0.2 Variétés ou schémas projectifs polarisés

On considérera ici des schémas projectifs X munis d'un fibré en droites L ample. Le fibré en droites L n'est pas en général très ample, mais un multiple $L^{\otimes n}$ l'est par définition, fournissant un plongement algébrique de X dans un $\mathbb{P}^N$. Cependant, on ne désire pas, contrairement au cas du schéma de Hilbert, classifier X comme sous-schéma d'un espace projectif. Le choix du faisceau L est crucial, car il permet de montrer sous certaines hypothèses (par exemple si X est lisse) la finitude de la famille considérée à *polynôme de Hilbert* fixé.

Une observation importante à faire ici est le fait que même dans le cas lisse, la théorie des déformations formelles d'une variété algébrique complexe X peut être très différente de celle d'une paire (X, L), où L est un fibré inversible ample sur X. Il peut se passer deux choses :

- Tout d'abord, mais c'est relativement anodin et bien compris, L peut varier avec X fixé. Dans ce cas, on est en train d'étudier le schéma $Pic^0(X)$ des fibrés inversibles algébriquement équivalents à 0. Au moins si X est lisse sur $\mathbb{C}$, ceci est parfaitement bien compris par la théorie de Hodge (cf [19]) et de plus, se déforme bien avec X. Pour cette raison, on appelle parfois variété polarisée la donnée d'une paire (X, L), où L est défini à équivalence algébrique près.

- De façon beaucoup plus problématique, il peut se passer que certaines déformations de X comme variété complexe (et en fait comme variété tout court) ne sont pas accompagnées d'une déformation de la paire (X, L). Encore une fois, ce phénomène est bien compris du point de vue de la théorie de Hodge, mais il fait apparaître le phénomène suivant : on peut étudier les déformations formelles de la variété algébrique X, (non polarisée), et dans certains cas, la théorie est excellente, (surfaces $K3$ [20], tores complexes). Cette théorie formelle a un caractère purement algébrique. Or, il se trouve que si l'on n'impose pas de polarisation, ce qu'on est en train de décrire est en fait les déformations de X comme variété complexe, c'est-à-dire un voisinage formel de X dans sa famille de déformations universelles comme variété complexe, dont la fibre générale est souvent totalement non algébrique comme dans les cas cités ci-dessus.

0.0.3 Faisceaux cohérents sur une base fixée

Ici X est une variété projective fixée qui d'ailleurs pourrait être $\mathbb{P}^N$ puisqu'un faisceau cohérent sur X est aussi un faisceau cohérent sur tout $\mathbb{P}^N$ contenant X. On cherche à décrire les classes d'isomorphisme de faisceaux cohérents $\mathcal{F}$ sur X, c'est-à-dire les faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules localement de présentation finie. On se restreindra dans les chapitres plus avancés au cas où X est lisse, et même une surface lisse, et $\mathcal{F}$ est sans torsion. Il est évident que la famille de tels faisceaux n'est pas bornée : même si X est un point, il y a une infinité de rangs possibles ! Pour borner la famille, on introduira tout d'abord le *polynôme de Hilbert* (cf chapitre 2) de $\mathcal{F}$ relatif à une polarisation fixée. Ceci détermine un certain nombre d'invariants numériques de $\mathcal{F}$. On verra ensuite comment la notion de semi-stabilité permet d'obtenir des familles bornées (cf chapitre 3). Dans le chapitre 1, on expliquera d'abord la théorie locale de déformations d'un tel $\mathcal{F}$.

La semi-stabilité (au sens des pentes) sera enfin reliée dans le chapitre 5 à la semi-stabilité au sens de la théorie géométrique des invariants pour le schéma *Quot* (cf [9]). Ceci complète l'étape de passage au quotient mentionnée précédemment.

0.1 Schéma de Hilbert

Le schéma de Hilbert d'une variété polarisée X (un polynôme de Hilbert P étant fixé) paramètre les sous-schémas Z de X qui ont leur polynôme de Hilbert $P(\mathcal{O}_Z)$ égal à P.

L'étude du schéma de Hilbert est à l'intersection des trois types d'étude mentionnées plus haut. Lorsqu'on étudie les déformations de $Z \subset X$, on étudie celles des déformations de Z qui restent plongées dans X, mais aussi la variation du plongement, Z pouvant rester fixée. Une polarisation L étant fixée sur X, les sous-schémas de X sont automatiquement polarisés de façon induite. Noter que même si la déformation induite de la paire abstraite $(Z, L_{|Z})$ est triviale, il se peut néanmoins que la déformation de Z dans X soit non triviale, même modulo les automorphismes de X.

Exemple 0.3 Considérons $\mathbb{P}^1$ et regardons les plongements de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{P}^3$ donnés par des sous-espaces vectoriels K sans points de base de dimension 4 de $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4))$. Comme $dim\, H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)) = 5$, K est un hyperplan dans $\mathbb{P}^4$. Or les automorphismes de $\mathbb{P}^1$ forment un groupe de dimension 3. On voit donc qu'on a ici une famille de dimension 1 de sous-schémas de $\mathbb{P}^3$, qui ne sont pas déduits les uns des autres par un automorphisme de $\mathbb{P}^3$, mais qui correspondent à une déformation triviale du schéma polarisé correspondant qui est $(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4))$.

Enfin, le schéma de Hilbert entre également dans la rubrique de la section 0.0.3, car la donnée du sous-schéma Z de X est équivalente à la donnée du faisceau cohérent $\mathcal{O}_Z$ ou du faisceau d'idéaux, également cohérent, $\mathcal{I}_Z$. La particularité des faisceaux du type $\mathcal{I}_Z$ est essentiellement le fait qu'ils sont de rang 1 (à déterminant trivial lorsque $codim\, Z \geq 2$, cf section 3.1.1). La particularité des faisceaux $\mathcal{O}_Z$ est le fait que ce sont des faisceaux quotients du faisceau trivial.

Chapitre 1

Théorie des déformations

1.1 Foncteur de déformation

1.1.1 Famille d'objets, platitude

Dans ce cours, k est un corps de caractéristique nulle et algébriquement clos (par exemple $\mathbb{C}$), et les schémas sont des k-schémas de type fini. Beaucoup de choses peuvent cependant se faire dans un contexte plus général.

Pour les objets introduits dans le chapitre précédent, nous devons tout d'abord introduire la notion de *famille* qui nous permettra ensuite de parler de foncteur de déformations.

Variétés complexes compactes

Une famille de variétés complexes compactes de base B est la donnée d'espaces analytiques $\mathcal{X}$ et B, et d'un morphisme propre et lisse d'espace analytiques :

$$\pi : \mathcal{X} \to B.$$

Ici, comme on travaille dans la catégorie analytique, avec la topologie usuelle, on peut se contenter de définir la lissité du morphisme π comme une forme de trivialité locale : pour chaque point $x \in \mathcal{X}$, il existe un voisinage U_x de x dans $\mathcal{X}$ qui est biholomorphe à $V_x \times W_y$, où $y = \pi(x)$, V_x est l'intersection

$$U_x \cap \mathcal{X}_y,\ \mathcal{X}_y := \pi^{-1}(y),$$

et W_y est un voisinage de y dans B.

On peut aussi comme dans le cas algébrique définir la lissité par le fait que le faisceau des différentielles holomorphes relatives $\Omega_{\mathcal{X}/B}$ est localement libre sur $\mathcal{X}$.

Remarque 1.1 Il est important de ne pas se limiter au cas où la base B est lisse, car cela ne permettrait pas d'étudier de façon fine le foncteur de déformations.

On peut montrer qu'étant donnée une famille de variétés complexes compactes $\pi : \mathcal{X} \to B$, étant donné un point $0 \in B$, il existe un voisinage W de 0 dans B et un homéomorphisme au-dessus de W : $\mathcal{X}_W := \pi^{-1}(W) \cong X \times W$, $X = \pi^{-1}(0)$, qui induit un difféomorphisme sur chaque fibre : $\mathcal{X}_t \overset{diff}{\cong} \mathcal{X}_0 = X$. Par ce difféomorphisme, la structure presque complexe J_t de $\mathcal{X}_t$ devient une structure presque complexe variable J_t sur X. C'est le point de vue qu'on adoptera dans la théorie de Kuranishi.

Schémas projectifs polarisés

Rappelons la définition de la platitude d'un morphisme (on renvoie au chapitre suivant section 2.1.2 pour des généralités sur la platitude) :

Définition 1.2 *Le morphisme $\mathcal{X} \to B$ est plat si le faisceau $\mathcal{O}_{\mathcal{X}}$ est plat sur $\pi^{-1}\mathcal{O}_B$.*

Travaillant dans des ouverts affines $Spec\, O_{\mathcal{X}}$ et $Spec\, O_B$ de $\mathcal{X}$ et B, cela équivaut au fait que pour toute injection $M \hookrightarrow N$ de O_B-modules, l'application induite $M \otimes_{O_B} O_{\mathcal{X}} \to N \otimes_{O_B} O_{\mathcal{X}}$ est injective.

En particulier, pour tout idéal I de O_B, l'application

$$I \otimes_{O_B} O_{\mathcal{X}} \to I \cdot O_{\mathcal{X}}$$

est injective. Il en résulte aisément que si la fibre $\mathcal{X}_y$ de π est lisse en un point x, la platitude de π équivaut à la lissité de π.

Rappelons la définition d'un morphisme projectif :

Définition 1.3 *Le morphisme π est projectif, s'il existe localement sur B une factorisation de π*

$$X \to B \times_k \mathbb{P}^N \to B,$$

où la première flèche est un plongement et la seconde est la première projection.

Ces définitions étant acquises, une famille de schémas projectifs polarisés est la donnée de schémas algébriques de type fini $\mathcal{X}$ et B, d'un morphisme $\pi : \mathcal{X} \to B$ projectif et *plat*, et d'un fibré inversible $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{X}$ relativement ample.

Ici, sous l'hypothèse de platitude, le faisceau $R^0\pi_*\mathcal{L}^{\otimes N}$ est localement libre sur B (voir théorème 2.8) pour N grand et on peut plonger $\mathcal{X}$ dans $\mathbb{P}(R^0\pi_*\mathcal{L}^{\otimes N})$, pour N assez grand.

Le faisceau $\mathcal{L}$ est défini modulo les fibrés inversibles provenant de B (autrement dit, on ne s'intéresse qu'aux restrictions de $\mathcal{L}$ aux fibres de π).

Faisceaux cohérents sur une base donnée

Ici X est un k-schéma projectif. Soit S un k-schéma de type fini.

Définition 1.4 *Une famille de faisceaux sur X paramétrée par S est un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $X \times S$, plat sur S, c'est-à-dire que via le morphisme $pr_2^* : pr_2^{-1}\mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_{X\times S}$, le faisceau $\mathcal{F}$ est un faisceau de $pr_2^{-1}\mathcal{O}_S$-modules plats.*

Avec ces définitions de familles, et tenant compte de l'évidente fonctorialité de la notion de famille, nous disposons d'un foncteur de déformations pour un objet donné. Ce foncteur sera défini dans le premier cas sur la catégorie des espaces analytiques connexes pointés, et dans le second cas sur la catégorie des schémas de type fini connexes pointés :

Partons d'un objet Y , qui pourra être respectivement une variété complexe compacte X, un k-schéma polarisé (X, L), ou un faisceau cohérent F sur une schéma projectif X. On considère le foncteur Def_Y à valeur dans la catégorie des ensembles

$$(S, 0) \mapsto \{classes\ d'isomorphisme\ de\ paires\ \ (M, \phi)\}$$

où $M = \mathcal{X}$, resp. $M = (\mathcal{X}, \mathcal{L})$, resp. $M = \mathcal{F}$ est une famille de variétés analytiques, resp. de schémas projectifs polarisés, resp. de faisceaux cohérents sur X paramétrés par S et ϕ est un isomorphisme $\mathcal{X}_0 \cong X$, resp. $(\mathcal{X}_0, \mathcal{L}_{|\mathcal{X}_0}) \cong (X, L)$, resp. $\mathcal{F}_{|0\times X} \cong F$.

Ici la notion d'isomorphisme entre deux telles paires (M, ϕ) et (M', ϕ') est la suivante : on doit avoir un isomorphisme $\psi : M \cong M'$ au-dessus de S, tel que $\phi = \phi' \circ \psi_0 : M_0 \cong Y$, où M_0 est la fibre de M au-dessus de $0 \in S$, et ψ est la restriction de ψ à M_0.

C'est un foncteur contravariant, car tout morphisme $\alpha : (S', 0') \to (S, 0)$ entre espaces pointés induit une application α^* entre les ensembles $Def_Y(S, 0)$ et $Def_Y(S', 0)$, donné par l'image inverse dans le cas des faisceaux, et le produit fibré dans le cas des déformations de schémas ou de variétés complexes. La platitude étant stable par changement de base, α^* est bien défini.

Cette définition est adaptée pour étudier les déformations d'un objet donné, mais pour construire les espaces de modules, il serait plus naturel d'oublier les espaces pointés et de travailler directement avec le foncteur famille. Une différence essentielle est l'oubli de l'isomorphisme $M_0 \cong Y$, où Y est comme plus haut. Les espaces de modules correspondants, à supposer qu'ils existent, différeront donc de toute façon par l'action de $Aut\, Y$ (ou plus précisément des automorphismes de Y qui ne s'étendent pas aux déformations de Y.

On ne considérera que les familles paramétrées par des bases connexes. Dans de telles familles, certains invariants sont fixés, par exemple le type de difféomorphisme dans le cas des familles de variétés complexes compactes, les polynômes de Hilbert (cf section 2.1) dans le cas des schémas polarisés ou des faisceaux cohérents sur une base projective. On parlera dans la suite de type P pour de tels invariants.

Les variantes naturelles du foncteur de déformation sont définies sur la catégorie des espaces analytiques, et dans le second cas sur la catégorie des schémas de type fini : On considère alors le foncteur Fam^P à valeurs dans la catégorie des ensembles

$$S \mapsto \{\text{classes d'isomorphisme de familles } M \text{ de type } P \text{ paramétrées par } S\}$$

où $M = \mathcal{X}$, resp. $M = (\mathcal{X}, \mathcal{L})$, resp. $M = \mathcal{F}$ est une famille de variétés analytiques difféomorphes à une variété donnée, resp. de schémas projectifs polarisés, resp. de faisceaux cohérents sur X paramétrés par S, de polynôme de Hilbert P. Comme ci-dessus, c'est un foncteur contravariant, via les applications d'image inverse pour les faisceaux ou de produit fibré pour les schémas (qu'on appelle aussi changement de base dans les deux cas).

Le problème de construction des espaces de modules consiste à étudier la représentabilité de ce foncteur ou plutôt à contourner le problème de sa non-représentabilité, car il ne l'est essentiellement jamais.

La représentabilité de ces foncteurs signifie dans chaque cas qu'il existe un espace D^P (selon le contexte un espace analytique complexe ou un espace algébrique) et un isomorphisme de foncteurs :

$$Fam^P \cong Mor(., D^P)$$

ce qui signifie concrètement que la donnée d'une famille du type P à isomorphisme près sur une base S , est la même chose qu'un morphisme de S dans D^P. Appliquant ceci à l'identité de D^P, on voit qu'il doit exister une famille universelle U du type P sur D^P, telle que toute famille du type P sur une base S est isomorphe à l'image inverse via un morphisme de S dans D^P de la famille U. Dans les exemples que nous considérerons, cette propriété n'est satisfaite que par le schéma de Hilbert, qui paramètre des objets beaucoup plus rigides. Notons aussi qu'en appliquant la définition de la représentabilité au cas où la base S est $Spec\, k$, on trouve que les points de D^P doivent être les classes d'isomorphismes d'objets du type P (définis sur k).

1.1.2 Pathologies, non-représentabilité

Ces deux sections sont consacrées à la construction d'exemples montrant que la représentabilité est presque toujours impossible à réaliser. Considérons tout d'abord le problème des automorphismes.

Exemple 1.5 Etudions pour cela le cas des courbes de genre 3, polarisées par leur fibré canonique qui est ample. Une telle courbe générique est décrite par une équation polynomiale de degré 4 dans $\mathbb{P}^2$. Certaines courbes, dites hyperelliptiques, ne sont plus représentées comme des courbes planes lisses de degré 4 car leur morphisme canonique

$$\phi_K : C \to \mathbb{P}^2$$

est un morphisme de degré deux sur une conique.

Comme nous le verrons plus loin, la théorie locale pointée des déformations d'une courbe est excellente. En fait, elle nous dit qu'il existe une variété lisse pointée $(S, 0)$ et une famille universelle $\mathcal{C} \to S$ paramétrée par un schéma lisse de dimension 6, qui classifie localement (c'est-à-dire localement pour la topologie étale, ou formellement) les déformations pointées de C_0. Par définition du foncteur de déformations pointées, l'involution hyperelliptique $i \in Aut(C_0)$ agit de façon équivariante sur des voisinages étales ou formels $\mathcal{C}^0$, S^0 de C_0 dans $\mathcal{C}$ et de 0 dans S, et par définition du foncteur famille, on voit que si le foncteur famille de (C, K_C) est représentable par un schéma M_3, il doit exister un morphisme $S \to M_3$, se factorisant à travers i, et tel que la courbe universelle $\mathcal{C}^0 \to S^0$ soit l'image inverse d'une courbe universelle $U \to M_3$. Ceci n'est pas possible car le point $0 \in S$ paramétrant C_0 est fixé par i tandis que l'action de i sur la fibre C_0 est l'involution hyperelliptique. Ainsi la fibre en 0 du quotient $\mathcal{C}^0/i \to S^0/i$ est en fait $C_0/i = \mathbb{P}^1$, ce qui interdit que $\mathcal{C}^0 \to S^0$ soit l'image inverse d'une famille sur S^0/i.

L'exemple ci-dessus est tout à fait caractéristique de ce qu'on rencontre en géométrie algébrique et a mené à l'introduction des champs algébriques (consistant à considérer dans l'exemple ci-dessus que la paire (S, i) est plus intéressante que le quotient S/i). Notons que dans cet exemple, il n'existe pas de famille universelle, mais la base S/i est un espace algébrique raisonnable, avec des singularités quotients, qui paramètre des classes d'isomorphisme de courbes de genre 3. On arrivera dans ce cas à construire un "espace de modules" $\mathcal{M}_3$, qui est un schéma algébrique de type fini, satisfait la propriété que ses k-points sont les classes d'isomorphisme de courbes de genre 3 (en fait c'est vrai pour n'importe quel genre) et tel qu'il existe un morphisme de foncteurs

$$Fam^3 \to Mor(\mathcal{M}_3)$$

qui n'est plus un isomorphisme, mais qui donne la bijection voulue sur les k-points.

Dans le cadre analytique complexe, ou plus généralement en l'absence de polarisation, les pathologies peuvent être beaucoup plus incontournables, à cause de la possibilité de groupes d'automorphismes infinis.

Exemple 1.6 Considérons le cas des tores complexes. Un tore complexe de dimension n est par définition un quotient $T = \mathbb{C}^n/\Gamma$, où $\Gamma \cong \mathbb{Z}^{2n}$ est un réseau dans $\mathbb{C}^n$. Notons que $\Gamma \cong H_1(T, \mathbb{Z})$. Si l'on fixe un tel isomorphisme, on voit que T est aussi déterminé par le sous-espace vectoriel complexe $\Gamma^{1,0}$ de dimension n de $\mathbb{C}^{2n}$, défini comme le noyau du morphisme

$$\mathbb{C}^{2n} \cong \Gamma \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n.$$

Ce sous-espace $\Gamma^{1,0}$ est assujetti à la seule condition que

$$\Gamma^{1,0} \oplus \overline{\Gamma^{1,0}} = \mathbb{C}^{2n}$$

qui garantit que $\mathbb{Z}^{2n}$ s'envoie sur un réseau de $\mathbb{C}^{2n}/\Gamma^{1,0}$.

Ainsi, l'ensemble des classes d'isomorphisme de tores complexes de dimension n marqués, c'est-à-dire munis d'un isomorphisme $\Gamma := H_1(T, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{2n}$, est le quotient d'un ouvert de la grassmannienne $Grass(n, 2n)$ par $Aut(\mathbb{Z}^{2n})$.

Prenons le cas où $n = 2$ et T est un produit $E \times E$, où E est un tore de dimension 1. Ce tore possède donc comme groupe d'automorphismes $Gl(2, \mathbb{Z})$. En effet, E étant un groupe commutatif, un élément de $Gl(2, \mathbb{Z})$ représenté par une matrice $M = \binom{ab}{cd}$ de type $(2, 2)$ à coefficients entiers agit sur $E \times E$ par $M(e_1, e_2) = (ae_1 + be_2, ce_1 + de_2)$. L'orbite d'un point suffisamment général de notre grassmannienne sous l'action de $Gl(2, \mathbb{Z})$ est infinie, tandis que $Gl(2, \mathbb{Z})$ fixe le point paramétrant T, et donc le quotient n'a aucune bonne structure.

1.1.3 Familles non bornées, problèmes de séparabilité

Passons maintenant au cas des faisceaux sur une base fixée. On a le théorème suivant :

Théorème 1.7 *(Grothendieck) Tout faisceau localement libre sur $\mathbb{P}^1$ est une somme directe de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)$, $a \in \mathbb{Z}$.*

Les faisceaux localement libres $\mathcal{F}$ de rang 2 sur $\mathbb{P}^1$ et de déterminant $det\,\mathcal{F} = \bigwedge^2 \mathcal{F}$ trivial sont donc de la forme $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(i) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-i)$, $i \geq 0$ qui ne sont pas isomorphes deux à deux. On a maintenant

Théorème 1.8 *Pour tout $i \geq 0$, il existe un faisceau localement libre $\mathcal{F}$ sur $A^1 \times \mathbb{P}^1$, où $A^1 = Spec\, k[t]$, satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. *Pour $t = 0$, $\mathcal{F}_0 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(i+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-i-1)$,*
2. *Pour $t \neq 0$, $\mathcal{F}_t = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(i) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-i)$.*

Démonstration. Notant p_2 la projection de $A^1 \times \mathbb{P}^1$ sur $\mathbb{P}^1$, on définit $\mathcal{F}$ de la façon suivante : soit $\mathcal{E} := p_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(i+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-i))$. Choisissons un point $x \in \mathbb{P}^1$. Alors

$$\mathcal{E}_{|A^1 \times \{x\}} \cong \mathcal{O}_{A^1} \oplus \mathcal{O}_{A^1}.$$

Notant pr_1, pr_2 les projections de $\mathcal{O}_{A^1} \oplus \mathcal{O}_{A^1}$ sur ses facteurs, on a le morphisme surjectif

$$r := tpr_1 + pr_2 : \mathcal{O}_{A^1} \oplus \mathcal{O}_{A^1} \to \mathcal{O}_{A^1}.$$

Le noyau $\mathcal{F}$ du morphisme composé

$$s : \mathcal{E} \to \mathcal{E}_{|A^1 \times \{x\}} \xrightarrow{r} \mathcal{O}_{A^1}$$

est localement libre. Vérifions les propriétés 1 et 2 :

Pour $t = 0$, la restriction s_0 du morphisme s est le composé suivant :

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(i+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-i) \xrightarrow{pr_2} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-i) \to \mathcal{O}_x(-i).$$

Son noyau est donc clairement isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(i+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-i-1)$.

Pour $t \neq 0$, le composé

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(i+1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(i+1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(i) \xrightarrow{s_t} \mathcal{O}_x$$

est non nul (et donc surjectif), et il en résulte que

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{F}_t(-i-1)) = 0,\ H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{F}_t(-i)) \neq 0,$$

d'où l'on conclut aisément que

$$\mathcal{F}_t \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(i) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-i).$$

■

La situation est donc la suivante. Il y a une infinité de classes d'isomorphisme, mais elles sont inséparables, au sens où tout classe est limite d'une autre classe via une famille constante. Cela constitue un double obstacle à la représentabilité :

1. Le fait qu'il n'existe pas de famille bornée de faisceaux (de déterminant trivial) telle que tout faisceau de déterminant trivial et de rang 2 soit une fibre de cette famille. (En effet, il résulte du théorème de semi-continuité (cf [19], [21]) que si S paramètre une famille de faisceaux localement libres de rang 2 et déterminant trivial sur $\mathbb{P}^1$, le sous-espace S_i sur lequel la fibre $\mathcal{F}_s$ est du type $\mathcal{O}(j) \oplus \mathcal{O}(-j)$ avec $j \geq i$ est fermé au sens de Zariski. Ainsi, par la propriété noethérienne, il ne peut exister qu'un nombre fini de classes d'isomorphisme de fibres.
2. Les différentes classes sont inséparables, du fait qu'on peut réaliser chaque classe comme la limite (fibre spéciale) d'une famille constante de classe générique différente.

1.2 Foncteur de déformation sur une base artinienne

Désormais, nous allons considérer le foncteur de déformations pointées et formelles, qui consiste à restreindre le foncteur de déformations pointées aux bases *artiniennes locales* $S = Spec\, A$ où A est une k-algèbre locale artinienne. Un objet X du type décrit précédemment étant donné, on étudie donc le foncteur Def_X suivant, défini sur la catégorie des k-algèbres artiniennes locales et à valeurs dans la catégorie des ensembles :

$$A \mapsto \{\text{classes d'isomorphisme de paires } (M, \phi)\},$$

où M est une famille sur $Spec\, A$ dans le sens décrit plus haut, et ϕ est un isomorphisme $M_0 \cong X$.

1.2.1 Espace tangent et $Mor\,(k[\epsilon]/\epsilon^2, .)$

Notons tout d'abord que cette traduction n'est qu'un moyen de contourner la non représentabilité du foncteur de déformations pointées (qu'on a vue apparaître dans la section 1.1.3). Supposons en effet que ce foncteur soit représentable dans la catégorie des k-schémas de type fini ou des k-schémas formels ou des espaces analytiques ($k = \mathbb{C}$), et qu'il existe donc une famille universelle

$$U \to S,\, U_0 \cong X,$$

où $(S, 0)$ est un k-schéma (peut-être formel) pointé ou un espace analytique pointé.

Alors le foncteur de déformations formelles introduit ci-dessus s'identifie tout simplement au foncteur $A \mapsto Mor\,(Spec\, A, (S, 0))$, où $Mor\,(Spec\, A, (S, 0))$ est l'ensemble des morphismes envoyant le point fermé de $Spec\, A$ sur 0. Or on a :

Lemme 1.9 *$Mor\,(Spec\, k[t]/(t^2), (S, 0))$ est canoniquement isomorphe à l'espace tangent de Zariski $T_{S,0}$. (Ici $k = \mathbb{C}$ dans le cadre analytique complexe.)*

Démonstration. Rappelons que l'espace tangent de Zariski $T_{S,0}$ est le dual de la fibre $\Omega_{S|0}$ en 0 du faisceau Ω_S des différentielles de Kähler de S relativement à k. Mais par définition de Ω_S, $Hom_k(\Omega_{S|0}, k) = Hom_{\mathcal{O}_S}(\Omega_S, k_0)$ s'identifie aux dérivations de $\mathcal{O}_S$ à valeurs dans le faisceau gratte-ciel $k_0 = \mathcal{O}_S/\mathcal{M}_0$ supporté en 0 (vu comme un $\mathcal{O}_S$-module). Si on a un morphisme α de $Spec\, k[t]/(t^2)$ dans $(S, 0)$, on lui associe la dérivation $f \mapsto \alpha^*(f) - \alpha(0) \in tk[t]/(t^2) \cong k$. Inversement, une dérivation $\mu : \mathcal{O}_S \to k_0$ fournit un morphisme d'anneaux locaux $\alpha : \mathcal{O}_{S,0} \to k[t]/(t^2)$ donné par $\alpha(f) = f(0) + t\mu(f)$. ■

1.2.2 Etude formelle et $Mor\,(Spec\, A, .)$, obstructions et singularités

On a vu ci-dessus que pour décrire l'espace tangent du foncteur Def_X, c'est-à-dire les déformations infinitésimales d'un objet X, il suffit de se restreindre à l'étude des classes d'isomorphismes de familles sur $Spec\, k[t]/(t^2)$ dont la fibre centrale est isomorphe à X. Si on veut étudier l'allure formelle d'un schéma pointé $(S, 0)$ au voisinage de 0, il ne suffit pas en général d'étudier les morphismes (appelés jets d'ordre $l - 1$) $Mor\, k[t]/(t^l) \to (S, 0)$. Cependant, on a le résultat suivant :

Proposition 1.10 *Le schéma pointé $(S, 0)$ est lisse en 0 si et seulement si pour tout morphisme $f_l : Mor\, k[t]/(t^l) \to (S, 0)$, il existe un morphisme*

$$f_{l+1} : Mor\, k[t]/(t^{l+1}) \to (S, 0)$$

étendant f_l.

Démonstration. Si S est lisse en 0, le schéma formel $\widehat{S}_0$ est isomorphe à $Spec\, k[[X_1, \ldots, X_n]]$ c'est à dire au complété formel de A^n_k en 0. Donc le seulement si est évident. Inversement, prenons une base de $\Omega_{S|0}$ et relevons-là en un système de paramètres $g_1, \ldots g_n \in \mathcal{M}_0$. Ces paramètres fournissent un plongement pointé de $(S, 0)$ dans $(A^n_k, 0)$. De plus, comme les g_i modulo $\mathcal{M}^2$ forment une base de $\Omega_{S|0} = \mathcal{M}/\mathcal{M}^2$, on voit que les jets d'ordre 1 à valeurs dans S centrés en 0 s'identifient aux jets d'ordre 1 à valeurs dans A^n_k centrés en 0.

Si S n'est pas lisse, on a $dim\, S < n$, et donc il existe une équation f sur A^n_k (dans le cas analytique, faire $A^n_k = \mathbb{C}^n$ et f holomorphe) s'annulant sur S. Soit d le plus petit degré d'homogénéité de f en 0. Alors on a un isomorphisme

$$\mathcal{O}_{S,0}/\mathcal{M}_0^d \cong \mathcal{O}_{A^n_k,0}/\mathcal{M}_0^d$$

qui induit un isomorphisme des jets jusqu'à l'ordre $d - 1$. Cependant, soit α : $Spec\, k[t]/(t^d) \to (S, 0)$ un jet d'ordre $d - 1$. Pour qu'il puisse s'étendre en un jet $\alpha : Spec\, k[t]/(t^{d+1}) \to (S, 0)$, il existe une condition non triviale imposée par f : le vecteur tangent u de α en 0 doit satisfaire l'équation $f_d(u) = 0$, où f_d est le terme de degré d du développement de Taylor de f.

■

1.3 Déformations des variétés complexes

1.3.1 Le point de vue de Kuranishi (cf [12])

On a vu dans la section 0.0.1 qu'une structure complexe J sur une variété différentiable X fournit la donnée d'une décomposition

$$T_{X,\mathbb{C}} = T^{1,0}_X \oplus T^{0,1}_X,\; T^{0,1}_X = \overline{T^{1,0}_X}, \tag{1.3.1}$$

et dualement

$$\Omega_{X,\mathbb{C}} = \Omega^{1,0}_X \oplus \Omega^{0,1}_X,\; \Omega^{0,1}_X = \overline{\Omega^{1,0}_X},$$

fournissant un opérateur $\overline{\partial} : \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{C}) \to A^{0,1}(X)$. Notant $A^{0,q}(X)$ le faisceau des sections de $\bigwedge^q \Omega^{0,1}_X \subset \omega^q_{X,\mathbb{C}}$, $\overline{\partial}$ s'étend en un opérateur

$$\overline{\partial} : A^{0,q}(X) \to A^{0,q+1}(X) \tag{1.3.2}$$

envoyant une forme $\alpha \in A^{0,q}(X)$ sur la partie de type $(0, q + 1)$ de $d\alpha$. La structure complexe de X étant intégrable, les formes de type $(0, 1)$ sur X sont engendrées localement par les $d\overline{z}_i$ dans des coordonnées holomorphes locales z_i, et comme $d(d\overline{z}_i) = 0$, on a en fait $\overline{\partial}\circ\overline{\partial} = 0$. Cette condition *d'intégrabilité* équivaut au fait que le crochet de

Lie de deux champs de vecteurs de type $(0,1)$ pour J est encore de type $(0,1)$ pour J et caractérise les structures complexes parmi les structures presque complexes.

Oublions dans un premier temps que nous ne nous intéressons aux structures complexes qu'à isomorphisme près, ce qui nécessite de quotienter les objets ci-dessus par l'action du groupe des difféomorphismes de X et concentrons-nous sur les déformations de ces structures complexes.

Une petite déformation J_t de la structure presque complexe J détermine une section α_t de $T_X^{1,0} \otimes \Omega_X^{0,1}$ de la façon suivante : à J_t correspond une décomposition

$$T_{X,\mathbb{C}} = T_{X_t}^{1,0} \oplus T_{X_t}^{0,1}.$$

Notant pr_1 et pr_2 les projections induites par (1.3.1), on pose :

$$\alpha_t = pr_{1\,|T_{X_t}^{0,1}} \circ (pr_{2\,|T_{X_t}^{0,1}})^{-1} \in Hom(T_X^{0,1}, T_X^{1,0}).$$

Par définition, les champs de vecteurs de type $(0,1)$ pour J_t sont de la forme :

$$\chi + \alpha_t(\chi),\ \chi \in T_X^{0,1}.$$

La condition d'intégrabilité pour J_t s'écrit

$$[T_{X_t}^{0,1}, T_{X_t}^{0,1}] \subset T_{X_t}^{0,1},$$

c'est-à-dire :

$$[\chi + \alpha_t(\chi), \chi' + \alpha_t(\chi')] \in T_{X_t}^{0,1},\ \forall \chi, \chi' \in T_X^{0,1}. \tag{1.3.3}$$

Pour que la propriété (1.3.3) soit vraie pour tous les champs de type $(0,1)$ sur X, il suffit qu'elle soit vraie pour des champs

$$\chi = \frac{\partial}{\partial \overline{z_i}},\quad \chi' = \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}$$

correspondant à des coordonnées holomorphes locales z_i pour $i = 1, \dots, n$. Mais on a alors :

$$[\chi, \chi'] = 0,$$

$$[\chi, \alpha_t(\chi')] = \overline{\partial}_i(\alpha_t(\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}})) \in T_X^{1,0},$$

$$[\alpha_t(\chi), \chi'] = -\overline{\partial}_j(\alpha_t(\frac{\partial}{\partial \overline{z_i}})) \in T_X^{1,0}$$

où l'opérateur différentiel $\overline{\partial}_i$ agissant sur les fonctions est la composition de l'opérateur $\overline{\partial}$ et du produit intérieur par $\frac{\partial}{\partial \overline{z_i}}$. Finalement $[\alpha_t(\partial/\partial \bar{z}_i), \alpha_t(\partial/\partial \overline{z_j})] \in T_X^{1,0}$ par l'intégrabilité de la structure complexe J. Pour que (1.3.3) soit satisfait, il faut donc que pour tous i, j, on ait :

$$\overline{\partial}_i(\alpha_t(\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}})) - \overline{\partial}_j(\alpha_t(\frac{\partial}{\partial \overline{z_i}})) = -[\alpha_t(\frac{\partial}{\partial \overline{z_i}}), \alpha_t(\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}})],$$

ce qui s'écrit de façon compacte sous la forme :

$$\overline{\partial}\alpha_t = -[\alpha_t, \alpha_t]. \tag{1.3.4}$$

L'opérateur $\overline{\partial}$ apparaissant ici est en fait un opérateur globalement défini : c'est l'opérateur $\overline{\partial}$ du fibré tangent holomorphe T_X, agissant sur les sections de $T_X^{1,0} \otimes \Omega_X^{0,1}$, c'est-à-dire sur $A^{0,1}(T_X)$ (voir section 6.1.3).

Supposons maintenant que α_t soit développable en série entière de t :

$$\alpha_t = \alpha_0 + t\alpha_1 + t^2\alpha_2 + \cdots .$$

Si on suppose $J_0 = J$, on a $\alpha_0 = 0$ et l'équation (1.3.4), considérée au premier ordre, fournit la condition :

$$\overline{\partial}\alpha_1 = 0.$$

Rappelons maintenant qu'on s'intéresse aux déformations de la structure complexe modulo l'action des difféomorphismes de X ; il est immédiat de vérifier que l'action infinitésimale de ces difféomorphismes modifie α_1 par l'ajout d'un terme de la forme $\overline{\partial}\chi$, où χ est une section arbitraire de $T_X^{1,0}$. On a donc :

Théorème 1.11 *Les déformations au premier ordre de la structure complexe J sont paramétrées par le groupe :*

$$H^1(X, T_X) = \frac{Ker\,(\overline{\partial} : A^{0,1}(T_X) \to A^{0,2}(T_X))}{Im\,(\overline{\partial} : A^{0}(T_X) \to A^{0,1}(T_X))},$$

qui est la cohomologie $H^1(X, T_X)$ du faisceau des sections holomorphes de T_X (cf Théorème **??***).*

1.3.2 Les obstructions

On va maintenant étudier la possibilité d'étendre les solutions du premier ordre de (1.3.4) sous la forme de séries formelles $t\alpha_1 + t^2\alpha_2 + \cdots$ solutions de (1.3.4), ce qu'on va faire par l'étude des obstructions successives.

Supposons qu'on ait trouvé

$$\alpha_t^n = t\alpha_1 + \cdots + t^n\alpha_n$$

satisfaisant (1.3.4) à l'ordre n ; on cherche alors α_{n+1} telle que

$$\alpha_t^{n+1} = t\alpha_1 + \cdots + t^{n+1}\alpha_{n+1}$$

satisfasse (1.3.4) à l'ordre $n+1$, ce qui équivaut à la condition :

$$\overline{\partial}\alpha_{n+1} = -\sum_{i \leq n} [\alpha_i, \alpha_{n+1-i}]. \tag{1.3.5}$$

Le second terme est une section $\overline{\partial}$-fermée de $T_X^{1,0} \otimes \Omega_X^{0,2}$ et pour trouver α_{n+1}, on doit prouver qu'elle est $\overline{\partial}$-exacte. Ainsi, les obstructions successives rencontrées vivent dans le groupe de cohomologie de Dolbeault

$$H^2(X, T_X) = \frac{Ker\,(\overline{\partial} : A^{0,2}(T_X) \to A^{0,3}(T_X))}{Im\,(\overline{\partial} : A^{0,1}(T_X) \to A^{0,2}(T_X))}.$$

On donnera dans la section suivante une interprétation complètement différente de ces résultats, dans le contexte plus général de la déformation des variétés projectives ou analytiques complexes.

1.4 Déformations des variétés complexes ou algébriques, le point de vue schématique

1.4.1 Classe de Kodaira-Spencer

X étant une k-variété projective et lisse ou une variété complexe, on considère les déformations du premier ordre de X, c'est-à-dire les morphismes propres et lisses

$$\pi : X_1 \to \Delta_1 := Spec\, k[t]/(t^2)$$

de fibre centrale isomorphe à X. L'anneau de fonctions de Δ_1 étant $k[t]/t^2$, la fonction π^*t, qu'on notera encore t, engendre l'idéal de la fibre centrale, X_0, et comme le noyau de $t : \mathcal{O}_{\Delta_1} \to \mathcal{O}_{\Delta_1}$ est égal à $k = k[t]/t = \mathcal{O}_0$, la platitude entraîne que le noyau de $t : \mathcal{O}_{X_1} \to \mathcal{O}_{X_1}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{X_0}$. Le faisceau structurel $\mathcal{O}_{X_1}$ s'inscrit donc dans une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_{X_0} \xrightarrow{t} \mathcal{O}_{X_1} \to \mathcal{O}_{X_0} \to 0. \tag{1.4.6}$$

Etant donné un tel morphisme, on note tout d'abord que $\Omega_{X_1|X_0}$ est localement libre sur la fibre centrale X_0 (cf lemme 1.15). Ici les faisceaux de différentielles sont les faisceaux de différentielles de Kähler par rapport à k. En effet, la lissité entraîne immédiatement qu'on a une injection de $\mathcal{O}_{X_0}$ dans $\Omega_{X_1|X_0}$, donnée par la multiplication par dt, et fournit la suite exacte de différentielles de Kähler (c'est la suite exacte conormale de X_0 dans X_1) :

$$0 \to \pi^*\Omega_{\Delta_1|0} \to \Omega_{X_1|X_0} \xrightarrow{r} \Omega_{X_0} \to 0. \tag{1.4.7}$$

X_0 étant lisse, le faisceau $\Omega_{X_0/k}$ est localement libre sur X_0.

Par ailleurs $\Omega_{\Delta_1|0}$ est localement libre engendré par dt. En effet, Ω_{Δ_1} est engendré par dt, avec la relation $2tdt = 0$. Son pull-back $\pi^*\Omega_{\Delta_1|0}$ est donc le fibré trivial sur X_0, de générateur dt. Enfin la suite exacte 1.4.7 montre que $\Omega_{X_1|X_0}$ est localement libre sur X_0.

X_0 étant identifié à X, la suite exacte (1.4.7) fournit donc une extension de Ω_X par le fibré trivial $\mathcal{O}_X dt$. Comme X est lisse, ces extensions sont paramétrées par

$$Ext^1(\Omega_X, \mathcal{O}_X) \cong H^1(X, T_X).$$

En effet, on obtient une classe d'extension e associée à (1.4.7) en dualisant (1.4.7), ce qui donne

$$0 \to T_X \to (\pi^*\Omega_{\Delta_1|0})^* \to \mathcal{O}_X \frac{\partial}{\partial t} \to 0,$$

et la suite exacte longue de cohomologie fournit alors

$$\delta : H^0(X, \mathcal{O}_X \frac{\partial}{\partial t}) = k \to H^1(X, T_X),$$

d'où $\delta(1) \in H^1(X, T_X)$.

Inversement, soit $e \in H^1(X, T_X)$. On construit un faisceau localement libre $\mathcal{F}^*$ sur X et une suite exacte :

$$0 \to T_X \to \mathcal{F}^* \to \mathcal{O}_X \to 0$$

de la manière suivante : Choisissons pour un recouvrement affine de X par des ouverts U_i, une représentation de e par un 1-cocycle de Čech à valeur dans T_X, soit $e_{ij} \in \Gamma(U_{ij}, T_X)$. Le faisceau $\mathcal{F}^*$ sera défini comme $\mathcal{F}^* = T_X \oplus \mathcal{O}_X$ sur U_i, avec fonctions de transition

$$\Gamma_{ij}(t, \alpha) = (t + \alpha e_{ij}, \alpha)$$

sur U_{ij}. La condition de cocycle $e_{ij} + e_{jk} + e_{kl} = 0$ garantit que $\Gamma_{ij} \circ \Gamma_{jk} \circ \Gamma_{ki} = Id$ sur U_{ijk}, garantissant que la définition de $\mathcal{F}^*$ est cohérente.

Théorème 1.12 *L'application qui à X_1 associe la classe d'extension e définit une bijection entre l'ensemble des déformations du premier ordre de X et l'espace $H^1(X, T_X)$.*

Démonstration. Il est standard que la classe e détermine l'extension (1.4.7) (cf [19]). Montrons comment l'extension (1.4.7) qui détermine un fibré $\mathcal{F}$ sur X s'inscrivant dans une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{F} \xrightarrow{r} \Omega_X \to 0, \tag{1.4.8}$$

permet de reconstruire de façon unique un schéma X_1, muni d'un morphisme dans Δ_1, avec fibre centrale $X_0 \cong X$, et tel que $\mathcal{F} \cong \Omega_{X_1|X_0}$.

Il faut voir que X_1 n'est rien d'autre que X avec un faisceau de fonctions étendu par des nilpotents (la fonction t). Il suffit donc de construire le faisceau d'algèbres $\mathcal{O}_{X_1}$ sur X, qui doit entrer dans la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{t} \mathcal{O}_{X_1} \to \mathcal{O}_X \to 0,$$

où la flèche de droite est la restriction de X_1 à $X = X_0$, et la flèche de gauche est l'inclusion de $\mathcal{I}_{X_0} \cong \mathcal{O}_X t$ dans $\mathcal{O}_{X_1}$. On dispose de la différentielle $d : \mathcal{O}_X \to \Omega_X$ et de la restriction $r : \mathcal{F} \to \Omega_X$. On va définir $\mathcal{O}_{X_1}$ comme un produit fibré à partir de $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{O}_{X_1} := \{(\alpha, f) \in \mathcal{F} \oplus \mathcal{O}_X,\, r(\alpha) = df\}. \tag{1.4.9}$$

Pour conclure, il suffit de décrire la structure de k-algèbre sur $\mathcal{O}_{X_1}$. Cette structure est dictée par la règle de Leibniz. On veut en effet que la flèche

$$\mathcal{O}_{X_1} \to \mathcal{F} \cong \Omega_{X_1|X}$$

$$(\alpha, f) \mapsto \alpha$$

soit la différentielle de $\mathcal{O}_{X_1}$ composée avec la restriction à X. D'autre part la flèche $(\alpha, f) \mapsto f$ est la restriction à X. On doit donc avoir

$$(\alpha, f)(\beta, g) = (\alpha g + \beta f, fg). \tag{1.4.10}$$

La formule ci-dessus décrit une structure de k-algèbre commutative sur le faisceau $\mathcal{O}_{X_1}$ décrit par la formule (1.4.9), pour laquelle le morphisme $\mathcal{O}_{X_1} \to \mathcal{O}_X$, $(\alpha, f) \mapsto f$ est un morphisme surjectif de k-algèbres, dont le noyau est isomorphe à

$$Ker\,(r : \mathcal{F} \to \Omega_X),$$

qui est aussi isomorphe à $\mathcal{O}_X$ d'après (1.4.8). De plus ce noyau est un idéal de carré nul d'après la formule (1.4.10). ■

Définition 1.13 *La classe $e \in H^1(X, T_X)$ associée à une déformation du premier ordre $X_1 \to \Delta_1$ de X est appelée la classe de Kodaira-Spencer de la déformation.*

Cas général

Dans les arguments ci-dessus, on n'a pas utilisé l'hypothèse que X était lisse, sauf pour identifier $Ext^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$ et $H^1(X, T_X)$. La seule chose qui est utilisée est le fait suivant :

Lemme 1.14 *On a une identification de $Ext^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$ avec l'ensemble des extensions $\mathcal{F}$ de Ω_X par $\mathcal{O}_X$.*

Un tel fibré $\mathcal{F}$ s'inscrivant dans une suite exacte (1.4.8) fournit alors une déformation X_1 de X par la formule (1.4.9).

Démonstration du lemme 1.14. Si on a une extension

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{F} \to \Omega_X \to 0,$$

on obtient en appliquant le foncteur $Hom_{\mathcal{O}_X}(\ , \mathcal{O}_X)$ une suite exacte longue

$$\ldots \to Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X, \mathcal{O}_X) = k \xrightarrow{\delta} Ext^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X) \to \ldots.$$

D'où un élément $\delta(1) \in Ext^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$.

Inversement, soit $e \in Ext^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X)$. Il existe un faisceau localement libre $\mathcal{H}$, et une surjection

$$\mathcal{H} \to \Omega_X$$

de noyau $\mathcal{G}$. On peut prendre pour $\mathcal{H}$ un faisceau de la forme $\mathcal{O}_X(-l)^N$, avec l et N suffisamment grands. Alors on a $Ext^1(\mathcal{H}, \mathcal{O}_X) = H^1(X, \mathcal{H}^*) = 0$ par le théorème d'annulation de Serre (cf [21]), et la suite exacte longue des Ext fournit une surjection

$$Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{O}_X) \to Ext^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X, \mathcal{O}_X).$$

Soit $f \in Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{G}, \mathcal{O}_X)$ s'envoyant sur e, et définissons $\mathcal{F}$ par la formule :

$$\mathcal{F} = \mathcal{O}_X \oplus \mathcal{H}/Im\,(f, i),$$

où i est l'injection de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{H}$, de sorte que (f, i) est une injection de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{O}_X \oplus \mathcal{H}$. On vérifie immédiatement que le faisceau $\mathcal{F}$ ainsi défini est un faisceau cohérent sur X, qui est une extension de Ω_X par $\mathcal{O}_X$, dont la classe d'extension est e. ■

1.4.2 Obstructions : Le "principe de relèvement T^1"

Soit $\pi : X_n \to \Delta_n$ un morphisme plat et propre. On supposera pour simplifier que la fibre centrale X_0 est lisse. Comme précédemment, $\Delta_n := Spec\, k[t]/t^{n+1}$.

On montre tout d'abord :

Lemme 1.15 *Le faisceau $\Omega_{X_n|X_{n-1}}$ est localement libre sur X_{n-1}, le faisceau des différentielles relatives Ω_{X_n/Δ_n} est localement libre sur X_n, et on a la suite exacte des différentielles relatives*

$$0 \to \mathcal{O}_{X_{n-1}}dt \to \Omega_{X_n|X_{n-1}} \to (\Omega_{X_n/\Delta_n})_{|X_{n-1}} \to 0. \qquad (1.4.11)$$

Démonstration. Dans le cas où $X_n = \Delta_n$, cela résulte du fait que, par définition, le faisceau Ω_{Δ_n} est engendré sur $\mathcal{O}_{\Delta_n}$ par dt avec la relation $t^n dt = 0$. Donc par restriction à Δ_{n-1} il devient libre de générateur dt. Dans le cas général, considérons un point fermé $x \in X_0$ qu'on supposera pour simplifier défini sur k. Comme X est lisse, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ admet un système de paramètres locaux $g_1, \ldots, g_d$, $d = dim\, X$, qui satisfont

$$g_i \in \mathcal{M}_x,\ \widehat{\mathcal{O}}_{X,x} \cong k[[g_1, \ldots, g_d]],$$

où l'anneau $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$ est le complété formel de $\mathcal{O}_{X,x}$ le long de son idéal maximal $\mathcal{M}_x$. On a une surjection d'anneaux locaux

$$\mathcal{O}_{X_n,x} \to \mathcal{O}_{X,x},$$

et on peut donc choisir des relèvements

$$\tilde{g}_i \in \mathcal{O}_{X_n,x},\ \tilde{g}_{i|X} = g_i.$$

On dispose par ailleurs sur X_n de la fonction t, qui satisfait $t^{n+1} = 0$, et la platitude de π fournit une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_{X_{n-1}} \xrightarrow{t} \mathcal{O}_{X_n} \to \mathcal{O}_X \to 0,$$

correspondant à la suite exacte analogue sur Δ_n.

On a un morphisme naturel

$$k[[\tilde{g}_1, \ldots, \tilde{g}_d, t]]/(t^{n+1}) \to \widehat{\mathcal{O}}_{X_n,x},$$

et on montre à l'aide de la suite exacte ci-dessus et par récurrence sur n, que ce morphisme est un isomorphisme.

On en déduit immédiatement les énoncés concernant les différentielles, puisqu'on a une présentation du complété formel $\widehat{\Omega_{X_n,x}}$ comme le quotient du $\widehat{\mathcal{O}}_{X_n,x}$-module libre

$$\widehat{\mathcal{O}}_{X_n,x} < d\tilde{g}_1, \ldots, d\tilde{g}_d, dt >$$

par la relation $t^n dt = 0$. ∎

Notant π_{n-1} la restriction de π à $X_{n-1} := \pi^{-1}(\Delta_{n-1})$, on a l'application de Kodaira-Spencer de X_n, qui donne une classe

$$\alpha_{n-1} \in H^1(X_{n-1}, T_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}}),$$

et qui est définie comme la classe d'extension de la suite exacte (1.4.11). Ici, le faisceau tangent relatif est le faisceau localement libre défini comme le dual de $\Omega_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}}$, et on utilise l'identité

$$Ext^1_{\mathcal{O}_{X_{n-1}}}(\Omega_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}}, \mathcal{O}_{X_{n-1}}) \cong H^1(X_{n-1}, T_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}}),$$

due au fait que $\Omega_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}}$ est localement libre sur X_{n-1}.

Notons que $(\Omega_{X_n/\Delta_n})_{|X_{n-1}}$ est naturellement isomorphe à $\Omega_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}}$; en particulier, la restriction de Ω_{X_n/Δ_n} à la fibre centrale $X_0 \cong X$ est isomorphe à $\Omega_{X/k} = \Omega_X$.

On désire étendre la déformation $X_n \to \Delta_n$ d'ordre n de X_0 à l'ordre $n+1$, c'est-à-dire construire un schéma

$$\pi' : X_{n+1} \to \Delta_{n+1}$$

plat et propre au-dessus de Δ_{n+1}, tel que

$$\pi'^{-1}(\Delta_n) \cong X_n,$$

et qu'on ait un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} X_n & \hookrightarrow & X_{n+1} \\ \pi \downarrow & & \pi' \downarrow \\ \Delta_n & \hookrightarrow & \Delta_{n+1} \end{array}.$$

On rencontre en général des obstructions non triviales (qui sont dans $H^2(X, T_X)$, voir ci-dessous), et qui moralement reflètent le fait que la base de la déformation universelle peut être singulière. (On peut penser à la déformation $X_n \to \Delta_n$ comme à un morphisme défini sur Δ_n et à valeurs dans un schéma de déformations (inexistant en général) et la possibilité ou non d'étendre ce jet à l'ordre $n+1$ traduit la présence de singularités de ce schéma, voir proposition 1.10.)

Le principe de relèvement T^1 est une sorte de linéarisation du problème qui peut s'énoncer de la façon suivante :

Théorème 1.16 *L'obstruction à étendre π en une déformation à l'ordre $n+1$*

$$\pi' : X_{n+1} \to \Delta_{n+1}$$

est égale à l'obstruction à étendre la classe de Kodaira-Spencer

$$\alpha_{n-1} \in H^1(X_{n-1}, T_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}})$$

en une classe

$$\alpha_n \in H^1(X_n, T_{X_n/\Delta_n}),$$

(où comme précédemment T_{X_n/Δ_n} est le faisceau localement libre sur X_n défini comme le dual de Ω_{X_n/Δ_n}).

Corollaire 1.17 *Cette obstruction vit dans $H^2(X, T_X)$.*

Démonstration. Le faisceau T_{X_n/Δ_n} étant localement libre sur X_n, on a la suite exacte :
$$0 \to T_X \xrightarrow{t^n} T_{X_n/\Delta_n} \to T_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}} \to 0.$$
La suite exacte longue de cohomologie associée fournit

$$H^1(X_n, T_{X_n/\Delta_n}) \to H^1(X_{n-1}, T_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}}) \xrightarrow{\delta} H^2(X, T_X),$$

ce qui montre, combiné avec le théorème 1.16, que l'obstruction cherchée est égale à $\delta(\kappa) \in H^2(X, T_X)$. ■

La principale étape de la preuve du théorème 1.16 est le lemme suivant, qui généralise la construction faite dans la preuve du théorème 1.12 :

Lemme 1.18 *Le schéma X_n est déterminé par X_{n-1}, et par la donnée du faisceau de $\mathcal{O}_{X_{n-1}}$-modules libres $\Omega_{X_n|X_{n-1}}$ et de l'application de restriction qu'on notera r :*

$$r : \Omega_{X_n|X_{n-1}} \to \Omega_{X_{n-1}}$$

(dont le noyau est isomorphe à $\mathcal{O}_X$, de générateur $t^{n-1}dt$).

De plus, la paire $(\Omega_{X_n|X_{n-1}}, r)$ est seulement assujettie à la condition que la restriction de r à X_{n-2} induit un isomorphisme :

$$r : \Omega_{X_n|X_{n-2}} \to \Omega_{X_{n-1}|X_{n-2}}.$$

Démonstration. En effet, considérons l'application

$$\mu : \mathcal{O}_{X_n} \to \mathcal{O}_{X_{n-1}} \oplus \Omega_{X_n|X_{n-1}}$$

définie par
$$\mu(f) = (f_{|X_{n-1}}, df_{|X_{n-1}}).$$
(Ici on note un peu abusivement $df_{|X_{n-1}}$ l'image de $df \in \Omega_{X_n}$ dans $\Omega_{X_n|X_{n-1}}$.)

Lemme 1.19 *μ est injective et l'image $Im\,\mu \cong \mathcal{O}_{X_n}$ est exactement décrite de la manière suivante :*

$$Im\,\mu = A := \{(g, \alpha) \in \mathcal{O}_{X_{n-1}} \oplus \Omega_{X_n|X_{n-1}},\ dg = r(\alpha)\}. \tag{1.4.12}$$

Démonstration. Pour l'injectivité, si $g \in Ker\,\mu$, on a $g_{|X_{n-1}} = 0$ et donc $g = ht^n$, pour une fonction $h \in \mathcal{O}_X$. Alors

$$dg = nht^{n-1}dt \ mod.\ t^n,$$

et comme on est en caractéristique 0, ceci ne peut s'annuler dans $\Omega_{X_n|X_{n-1}}$ que si $h = 0$, d'après le lemme 1.15.

Surjectivité : Clairement l'image de μ est contenue dans A, et pour voir qu'on a l'égalité, on prend $(g, \alpha) \in A$, et on cherche f avec

$$f_{|X_{n-1}} = g,\ df_{|X_{n-1}} = \alpha. \tag{1.4.13}$$

Prenons d'abord une $\tilde{f}$ satisfaisant la première condition. Alors le f doit être de la forme

$$f = \tilde{f} + t^n h,$$

pour une fonction $h \in \mathcal{O}_X$. On veut f telle que $df_{|X_{n-1}} = \alpha$, et on sait que $r(\alpha) = dg$.

Comme $\tilde{f}_{|X_{n-1}} = g$ et $r(\alpha) = dg$, on a

$$r(d\tilde{f}_{|X_{n-1}} - \alpha) = 0.$$

Or le noyau de r est engendré par $t^{n-1}dt$. On a donc

$$d\tilde{f}_{|X_{n-1}} - \alpha = nht^{n-1}dt,$$

pour une certaine fonction $h \in \mathcal{O}_X$. Donc $f := \tilde{f} - ht^n$ satisfait la condition (1.4.13) voulue. ■

Revenant à la preuve du lemme 1.18, il faut noter pour conclure que la structure d'anneau sur $\mathcal{O}_{X_n} \cong A$ est donnée (à l'aide de la règle de Leibniz) par

$$(g, \alpha) \cdot (g', \alpha') = (fg, f\alpha' + g'\alpha).$$

On vérifie que c'est bien un anneau plat sur $\mathcal{O}_{\Delta_n}$, et en utilisant (1.4.12), qu'on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{t^n} A \to \mathcal{O}_{X_{n-1}} \to 0.$$

■

Le lemme 1.18 nous donne donc une recette pour reconstruire X_n à partir de la donnée de X_{n-1} et de $\Omega_{X_n|X_{n-1}}$, muni de $r : \Omega_{X_n|X_{n-1}} \to \Omega_{X_{n-1}}$, qu'on va en fait appliquer pour construire l'extension X_{n+1}.

Preuve du théorème 1.16. Supposons donné $X_n \to \Delta_n$. On a le faisceau cotangent relatif Ω_{X_n/Δ_n} qui est localement libre par le lemme 1.15, et de plus on a Ω_{X_n} qui n'est pas localement libre, mais le devient après restriction à X_{n-1}, (cf lemme 1.15). On a l'application de Kodaira-Spencer de X_n, qui donne une classe

$$\alpha_{n-1} \in H^1(X_{n-1}, T_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}}).$$

Supposons qu'on arrive à étendre cette classe en $\alpha_n \in H^1(X_n, T_{X_n/\Delta_n})$. Alors α_n fournit un faisceau localement libre $\mathcal{E}$ sur X_n, qui est une extension

$$0 \to \mathcal{O}_{X_n} \to \mathcal{E} \to \Omega_{X_n/\Delta_n} \to 0. \tag{1.4.14}$$

De plus on a un isomorphisme naturel

$$\mathcal{E}_{|X_{n-1}} = \Omega_{X_n|X_{n-1}}, \tag{1.4.15}$$

puisque α_n étend α_{n-1}.

Pour construire X_{n+1}, d'après le lemme 1.18 et sa conclusion, il suffit de pouvoir poser

$$\mathcal{E} = \Omega_{X_{n+1}|X_n},$$

et de connaître r. En d'autres termes, il suffit de savoir qu'il existe $r : \mathcal{E} \to \Omega_{X_n}$, telle que la restriction de r à X_{n-1} soit l'identité, compte tenu de l'identification (1.4.15).

Or $\mathcal{E}$ admet deux flèches : l'une qu'on notera

$$f_1 : \mathcal{E} \to \Omega_{X_n/\Delta_n},$$

donnée par la suite exacte (1.4.14), l'autre qu'on notera

$$f_2 : \mathcal{E} \to \Omega_{X_n|X_{n-1}},$$

donnée par l'isomorphisme $\mathcal{E}_{|X_{n-1}} \cong \Omega_{X_n|X_{n-1}}$. Ces deux flèches sont compatibles au sens où l'on a

$$g_1 \circ f_1 = g_2 \circ f_2 : \mathcal{E} \to \Omega_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}}, \tag{1.4.16}$$

où

$$g_1 : \Omega_{X_n/\Delta_n} \to \Omega_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}}$$

et

$$g_2 : \Omega_{X_n|X_{n-1}} \to \Omega_{X_{n-1}/\Delta_{n-1}}$$

sont les flèches naturelles.

Pour conclure il suffit donc de montrer :

Lemme 1.20 *On a une identification naturelle*

$$\Omega_{X_n} \cong B \subset \Omega_{X_n/\Delta_n} \oplus \Omega_{X_n|X_{n-1}},$$

$$B := \{(\alpha, \beta),\ g_1(\alpha) = g_2(\beta)\}.$$

En effet, le lemme 1.20 combiné avec (1.4.16) montre que (f_1, f_2) fournit l'application $r : \mathcal{E} \to \Omega_{X_n}$ désirée. Le lemme 1.18 conclut alors la preuve du théorème 1.16. ∎

Preuve du Lemme 1.20.

Injectivité : Soit $\eta \in \Omega_{X_n}$, s'envoyant sur 0 par les restrictions naturelles dans $\Omega_{X_n/\Delta_n} \oplus \Omega_{X_n|X_{n-1}}$. La condition que η s'annule dans Ω_{X_n/Δ_n} dit que $\eta = hdt$. Alors comme η s'annule dans $\Omega_{X_n|X_{n-1}}$ on trouve que t^n divise h. Or dans Ω_{X_n}, on a déjà $t^n dt = 0$.

Surjectivité : Soit $(\alpha, \beta) \in B$. Il existe (localement, tout est local ici) $\gamma \in \Omega_{X_n}$ telle que l'image de γ dans Ω_{X_n/Δ_n} soit égale à α. On peut modifier γ par une différentielle de la forme hdt. Soit γ' l'image de γ dans $\Omega_{X_n|X_{n-1}}$. Alors on a

$$g_2(\gamma') = g_1(\alpha) = g_2(\beta)$$

puisque $(\alpha, \beta) \in B$. On en déduit que

$$g_2(\gamma' - \beta) = 0,$$

ce qui équivaut à $\gamma' - \beta = hdt$, où h est une fonction sur X_{n-1}. En corrigeant γ par hdt, on trouve donc un $\tilde{\gamma} \in \Omega_{X_n}$ qui s'envoie sur (α, β).

∎

1.5 Déformations de schémas polarisés

1.5.1 Faisceaux de jets

Soit X une variété projective et L un fibré inversible sur X. Introduisons le faisceau P_L des jets d'ordre 1 de sections de L, qui entre dans la suite exacte suivante :

$$0 \to \Omega_X \otimes L \to P_L \to L \to 0.$$

La fibre de P_L en un point $x \in X$ est la donnée d'une section de L sur le schéma $Spec\, \mathcal{O}_{X,x}/\mathcal{M}_x^2$. Pour définir rigoureusement ce faisceau, il faut considérer $X \times X$ et ses deux projections p_1, p_2 sur X. Soit $\mathcal{I}_\Delta$ le faisceau d'idéaux de la diagonale, et considérons le faisceau suivant sur X :

$$P_L = p_{1*}(p_2^* L \otimes \mathcal{O}_{X \times X}/\mathcal{I}_\Delta^2).$$

On notera Q_L le faisceau $P_L \otimes L^{-1}$, qui entre dans la suite exacte suivante :

$$0 \to \Omega_X \to Q_L \to \mathcal{O}_X \to 0. \tag{1.5.17}$$

Notons qu'on a une flèche naturelle non $\mathcal{O}_X$-linéaire

$$\iota_L : L \to P_L,$$

qui à une section σ associe son jet d'ordre 1 en chaque point. Dans l'écriture ci-dessus,

$$\iota(\sigma) = p_{1*}(p_2^* \sigma_{|\Delta_2}),$$

où Δ_2 est le premier voisinage infinitésimal de Δ dans $X \times X$. Rappelant que $\Omega_X(L)$ est contenu dans P_L, cette flèche satisfait la règle de Leibniz suivante :

$$\iota_L(f\sigma) = \sigma df + f\iota_L(\sigma). \tag{1.5.18}$$

1.5.2 Calcul de l'espace tangent, interprétation des différents termes

On veut maintenant étudier les déformations du premier ordre de (X, L), c'est-à-dire l'ensemble des classes d'isomorphismes d'objets (X_1, L_1, ϕ), où $X \to \Delta_1$ est plat, L_1 est un faisceau inversible sur X_1 et ϕ est un isomorphisme $(X_0, L_0) \cong (X, L)$.

Théorème 1.21 *Les déformations infinitésimales de* (X, L) *sont données par l'espace* $Ext^1_{\mathcal{O}_X}(Q_L, \mathcal{O}_X) = Ext^1_{\mathcal{O}_X}(P_L, L)$.

Démonstration. Notons qu'on dispose d'une application de Kodaira-Spencer associant à toute famille (X_1, L_1) comme ci-dessus une classe dans $Ext^1_{\mathcal{O}_X}(Q_L, \mathcal{O}_X)$. En effet, observons que le faisceau inversible L_1 sur X_1 admet un faisceau Q_{L_1} associé, qui s'inscrit dans une suite exacte :

$$0 \to \Omega_{X_1} \to Q_{L_1} \to \mathcal{O}_{X_1} \to 0$$

semblable à celle de (1.5.17).

Cette suite se restreint à la fibre centrale $X_0 = X$ en restant exacte (grâce à la platitude des faisceaux considérés sur Δ_1) :

$$0 \to \Omega_{X_1|X} \to Q_{L_1|X} \to \mathcal{O}_X \to 0$$

et la flèche évidente de restriction

$$Q_{L_1|X} \to Q_L$$

s'inscrit dans une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_X \to Q_{L_1|X} \xrightarrow{r} Q_L \to 0, \tag{1.5.19}$$

comme on le vérifie localement en se ramenant au cas où L est trivial, et donc $Q_L = \Omega_X \oplus \mathcal{O}_X$.

La classe d'extension associée à cette suite exacte fournit bien un élément de $Ext^1_{\mathcal{O}_X}(Q_L, \mathcal{O}_X)$.

Il reste à voir que l'application de Kodaira-Spencer ainsi définie est un isomorphisme. Cette preuve se fait parallèlement avec celle qu'on a donnée dans le cas précédent des déformations de X. Il s'agit de voir comment la donnée du faisceau $Q_{L_1|X}$, donné par une extension (1.5.19), permet de reconstruire la paire (X_1, L_1). Notons qu'on reconstruit le faisceau $\Omega_{X_1|X}$ à partir de l'extension (1.5.19) comme étant égal à $r^{-1}(\Omega_X)$, où r est la flèche de restriction de $Q_{L_1|X}$ vers Q_L.

On a vu que $\Omega_{X_1|X}$ permet de construire X_1 et il reste à montrer que la donnée supplémentaire de (1.5.19) permet de construire le faisceau de $\mathcal{O}_{X_1}$-modules libres L_1.

Soit $P_{L_1|X}; = Q_{L_1|X} \otimes L$. On veut construire L_1 sur X_1 dont le faisceau de jets d'ordre 1 restreint à X est $P_{L_1|X}$. Via ι_{L_1} et le morphisme de restriction à X, on va construire L_1 comme un sous-faisceau (de k-espaces vectoriels mais pas de $\mathcal{O}_X$-modules) de $P_{L_1|X} \oplus L$. Le faisceau $P_{L_1|X}$ admet l'application r à valeurs dans P_L. Par ailleurs, on a aussi l'application $\iota_L : L \to P_L$ qui n'est pas $\mathcal{O}_X$-linéaire mais satisfait la règle de Leibniz (1.5.18). Posons

$$L_1 := \{(\beta, \sigma) \in P_{L_1|X} \oplus L,\, r(\beta) = \iota_L(\sigma)\}.$$

Rappelant qu'on a construit $\mathcal{O}_{X_1}$ par

$$\mathcal{O}_{X_1} = \{(\alpha, f) \in \Omega_{X_1|X} \oplus \mathcal{O}_X,\, \alpha_{|X} = df\},$$

on construit la structure de faisceau de $\mathcal{O}_{X_1}$-modules en posant :

$$(\alpha, f) \cdot (\beta, \sigma) = (\sigma\alpha + f\beta, f\sigma).$$

Comme on a

$$r(\sigma\alpha + f\beta) = \sigma r(\alpha) + f r(\beta) = \sigma df + f\iota_L(\sigma) = \iota_L(f\sigma),$$

le terme de droite est bien dans L_1.

On laisse en exercice la preuve du fait que via cette action, L_1 est bien un faisceau de $\mathcal{O}_{X_1}$-modules libres de rang 1.

■

Remarque 1.22 La suite exacte (1.5.17) fournit la suite exacte :

$$H^1(X,\mathcal{O}_X) \to Ext^1_{\mathcal{O}_X}(Q_L,\mathcal{O}_X) \to Ext^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X,\mathcal{O}_X) \to H^2(X,\mathcal{O}_X).$$

Le sens de cette suite exacte est le suivant : le troisième terme $Ext^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X,\mathcal{O}_X)$ est l'ensemble des déformations d'ordre 1 de X (cf section précédente). L'application

$$Ext^1_{\mathcal{O}_X}(Q_L,\mathcal{O}_X) \to Ext^1_{\mathcal{O}_X}(\Omega_X,\mathcal{O}_X)$$

est simplement l'application d'oubli, qui envoie les déformations de la paire (X,L) sur celles de X.

Le noyau de cette application décrit les déformations infinitésimales de L avec X fixé, c'est-à-dire l'espace tangent à $Pic\,X$. Enfin la dernière flèche décrit l'obstruction à déformer L avec X.

1.6 Déformation des faisceaux cohérents

1.6.1 Espace tangent

Désormais on s'intéresse à la théorie des déformations d'un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur une base donnée X projective. Comme précédemment, pour calculer les déformations du premier ordre, on doit donc calculer les classes d'isomorphisme de paires $(\mathcal{F}_1,\phi)$, où $\mathcal{F}_1$ est un faisceau sur $X\times\Delta_1$ plat sur Δ_1 et ϕ est un isomorphisme de $\mathcal{F}_{1|X\times 0}$ avec $\mathcal{F}$. On a la suite exacte

$$0 \to k_0 \xrightarrow{t} \mathcal{O}_{\Delta_1} \to k_0 \to 0$$

où k_0 est le faisceau de fibre k supporté en 0. Par platitude de $\mathcal{F}_1$ sur Δ_1, et en utilisant ϕ on obtient donc une suite exacte

$$0 \to \mathcal{F} \xrightarrow{t} \mathcal{F}_1 \to \mathcal{F} \to 0. \tag{1.6.20}$$

Cette suite exacte est une suite exacte de $\mathcal{O}_{X\times\Delta_1}$-modules, mais on a une injection pr_1^* de $\mathcal{O}_X$ dans $\mathcal{O}_{X\times\Delta_1}$, et donc on peut aussi la voir comme une suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules. D'où une classe d'extension e dans $Ext^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{F})$.

Théorème 1.23 *Cette construction identifie l'espace tangent au foncteur $Def_{\mathcal{F}}$ à $Ext^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\mathcal{F})$.*

Démonstration. Si $e=0$, la suite exacte (1.6.20) est scindée comme suite exacte de $\mathcal{O}_X$-modules. Cela signifie que $\mathcal{F}_1 \cong \mathcal{F}\oplus\mathcal{F}$ comme $\mathcal{O}_X$-module.

Pour voir que $\mathcal{F}_1 \cong p_1^*\mathcal{F}$ il suffit de trouver un automorphisme de $\mathcal{F}\oplus\mathcal{F} = \mathcal{F}\otimes k[t]/(t^2)$ sur lui-même, qui identifie la multiplication par t sur $\mathcal{F}^1$ à la multiplication par t sur $\mathcal{F}\otimes k[t]/(t^2)$. Mais la multiplication par t sur $\mathcal{F}_1$ est un endomorphisme nilpotent d'ordre 2 dont le noyau (et donc aussi l'image) s'identifie au premier facteur $K := \mathcal{F}$. Un tel endomorphisme sur $\mathcal{F}\oplus\mathcal{F}$ est donné par un isomorphisme $\eta : \mathcal{F}_{(2)} \to \mathcal{F}_{(1)}$, où $\mathcal{F}_{(2)}$ et $\mathcal{F}_{(1)}$ sont les deux facteurs de $\mathcal{F}\oplus\mathcal{F}$. Modifiant l'isomorphisme

$$\mathcal{F}^1 \cong \mathcal{F}\oplus\mathcal{F}$$

par l'action de η sur le second facteur fournit donc un isomorphisme de $\mathcal{F}^1$ avec $\mathcal{F} \otimes k[t]/(t^2)$.

La surjectivité est évidente : étant donnée une extension de $\mathcal{F}$ par lui-même, on dispose d'un faisceau $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{O}_X$-modules, qui est une extension

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to \mathcal{F} \to 0$$

et il est clair qu'il existe une structure de $\mathcal{O}_{X \times \Delta_1}$ sur $\mathcal{F}'$, pour laquelle la multiplication par t est donnée par la composition

$$\mathcal{F}' \twoheadrightarrow \mathcal{F} \hookrightarrow \mathcal{F}'.$$

■

1.6.2 Obstructions

On conclut ce chapitre avec le résultat suivant (voir travaux dirigés pour la démonstration) :

Théorème 1.24 *Soit $\mathcal{F}_n$ une déformation d'ordre n de $\mathcal{F}$, c'est-à-dire un faisceau sur $X \times \Delta_n$ plat sur Δ_n, et dont la fibre centrale est isomorphe à $\mathcal{F}$. Alors il existe une obstruction $o_n \in Ext^2_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ qui s'annule si et seulement si $\mathcal{F}_n$ admet une extension en un faisceau $\mathcal{F}_{n+1}$ sur $X \times \Delta_{n+1}$, plat sur Δ_{n+1}.*

Chapitre 2

Polynôme de Hilbert et schéma Quot

2.1 Polynômes de Hilbert

2.1.1 Définition des polynômes de Hilbert

Soit $M^{\cdot} = \oplus M^l$ un module gradué de type fini sur l'anneau gradué $k[X_0, \dots, X_n]$. En particulier, chaque M^i est de rang fini sur k.

Théorème 2.1 *Il existe un polynôme P_M à coefficients rationnels et à valeurs entières, ayant la propriété que*

$$P_M(l) = dim_k M^l,$$

pour l entier suffisamment grand.

Démonstration. Par récurrence sur n. Considérons la multiplication par X_n

$$X_n : M^{\cdot} \to M^{\cdot+1}.$$

Soit $K^{\cdot}$ son noyau et $Q^{\cdot+1}$ son conoyau. Ce sont des $k[X_0, \dots, X_{n-1}]$-modules gradués de type fini. Il existe donc P_K et P_Q tels que

$$P_K(l) = dim_k K_l,\ P_Q(l) = dim_k Q_l,\ l >> 0.$$

On a alors :

$$dim_k M^{l+1} - dim_k M^l = P_Q(l+1) - P_K(l),\ l >> 0,$$

ce qui entraîne immédiatement le résultat. ∎

On a en vue le cas où $X \subset \mathbb{P}^n_k$ est un k-schéma projectif, et $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X. On sait alors que $\oplus_{l \geq 0} H^0(X, \mathcal{F}(l))$ est d'engendrement fini sur $k[X_0, \dots, X_n]$. Le polynôme de Hilbert de ce module gradué est alors appelé polynôme de Hilbert de $\mathcal{F}$ (relativement à la polarisation donnée par $\mathcal{O}_X(1)$). On le notera $P_{\mathcal{F}}$.

Notons l'interprétation suivante de $P_{\mathcal{F}}$:

Proposition 2.2 *Si X est tel que*

$$H^i(X, \mathcal{F}(l)) = 0, \, i > 0,$$

alors on a $P_{\mathcal{F}}(l) = H^0(X, \mathcal{F}(l))$. Plus généralement, pour tout $l \in \mathbb{Z}$, on a

$$P_{\mathcal{F}}(l) = \chi(\mathcal{F}(l)) := \sum_i (-1)^i dim_k H^i(X, \mathcal{F}(l)). \tag{2.1.1}$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur la dimension du support de $\mathcal{F}$, le cas où cette dimension est nulle résultant des définitions. Choisissant une section σ de $\mathcal{O}_X(1)$ dont le diviseur Y ne contient aucune composante irréductible du support de $\mathcal{F}$, on utilise la suite exacte

$$0 \to \mathcal{F}(l) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{F}(l+1) \to \mathcal{F}'(l+1) \to 0$$

définissant $\mathcal{F}'$. Notons que la dimension du support de $\mathcal{F}'$ est strictement inférieure à celle du support de $\mathcal{F}$

La suite exacte longue de cohomologie associée nous dit que

$$\chi(\mathcal{F}(l+1)) - \chi(\mathcal{F}(l)) = \chi(\mathcal{F}'(l+1)).$$

L'hypothèse de récurrence nous donne

$$P_{\mathcal{F}'}(l) = \chi(\mathcal{F}'(l)), \, \forall l \in \mathbb{Z}.$$

Il en résulte que $\chi(\mathcal{F}(l))$ est un polynôme en l. Comme on sait que $P_{\mathcal{F}}$ est un polynôme qui satisfait

$$P_{\mathcal{F}}(l) = h^0(X, \mathcal{O}_X(l)) = \chi(\mathcal{O}_X(l))$$

pour l assez grand, on conclut que ces deux polynômes sont égaux.

∎

2.1.2 Modules plats sur un anneau

Rappelons qu'un module M sur un anneau commutatif unitaire A est dit plat si le foncteur $N \mapsto M \otimes_A N$ est exact sur la catégorie des A-modules. (Ce foncteur est toujours exact à droite, et donc c'est l'exactitude à gauche qui est demandée ici.) Une caractérisation équivalente fait intervenir les Tor (cf [8]) :

Lemme 2.3 *M est plat sur A si et seulement si pour tout A-module N, et pour tout $i > 0$, on a :*

$$Tor_i^A(M, N) = 0.$$

Rappelons que les $Tor_i^A(N, R)$ sont calculés comme les groupes d'homologie du complexe

$$N_{i+1} \otimes R \to N_i \otimes R \to N_{i-1} \otimes R \to ...,$$

avec

$$N_{i+1} \to N_i \to \ldots N_0 \to N \to 0$$

une résolution projective à gauche de N. On a le lemme suivant :

Lemme 2.4 *Si A est local Noetherien d'idéal maximal $\mathcal{M}$ et M est de type fini, alors M est plat sur A si et seulement si M est libre sur A.*

Démonstration. C'est évidemment une condition suffisante. Inversement, si M est plat, soient $m_1, \dots, m_r \in M$ tels que les m_i modulo $\mathcal{M}M$ fournissent une base de $M/\mathcal{M}M = M \otimes k$, où $k = A/\mathcal{M}$ est le corps résiduel de A.

Le lemme de Nakayama entraîne alors que l'application

$$A^r \to M,\ (a_1, \dots, a_r) \mapsto \sum_i a_i m_i$$

est surjective. Soit R son noyau. On a la suite exacte

$$0 \to R \to A^r \to M \to 0.$$

Comme M est plat, cette suite reste exacte après tensorisation par k, comme le montrent la suite exacte longue des Tor et le fait que $Tor_1^A(M,k) = 0$. Mais par définition des m_i, la flèche induite $A^r \otimes k \to M \otimes k$ est un isomorphisme. Il en résulte que $R \otimes k = 0$ et donc $R = 0$ par Nakayama, vu que R est de type fini. ∎

Une propriété essentielle des modules plats est la suivante :

Proposition 2.5 *Soit*

$$0 \to M_0 \to M_1 \to \dots \to M_n \to 0$$

un complexe exact de A-modules, avec M_i plat pour $i > 0$. Alors M_0 est plat.

Démonstration. En scindant le complexe ci-dessus en suites exactes courtes, il suffit de prouver que si

$$0 \to R \to P \to Q \to 0$$

est une suite exacte de A-modules, avec P et Q plats, alors R l'est.

Il suffit pour cela d'après le lemme 2.3 de montrer que $Tor_i^A(E,R) = 0,\ i > 0$ pour tout A-module E.

Or on a la suite exacte des Tor :

$$Tor_{i+1}^A(E,Q) \to Tor_i^A(E,R) \to Tor_i^A(E,P) \to \dots$$

qui montre que $Tor_{i+1}^A(E,Q) = 0$ et $Tor_i^A(E,P) = 0,\ i > 0$ entraînent $Tor_i^A(E,R) = 0,\ i > 0$. ∎

2.1.3 Polynôme de Hilbert et platitude

La situation est la suivante : on considère un k-schéma quasi-projectif X, un k-schéma quasi-projectif B, et un morphisme projectif

$$\pi : X \to B.$$

On se donnera dans la suite un faisceau relativement ample $\mathcal{L}$ sur X. Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X, on notera alors

$$\mathcal{F}(l) := \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes l}.$$

Définition 2.6 *Un faisceau quasi-cohérent $\mathcal{F}$ sur X est plat sur B si $\mathcal{F}$ est un faisceau de $\pi^{-1}\mathcal{O}_B$-modules plat. En d'autres termes, les germes $\mathcal{F}_x$, $x \in X$ sont plats sur les anneaux locaux $\mathcal{O}_{B,y}$, $y = \pi(x)$. Cela entraîne aussi que si $y \in B$, et U est un ouvert affine de X dont l'image par π est contenue dans un ouvert affine V de B contenant y, le localisé en y de $\mathcal{F}(U)$ comme $\mathcal{O}_V$-module est plat sur $\mathcal{O}_{B,y}$.*

La structure de $\pi^{-1}\mathcal{O}_B$-modules provient de la structure de $\mathcal{O}_X$-modules via l'application $\pi^* : \pi^{-1}\mathcal{O}_B \to \mathcal{O}_X$. Cependant $\mathcal{F}$ peut très bien être plat sur B sans être plat sur X.

En général, $\mathcal{F}$ ne sera pas de type fini sur B, car cela impliquerait que le support de $\mathcal{F}$ est à fibre finie au-dessus de B. L'hypothèse de projectivité va permettre néanmoins de donner une caractérisation des faisceaux plats faisant recours au lemme 2.4.

On a le résultat suivant (c'est la version relative des théorèmes de finitude et d'annulation de Serre, qui se montre avec des arguments identiques) :

Théorème 2.7 *Soit $\pi : X \to B$ un morphisme projectif et soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Soit $\mathcal{O}_X(1)$ un faisceau relativement très ample sur X, c'est-à-dire la restriction à $X \subset B \times_k \mathbb{P}^N$ de $pr_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$ pour un plongement relatif adéquat de X.*

Alors les faisceaux $R^i\pi_*\mathcal{F}(l)$, $l \in \mathbb{Z}$, sont cohérents sur B. De plus ils sont nuls pour $i > 0$ et $l >> 0$. Enfin, pour $l >> 0$, l'application d'évaluation

$$\pi^*(R^0\pi_*\mathcal{F}(l) \to \mathcal{F}(l)$$

est surjective.

On va utiliser maintenant ces résultats pour donner la caractérisation suivante des faisceaux plats à support projectif sur une base B.

Théorème 2.8 *Soient X et B des k-schémas quasi-projectifs et soient $\pi : X \to B$ un morphisme projectif et $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Alors $\mathcal{F}$ est plat sur B si et seulement si, pour $l >> 0$, $R^0\pi_*\mathcal{F}(l)$ est localement libre sur B.*

Démonstration. Le résultat est local sur B, qu'on peut donc supposer affine, soit $B = Spec\, A$. Soit alors $\mathcal{U} = (U_i)$ un recouvrement affine fini de X et soit $\check{C}^{\cdot}(\mathcal{U}, \mathcal{F}(l))$ le complexe de Čech de $\mathcal{F}(l)$ relativement à $\mathcal{U}$, qu'on voit comme un complexe de A-modules. Soit $\mu \in Spec\, A$ un idéal premier de A. Par platitude de $\mathcal{F}$ sur B, les localisés $\check{C}^r(\mathcal{U}, \mathcal{F}(l))_\mu$ en μ des termes du complexe de Čech

$$\check{C}^r(\mathcal{U}, \mathcal{F}(l)) = \oplus_{|I|=r+1}\Gamma(U_I, \mathcal{F}(l)) \tag{2.1.2}$$

sont plats sur A_μ. Par ailleurs, pour $l >> 0$, le complexe $\check{C}^{\cdot}(\mathcal{U}, \mathcal{F}(l))_\mu$ est exact en degré $s > 0$ d'après le théorème 2.7, puisque sa cohomologie est égale à $(R^s\pi_*\mathcal{F}(l))_\mu$. De plus, sa cohomologie en degré 0 est égale pour la même raison à $(R^0\pi_*\mathcal{F}(l))_\mu$.

En conclusion, pour $l >> 0$, le A_μ-module $(R^0\pi_*\mathcal{F}(l))_\mu$ admet une résolution à droite par le complexe $\check{C}^{\cdot}(\mathcal{U}, \mathcal{F}(l))_\mu$ qui est constitué de A_μ-modules plats. De plus cette résolution est finie si le recouvrement l'est. Il est donc plat sur A_μ par la proposition 2.5, et comme il est de type fini par le théorème 2.7, il est libre par le lemme 2.4. Ceci montre le “seulement si”.

Il reste à voir que la condition est aussi suffisante. L'énoncé étant local sur B, on peut supposer que B est affine, $B = Spec\, A$. Soit l_0 tel que pour $l \geq l_0$, $R^0\pi_*\mathcal{F}(l) := M_l$ soit plat sur A.

On a $X \subset B \times_k \mathbb{P}^N_k$, avec $\mathbb{P}^N_k \cong Proj\, k[X_0, \ldots, X_N]$, et le $A[X_0, \ldots, X_N]$-module gradué

$$M := \oplus_{l \geq l_0} M_l$$

est plat sur A.

Or le faisceau $\mathcal{F}$ (vu comme un faisceau de $\mathcal{O}_{B\times\mathbb{P}^N}$-modules) est déduit du $A[X_0, \ldots, X_N]$-module gradué M par la construction $Proj$ standard : l'ensemble de ses sections sur un ouvert affine standard, c'est-à-dire de la forme

$$Spec\, A[X_0/X_i, \ldots, X_N/X_i] \subset B \times_k \mathbb{P}^N_k$$

est égal à $M_{X_i,0}$, c'est-à-dire la partie de degré 0 du localisé de M le long de X_i. Cet ensemble est clairement plat comme A-module, étant un facteur direct du localisé de M le long de X_i. ∎

Lorsque la base B est irréductible et réduite, nous pouvons finalement reformuler la condition de platitude ci-dessus en termes de polynôme de Hilbert de la manière suivante :

Théorème 2.9 *Soit $B = Spec\, A$, où A est une k-algèbre locale intègre d'idéal maximal μ, et soient $K = Frac\, A$, $k_\mu = A/\mu$ le corps de fractions et le corps résiduel de A. On note $0 \in Spec\, A$ le point fermé d'idéal μ. Soit $\pi : X \to B$ un morphisme projectif et soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur X. Alors $\mathcal{F}$ est plat sur B si et seulement si les polynômes de Hilbert de $\mathcal{F}_K$ sur X_K et de $\mathcal{F}_{|X_0}$ sur X_0 sont égaux.*

Ici $X_0 \subset X$ est la fibre centrale de π, définie par l'idéal $\pi^*\mu \cdot \mathcal{O}_X$.

Démonstration. On montre en utilisant le théorème 2.7 appliqué à $\mathcal{I}_{X_0}\mathcal{F}$ que pour $l >> 0$, on a un isomorphisme canonique donné par la restriction :

$$(R^0\pi_*\mathcal{F}(l))_{|0} \cong H^0(X_0, \mathcal{F}_{|X_0}(l)). \qquad (2.1.3)$$

On utilise pour cela la suite exacte

$$0 \to \mathcal{I}_{X_0}\mathcal{F}(l) \to \mathcal{F}(l) \to \mathcal{F}_{|X_0}(l) \to 0,$$

avec l'annulation $R^1\pi_*(\mathcal{I}_{X_0}\mathcal{F}(l)) = 0$ pour $l >> 0$, qui fournit la suite exacte :

$$0 \to R^0\pi_*(\mathcal{I}_{X_0}\mathcal{F}(l)) \to R^0\pi_*\mathcal{F}(l) \to H^0(X_0, \mathcal{F}_{|X_0}(l)) \to 0.$$

Par ailleurs, soient $g_1, \ldots, g_n$ des générateurs de μ comme A-module. On a alors une surjection

$$A^n \twoheadrightarrow \mu,\ (a_i) \mapsto \sum_i g_i a_i,$$

qui induit, du fait que

$$\mathcal{I}_{X_0} = \pi^*\mu \cdot \mathcal{O}_X,$$

une suite exacte de faisceaux cohérents sur X (définissant K)

$$0 \to K \to \mathcal{F}^n \to \mathcal{I}_{X_0}\mathcal{F} \to 0.$$

Tensorisant cette suite exacte par $\mathcal{O}(l)$ et utilisant le fait que pour $l >> 0$, $R^1\pi_* K(l) = 0$, on conclut que la flèche naturelle

$$\mu \otimes R^0\pi_*\mathcal{F}(l) \to R^0\pi_*(\mathcal{I}_{X_0}\mathcal{F}(l))$$

est surjective pour l suffisamment grand, d'où l'on déduit que (2.1.3) est un isomorphisme pour $l >> 0$.

On trouve donc que le polynôme de Hilbert P_0 de $\mathcal{F}_{|X_0}$ satisfait pour $l >> 0$:

$$P_0(l) = rang_{k_\mu}(R^0\pi_*\mathcal{F}(l)_{|0}).$$

Par ailleurs on a aussi

$$R^0\pi_*\mathcal{F}(l) \otimes_A K = H^0(X_K, \mathcal{F}_K(l)),$$

et donc le polynôme de Hilbert P_K de $\mathcal{F}_K$ satisfait :

$$P_K(l) = rang_K(R^0\pi_*\mathcal{F}(l)_K).$$

L'égalité des deux polynômes de Hilbert se traduit donc par le fait que $R^0\pi_*\mathcal{F}(l)$ a son rang générique égal au rang de sa restriction au point fermé 0, ce qui équivaut au fait qu'il est libre sur A, par une application immédiate de Nakayama. Il suffit alors d'appliquer le théorème 2.8. ■

2.2 Régularité au sens de Mumford

2.2.1 Définitions et propriétés générales

On introduit ici la notion de *régularité au sens de Mumford.*

Définition 2.10 *Un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{P}^n_k$ (ou sur n'importe quel sous-schéma X de $\mathbb{P}^n_k$) est dit régulier au sens de Mumford si*

$$H^i(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}(-i)) = 0, \forall i > 0.$$

Le théorème suivant est fondamental et extrêmement utile :

Théorème 2.11 *i) Si $\mathcal{F}$ est régulier au sens de Mumford, il est engendré par ses sections globales.*

ii) Si $\mathcal{F}$ est régulier au sens de Mumford, $\mathcal{F}(l)$ est régulier au sens de Mumford pour $l \geq 0$.

iii) De plus, sous la même hypothèse, pour tout $t \geq 0$, la flèche de multiplication

$$H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}) \otimes H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{O}(t)) \to H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}(t))$$

est surjective.

La démonstration se fera essentiellement par récurrence sur n, en observant tout d'abord le lemme suivant :

Lemme 2.12 *La restriction de $\mathcal{F}$ à un hyperplan générique $H \cong \mathbb{P}_k^{n-1}$ est encore régulière (ici, pour avoir un tel H, on suppose que le corps k est infini, par exemple algébriquement clos), mais la conclusion du théorème 2.11 reste vraie sur n'importe quel corps).*

Démonstration. En effet, la section hyperplane H définie par une équation $\sigma \in H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$ étant générique, on a la suite exacte

$$0 \to \mathcal{F}(-l) \xrightarrow{\sigma} \mathcal{F}(-l+1) \to \mathcal{G}(-l+1) \to 0,$$

où $\mathcal{G} := \mathcal{F}_{|H}$. La suite exacte longue de cohomologie associée fournit alors

$$H^{l-1}(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{F}(-l+1)) \to H^{l-1}(\mathbb{P}_k^{n-1}, \mathcal{G}(-l+1)) \to H^l(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{F}(-l)) \tag{2.2.4}$$

et l'annulation de $H^{l-1}(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{F}(-l+1))$ pour $l-1>0$ et de $H^l(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{F}(-l))$ entraîne donc celle de $H^{l-1}(\mathbb{P}_k^{n-1}, \mathcal{G}(-l+1))$ pour $l-1>0$. ■

Démonstration du théorème 2.11. Pour obtenir i), on note la surjectivité de l'application de restriction

$$H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{F}) \to H^0(\mathbb{P}_k^{n-1}, \mathcal{F}_{|\mathbb{P}_k^{n-1}})$$

due à l'annulation de $H^1(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{F}(-1))$, et on raisonne ensuite par récurrence sur n, en utilisant le lemme 2.12.

La preuve de ii) se fait aussi par récurrence à l'aide du lemme 2.12. En fait, l'examen de la suite exacte longue (2.2.4) montre que $H^l(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{F}(-l)) = 0$, $l>0$ et $H^l(\mathbb{P}_k^{n-1}, \mathcal{G}(-l+1)) = 0$, $l>0$ entraînent que $H^l(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{F}(-l+1)) = 0$, $l>0$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}(1)$ est régulier au sens de Mumford.

La preuve de iii) est plus subtile. Notons d'abord qu'en utilisant le point ii), on se ramène à montrer la surjectivité de la multiplication

$$H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{F}) \otimes H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}(1)) \to H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{F}(1)).$$

La preuve de ce résultat nécessite l'introduction du complexe de Koszul qui est le complexe exact suivant de faisceaux localement libres sur l'espace projectif. Soit $W = H^0(\mathbb{P}_k^n, \mathcal{O}(1))$. On a la flèche d'évaluation

$$e : W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n} \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n}(1)$$

qui est surjective, et cette flèche induit des flèches, appelées différentielles de Koszul

$$\bigwedge^k W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^n} \to \bigwedge^{k-1} W \otimes \mathcal{O}(1),$$

$$e_1 \wedge \ldots \wedge e_k \to \sum_i (-1)^i e_1 \wedge \ldots \widehat{e_i} \ldots \wedge e_k \otimes e(e_i).$$

Le complexe de Koszul $\mathcal{K}^\cdot$ est le complexe dont on montre très facilement qu'il est exact :

$$0 \to \bigwedge^{n+1} W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-n-1) \to \ldots \to W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-1) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k} \to 0,$$

où la dernière flèche est ev tordue par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-1)$. Ici le degré est donné par $\mathcal{K}^i = \bigwedge^{-i} W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(i)$, $i \leq 0$.

Partant de $\mathcal{F}$, on veut savoir si la multiplication

$$W \otimes H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}) \to H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{F}(1))$$

est surjective.

Pour voir cela, on tensorise le complexe de Koszul $\mathcal{K}^\cdot$ par $\mathcal{F}(1)$, ce qui nous donne un complexe exact $\mathcal{L}^\cdot$, de terme $\mathcal{L}^0 = \mathcal{F}(1)$ et $\mathcal{L}^{-1} = W \otimes \mathcal{F}$. On veut montrer que l'application

$$H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{L}^{-1}) \to H^0(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{L}^0) \tag{2.2.5}$$

est surjective.

Il suffit pour cela de montrer que le complexe $\mathcal{L}^{\cdot \leq -2}$ satisfait $\mathbb{H}^{-1}(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{L}^{\cdot \leq -2}) = 0$. En effet, soit K le noyau de l'application surjective $\mathcal{L}^{-1} \to \mathcal{L}^0$. La suite exacte longue de cohomologie associée à la suite exacte courte

$$0 \to K \to \mathcal{L}^{-1} \to \mathcal{L}^0 \to 0$$

montre que la surjectivité de la flèche (2.2.5) est impliquée par l'annulation $H^1(\mathbb{P}^n_k, K) = 0$.

Comme le complexe $\mathcal{L}^\cdot$ est exact, K (placé en degré -2) est quasi-isomorphe au complexe $\mathcal{L}^{\cdot \leq -2}$ qui est une résolution à gauche de K. On a donc

$$H^1(\mathbb{P}^n_k, K) = \mathbb{H}^{-1}(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{L}^{\cdot \leq -2}).$$

Rappelons que $\mathcal{L}^i = \bigwedge^{-i} W \otimes \mathcal{F}(i+1)$. La suite spectrale associée à la filtration naïve du complexe $\mathcal{L}^{\cdot \leq -2}$ a pour terme

$$E_1^{p,q} = H^q(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{L}^p),$$

c'est-à-dire

$$E_1^{p,q} = H^q(\mathbb{P}^n_k, \bigwedge^{-p} W \otimes \mathcal{F}(p+1)).$$

Or la régularité au sens de Mumford fournit l'annulation de tous les termes $E_1^{p,q}$, $q = -p-1$. Il en résulte que $E_\infty^{p,q} = 0$, pour $q = -p-1$ et donc que $\mathbb{H}^{-1}(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{L}^{\cdot \leq -2})$. ■

2.2.2 Polynôme de Hilbert et régularité

X étant un schéma projectif donné (avec une polarisation fixée qu'on omettra dans la suite), et N étant un entier fixé, on se propose de montrer un certain nombre d'énoncés remarquables concernant les faisceaux cohérents $\mathcal{F}$ sur X à polynôme de Hilbert fixé $P_{\mathcal{F}}$ (relativement à la polarisation donnée) et *quotients de* $\mathcal{O}_X^N$ (donc en particulier engendrés par leurs sections globales). On notera $\mathcal{G}$ le noyau de l'application quotient $\mathcal{O}_X^N \to \mathcal{F}$. On a donc une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{O}_X^N \to \mathcal{F} \to 0. \tag{2.2.6}$$

On sait que pour $\mathcal{F}$ fixé, les applications de restriction

$$H^0(X, \mathcal{O}_X^N(l)) \to H^0(X, \mathcal{F}(l))$$

sont surjectives pour l assez grand. On sait aussi que pour l suffisamment grand, les groupes de cohomologie $H^i(X, \mathcal{F}(l))$ et $H^i(X, \mathcal{G}(l))$ s'annulent, pour $i > 0$. De plus on a $dim\, H^0(X, \mathcal{F}(l)) = P_{\mathcal{F}}(l)$, par définition de $P_{\mathcal{F}}$. Enfin le faisceau $\mathcal{G}(l)$ est engendré par ses sections pour $l >> 0$.

A priori, le l minimum pour lesquels ces énoncés sont satisfaits dépend de $\mathcal{F}$. On peut considérer par exemple le cas où X de dimension 1 et où $\mathcal{F}$ est un faisceau gratte-ciel $\mathcal{O}_Z$, où $Z \subset X$ est de dimension 0 : si on ajoute des points à Z, soit $Z' = Z \cup \{p_1, \ldots, p_K\}$, il est manifeste que la surjectivité de l'application de restriction

$$H^0(X, \mathcal{O}(l)) \to H^0(X, \mathcal{O}_{Z'}(l))$$

n'est pas possible pour un l indépendant de K, car la dimension du terme de droite tend vers l'infini avec K.

Il est remarquable que lorsqu'on *fixe le polynôme de Hilbert* $P_{\mathcal{F}}$, on peut obtenir une estimation uniforme (indépendante de $\mathcal{F}$ à polynôme de Hilbert fixé $P_{\mathcal{F}} = P$) pour les l satisfaisant ces énoncés.

Théorème 2.13 *Fixons un polynôme P (prenant des valeurs entières sur les entiers). Il existe un entier l_0 satisfaisant les propriétés suivantes : Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X, quotient de $\mathcal{O}_X^N$, tel que $P_{\mathcal{F}} = P$, et pour tout $l \geq l_0$,*

$$H^i(X, \mathcal{F}(l)) = 0,\ i > 0. \tag{2.2.7}$$

$$H^i(X, \mathcal{G}(l)) = 0,\ i > 0. \tag{2.2.8}$$

$$\mathcal{G}(l) \quad \textit{est engendré par ses sections globales}, \tag{2.2.9}$$

où $\mathcal{G}$ est défini par la suite exacte (2.2.6).

Démonstration. Tout d'abord on note que (2.2.9) est une conséquence de (2.2.8) grâce au théorème 2.11. En effet, pour $l \geq l_0 + dim\, X$, où l_0 est choisi de façon que (2.2.8) est satisfait pour $l \geq l_0$, on voit que $\mathcal{G}(l)$ est régulier au sens de Mumford.

Pour obtenir les propriétés (2.2.7) et (2.2.8), on va raisonner par récurrence sur la dimension du support de $\mathcal{F}$. Rappelons que si H est une section hyperplane générique de X, et $\mathcal{F}' := \mathcal{F}_{|H}$, on a $P_{\mathcal{F}'}(l) = P_{\mathcal{F}}(l) - P_{\mathcal{F}}(l-1)$. Donc pour $P_{\mathcal{F}}$ fixé, $P_{\mathcal{F}'}$ est aussi fixé, et on peut donc supposer qu'on a un entier m_0 tel que (2.2.7) et (2.2.8) sont satisfaits pour $\mathcal{F}'$ et pour $l \geq m_0$. Notons que par définition, le faisceau $\mathcal{F}'$ entre dans une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{F}(-1) \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}' \to 0. \tag{2.2.10}$$

et de même le faisceau $\mathcal{G}'$ associé à $\mathcal{F}'$ entre dans les suites exactes :

$$0 \to \mathcal{G}' \to \mathcal{O}_X^N \to \mathcal{F}' \to 0, \tag{2.2.11}$$

Notons que (2.2.7) pour $\mathcal{F}'$ et la suite exacte longue associée à (2.2.10) tordue par $\mathcal{O}_X(l)$ entraînent que pour $i \geq 2$, l'application

$$H^i(X, \mathcal{F}(l-1)) \to H^i(X, \mathcal{F}_X(l))$$

est injective pour $l \geq m_0$, et comme ces groupes s'annulent pour $l >> 0$, on en déduit que $H^i(X, \mathcal{F}_X(l)) = 0$, $l \geq m_0 - 1$ et $i \geq 2$. Pour avoir le même résultat pour $i = 1$, il suffit de savoir que l'application de restriction

$$H^0(X, \mathcal{F}(l)) \to H^0(X, \mathcal{F}'(l))$$

est surjective pour $l \geq m_1$, où m_1 ne dépend que de X et $P_{\mathcal{F}}$. Or (2.2.8) appliqué à $\mathcal{F}'$ et la suite exacte longue associée à (2.2.11) tordue par $\mathcal{O}_X(l)$ entraînent que pour un certain m_1, l'application de restriction

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(l)^N) \to H^0(X, \mathcal{F}'(l))$$

est surjective et il en résulte que la flèche de restriction :

$$H^0(X, \mathcal{F}(l)) \to H^0(X, \mathcal{F}'(l))$$

est aussi surjective. On conclut donc de la même façon que précédemment qu'on a aussi $H^1(X, \mathcal{F}(l)) = 0$, $l \geq m_1 - 1$.

Il reste à prouver (2.2.8) pour $\mathcal{F}$. En fait, la suite exacte

$$0 \to \mathcal{G}(l) \to \mathcal{O}_X(l)^N \to \mathcal{F}(l) \to 0$$

où l'on peut supposer l'annulation de $H^i(X, \mathcal{O}_X(l))$ pour $i \geq 1$ et $l \geq c(X)$, montre que

$$H^i(X, \mathcal{F}(l)) = 0 \Rightarrow H^{i+1}(X, \mathcal{G}(l)) = 0.$$

Comme on a déjà (2.2.7) pour X, il suffit de se concentrer sur l'annulation de $H^1(X, \mathcal{G}(l))$, qui équivaut aussi pour $l \geq c(X)$ à la surjectivité de l'application de restriction

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(l)^N) \to H^0(X, \mathcal{F}(l)).$$

On a par hypothèse de récurrence (2.2.8) pour $\mathcal{F}'$, ce qui entraîne comme précédemment qu'on a la surjectivité de l'application de restriction :

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(l)^N) \to H^0(X, \mathcal{F}'(l))$$

pour $l \geq m_2$.

Soit σ l'équation de notre hyperplan générique H, et observons maintenant que la multiplication par $\sigma : H^1(X, \mathcal{G}(l)) \to H^1(X, \mathcal{G}(l+1))$ est surjective pour $l \geq Sup\,(m_1, m_2, c(X))$. En effet, soit $\alpha \in H^1(X, \mathcal{G}(l+1))$. Alors α provient de $u \in H^0(X, \mathcal{F}(l+1))$ défini modulo $Im\,(H^0(X, \mathcal{O}_X(l+1)^N) \to H^0(X, \mathcal{F}(l+1))$. Comme l'image de u dans $H^0(X, \mathcal{F}'(l+1))$ provient de $v \in H^0(X, \mathcal{O}_X(l+1)^N)$, on en déduit qu'on peut supposer que u s'annule dans $H^0(X, \mathcal{F}'(l+1))$. Mais alors $u = \sigma u'$ et il en résulte immédiatement que $\alpha = \sigma\alpha'$.

Supposons qu'elle soit injective. Introduisons le faisceau $\mathcal{G}'' := \mathcal{G}/\sigma\mathcal{G}(-1)$. L'injectivité de la flèche σ ci-dessus est équivalente à la surjectivité de la flèche de restriction

$$H^0(X, \mathcal{G}(l+1)) \to H^0(X, \mathcal{G}''(l+1)).$$

Or on a une suite exacte évidente :

$$0 \to \mathcal{O}_X^N(-1) \to \mathcal{G}' \to \mathcal{G}'' \to 0.$$

Pour $l \geq c(X) + 1$, on a donc des isomorphismes

$$H^i(X, \mathcal{G}'(l)) \cong H^i(X, \mathcal{G}''(l)),\ \forall\, i \geq 1.$$

Ainsi (2.2.8) pour $\mathcal{F}'$ entraîne aussi que

$$H^i(X, \mathcal{G}''(l)) = 0,\ \forall i \geq 1,\ \forall l \geq m_3.$$

Il en résulte que pour $l \geq m_3 + dim X$, $\mathcal{G}''(l)$ est régulier au sens de Mumford, et donc d'après le dernier énoncé dans le théorème 2.11, la flèche de multiplication

$$H^0(X, \mathcal{G}''(l)) \otimes H^0(X, \mathcal{O}_X(s)) \to H^0(X, \mathcal{G}''(l+s))$$

est surjective pour $l \geq m_3$ et tout $s \geq 0$. Il en résulte que pour $l \geq m_3$, la surjectivité de la flèche de restriction

$$H^0(X, \mathcal{G}(l+1)) \to H^0(X, \mathcal{G}''(l+1))$$

entraîne celle de

$$H^0(X, \mathcal{G}(l'+1)) \to H^0(X, \mathcal{G}''(l'+1))$$

pour tout $l' \geq l$. A son tour, ceci est équivalent à l'injectivité de la flèche de multiplication $H^1(X, \mathcal{G}(l+s-1)) \to H^1(X, \mathcal{G}_X(l+s))$ pour tout $s \geq 1$. Mais pour s suffisamment grand, on sait que le terme de droite est nul. En conclusion, dès que la multiplication par $\sigma : H^1(X, \mathcal{G}(l)) \to H^1(X, \mathcal{G}(l+1))$ (qui est surjective pour $l \geq Sup\,(m_1, m_2, c(X))$) est injective, avec $l \geq m_3$, on sait en fait que $H^1(X, \mathcal{G}(l))$ est nul, pour $l' \geq l$. Soit $m' = Sup\,(m_3, m_1, m_2, m_0, c(X))$. On a $dim\, H^1(X, \mathcal{G}(m')) \leq dim\, H^0(X, \mathcal{F}(m')) = P_{\mathcal{F}}(m')$ par (2.2.7) pour $\mathcal{F}$ et par la proposition 2.2. Il existe donc au plus $P_{\mathcal{F}}(m')$ entiers l successifs $\geq m'$ pour lesquels la flèche (surjective) $\sigma : H^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_X(l)) \to H^1(\mathbb{P}^n_k, \mathcal{I}_X(l+1))$ n'est pas injective.

Posant $l_0 = m' + P_{\mathcal{F}}(m')$, on a donc montré (2.2.8) pour $\mathcal{F}$. ■

2.3 Schéma Quot

2.3.1 Foncteur Quot

Dans ce qui suit, on fixe un schéma projectif X polarisé par un fibré inversible $\mathcal{O}_X(1)$ très ample. Les polynômes de Hilbert seront relatifs à cette polarisation. On fixe un entier N et un polynôme P à coefficients rationnels (prenant des valeurs entières sur les entiers). Le foncteur $Quot_{X,N,P}$ est le foncteur suivant, défini sur la catégorie des schémas quasi-projectifs (définis sur notre corps de base k qu'on peut prendre égal à $\mathbb{C}$), et à valeurs dans la catégorie des ensembles :

$$B \mapsto \{ \text{ classes d'iso. de paires } (\mathcal{F}, \phi)\},$$

où $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur $X \times B$, plat sur B, tel que $P_{\mathcal{F}_t} = P$, $\forall t \in B$, et $\phi : \mathcal{O}^N_{B\times X} \to \mathcal{F}$ est un morphisme surjectif. (Ce foncteur est contravariant sous les morphismes de schémas quasi-projectifs.)

Remarque 2.14 Ici, la base X est fixée. Les isomorphismes considérés sont des isomorphismes de faisceaux au-dessus d'une base.

2.3.2 Exemple, grassmanniennes

Restreignons-nous au cas où X est un point. Les faisceaux considérés $\mathcal{F}$ étant alors cohérents et plats sur B de polynôme de Hilbert (le rang) r fixé, sont localement libres de rang r sur B (cf lemme 2.4). La construction suivante est à l'origine de la construction du schéma *Quot* et sera d'ailleurs utilisée plus loin.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau localement libre sur B (fibré vectoriel) de rang r, quotient de $\mathcal{O}^N_B$. Soit $G(N-r,N)$ la grassmannienne définie ensemblistement comme l'ensemble des sous-espaces vectoriels de rang $N-r$ de k^N. $G(N-r,N)$ a naturellement une structure de variété projective lisse définie sur k. Si $V \subset k^N$ est un point de $G(N-r,N)$, choisissons un supplémentaire :

$$k^N = V \oplus W,$$

où W est de rang r. Alors, $G(N-r,N)$ contient $Hom\,(V,W) : \phi \mapsto \text{graphe}(\phi) \subset V \oplus W = k^N$. Ceci fournit un recouvrement de $G(N-r,N)$ par des espaces affines (de dimension $r(N-r)$), et on vérifie que les changements de coordonnées sont algébriques, donnant à $G(N-r,N)$ une structure de schéma algébrique lisse défini sur k. Un plongement de $G(N-r,N)$ dans un espace projectif est donné par le *plongement de Plücker*. Sur $G(N-r,N)$, on a un sous-fibré tautologique

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{O}^N_{G(N-r,N)},$$

et le fibré en droites de Plücker est défini comme $\mathcal{L} := det\,\mathcal{S}^* = det\,\mathcal{Q}$, où $\mathcal{Q}$ est le quotient $\mathcal{O}^N_{G(N-r,N)}/\mathcal{S}$.

Exercice 2.15 Montrer que $H^0(G(N-r,N),\mathcal{L}) = \bigwedge^r(k^N)$ et que les sections globales de $\mathcal{L}$ fournissent un plongement de $G(N-r,N)$ dans un espace projectif (appelé le *plongement de Plücker*).

Soit maintenant $\mathcal{F}$ un faisceau localement libre de rang r sur B, et soit

$$\phi : \mathcal{O}_B^N \to \mathcal{F}$$

un morphisme surjectif de noyau $\mathcal{S}$. Comme $\mathcal{F}$ est localement libre, il existe localement un scindage

$$\mathcal{O}_B^N \cong \mathcal{S} \oplus \mathcal{F}$$

ce qui montre que $\mathcal{S}$ est localement libre. Toujours localement, on peut supposer que quitte à permuter la base de $\mathcal{O}_B^N$, la projection pr_1 de $\mathcal{S}$ sur la somme $\mathcal{O}_B^{N-r}$ des $N-r$ premiers facteurs de $\mathcal{O}_B^N$ est un isomorphisme. Alors $\mathcal{S}$ s'identifie au graphe du morphisme ϕ de faisceaux

$$\mathcal{O}_B^{N-r} \to \mathcal{O}_B^r,$$

où $\mathcal{O}_B^r$ est la somme des r derniers facteurs de $\mathcal{O}_B^N$, donné par $\phi = pr_2 \circ (pr_{1|\mathcal{S}})^{-1}$ (ici pr_2 est la projection naturelle de $\mathcal{O}_B^N$ sur $\mathcal{O}_B^r$). Ceci montre que l'application

$$B \to G(N-r, N),\ b \mapsto Ker\, \phi_b : k^N \to \mathcal{F}_b,$$

est un morphisme à valeurs dans $G(N-r, N)$.

Ainsi la grassmannienne représente le foncteur

$$B \mapsto \{\text{ classes d'iso. de paires } (\mathcal{F}, \phi)\},$$

où $\mathcal{F}$ est cohérent et plat, c'est-à-dire localement libre, de rang r sur B et $\phi : \mathcal{O}_B^N \twoheadrightarrow \mathcal{F}$ est un morphisme surjectif.

2.3.3 Exemple, schéma de Hilbert

Dans cette section, on revient au problème de classifier les faisceaux sur X, globalement engendrés et à polynôme de Hilbert donné. Considérons le cas où $N = 1$. Les faisceaux $\mathcal{F}$ considérés sont donc des quotients cohérents de $\mathcal{O}_X$, c'est-à-dire des faisceaux structurels $\mathcal{O}_Z$ pour des sous-schémas $Z \subset X$, de polynôme de Hilbert fixé. Si on fait $X = \mathbb{P}^{n-1}$, et si on considère les sous-schémas de la forme $\mathbb{P}^{n-r-1} \subset \mathbb{P}^n$, on peut montrer que ces sous-schémas sont caractérisés par leur polynôme de Hilbert

$$P_Z(l) = H^0(\mathbb{P}^{n-r-1}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-r-1}}(l)) = \binom{l}{n-r-1+l}.$$

Lorsqu'on a une variété B, et un faisceau $\mathcal{F}$ sur $B \times \mathcal{P}_k^{n-1}$, plat sur B, quotient de $\mathcal{O}_{B\times\mathcal{P}_k^{n-1}}$, et de polynôme de Hilbert $P(l) = \binom{l}{n-r-1+l}$, on en déduit un quotient localement libre de rang $n-r$ de $\mathcal{O}_B^n$ donné par

$$\mathcal{O}_B^n \to pr_{1*}\mathcal{F}(1),$$

d'où un morphisme de B dans $G(r, n)$. Ainsi la grassmannienne $G(r, n)$ est un schéma *Quot*, c'est-à-dire représente le foncteur $Quot_{X,N,P}$, pour $X = \mathbb{P}_k^{n-1}$, $N = 1$, $P(l) = \binom{l}{n-r-1+l}$.

2.3.4 Finitude des faisceaux engendrés à polynôme de Hilbert fixé

En combinant le théorème 2.13 et les résultats de la section 2.3.2, nous obtenons immédiatement un énoncé qui pointe en direction de la représentabilité du foncteur *Quot*. X étant fixé avec sa polarisation L, N étant fixé et un polynôme P étant fixé, nous avons comme conséquence du théorème 2.13 :

Théorème 2.16 *Il existe un entier l_0, ne dépendant que de X, L, N et P, tels que pour tout faisceau $\mathcal{F}$ quotient de $\mathcal{O}_X^N$ et satisfaisant $P_{\mathcal{F}} = P$ on ait :*

1. *L'application $H^0(X, \mathcal{O}_X(l_0)^N) \to H^0(X, \mathcal{F}(l_0))$ est surjective, et le terme de droite est de dimension égale à $P(l_0)$. De plus on a $H^i(X, \mathcal{F}(l_0)) = 0$ pour $i > 0$.*
2. *Le noyau $\mathcal{G}(l_0) := Ker\,(\mathcal{O}_X^N(l_0) \to \mathcal{F}(l_0))$ est engendré par ses sections. Notant $K := Ker\,(H^0(X, \mathcal{O}_X(l_0)^N) \to H^0(X, \mathcal{F}(l_0)))$, on a plus précisément : l'application $K \otimes H^0(X, \mathcal{O}_X(s)) \to H^0(X, \mathcal{G}(l_0 + s))$ est surjective pour $s \geq 0$.*
3. *De plus $\mathcal{G}$ satisfait $H^i(X, \mathcal{G}(l)) = 0$ pour $i \geq 1$, $l \geq l_0$.*

Soit $n := dim\, H^0(X, \mathcal{O}_X(l_0)^N)$ et $r := P(l_0)$. A tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ quotient de $\mathcal{O}_X^N$ et de polynôme $P_{\mathcal{F}} = P$, associons

$$K_{\mathcal{F}} \in G(n - r, n).$$

Cette application est bien définie par 1, et de plus elle est injective par 2. En effet, $K_{\mathcal{F}} \subset H^0(X, \mathcal{O}_X(l_0)^N)$ étant donné, on définit $\mathcal{G}(l_0) \subset \mathcal{O}_X(l_0)^N$ comme le sous-faisceau engendré par $K_{\mathcal{F}}$, et 2 dit que

$$\mathcal{F}(l_0) = \mathcal{O}_X(l_0)^N / \mathcal{G}(l_0).$$

Montrons maintenant comment cette construction se fait en famille. Soit B un k-schéma quasi-projectif, et soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $B \times X$, plat sur B et quotient de $\mathcal{O}_{B\times X}^N$. On suppose que le polynôme de Hilbert de $\mathcal{F}_t$, $t \in B$ est égal à P. Comme on a $H^i(X_t, \mathcal{F}_t(l_0)) = 0$, $i > 0$, et comme $\mathcal{F}$ est plat sur B, le faisceau $R^0 pr_{1*}\mathcal{F}(l_0)$ est localement libre sur B (voir théorème 2.8 et sa démonstration). De plus son rang est égal à $P(l_0)$.

Comme on a $H^1(X_t, \mathcal{G}_t(l_0)) = 0$, $t \in B$, l'application naturelle

$$R^0 pr_{1*}(\mathcal{O}_{B\times X}(l_0)^N) \to R^0 pr_{1*}\mathcal{F}(l_0) \tag{2.3.12}$$

est surjective. Le terme de gauche est isomorphe à

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(l_0)^N) \otimes \mathcal{O}_B,$$

et (2.3.12) fournit donc un quotient localement libre de rang $P(l_0)$ de $H^0(X, \mathcal{O}_X(l_0)^N) \otimes \mathcal{O}_B$. D'après les résultats de la section 2.3.2, un tel morphisme fournit un morphisme de B dans $G(n - r, n)$ qui détermine comme plus haut le faisceau $\mathcal{F}$ initial.

Pour montrer la représentabilité du schéma $Quot_{X,N,P}$, il suffit donc désormais de trouver un sous-schéma projectif Z de $G(n - r, n)$ ayant la propriété que les points $K_{\mathcal{F}}$ décrits ci-dessus sont exactement les points de Z, et que les morphismes $B \to G(n - r, n)$ construits ci-dessus sont exactement les morphismes $B \to Z$.

2.3.5 Equations pour le schéma $Quot_{X,N,P}$ comme schéma quasi-projectif

Le théorème 2.16 va également nous fournir les équations nécessaires pour définir $Quot_{X,N,P}$ comme sous-schéma de la grassmannienne $G(n-r,n)$. En effet, la propriété 2 nous dit que pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X quotient de $\mathcal{O}_X^N$, l'image de $K_{\mathcal{F}} \otimes H^0(X, \mathcal{O}_X(s)) \subset H^0(X, \mathcal{O}_X^N(l_0)) \otimes H^0(X, \mathcal{O}_X(s))$ dans $H^0(X, \mathcal{O}_X^N(l_0+s))$ est égale au noyau de l'application de restriction, surjective par 3,

$$H^0(X, \mathcal{O}_X^N(l_0+s)) \to H^0(X, \mathcal{F}(l_0+s))$$

le terme de droite étant de dimension $P(l_0+s)$. Ainsi les points $K_{\mathcal{F}}$ ont la propriété suivante :

(*) *Pour tout $s \geq 0$, le rang de*

$$K_{\mathcal{F}} \otimes H^0(X, \mathcal{O}_X(s)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X^N(l_0+s))$$

est égal à $dim\, H^0(X, \mathcal{O}_X^N(l_0+s)) - P(l_0+s)$.

Définissons $Z \subset G(n-r,n)$ comme le sous-ensemble défini par ces conditions. Il est clair que Z est ensemblistement le schéma $Quot_{X,N,P}$ cherché. On est confronté malheureusement au problème suivant :

Lemme 2.17 *Soit $\alpha : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ un morphisme de fibrés vectoriels sur un schéma algébrique Y et soit s un entier. Alors le lieu*

$$Y_s := \{y \in Y,\, rang\, \alpha \leq s\}$$

est un sous-schéma fermé de Y défini par les petits déterminants de taille $(r+1, r+1)$ de α.

Il en résulte que le lieu

$$Y_s^0 := \{y \in Y,\, rang\, \alpha = s\}$$

est un sous-schéma localement fermé de Y.

Ceci cause problème car une intersection infinie de sous-schémas localement fermés n'est pas nécessairement localement fermée.

Pour contourner cette difficulté on doit montrer le résultat suivant :

Proposition 2.18 *Il existe un nombre fini γ (dépendant de X, N, P) de valeurs $s_1, \ldots, s_\gamma$ de s, telles que si la propriété (*) est satisfaite pour ces valeurs de s, elle est satisfaite pour tout s.*

Démonstration. On utilise le théorème 2.20 montré plus loin.

Pour chacun des polynômes de Hilbert Q_i du théorème 2.20, le théorème 2.16 s'applique, et on conclut que pour l'_0 suffisamment grand, et pour tout faisceau $\mathcal{F}$

quotient de $\mathcal{O}_X^N$, le noyau $\mathcal{G}$ satisfaisant la propriété que $\mathcal{G}(l_0)$ est engendré par $n-r$ sections globales, on a : pour tout s tel que $l_0 + s \geq l'_0$,

$$h^0(X, \mathcal{F}(l_0 + s) = P_{\mathcal{F}}(l_0 + s),\ H^1(X, \mathcal{G}(l_0 + s)) = 0,$$

ce qui entraîne que l'application

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(l_0 + s)) \to H^0(X, \mathcal{F}(l_0 + s))$$

est surjective, et de plus l'application de multiplication

$$H^0(X, \mathcal{G}(l_0)) \otimes H^0(X, \mathcal{O}_X(s)) \to H^0(X, \mathcal{G}(l_0 + s))$$

est surjective, donc de rang égal à $dim\, H^0(X, \mathcal{O}_X^N(l_0 + s)) - P_{\mathcal{F}}(l_0 + s)$.

Soit maintenant $\gamma \in \mathbb{N}$ tel que l'on ait pour tout $i = 1, \ldots, r$,

$$Q_i(l_0 + s) = P(l_0 + s),\ \forall l'_0 \leq l_0 + s \leq l'_0 + \gamma \Rightarrow Q_i = P.$$

Soit $K \in G(n-r, n)$, où n et $n-r$ sont comme ci-dessus, et la grassmannienne $G(n-r, n)$ paramètre donc les sous-espaces de codimension $P(l_0)$ de $H^0(X, \mathcal{O}_X^N(l_0))$. Soit $\mathcal{G}(l_0)$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_X^N(l_0)$ engendré par K, et soit $\mathcal{F}(l_0)$ le faisceau quotient $\mathcal{O}_X^N(l_0)/\mathcal{G}(l_0)$. Ce faisceau satisfait les hypothèses 1 et 2 ci dessus, et donc son polynôme de Hilbert est égal à l'un des Q_i.

Supposons que la propriété (*) est satisfaite pour toutes les valeurs de s telles que $l'_0 \leq l_0 + s \leq l'_0 + \gamma$. Il en résulte que $P_{\mathcal{F}} = P$ et donc que (*) est satisfaite pour toutes les valeurs de $s \geq l'_0$.

■

Corollaire 2.19 *L'ensemble Z défini ci-dessus est un sous-schéma quasi-projectif Z^0 de $G(n-r, n)$. De plus il existe un objet universel $\mathcal{F}$ sur $Z^0 \times X$, plat sur Z^0.*

Démonstration. Soit Z' le sous-schéma de $G(n-r, n)$ défini par les conditions

$K \in Z \Leftrightarrow$ *pour tout s tel que $l'_0 \leq l_0 + s \geq l'_0 + \gamma$, le rang de*

$$K \otimes H^0(X, \mathcal{O}_X(s)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X^N(l_0 + s))$$

est inférieur ou égal à $dim\, H^0(X, \mathcal{O}_X^N(l_0 + s)) - P(l_0 + s)$.

Dans Z', on dispose d'un ouvert de Zariski Z^0 défini par la condition que pour tout s tel que $l'_0 \leq l_0 + s \geq l'_0 + \gamma$, le rang de

$$K \otimes H^0(X, \mathcal{O}_X(s)) \to H^0(X, \mathcal{O}_X^N(l_0 + s))$$

est *égal* à $dim\, (H^0(X, \mathcal{O}_X^N(l_0 + s)) - P(l_0 + s)$. La (preuve de la) proposition 2.18 montre alors que $Z = Z^0$ ensemblistement.

Sur Z^0, considérons la restriction $\mathcal{S}_Z$ du sous-faisceau tautologique de la grassmannienne. On a une inclusion tautologique

$$\mathcal{S}_Z \subset H^0(X, \mathcal{O}_X^N(l_0)) \otimes \mathcal{O}_{Z^0},$$

d'où un sous-faisceau

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{O}^N_{Z^0 \times X},$$

défini par la condition :

$$\mathcal{G}(l_0) = Im\,(pr_1^* \mathcal{S}_Z \to \mathcal{O}^N_{Z^0 \times X}(l_0)).$$

Soit $\mathcal{F}$ le quotient $\mathcal{O}^N_{Z^0 \times X}/\mathcal{G}$. Du fait que la condition (*) est satisfaite schématiquement sur Z^0, pour l suffisamment grand, le faisceau $R^0 pr_{1*}\mathcal{F}(l)$ est localement libre de rang $P(l)$ sur Z^0, ce qui montre la platitude de $\mathcal{F}$ sur Z^0 par le théorème 2.8. ■

Il reste à montrer le résultat suivant :

Théorème 2.20 *X, N et l_0 étant fixés, il existe un nombre fini de polynômes de Hilbert possibles $Q_1, \dots, Q_r$ pour des faisceaux $\mathcal{F}$ cohérents sur X ayant les deux propriétés suivantes :*

1. *$\mathcal{F}$ est quotient de $\mathcal{O}^N_X$, et donc s'insère dans une suite exacte*

$$0 \to \mathcal{G} \to \mathcal{O}^N_X \to \mathcal{F} \to 0.$$

2. *Le faisceau $\mathcal{G}(l_0)$ est engendré par $n - r$ sections globales.*

Démonstration. On se place sur la grassmanienne $Y := G(n-r, n)$. On a donc une inclusion tautologique

$$\mathcal{S} \subset H^0(X, \mathcal{O}^N_X(l_0)) \otimes \mathcal{O}_Y,$$

d'où un sous-faisceau

$$\mathcal{G} \subset \mathcal{O}^N_{Y \times X},$$

défini par la condition :

$$\mathcal{G}(l_0) = Im\,(pr_1^* \mathcal{S} \to \mathcal{O}^N_{Z^0 \times X}(l_0)).$$

Ce faisceau n'est pas plat sur Y, et tout le travail précédent a consisté à construire des sous-schémas quasi-projectifs de Y sur lesquels ce faisceau est plat.

Cependant, en utilisant une résolution à gauche de $\mathcal{F}$ par des faisceaux de la forme

$$\mathcal{O}_X(-d_i)^{n_i},\ d_i >> 0,\ n_i >> 0,$$

on peut montrer que pour l suffisamment grand, on a $R^i pr_{1*}\mathcal{F}(l) = 0$, $i > 0$, et de plus cette propriété reste vraie après changement de base, c'est-à-dire après restriction à tout sous-schéma Y' de Y. Soit l comme ci-dessus, et soit $\mathcal{M} := R^0 pr_{1*}\mathcal{F}(l)$. En examinant une présentation finie de $\mathcal{M}$, on voit qu'il existe une stratification de Y par un nombre fini de sous-schémas localement fermés Y_i tels que $\mathcal{M}_{|Y_i}$ est localement libre de rang r. Il résulte du théorème 2.8 (ou plutôt de sa preuve) que $\mathcal{F}$ est plat au-dessus de chaque Y_i. Ainsi les polynômes de Hilbert Q_i des faisceaux $\mathcal{F}_t$ pour $t \in Y_i$ sont constants.

■

2.4 Projectivité

Nous avons construit ci-dessus le schéma $Quot_{X,N,P}$ représentant le foncteur du même nom comme un sous-schéma quasi-projectif d'une grassmannienne. La grassmannienne étant une variété projective, pour montrer que $Quot_{X,N,P}$ est un schéma projectif, il suffit de montrer qu'il est complet, ou encore fermé dans la grassmannienne. Nous allons appliquer le critère valuatif de propreté, qui dans le cas d'un schéma quasi-projectif est élémentaire.

2.4.1 Critère valuatif de propreté

Ce critère très utile concerne la propreté d'un morphisme $f : Y \to S$ de k-schémas. Dans ce contexte, la propreté est la propriété que le morphisme soit universellement fermé, c'est-à-dire reste fermé après n'importe quel changement de base $S' \to S$.

Théorème 2.21 *Un morphisme $f : Y \to S$ de k-schémas est propre si et seulement si pour tout anneau de valuation R contenant k (on peut supposer ici que le corps résiduel est k car k est algébriquement clos), et de corps de fraction K, pour toute paire de morphismes*

$$\alpha : Spec\,K \to Y,\ \beta : Spec\,R \to S$$

tels que $f \circ \alpha = \beta_{|Spec\,K}$, il existe une extension $\tilde{\alpha} : Spec\,R \to Y$ de α à $Spec\,R$.

En d'autres termes, tout morphisme d'un spectre d'un anneau de valuation vers S qui se relève génériquement se relève aussi au point fermé.

Dans le cas où $S = Spec\,k$ est un point, le critère dit que tout morphisme à valeurs dans Y génériquement défini sur $Spec\,R$, c'est-à-dire défini sur $Spec\,K$, est partout défini sur $Spec\,R$.

Preuve du critère lorsque $S = Spec\,k$, Y est quasi-projectif. Supposons que $Y \subset \mathbb{P}^N_k$ est quasi-projectif. Alors Y est complet si et seulement si il est fermé dans $\mathbb{P}^N_k$. Il suffit alors de vérifier que le critère est satisfait par $\mathbb{P}^N_k$. En effet, prenons un morphisme défini sur $Spec\,K$ à valeurs dans Y ; si le critère de valuation est satisfait par $\mathbb{P}^N_k$, le morphisme s'étend sur $Spec\,R$, à valeurs dans $\mathbb{P}^N_k$. Mais comme Y est fermé dans $\mathbb{P}^N_k$ et que $Spec\,K$ est Zariski dense dans $Spec\,R$, le morphisme étendu est en fait à valeurs dans Y, qui satisfait donc le critère de valuation. Inversement, si Y n'est pas fermé dans $\mathbb{P}^N_k$, soit $y \in \mathbb{P}^N_k(k)$ un point fermé qui n'est pas dans Y, et qui est contenu dans la clôture de Zariski $\overline{Y}$ de Y. Il existe alors une courbe lisse C définie sur k, un ensemble fini $Z \subset C(k)$ et un morphisme $\alpha : C \to \mathbb{P}^N_k$, tel que $\alpha(Z)$ est supporté au point y, et $Im\,\alpha(C \setminus Z) \subset Y$. En effet, on choisit pour cela un sous-schéma de dimension 1 $Z \subset \overline{Y}$ qui est génériquement contenu dans Y, et possède un nombre fini de points supportés en y. On prend alors pour C la normalisation d'une composante irréductible de dimension 1 de Z passant par y. Alors Y ne satisfait pas le critère de valuation car le morphisme défini sur $C \setminus Z$ s'étend de façon unique sur C à valeurs dans $\overline{Y}$, cette extension unique étant égale à α, et $\alpha(C) \not\subset Y$.

Pour le cas de $\mathbb{P}^N_k$, le critère de valuation est très simple à vérifier : Soit β : $Spec\,K \to \mathbb{P}^N_k = Proj\,k[X_0, \ldots, X_n]$ un morphisme. On peut supposer que $Im\,\beta \not\subset$

$\{X_i = 0\}$. Les fonctions rationnelles $\frac{X_j}{X_i}$ sont donc bien définies sur $Spec\,K$, soit $f_j := \beta^* \frac{X_j}{X_i}$. Soit $r_{i_0} = Inf\,\{\nu(f_j)\}$, où ν est la valuation de l'anneau R. Alors on a $u_i := f_j/f_{i_0} \in R$ et au moins l'une de ces fonctions ne s'annule pas au point fermé de R, puisque $u_{i_0} = 1$. Les u_i fournissent donc un morphisme $\tilde{\beta}$ sur R, à valeurs dans $\mathbb{P}_k^N$, et dont la restriction à $Spec\,K$ est de toute évidence β. ■

2.4.2 Vérification du critère

Comme on a montré que le schéma quasi-projectif $Quot_{X,N,P}$ représente le foncteur $Quot_{X,N,P}$, les morphismes d'un schéma à valeurs dans $Quot_{X,N,P}$ s'identifient à des familles de faisceaux cohérents sur X paramétrées par ce schéma, quotients de $\mathcal{O}_X^N$. La vérification du critère de valuation pour $Quot_{X,N,P}$ revient à montrer le résultat suivant :

Proposition 2.22 *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $U \times_k X$, où $U = Spec\,K$, $K = Frac\,R$, qui est un quotient de $\mathcal{O}_{U\times X}^N$, de polynôme de Hilbert P. Alors il existe un faisceau cohérent $\widetilde{\mathcal{F}}$ sur $V \times_k X$, $V = Spec\,R$, plat sur V, et de polynôme de Hilbert P.*

Démonstration. Rappelons que le schéma $Quot_{X,N,P}$ a été construit comme sous-schéma de la grassmannienne $Grass\,(r, H^0(X, \mathcal{O}_X(l))^N)$, où l est suffisamment grand (choisi en fonction de P), et $r = Nh^0(X, \mathcal{O}_X(l)) - P(l)$. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur $U \times_k X$ comme ci-dessus, on a le morphisme associé $g_{\mathcal{F}} : U \to Grass\,(r, H^0(X, \mathcal{O}_X(l))^N)$, qui correspond au faisceau quotient localement libre de $\mathcal{O}_U \otimes H^0(X, \mathcal{O}_X(l))^N)$ défini par le morphisme surjectif :

$$R^0 pr_{1*}\mathcal{O}_{U\times X}(l)^N \to R^0 pr_{1*}\mathcal{F}(l).$$

Comme la grassmannienne est projective, le morphisme $g_{\mathcal{F}}$ s'étend d'après le critère de valuation 2.21 en un morphisme $\overline{g}_{\mathcal{F}} : V \to Grass\,(r, H^0(X, \mathcal{O}_X(l))^N)$, ce qui fournit un sous-faisceau localement libre de rang r $\mathcal{H} \subset R^0 pr_{1*}\mathcal{O}_{V\times X}(l)^N$. Soit $\mathcal{G}_0$ le sous-faisceau de $\mathcal{O}_{V\times X}(l)^N$ engendré par $pr_1^*\mathcal{H}$. Soit $\mathcal{G}_0' := \mathcal{G}_0(-l) \subset \mathcal{O}_{V\times X}^N$ et soit $\mathcal{F}_0 := \mathcal{O}_{V\times X}^N/\mathcal{G}_0'$. Le faisceau $\mathcal{F}_0$ est cohérent sur $V \times X$, quotient de $\mathcal{O}_{V\times X}^N$, mais n'est peut-être pas plat sur V. Soit t une uniformisante pour R, et soit $\mathcal{T} \subset \mathcal{F}_0$ le sous-faisceau des sections annulées par une puissance de t. Posons maintenant $\widetilde{\mathcal{F}} := \mathcal{F}_0/\mathcal{T}$. Le morphisme de multiplication par $t : \widetilde{\mathcal{F}} \to \widetilde{\mathcal{F}}$ est injectif, et donc $\widetilde{\mathcal{F}}$ est plat sur V. De plus il est égal à $\mathcal{F}$ sur $U \times X$ et c'est un quotient cohérent de $\mathcal{O}_{V\times X}^N$.

■

Chapitre 3

Stabilité

3.1 Classes de Chern, intersection

Désormais on considérera une base lisse, encore que ce ne soit pas réellement nécessaire dans certaines sous-sections.

3.1.1 Déterminant, groupe de Picard, classes de Chern

Soit X une variété projective définie sur k. Le groupe de Picard de X est défini comme le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés inversibles sur X. Il est isomorphe à $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, cet isomorphisme étant pris pour la topologie de Zariski et pour le faisceau des fonctions algébriques sur X. Pour $k = \mathbb{C}$, on sait par le principe GAGA de Serre (cf [14]) que le groupe de Picard algébrique de X est isomorphe au groupe de Picard analytique de X, c'est-à-dire le groupe des classes d'isomorphisme de fibrés inversibles analytiques sur X. On obtient donc un isomorphisme qui n'est pas facile à montrer directement :

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \cong H^1(X_{an}, \mathcal{O}_{X_{an}}^*),$$

où X_{an} est la variété analytique correspondante munie de sa topologie usuelle et de son faisceau de fonctions holomorphes.

Si E est un fibré vectoriel sur X (ou faisceau cohérent localement libre) de rang r, $det\, E \in Pic\, X$ est défini comme la puissance extérieure $\bigwedge^r E$ de E.

Étant donné un fibré vectoriel E sur X, on peut définir ses classes de Chern $c_i(E) \in H^{2i}(X)$ dans n'importe quelle théorie cohomologique $X \mapsto H^*(X)$, et en fait même dans les groupes de Chow $CH^i(X)$ qui ne nous serviront pas ici (cf [5]). Le principe général utilisé pour construire les classes de Chern est dû à Grothendieck et consiste à définir tout d'abord la classe de Chern $c_1(L) \in H^2(X)$ d'un fibré en droites L et à poser $c_i(L) = 0$, $i > 1$, puis à utiliser les trois principes suivants :

1. Les classes de Chern de fibrés vectoriels sont contravariantes : si $f : X \to X'$ est un morphisme de variétés algébriques (ou analytiques) lisses

$$c_i(f^*E) = f^*c_i(E). \tag{3.1.1}$$

2. (formule de Whitney) Pour une suite exacte

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$$

de fibrés vectoriels, on a

$$c(\mathcal{F}) = c(\mathcal{E})c(\mathcal{G}), \tag{3.1.2}$$

où $c(\,) \in H^*(X)$ est la classe de Chern totale

$$c(\mathcal{E}) = 1 + c_1(\mathcal{E}) + \ldots + c_n(\mathcal{E}),\ n = dim\, X.$$

3. (Principe de scindage) Pour tout fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur X, il existe une variété Y, et un morphisme $\pi : Y \to X$ dominant satisfaisant les conditions :
i) $\pi^* : H^*(X) \to H^*(Y)$ est injectif.
ii) $\pi^*\mathcal{E}$ admet une filtration par des sous-fibrés vectoriels, dont les gradués successifs sont des fibrés inversibles (ou fibrés vectoriels de rang 1).

Il est clair que ces conditions définissent uniquement $c(\mathcal{E})$ par la formule

$$\pi^* c(\mathcal{E}) = \prod_i (1 + c_1(L_i)),$$

où π et L_i sont comme dans 3.

Pour l'existence, on utilise le théorème de structure de cohomologie d'un fibré projectif $p : \mathbb{P}(E) \to X$:

$$H^*(\mathbb{P}(E)) = \oplus_{0\leq i \leq r-1} p^* H^{*-2i}(X) h^i,$$

où $h := c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(1))$, et on procède comme dans [5].

Les théories cohomologiques qu'on peut considérer sont essentiellement de deux sortes, mais sur $\mathbb{C}$ s'identifient naturellement par le principe GAGA (théorème de Grothendieck).

1) On peut considérer la cohomologie de de Rham algébrique

$$H^*(X) := \mathbb{H}^*(X, \Omega^{\cdot}_{X/k}).$$

2) Dans le cas où $k = \mathbb{C}$, la cohomologie de Betti de X_{an} à valeurs dans $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{C}$.

3) On peut considérer également la cohomologie de Hodge $H^{2i}(X) = H^i(X, \Omega^i_{X/k})$, $H^{2i-1}(X) = 0$, qui est suffisante au moins si X est projective et lisse pour récupérer les classes de Chern dans les théories 1) et 2).

Dans chaque cas il suffit d'avoir une classe de Chern $c_1(L)$. Pour le cas 2), elle se déduit de la suite exacte exponentielle

$$H^1(X_{an}, \mathcal{O}^*_{X_{an}}) \to H^2(X_{an}, \mathbb{Z}).$$

Pour le cas 1), on observe que $\Omega^c_{X/k}$, (le faisceau des 1-formes fermées, vu comme un complexe supporté en degré 1,) est naturellement un sous-complexe du complexe

$\Omega^{\cdot}_{X/k}$. On définit alors $c_1(L)$ comme l'image de la classe de L dans $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$ via le composé

$$H^1(X, \mathcal{O}_X^*) \stackrel{dlog}{\rightarrow} H^1(X, \Omega^c_{X/k}) \rightarrow \mathbb{H}^1(X, \Omega^{\cdot}_{X/k}).$$

Il est facile de voir que via l'isomorphisme de Grothendieck-Serre, si $k = \mathbb{C}$,

$$\mathbb{H}^2(X, \Omega^{\cdot}_{X/\mathbb{C}}) \cong H^2(X_{an}, \mathbb{C}),$$

les deux classes de Chern définies ci-dessus diffèrent en fait par un coefficient $2i\pi$

$$c_1(L)_{alg} = 2i\pi c_1(L)_{an},$$

ce qui plus généralement fournit

$$c_i(E)_{alg} = (2i\pi)^i c_i(E)_{an}.$$

La même construction fournit bien évidemment $c_1(L) \in H^1(X, \Omega_{X/k})$ d'où des classes de Chern dans la cohomologie de Hodge.

3.1.2 Cas des faisceaux cohérents, résolutions libres

Définissons d'abord le déterminant $det\,\mathcal{F} \in Pic\,X$ d'un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur une base X lisse (localement factorielle suffirait). Soit T la partie de torsion du faisceau $\mathcal{F}$, et soit $\mathcal{F}_0$ le quotient $\mathcal{F}/T$, qui est sans torsion.

On pose $det\,\mathcal{F} = det\,T \otimes det\,\mathcal{F}_0$. La partie de torsion est en codimension 2 dans X une somme directe de faisceaux de longueur r_i supportés le long de diviseurs (réduits) D_i (ici la longueur r_i est la longueur du faisceau localisé T_{μ_i} qui est un faisceau de torsion, annulé par une puissance de l'idéal maximal μ_i, sur l'anneau local $\mathcal{O}_{\mu_i}$, donc de longueur finie). On pose $det\,\mathcal{T} = \otimes_i \mathcal{O}(r_i D_i)$.

La partie sans torsion $\mathcal{F}_0$ s'injecte dans son bidual $\mathcal{F}_0^{**}$, qui est localement libre en codimension 3, et cet isomorphisme est un isomorphisme en codimension 2 (c'est-à-dire en dehors d'un fermé Z de codimension 2. On pose alors

$$det\,\mathcal{F}_0 = det\,\mathcal{F}_0^{**} \in Pic\,X \setminus Z = Pic\,X.$$

Une meilleure manière de définir le fibré $det\,\mathcal{F}$ consiste à considérer des résolutions localement libres

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_n \rightarrow \ldots \rightarrow \mathcal{F}_0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0,$$

où $n = dim\,X$, et les $\mathcal{F}_i$ sont localement libres. De telles résolutions existent car X est projective et lisse. On pose alors :

$$det\,\mathcal{F} = \otimes_i det\,\mathcal{F}_i^{\epsilon_i},\ \epsilon_i = (-1)^i.$$

L'intérêt de cette définition est de montrer que lorsqu'une résolution localement libre de $\mathcal{F}$ est donnée, $det\,\mathcal{F}$ est défini canoniquement comme fibré en droites et pas seulement comme classe d'isomorphisme de fibrés en droites. En effet, si

$$0 \rightarrow \mathcal{F}_m \rightarrow \ldots \rightarrow \mathcal{F}_0 \rightarrow 0$$

est un complexe exact de fibrés vectoriels, on a un isomorphisme *canonique* :

$$\otimes_i det\, \mathcal{F}_i^{\epsilon_i} \cong \mathcal{O}_X.$$

Les résolutions localement libres permettent également de définir les classes de Chern de faisceaux cohérents sur une base lisse, en utilisant la formule de Whitney : une résolution localement libre de $\mathcal{F}$ étant donnée comme ci-dessus, on pose

$$c(\mathcal{F}) := \prod_i c(\mathcal{F}_i)^{\epsilon_i},\ \epsilon_i = (-1)^i.$$

L'inversion est possible car les polynômes considérés ont 1 pour terme de degré 0, et leur partie de degré positif est nilpotente. En utilisant la formule de whitney pour les fibrés vectoriels, on voit facilement que l'élément $c(\mathcal{F}) \in H^*(X)$ ainsi défini ne dépend pas de la résolution choisie (cf [2]).

Exercice. Montrer que $c_1(\mathcal{F}) = c_1(det\, \mathcal{F})$ pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X.

3.1.3 Intersection

On suppose que X est projective lisse de dimension n définie sur k. On peut définir des nombres d'intersection $L_1 \dots L_n$, où L_i sont des fibrés en droites sur X, de différentes manières :

1) Soit $L \in Pic\, X$ suffisamment ample, de façon que $L + L_1, \dots, L + L_n$ admettent des sections dont les diviseurs D_i s'intersectent transversalement. De façon similaire, on peut trouver des sections de L telles que leurs diviseurs B_j s'intersectent transversalement (proprement suffit ici) et plus généralement l'intersection de $B_{j_1} \cap \dots \cap B_{j_l}$ avec $D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_{n-l}}$ est également transverse (ou propre) pour tout choix de l et ensemble d'indices $i_1, \dots, i_{n-l}$. On a $L_i = \mathcal{O}_X(D_i - B_i)$ dans $Pic\, X$. Nous définissons alors :

$$L_1 \dots L_n := (D_1 - B_1) \dots (D_n - B_n) := \sum_{I,J} (-1)^{|J|} deg\, (D_I \cdot B_J)$$

où $I \sqcup J = \{1, \dots, n\}$, $D_I = \cap_{i \in I} D_i$, $B_J = \cap_{j \in J} B_j$ et le degré d'un sous-schéma Z de dimension 0 est son cardinal si Z est réduit, et plus généralement est défini comme la dimension $dim_k H^0(\mathcal{O}_Z)$. On peut montrer que ce nombre est indépendant du choix de L, et des diviseurs D_i, B_j.

2) On peut utiliser la première classe de Chern de L_i à valeurs dans $\mathbb{H}^1(\Omega^{\cdot}_{X/k})$, ou bien $H^1(X, \Omega^c_{X/k})$, ou plus simplement $H^1(X, \Omega_{X/k})$ (le troisième est naturellement un quotient du second, qui est contenu dans le premier, cf [19]). Par ailleurs, notons que si X est connexe on a un isomorphisme (donné par la dualité de Serre)

$$H^n(X, \Omega^n_{X/k}) \overset{\int_X}{\cong} k.$$

On peut alors définir

$$L_1 \cdot \ldots \cdot L_n := \int_X c_1(L_1) \cdot \ldots \cdot c_1(L_n) \in k. \tag{3.1.3}$$

Supposant que la caractéristique de k est nulle, on peut montrer que ce dernier nombre est dans $\mathbb{Z} \subset k$ et que ces deux définitions coïncident.

Notons que si on est sur $\mathbb{C}$ et qu'on considère la cohomologie de Betti de la variété complexe X_{an}, on peut utiliser les classes de Chern de Betti $c_1(L_i) \in H^{2i}(X_{an}, \mathbb{Z})$ et la dualité de Poincaré qui fournit

$$H^{2n}(X_{an}, \mathbb{Z}) \overset{\int_X}{\cong} \mathbb{Z}.$$

On calcule alors $L_1 \cdot \ldots \cdot L_n$ par la formule (3.1.3), et on vérifie que ces définitions sont cohérentes.

3.2 Stabilité

3.2.1 Pentes

Désormais on considère une variété projective X polarisée par un fibré inversible ample L. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau sans torsion sur X.

Définition 3.1 *La pente de $\mathcal{F}$ relativement à L est le nombre*

$$\mu_L(\mathcal{F}) := \frac{det\,\mathcal{F} \cdot L^{n-1}}{rang\,\mathcal{F}}.$$

Remarque 3.2 Si on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{E} \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to 0$$

de faisceaux sans torsion, on a

$$rang\,\mathcal{F} = rang\,\mathcal{E} + rang\,\mathcal{G},\ c_1(\mathcal{F}) = c_1(\mathcal{E}) + c_1(\mathcal{G}),$$

et donc $\mu_L(\mathcal{F})$ est le barycentre de $\mu_L(\mathcal{E})$ et $\mu_L(\mathcal{G})$ affectés des coefficients $\frac{rang\,\mathcal{E}}{rang\,\mathcal{E}+rang\,\mathcal{G}}$ et $\frac{rang\,\mathcal{G}}{rang\,\mathcal{E}+rang\,\mathcal{G}}$.

Nous introduisons maintenant la notion de μ-stabilité.

Définition 3.3 *$\mathcal{F}$ est μ-semi-stable si pour tout sous-faisceau $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, avec $0 < rang\,\mathcal{G} \leq rang\,\mathcal{F}$ on a :*

$$\mu_L(\mathcal{G}) \leq \mu_L(\mathcal{F}).$$

$\mathcal{F}$ est stable si l'inégalité est stricte pour tout $\mathcal{G}$ tel que $0 < rang\,\mathcal{G} < rang\,\mathcal{F}$.

Remarque 3.4 La μ-stabilité dépend bien entendu du choix de la polarisation L qui est sous-entendu.

Remarque 3.5 La μ-semi-stabilité n'est pas une notion suffisamment fine. Elle sera raffinée dans la section 3.3.1.

3.2.2 Propriétés générales des faisceaux μ-(semi)-stables

Proposition 3.6 *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux sans torsion μ-semi-stables. Alors si $\mu_L(\mathcal{G}) < \mu_L(\mathcal{F})$, il n'y a pas de morphisme non nul de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$.*

Démonstration. Soit $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morphisme. Notons $\mathcal{H} := Im\, f$. Comme $\mathcal{H}$ est un quotient (sans torsion) de $\mathcal{F}$ qui est μ-semi-stable, on a, en supposant que $\mathcal{H} \neq 0$,

$$\mu_L(\mathcal{H}) \geq \mu_L(\mathcal{F}). \tag{3.2.4}$$

Mais comme $\mathcal{H}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{G}$, on a aussi, toujours en supposant que $\mathcal{H} \neq 0$, et par semi-stabilité de $\mathcal{G}$, l'inégalité

$$\mu_L(\mathcal{H}) \leq \mu_L(\mathcal{G}). \tag{3.2.5}$$

Ces deux inégalités contredisent le fait que $\mu_L(\mathcal{G}) < \mu_L(\mathcal{F})$. ■

Cet énoncé peut se raffiner de la façon suivante dans le cas stable :

Proposition 3.7 *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux cohérents réflexifs μ-stables. Alors si $\mu_L(\mathcal{G}) \leq \mu_L(\mathcal{F})$, tout morphisme non nul de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{G}$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Soit $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morphisme. On reprend les notations de la démonstration précédente. Supposons encore que $\mathcal{H} \neq 0$. Alors on voit que sauf si $rang\, \mathcal{F} = rang\, \mathcal{H}$, l'inégalité dans (3.2.4) doit être stricte. Combinant ceci avec la seconde inégalité, on obtient dans ce cas $\mu_L(\mathcal{F}) < \mu_L(\mathcal{G})$, ce qui est une contradiction. Donc on doit avoir $rang\, \mathcal{F} = rang\, \mathcal{H}$. De même, comme on a la stabilité de $\mathcal{G}$, on trouve que l'inégalité dans (3.2.5) est stricte sauf si $rang\, \mathcal{H} = rang\, \mathcal{G}$. Encore une fois, l'inégalité stricte est impossible, et on conclut donc que l'on doit avoir $rang\, \mathcal{H} = rang\, \mathcal{G}$. Donc $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un morphisme de rang maximal entre deux fibrés de même rang. Les fibrés $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ étant réflexifs sont localement libres sur le complémentaire d'un sous-ensemble algébrique fermé Z de codimension au moins 3. Soit D le diviseur défini par $det\, f$ (dans des trivialisations locales de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sur $X \setminus Z$). Si $D \neq \emptyset$, on trouve que

$$det\, \mathcal{G} = det\, \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_X(D),$$

d'où

$$\mu_L(\mathcal{G}) = \mu_L(\mathcal{F}) + \frac{D.L^{n-1}}{r},\ r = rang\, \mathcal{F} = rang\, \mathcal{G}.$$

Si le diviseur D est non vide, le nombre d'intersection $D.L^{n-1}$, qui est le degré de D relativement à L, est strictement positif, et donc $\mu_L(\mathcal{G}) > \mu_L(\mathcal{F})$, ce qui est une contradiction. Pour conclure, montrons que si $D = \emptyset$, f est un isomorphisme. Les faisceaux sont localement libres en dehors d'un ensemble algébrique Z de codimension ≥ 3, et on sait que $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ est un isomorphisme en dehors de ce sous-ensemble, puisque $det\, f$ ne s'annule pas. Mais alors soit $j : U := X \setminus Z \to X$ l'inclusion. La condition de réflexivité peut aussi se formuler en disant que

$$\mathcal{F} = j_*(\mathcal{F}_{|U}),$$

et de même pour $\mathcal{G}$. Comme f est un isomorphisme sur l'ouvert U, il en résulte que f induit un isomorphisme entre $\mathcal{F} = j_*(\mathcal{F}_{|U})$ et $\mathcal{G} = j_*(\mathcal{G}_{|U})$. ■

Corollaire 3.8 *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent localement libre ou réflexif μ-stable. Alors $End\,\mathcal{F}$ se réduit aux homothéties de $\mathcal{F}$.*

Démonstration. En effet, tout élément de $End\,\mathcal{F}$ est inversible d'après la proposition précédente. Comme k est algébriquement clos et que $End\,\mathcal{F}$ est une k-algèbre de rang fini, il en résulte que $End\,\mathcal{F} = k$. ■

On aura besoin du lemme suivant :

Lemme 3.9 *Soient $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ deux faisceaux semi-stables de même pente μ. Alors $\mathcal{F}\oplus\mathcal{G}$ est semi-stable de pente μ. Plus généralement, toute extension $\mathcal{H}$ de $\mathcal{G}$ par $\mathcal{F}$ est semi-stable de pente μ.*

Démonstration. Soit $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{H} \to \mathcal{G} \to 0$ une extension de $\mathcal{G}$ par $\mathcal{F}$ et soit $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ un sous-faisceau non trivial. Notons $\mathcal{M}_{\mathcal{F}} := \mathcal{M} \cap \mathcal{F} \subset \mathcal{F}$ et

$$\mathcal{M}_{\mathcal{G}} := \mathcal{M}/\mathcal{M}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{G}.$$

Alors on a par semi-stabilité de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$:

$$\mu_L(\mathcal{M}_{\mathcal{F}}) \leq \mu,\ \mu_L(\mathcal{M}_{\mathcal{G}}) \leq \mu.$$

Comme $\mu_L(\mathcal{M})$ est un barycentre de $\mu_L(\mathcal{M}_{\mathcal{F}})$ et $\mu_L(\mathcal{M}_{\mathcal{G}})$, il en résulte que $\mu_L(\mathcal{M}) \leq \mu = \mu_L(\mathcal{F}\oplus\mathcal{G})$. Donc $\mathcal{H}$ est semi-stable. ■

3.2.3 Filtration de Harder-Narasimhan

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sans torsion sur la variété projective X et soit L un fibré inversible très ample sur X.

Théorème 3.10 *Il existe une unique filtration croissante $J_i\mathcal{F}$ par des sous-faisceaux saturés ayant les propriétés suivantes :*

1) Les pentes $\mu_L(J_i\mathcal{F})$ sont strictement décroissantes. De façon équivalente, les pentes $\mu_L(Gr_i^J\mathcal{F})$ sont strictement décroissantes.

2) Les faisceaux $Gr_i^J\mathcal{F}$ sont μ-semi-stables.

Démonstration. Commençons par construire une telle filtration : Soit μ_0 la plus grande pente d'un sous-faisceau propre de $\mathcal{F}$. Cette plus grande pente existe car $\mathcal{F}(L^{\otimes l})$ est engendré par ses sections ainsi que tous ses quotients pour l suffisamment grand. Donc $\mathcal{F}$ ne peut pas avoir de quotient de trop petite pente. Soit $\mathcal{F}_0$ le plus grand sous-faisceau de $\mathcal{F}$ tel que $\mu_0 = \mu_L(\mathcal{F}_0)$. Il faut vérifier que cela a un sens : pour cela, soient $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}''$ deux sous-faisceaux de $\mathcal{F}$ de pente μ_0. Tout d'abord notons que $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{F}''$ sont semi-stables, c'est-à-dire ne contiennent aucun sous-faisceau non trivial de pente $> \mu_0$, par la définition de μ_0. Considérons le morphisme somme :

$$\mathcal{F}'\oplus\mathcal{F}'' \to \mathcal{F}''' := \mathcal{F}'\oplus\mathcal{F}'' \subset \mathcal{F}.$$

Comme quotient du faisceau semi-stable $\mathcal{F}'\oplus\mathcal{F}''$ de pente μ_0 (cf lemme 3.9), $\mathcal{F}'''$ a une pente $\geq \mu_0$. Comme une suite croissante de sous-faisceaux de $\mathcal{F}$ est stationnaire, $\mathcal{F}_0$ est bien défini comme l'élément maximal de l'ensemble des sous-faisceaux de $\mathcal{F}$

de pente μ_0. Clairement $\mathcal{F}_0$ est saturé, c'est-à-dire que pour tout ouvert de Zariski $U \xrightarrow{j} X$, on a

$$\mathcal{F}_0 = j_*(\mathcal{F}_{0|U}) \cap \mathcal{F},$$

où l'intersection est prise dans $j_*(\mathcal{F}_{|U})$, car l'opération de saturation préserve le rang et augmente (non strictement) le degré du déterminant, donc augmente (non strictement) la pente. La maximalité implique donc que $\mathcal{F}_0$ est saturé. Le quotient $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$ est maintenant sans torsion, de rang $< rang\,\mathcal{F}$, et on peut appliquer l'opération précédente à $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$. On obtient de cette manière une filtration de $\mathcal{F}$ par des sous-faisceaux saturés. Montrons que leurs pentes sont strictement décroissantes. Nous pouvons raisonner par récurrence sur le rang, et admettre le théorème pour le faisceau quotient $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$. Ainsi la filtration J'_i, $i \geq 1$ induite par J_i sur $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$ satisfait la propriété que les pentes

$$\mu_i := \mu_L(Gr_i^{J'}\mathcal{F}/\mathcal{F}_0) = \mu_L(Gr_i^J\mathcal{F}),\ i \geq 1$$

sont strictement décroissantes. Or tout sous-faisceau $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$ est de pente $< \mu_0$, car sinon son image inverse dans $\mathcal{F}$ serait de pente $\geq \mu_0$, contredisant la définition de μ_0 et la maximalité de $\mathcal{F}_0$. Donc on a $\mu_i < \mu_0$, montrant que les μ_i sont strictement décroissants. Montrons qu'avec la construction donnée précédemment, les faisceaux $Gr_i^J\mathcal{F}$ sont μ-semi-stables. Comme on a $Gr_i^J\mathcal{F} = Gr_i^{J'}\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$, $i \geq 1$, il suffit de montrer que $\mathcal{F}_0$ est semi-stable. Or c'est évident par définition car $\mathcal{F}$ ne contient pas de sous-faisceau de pente $> \mu_0 = \mu(\mathcal{F}_0)$, et a fortiori $\mathcal{F}_0$ ne contient pas de sous-faisceau de pente $> \mu(\mathcal{F}_0)$. Donc $\mathcal{F}_0$ est semi-stable.

Il reste à montrer l'unicité d'une telle filtration. Encore une fois, il est clair qu'on peut raisonner par récurrence sur le rang et qu'il suffit donc de montrer que pour toute filtration croissante $J_i\mathcal{F}$ de $\mathcal{F}$ par des faisceaux saturés satisfaisant les conditions 1) et 2), $J_0\mathcal{F} = \mathcal{F}_0$, où $\mathcal{F}_0$ est défini comme ci-dessus. Considérons le morphisme $\mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}/J'_0\mathcal{F}$. S'il est non nul, comme $\mathcal{F}_0$ est semi-stable, son image $\mathcal{G}_0$ dans $\mathcal{F}/J'_0\mathcal{F}$ est de pente $\geq \mu_0$. On en déduit que $\mu'_0 := \mu_L(J'_0\mathcal{F}) \leq \mu_0$ car sinon l'image inverse de $\mathcal{G}_0$ dans $\mathcal{F}$ serait de pente $> \mu_0$, contredisant la définition de μ_0. Comme les pentes μ'_i sont décroissantes, on trouve donc que $\mu_0 > \mu'_i$, $i > 0$. Mais alors le faisceau $\mathcal{G}_0$ qui est de pente $\geq \mu_0$ admet la filtration induite par J', avec des pentes successives $\leq \mu'_i < \mu_0$, ce qui est une contradiction. On en déduit que $\mathcal{F}_0 \subset J'_0\mathcal{F}$. Comme $J'_0\mathcal{F}$ est semi-stable, on trouve que $\mu_0 \leq \mu'_0$. Mais par maximalité de μ_0 et de $\mathcal{F}_0$, on déduit qu'on a l'égalité.

■

Les faisceaux μ-semi-stables ne sont pas tout à fait les bons objets dans la théorie des espaces de modules. On verra plus loin en particulier qu'on ne peut pas distinguer dans l'espace de modules une somme directe $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ de deux faisceaux semi-stables de même pente, d'une extension non triviale de $\mathcal{G}$ par $\mathcal{F}$. Le résultat suivant, qui raffine le théorème 3.10, fournit une filtration plus fine dont les quotients successifs sont stables. Cette filtration n'est cependant plus unique.

Théorème 3.11 *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sans torsion sur la variété projective X et soit L un fibré inversible très ample sur X. Il existe une unique filtration croissante $J_i\mathcal{F}$ par des sous-faisceaux saturés ayant les propriétés suivantes :*

1) Les pentes $\mu_L(J_i\mathcal{F})$ sont décroissantes (pas strictement). De façon équivalente, les pentes $\mu_L(Gr_i^J\mathcal{F})$ sont décroissantes.

2) Les faisceaux $Gr_i^J\mathcal{F}$ sont μ-stables.

De plus, l'ensemble ordonné des pentes $\mu_0 \geq \mu_1 \geq \ldots \geq \mu_n$ est uniquement déterminé par cette condition et l'ensemble $\{Gr_0^J\mathcal{F}, \ldots, Gr_n^J\mathcal{F}\}$ est uniquement déterminé, avec ses multiplicités et à permutation près des faisceaux de même pente, par ces conditions.

A faire en exercice

3.3 Sections des faisceaux stables

Désormais on supposera pour simplifier que X est une surface projective lisse munie d'un fibré inversible ample L. Le résultat principal de cette section, qui est la finitude de la famille des faisceaux *semi-stables* de polynôme de Hilbert fixé, est en fait vrai en toute dimension. On se propose de montrer que les faisceaux μ-semi-stables $\mathcal{F}$ de polynôme de Hilbert $P_{\mathcal{F}} = P$ fixé satisfont la propriété que pour des nombres l, N ne dépendant que de P, $\mathcal{F}(l)$ est engendré par N sections. De tels $\mathcal{F}$ sont donc quotients du fibré $\mathcal{O}_X(-l)^N$. On peut donc leur appliquer les résultats du chapitre précédent sur le schéma *Quot*.

3.3.1 Formule de Riemann-Roch et polynôme de Hilbert

Rappelons que pour un faisceau $\mathcal{F}$ sur une surface lisse projective X, on dispose de deux invariants $c_1(\mathcal{F}) \in H^2(X)$, $c_2(\mathcal{F}) \in H^4(X)$, où $H^*(X)$ désigne soit la cohomologie $\oplus H^i(X, \Omega^i_{X/k})$, soit la cohomologie de de Rham algébrique $\mathbb{H}^*(X, \Omega_{X/k})$, soit avec $k = \mathbb{C}$, la cohomologie de Betti $H^*(X_{an}, \mathbb{Q})$. Dans tous les cas, on a une forme linéaire $\int_X$ sur $H^4(X)$ à valeurs dans k ou $\mathbb{Q}$ selon les cas, et d'une forme d'intersection sur $H^2(X)$ à valeurs dans k ou $\mathbb{Q}$ selon les cas.

Rappelons que le fibré canonique K_X est défini comme la puissance extérieure maximale $\bigwedge^2 \Omega_{X/k}$. On dispose donc de nombres (invariants numériques)

$$c_1(\mathcal{F})^2,\ c_1(\mathcal{F}) \cdot c_1(K_X),\ c_2(\mathcal{F}),$$

qui sont en fait toujours dans $\mathbb{Z}$.

Définissant la caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathcal{F}$ par

$$\chi(X, \mathcal{F}) = \sum_i (-1)^i dim_k H^i(X, \mathcal{F}),$$

on a le résultat suivant (formule de Hirzebruch-Riemann-Roch) :

Théorème 3.12 *Si r est le rang de $\mathcal{F}$, on a :*

$$\chi(X, \mathcal{F}) = r\chi(X, \mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}(c_1(\mathcal{F})^2 - c_1(\mathcal{F}) \cdot c_1(K_X)) - c_2(\mathcal{F}). \qquad (3.3.6)$$

Démonstration. Si $\mathcal{F}$ est localement libre, $\mathcal{F}(l)$ est engendré par ses sections, pour l assez grand, et donc il existe une suite exacte

$$0 \to \mathcal{H} \to \mathcal{O}_X^{r+1}(-l) \to \mathcal{F} \to T \to 0,$$

où $\mathcal{H}$ est un fibré en droites et T est un faisceau de torsion supporté sur un schéma de dimension 0. La caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathcal{F}$ étant additive sous les suites exactes, ainsi que le terme de droite par la formule de Whitney, on en déduit qu'il suffit de montrer le résultat pour les sommes directes de fibrés en droites et pour les faisceaux de torsion T supportés sur des points. Pour ces derniers, on a $\chi(T) = dim_k h^0(X, T)$ et il n'est pas difficile de vérifier que $\chi(T) = -c_2(T)$: on se ramène au cas d'un faisceau gratte-ciel k_x supporté sur un point $x \in X(k)$, et il faut montrer que $c_2(k_x) = -1$, c'est-à-dire $c_2(\mathcal{I}_x) = 1$. On peut supposer en fait que $X = \mathbb{P}^2$ et alors $\mathcal{I}_x$ admet la résolution

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \to \mathcal{I}_x \to 0$$

puisque x est l'intersection de deux droites. Cela donne le résultat par la formule de Whitney et $c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1))^2 = 1$.

Le cas des sommes directes de fibrés en droites se ramène immédiatement à celui des fibrés en droites. Si un fibré en droites $\mathcal{H}$ admet une section dont le diviseur est une courbe lisse C, on a une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{H} \to \mathcal{H}_{|C} \to 0.$$

Clairement la formule (3.3.6) est satisfaite par $\mathcal{O}_X$ (dont les classes de Chern sont triviales), et donc on est ramené dans ce cas par additivité à montrer (3.3.6) pour les faisceaux de la forme $\mathcal{H}_{|C}$, où C est une courbe lisse dans X et $\mathcal{H}$ est inversible sur X. En général, pour l suffisamment grand, $\mathcal{O}(l)$ et $\mathcal{H}(l)$ admettent une section satisfaisant la condition précédente, et donc si on a (3.3.6) pour les faisceaux de la forme $\mathcal{K}_{|C}$, on a aussi (3.3.6) pour $\mathcal{O}(l)$ et $\mathcal{H}(l)$. Choisissant une section de $\mathcal{O}_X(l)$ satisfaisant les conditions précédentes, de diviseur C', on a une suite exacte :

$$0 \to \mathcal{H} \to \mathcal{H}(l) \to \mathcal{H}(l)_{|C'} \to 0.$$

Par additivité de la caractéristique d'Euler-Poincaré, on conclut donc que (3.3.6) pour les faisceaux de la forme $\mathcal{K}_{|C'}$. implique (3.3.6).

Notant enfin que tout faisceau cohérent admet une résolution localement libre à gauche, on conclut qu'il suffit de montrer (3.3.6) pour les faisceaux $\mathcal{K}_{|C}$ où $\mathcal{K}$ est un fibré inversible sur X.

Dans ce dernier cas, c'est une conséquence de la formule de Riemann-Roch pour les fibrés inversibles $\mathcal{M}$ sur les courbes projectives lisses C (cf [21]) :

$$\chi(C, \mathcal{M}) = deg\, \mathcal{M} - \frac{1}{2} deg\, K_C,$$

et de la formule d'adjonction

$$K_C = K_X(C)_{|C}.$$

En effet, on a alors :

$$\chi(X, \mathcal{K}_{|C}) = \chi(C, \mathcal{K}_{|C}) = deg\, \mathcal{K}_{|C} - \frac{1}{2} deg\, K_C$$

avec $c_1(\mathcal{K}_{|C}) = [C]$,

$$c_2(\mathcal{K}_{|C}) = c_2(\mathcal{O}_C) - deg\, \mathcal{K}_{|C}$$
$$= [C]^2 - deg\, \mathcal{K}_{|C} = c_1(\mathcal{K}_{|C})^2 - deg\, \mathcal{K}_{|C}.$$

En effet la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_X(-C) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_C \to 0$$

fournit $c_2(\mathcal{O}_C) + c_1(\mathcal{O}_C)c_1(\mathcal{O}_X(-C)) = 0$, soit $c_2(\mathcal{O}_C) = -c_1(\mathcal{O}_C)^2 = -C^2$.

On a donc :

$$\chi(X, \mathcal{K}_{|C}) = -c_2(\mathcal{K}_{|C}) + c_1(\mathcal{K}_{|C})^2 - \frac{1}{2}(c_1(K_X) + c_1(\mathcal{K}_{|C}))c_1(\mathcal{K}_{|C})$$

$$= -c_2(\mathcal{K}_{|C}) + \frac{1}{2}(c_1(\mathcal{K}_{|C}) - c_1(K_X))c_1(\mathcal{K}_{|C}),$$

ce qui montre (3.3.6) dans ce cas, puisque le rang de $\mathcal{K}_{|C}$ est nul.

■

La formule de Hirzebruch-Riemann-Roch (3.3.6) nous permet de calculer le polynôme de Hilbert de $\mathcal{F}$ (relativement à la polarisation L fixée) en fonction des nombres :

$$r = rang(\mathcal{F}),\ c_1(\mathcal{F})c_1(L), c_1(\mathcal{F})c_1(K_X),\ c_2(\mathcal{F}),\ c_1(\mathcal{F})^2 \tag{3.3.7}$$

les coefficients dépendant par ailleurs aussi de constantes ne dépendant que de (X, L). En effet, on a par le théorème 2.2, $P_{\mathcal{F}}(l) = \chi(X, \mathcal{F}(l))$, qui est donné par (3.3.6). Il suffit de voir que

$$c_1(\mathcal{F}(l)).c_1(K_X),\ c_2(\mathcal{F}(l)),\ c_1(\mathcal{F}(l))^2$$

ne dépendent que des nombres apparaissant dans la liste (3.3.7).

Exercice 3.13 *Calculer explicitement* $c_1(\mathcal{F}(l)).c_1(K_X)$, $c_2(\mathcal{F}(l)), c_1(\mathcal{F}(l))^2$ *en fonction des nombres apparaissant dans (3.3.7).*

Ceci mène à la notion de semi-stabilité, plus forte que la notion de μ-semi-stabilité, cette dernière ne prenant en compte que le déterminant, c'est-à-dire l'invariant c_1 des sous-faisceaux. Il est assez naturel de vouloir également contrôler le c_2 des sous-faisceaux :

Définition 3.14 *Un faisceau $\mathcal{F}$ sans torsion sur X est semi-stable si pour tout sous-faisceau $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, on a*

$$\frac{P_{\mathcal{G}}(l)}{r(\mathcal{G})} \leq \frac{P_{\mathcal{F}}(l)}{r(\mathcal{F})},\ l >> 0.$$

Remarque 3.15 Bien entendu, la semi-stabilité dépend de la polarisation.

Remarque 3.16 Si $\mathcal{F}$ est μ-stable, il est semi-stable, car le coefficient de plus haut degré (c'est-à-dire 2), du polynôme $\frac{P_{\mathcal{G}}(l)}{r(\mathcal{G})}$ est une constante indépendante de $\mathcal{G}$ et le coefficient de degré 1 est égal à $\mu_L(\mathcal{G})$ à l'ajout près d'une constante indépendante de $\mathcal{G}$. La semi-stabilité est plus forte que la μ-semistabilité pour les faisceaux $\mathcal{F}$ μ-semi-stables non μ-stables, et contrôle le c_2 de leurs sous-faisceaux de pente maximale égale à $\mu_L(\mathcal{F})$.

3.3.2 La dualité de Serre

Rappelons (cf [21]) que le fibré canonique K_X intervient également dans l'énoncé de la dualité de Serre :

Théorème 3.17 *Si X est projective lisse connexe sur k, on a des isomorphismes canoniques $H^0(X, \mathcal{O}_X) = k$ et $H^n(X, K_X) \cong k$. Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X, l'accouplement*

$$H^i(X, \mathcal{F}) \otimes Ext^{n-i}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, K_X) \to H^n(X, K_X) \cong k$$

est parfait.

Si $\mathcal{F}$ est localement libre sur X, on a $Ext^{n-i}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, K_X) \cong H^{n-i}(X, \mathcal{F}^* \otimes K_X)$. Dans le cas où X est une surface, la formule de Hirzebruch-Riemann-Roch prend la forme d'une inégalité

$$\begin{aligned} & h^0(X, \mathcal{F}) + h^0(X, \mathcal{F}^* \otimes K_X) \\ \geq\ & r\chi(X, \mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}(c_1(\mathcal{F})^2 - c_1(\mathcal{F}) \cdot c_1(K_X)) - c_2(\mathcal{F}), \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

où r est le rang de $\mathcal{F}$. En effet, on a par dualité de Serre,

$$h^0(X, \mathcal{F}^* \otimes K_X) = dim\, Ext^0_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, K_X) = h^2(X, \mathcal{F}).$$

3.3.3 Sections des faisceaux semi-stables

Soit X une surface projective lisse munie d'un fibré inversible très ample $L = \mathcal{O}_X(1)$ et soit P un polynôme à coefficients rationnels (et de degré 2). Le but de cette section est de montrer le résultat suivant :

Théorème 3.18 *Il existe des nombres N et l ne dépendant que de X, L, P tels que pour tout faisceau cohérent sans torsion $\mathcal{F}$ sur X, μ-semi-stable, de polynôme de Hilbert P, $\mathcal{F}(l)$ est engendré par N sections, c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est un quotient de $\mathcal{O}_X(-l)^N$.*

Nous allons raisonner par récurrence sur le rang, et pour cela nous devons introduire un énoncé légèrement différent, qui se comporte mieux lors de l'étape de récurrence. X et L étant comme ci-dessus, étant donné un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ sur X notons

$$\mu_{L,max}(\mathcal{F}) = Sup\,\{\mu_L(\mathcal{G}),\, 0 \neq \mathcal{G} \subset \mathcal{F}\}.$$

On peut reformuler la notion de μ-(semi-)stabilité en disant que $\mu_{L,max}(\mathcal{F}) = \mu_L(\mathcal{F})$. Or la pente $\mu_L(\mathcal{F})$ est déterminée par le polynôme de Hilbert de $\mathcal{F}$ et par des constantes dépendant seulement de X, L, car le rang de $\mathcal{F}$ et le nombre d'intersection $c_1(\mathcal{F})\cdot c_1(L)$ le sont. En effet, le terme de degré 2 de $P_{\mathcal{F}}$ est égal d'après le théorème (3.12) à $\frac{rl^2}{2}L^2$, et le terme de degré 1 est égal à $c_1(\mathcal{F})\cdot c_1(L) - \frac{1}{2}c_1(L)c_1(K_X)$ d'après le théorème (3.12). Le théorème 3.18 est donc un cas particulier du théorème 3.19 suivant. Dans ce qui suit μ est un nombre rationnel ou réel fixé.

Théorème 3.19 *Il existe des nombres N et l ne dépendant que de X, L, P, μ tels que pour tout entier $c \geq 0$, pour tout faisceau cohérent sans torsion $\mathcal{F}$ sur X, de polynôme de Hilbert $P_{\mathcal{F}} = P + c$, tel que $\mu_{L,max}(\mathcal{F}) \leq \mu$, $\mathcal{F}(l)$ est engendré par N sections, c'est-à-dire que $\mathcal{F}$ est un quotient de $\mathcal{O}_X(-l)^N$. De plus les valeurs possibles de c (et donc de $P_{\mathcal{F}}$) sont en nombre fini pour $\mathcal{F}$ comme ci-dessus.*

Démonstration. On va procéder par récurrence sur le rang, le cas de rang 1 étant montré dans le lemme 3.20 suivant.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent de polynôme de Hilbert $P_{\mathcal{F}} = P + c$, $c \geq 0$ et $\mu_{max} \leq \mu$. L'inégalité de Riemann-Roch (3.3.9) fournit

$$h^0(X, \mathcal{F}(l)) + h^0(X, \mathcal{F}^* \otimes K_X(l)) \geq P_{\mathcal{F}}(l) \geq P(l),$$

d'où pour l assez grand, $h^0(X, \mathcal{F}(l)) + h^0(X, \mathcal{F}^* \otimes K_X(-l)) > 0$. Par ailleurs, on a $h^0(X, \mathcal{F}^* \otimes K_X(-l)) = 0$ pour l suffisamment grand, ne dépendant que de $P_{\mathcal{F}}$ et μ. En effet, si $h^0(X, \mathcal{F}^* \otimes K_X(-l)) \neq 0$, il existe un morphisme non nul

$$\mathcal{F} \to K_X(-l).$$

L'image de ce morphisme est de pente $\leq (c_1(K_X) - c_1(\mathcal{O}_X(l))c_1(L)$ et donc son noyau est de pente $\geq \frac{1}{r-1}(r\mu_L(\mathcal{F}) - (c_1(K_X) - c_1(\mathcal{O}_X(l))c_1(L))$. Il s'ensuit que si $\frac{1}{r-1}(r\mu_L(\mathcal{F}) - (c_1(K_X) - c_1(\mathcal{O}_X(l))c_1(L)) > \mu$, ceci ne peut pas exister car $\mu \geq \mu_{max}(\mathcal{F})$.

Ainsi nous avons prouvé l'existence d'une section non nulle de $\mathcal{F}(l)$ pour un l ne dépendant que de P, X, L, μ. Voyons cette section comme un morphisme non nul

$$s : \mathcal{O}_X(-l) \to \mathcal{F}.$$

Considérons le sous-faisceau saturé $\mathcal{H}$ de $\mathcal{F}$ engendré par $Im\, s$. En d'autres termes, on regarde le quotient $\mathcal{Q} := \mathcal{F}/Im\, s$, on note $\mathcal{T} := Tors\, \mathcal{Q}$, $\mathcal{G} := \mathcal{Q}/\mathcal{T}$ et notant $q : \mathcal{F} \to \mathcal{Q}$, on pose

$$\mathcal{H} = q^{-1}(\mathcal{T}).$$

Nous avons la suite exacte

$$0 \to \mathcal{H} \to \mathcal{F} \xrightarrow{q'} \mathcal{G} \to 0,$$

où $\mathcal{G}$ est sans torsion, de rang $< rang\, \mathcal{F}$. Il vient donc

$$P_{\mathcal{F}} = P_{\mathcal{G}} + P_{\mathcal{H}}.$$

Le faisceau $\mathcal{H}$ est de rang 1 sans torsion, et donc de la forme $\mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_Z$, où Z est un sous-schéma de longueur 0 de X et $\mathcal{L}$ est un faisceau inversible sur X, tel que $\mathcal{L}(l)$ est effectif, soit $\mathcal{L} = \mathcal{O}(D)(-l)$. Comme $\mu_{max}(\mathcal{F}) \leq \mu$, on trouve que $D \cdot c_1(L)$ est uniformément borné par μ. Il en résulte qu'il existe un nombre fini de familles connexes possibles de diviseurs D. En particulier, puisque l est fixé, $c_1(\mathcal{H})$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs possibles et il en va de même pour $c_1(\mathcal{G})$.

Comme on a $P_{\mathcal{H}} = P_{\mathcal{L}} - deg\, Z$ et $P_{\mathcal{G}} = P_{\mathcal{F}} - P_{\mathcal{H}}$, il vient

$$P_{\mathcal{G}} = P_{\mathcal{F}} - P_{\mathcal{L}} + deg\, Z.$$

Comme $P_{\mathcal{L}}$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, et qu'on a $deg\, Z \geq 0$, $P_{\mathcal{F}} = P + c$, $c \geq 0$, on conclut qu'il existe un nombre fini de polynômes P_i tels que pour au moins un i, $P_{\mathcal{G}} = P_i + c'$, $c' \geq 0$

Par ailleurs, notons que $rang\, \mathcal{G} = rang\, \mathcal{F} - 1$, et $\mu_{max}(\mathcal{G}) \leq \mu'$ pour un μ' ne dépendant que de $P_{\mathcal{F}}$, μ, X, L. En effet, on a l'application quotient

$$q' : \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{G}$$

dont le noyau $\mathcal{H}$ est de rang 1, $c_1(\mathcal{H})$ prenant un nombre fini de valeurs. Si les pentes des sous-faisceaux $\mathcal{J}$ des faisceaux $\mathcal{G}$ sont arbitrairement grandes (lorsque $\mathcal{F}$ varie satisfaisant les conditions du théorème), on peut donc construire pour $\mathcal{F}$ adéquat un sous-faisceau ${q'}^{-1}(\mathcal{J})$ de $\mathcal{F}$ de pente arbitrairement grande, contredisant $\mu_{max}(\mathcal{F}) \leq \mu$.

On peut donc appliquer la conclusion du théorème 3.19 au faisceau $\mathcal{G}$ construit ci-dessus. Ainsi, il existe des nombres N' et l' ne dépendant que de X, L, P, μ tels que ces faisceaux satisfont la conclusion que $\mathcal{G}(l')$ est engendré par N' sections. De plus, il existe un nombre fini de polynômes de Hilbert possibles pour $\mathcal{G}$. Rappelant que $P_{\mathcal{G}} = P_{\mathcal{F}} - P_{\mathcal{L}} + deg\, Z$, avec $P_{\mathcal{F}} = P + c$, $c \geq 0$, on conclut que $deg\, Z$ est aussi borné uniformément par des constantes ne dépendant que de P, μ, X, L. Appliquant le lemme 3.20, on conclut qu'on peut également supposer que $\mathcal{H}(l')$ est engendré par N' sections. De plus, les faisceaux $\mathcal{H}$ formant une famille bornée, on conclut qu'on peut également supposer que l' satisfait $H^1(X, \mathcal{H}(l')) = 0$ pour tous les faisceaux $\mathcal{H}$ construits ci-dessus. Alors on a la suite exacte

$$0 \to H^0(X, \mathcal{H}(l')) \to H^0(X, \mathcal{F}(l')) \to H^0(X, \mathcal{G}(l')) \to 0$$

qui montre que $\mathcal{F}(l')$ est engendré par $2N'$ sections.

■

Lemme 3.20 *Le théorème 3.19 est satisfait par les faisceaux sans torsion de rang 1.*

Remarque 3.21 Dans ce cas, il n'y a pas d'hypothèse sur la pente car $\mu_{max} = \mu$ pour un faisceau de rang 1, et μ est déterminé par le polynôme de Hilbert.

Démonstration du lemme 3.20. Un faisceau $\mathcal{H}$ sans torsion de rang 1 est de la forme $\mathcal{L} \otimes \mathcal{I}_Z$. Supposons que son polynôme de Hilbert $P_{\mathcal{H}}$ soit de la forme $P + c$

avec $c \geq 0$. L'inégalité de Riemann-Roch combinée avec la dualité de Serre fournit alors

$$h^0(X, \mathcal{H}(l)) + h^0(X, \mathcal{L}^{-1}(-l) \otimes K_X) \geq P(l).$$

Par ailleurs le coefficient de degré 1 du polynôme de Hilbert détermine dans ce cas $c_1(\mathcal{L})c_1(L)$ et on a $h^0(X, \mathcal{L}^{-1}(-l) \otimes K_X)) = 0$ dès que

$$(c_1(K_X) - c_1(\mathcal{L}) - lc_1(L))c_1(L) < 0,$$

c'est-à-dire pour l suffisamment grand ne dépendant que de X, L, $c_1(\mathcal{L})c_1(L)$. L'inégalité de Riemann-Roch fournit donc un l ne dépendant que de X, L, P tel que $h^0(X, \mathcal{L}(l) \otimes \mathcal{I}_Z) \neq 0$.

Soit D le diviseur d'une section de $h^0(X, \mathcal{L}(l) \otimes \mathcal{I}_Z)$. Alors on a $DL = c_1(\mathcal{L})c_1(L) + lL^2$, qui est donc borné seulement en fonction de X, L, $c_1(\mathcal{L})c_1(L)$. Comme les diviseurs de degré borné sont paramétrés par un nombre fini de familles, la classe $c_1(\mathcal{O}_X(D))$ ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs et il en va donc de même pour $c_1(\mathcal{L})$.

Le coefficient de degré 0 du polynôme de Hilbert vaut $\frac{1}{2}(c_1(\mathcal{L})^2 - c_1(\mathcal{L})c_1(K_X)) - deg\, Z$ à une constante ne dépendant que de X près. Par hypothèse on a donc $\frac{1}{2}(c_1(\mathcal{L})^2 - c_1(\mathcal{L})c_1(K_X)) - deg\, Z \geq p_0$, où p_0 est le coefficient de degré 0 de P. Comme il n'existe qu'un nombre fini de valeurs possibles pour $c_1(\mathcal{L})$ et $deg\, Z \geq 0$, on conclut qu'il n'existe donc qu'un nombre fini de valeurs possibles pour $deg\, Z$, et donc pour le polynôme de Hilbert de $\mathcal{H}$.

Les faisceaux $\mathcal{L}$ avec c_1 fixé sont paramétrés par une union finie de translatés de $Pic^0(X)$ qui est une variété projective paramétrant les diviseurs algébriquement équivalents à 0. Les faisceaux $\mathcal{I}_Z$ avec $Z \subset X$ de degré fixé sont paramétrés par un schéma projectif (schéma de Hilbert). Il en résulte que les faisceaux $\mathcal{H}$ ci-dessus sont paramétrés par un nombre fini de familles projectives. L'existence de l et N résulte alors du théorème 2.7. ■

3.4 Retour à notre problème de modules

Nous avons vu que les faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert fixé P sur une surface projective lisse polarisée (X, L) satisfont la propriété qu'ils sont un quotient d'un faisceau $\mathcal{O}_X(-l)^N$ pour l et N suffisamment grand indépendants de $\mathcal{F}$. On en conclut que pour un tel $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}(l)$ est un quotient de $\mathcal{O}_X^N$ à polynôme de Hilbert fixé $P'(s) = P(s + l)$.

Le chapitre précédent nous dit qu'il existe un schéma quasi-projectif $Quot_{X,N,P'}$ et un faisceau universel $\mathcal{U}$ sur $Q \times X$ plat sur $Quot_{X,N,P'}$, tels que tout faisceau quotient de $\mathcal{O}_X^N$ à polynôme de Hilbert P' est isomorphe à une fibre $\mathcal{U}_q$ pour un point q de Q. On a maintenant le résultat suivant :

Lemme 3.22 *Le sous-ensemble de $Quot_{X,N,P'}$ paramétrant les sous-faisceaux semi-stables ou μ-stables est un ouvert de Zariski.*

Ainsi nous avons montré que les faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert fixé P sur une surface projective lisse polarisée (X, L) forment une famille bornée. Ils sont paramétrés par un schéma-quasi-projectif $Quot_{X,N,P'}$.

Dans cette étape, nous avons donc contourné le problème de non-finitude rencontré par exemple dans l'exemple des faisceaux $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(l) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-l)$ sur $\mathbb{P}^1$.

Il subsiste le problème suivant : par définition, les points q du schéma *Quot* Q ci-dessus paramètrent les classes d'isomorphismes de paires constituées d'un faisceau $\mathcal{F}$ de polynôme de Hilbert P et d'un morphisme surjectif

$$\mathcal{O}_X^N(-l) \twoheadrightarrow \mathcal{F}.$$

Rappelons par ailleurs d'après notre construction du schéma $Quot_{X,N,P'}$, que quitte à changer la valeur de l ci-dessus, nous pouvons supposer que le morphisme ci-dessus induit un isomorphisme

$$H^0(X, \mathcal{O}_X^N) \cong H^0(X, \mathcal{F}(l)).$$

Si on veut construire un schéma qui paramètre les classes d'isomorphismes de faisceau $\mathcal{F}$ comme ci-dessus, on voit qu'il ne peut être qu'un quotient du schéma $Quot_{X,N,P'}$ ci-dessus par l'action du groupe $\mathbb{P}Gl(N)$ qui agit naturellement sur le schéma $Quot_{X,N,P'}$, du fait que $Gl(N)$ agit sur $H^0(X, \mathcal{O}_X^N)$, et que les homothéties de $Gl(N)$ agissant sur $\mathcal{O}_X^N$ sont accompagnées d'homothéties des faisceaux quotients $\mathcal{F}$, agissant ainsi trivialement sur les classes d'isomorphisme de paires.

Chapitre 4

Quotients en géométrie algébrique

4.1 Actions de groupes et quotients

Si X est une variété algébrique et G est un groupe algébrique, c'est-à-dire une variété algébrique munie d'une loi de groupe pour laquelle le produit $G \times G \to G$ est un morphisme de variétés algébriques, une action algébrique de G sur X est un morphisme α de G dans $Aut\,(X)$ tel que l'application décrivant l'action :

$$G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto \alpha(g)(x)$$

est un morphisme de variétés algébriques. On note $g \cdot x := \alpha(g)(x)$, et $Gx : \{g \cdot x,\ g \in G\}$ l'orbite de x sous G.

Des exemples naturels de groupes algébriques sont donnés par les groupes linéaires $Gl(n)$ (la structure algébrique est donnée par la réalisation de $Gl(n)$ comme un ouvert dans un espace de matrice), les groupes "spécial-linéaires" $Sl(n)$ (la structure algébrique est donnée par la réalisation de $Sl(n)$ comme un fermé au sens de Zariski dans $Gl(n)$ défini par l'équation polynomiale $det\, g = 1$), et les groupes $\mathbb{P}Gl(n)$, quotients des groupes $Gl(n)$ ou $Sl(n)$ par leur centre (les homothéties). Les deux premiers agissent sur A^n_k et le dernier sur $\mathbb{P}^{n-1}_k$. En fait $\mathbb{P}Gl(n)$ agit aussi sur la variété affine $M_n(k)$ par conjugaison. D'autre exemples (commutatifs) sont donnés par les variétés abéliennes (du point de vue de la géométrie complexe, ce sont les tores complexes qui admettent un plongement holomorphe dans un espace projectif), et les groupes additif $G_a = A^1_k$ muni de sa structure de groupe additif et multiplicatif $G_m = A^1_k \setminus \{0\}$ muni de sa structure de groupe multiplicatif. Les groupes multiplicatifs G^n_m peuvent se réaliser comme des groupes de matrices diagonales, tandis que les groupes additifs A^n_k peuvent se réaliser comme des groupes de matrices unipotentes triangulaires supérieures de taille $(n+1, n+1)$ dont seule la dernière colonne est non triviale.

Tous les groupes considérés ici seront connexes.

Etant donnée une action de groupe sur une variété X, on cherche à construire un quotient, qui idéalement serait ensemblistement l'espace des orbites sous G, et aurait une structure de variété algébrique. Ce n'est pas toujours (et en fait c'est rarement) possible. On va introduire ci-dessous diverses variantes, correspondant aux différentes notions d'espaces de modules que nous avons discutées précédemment.

4.1.1 Quotients catégoriques

La première notion est la plus faible et dictée par le point de vue fonctoriel. Etant donnée une action d'un groupe G sur une variété X, on appellera un morphisme $\phi : X \to Z$ un quotient catégorique de X par G si pour toute variété algébrique Y et tout morphisme G-invariant $\psi : X \to Y$, où G-invariant signifie que $\psi \circ g = \psi$, $\forall g \in G$, il existe un unique morphisme $\chi : Z \to Y$ tel que $\psi = \chi \circ \phi$.

Exercice 4.1 *Montrer qu'un quotient catégorique est unique.*

Exemple 4.2 Considérons l'action de G_m sur A^n_k par multiplication scalaire. Alors tout morphisme G_m-invariant $X \to Y$ est nécessairement constant, car 0 est contenu dans la clôture de Zariski de chaque orbite. Donc le quotient catégorique est l'application constante sur $Spec\, k$.

4.1.2 "Bons" quotients

Les quotients catégoriques existent sous des hypothèses assez faibles dans la catégorie des variétés algébriques, mais l'exemple 4.2 montre qu'ils peuvent ne pas ressembler du tout à des espaces d'orbites. Nous introduisons ici la notion de "bon" quotient pour une action d'un groupe G sur une variété X.

Définition 4.3 *Un morphisme $\phi : X \to Z$ de variétés algébriques est un bon quotient de X par G, s'il satisfait les conditions suivantes :*

1. *ϕ est un morphisme G-invariant affine et surjectif. Le faisceau d'$\mathcal{O}_Z$-algèbres $\phi_*\mathcal{O}_X$ détermine donc X, par $X = Spec\, \phi_*\mathcal{O}_X$.*
2. *$\mathcal{O}_Z \subset \phi_*\mathcal{O}_X$ s'identifie à la partie G-invariante de $\phi_*\mathcal{O}_X$.*
3. *Si $X' \subset X$ est un fermé algébrique G-invariant, $\phi(X')$ est fermé. Si X' et X'' sont des fermés algébriques G-invariants de X et disjoints, leurs images dans Z sont disjointes.*

Ces bons quotients n'existent pas en général : prenons le cas de $X = \mathbb{P}^n$, muni d'une action non triviale de G_m donnée par $\lambda \cdot (X_0, \ldots, X_n) = (\lambda^{i_0} X_0, \ldots, \lambda^{i_n} X_n)$, avec $\sum_l i_l = 0$. Une orbite générique est de dimension 1. Un bon quotient, s'il existe, est donc de dimension $< n$. D'autre part, les points e_i de coordonnées $X_j = 0$, $j \neq i$ sont fixés par cette action et leurs orbites sont donc fermées et disjointes. Donc le quotient, s'il existe, doit être de dimension > 0. Pourtant, $\mathbb{P}^n$ n'admet aucun morphisme affine non constant sur une variété algébrique Z de dimension $< n$. (Les fibres d'un tel morphisme sont affines et fermées dans $\mathbb{P}^n$ donc de dimension 0.)

Remarque 4.4 En fait $\mathbb{P}^n$ n'admet aucun morphisme non constant ϕ sur une variété algébrique Z de dimension $< n$. En effet, soit F une fibre d'un tel morphisme. F est projective de dimension > 0 et donc toute fonction algébrique sur F est constante sur chaque composante F' de F. Or F' se déforme à l'aide de l'action de $\mathbb{P}Gl(n+1)$. Une petite déformation gF' de F' a la propriété que $\phi(gF')$

est contenue dans un ouvert affine de Z, et comme gF' n'admet pas de fonctions non constantes, $\phi(gF')$ doit être un point. Mais comme $\mathbb{P}Gl(n+1)$ agit de façon bitransitive sur $\mathbb{P}^n_k$, cela entraîne que gF' est un point et donc que $dim\, F = 0$.

Les bons quotients sont bons dans la mesure où on a

Lemme 4.5 *Les fibres d'un bon quotient $\phi : X \to Z$ (supposé exister) pour une action de groupe G sont en bijection avec les orbites fermées de G.*

Démonstration. Si Gx et Gy sont deux orbites fermées distinctes, elles sont disjointes. La propriété 3 montre alors que $\phi(x)$ et $\phi(y)$ sont des points distincts de Z. Il reste à comprendre pourquoi tout point de z paramètre au moins une orbite fermée. Cela résulte du fait que pour toute orbite Gx, il existe une orbite fermée Gx' contenue dans la clôture de Zariski $\overline{Gx}$ de Gx. Pour voir cela, on note que si Gx n'est pas fermée, $\overline{Gx} \setminus Gx$ est G-invariant et de dimension $< dim\, Gx$. Il suffit donc de prendre une orbite de dimension minimale contenue dans $\overline{Gx}$. ■

Notons aussi le fait suivant :

Lemme 4.6 *Les bons quotients sont des quotients catégoriques.*

Démonstration. Soit $\phi : X \to Z$ un bon quotient. Soit $\psi : X \to Y$ un morphisme G-invariant. Les fibres de ψ sont des fermés G-invariants de X, et il résulte de la propriété 3 que toute fibre X_z de ϕ est contenue dans une (unique) fibre de ψ. En effet, si X_z n'est pas contenue dans une fibre de ψ, $\psi(X_z)$ contient au moins deux points distincts y et y'. Alors $X_z \cap \psi^{-1}(y)$ et $X_z \cap \psi^{-1}(y')$ sont deux fermés disjoints non vides G-invariants de X_z, dont les images par ϕ doivent être différentes, ce qui entraîne une contradiction.

Ensemblistement, on dispose donc d'une application $\chi : Z \to Y$ telle que $\psi = \chi \circ \psi$. En fait, la propriété 3 montre que cette application est continue pour la topologie de Zariski.

Il reste à voir que c'est en fait naturellement un morphisme : on a la factorisation $\psi = \chi \circ \psi$, où ψ et ϕ sont des morphismes. On dispose donc du morphisme contravariant induit

$$\psi^* : \psi^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X.$$

Ce morphisme induit un morphisme :

$$\eta : \chi^{-1}\mathcal{O}_Y \to R^0\phi_*\mathcal{O}_X.$$

Comme on sait que ψ est G-invariant, l'image de η est contenue dans la partie G-invariante de $R^0\phi_*\mathcal{O}_X$, qui par la propriété 2 est égale à $\mathcal{O}_Z$. ■

Exemple 4.7 On considère l'espace X des matrices (n, n) (c'est $A^{n^2}_k$ comme variété algébrique) muni de l'action de $\mathbb{P}Gl(n)$ par conjugaison. Alors le bon quotient de X est donnée par A^n_k, le morphisme étant donné par le polynôme caractéristique. En effet, ce morphisme est bien affine et surjectif. C'est de plus un fait général que les polynômes G-invariants sur X sont les polynômes symétriques en les valeurs propres, et donc les polynômes en les coefficients du polynôme caractéristique. On laisse en exercice la preuve de la propriété 3.

4.1.3 Quotients géométriques

Pour conclure, on dira qu'un quotient Z d'une action du groupe algébrique G sur une variété algébrique X est un *quotient géométrique* s'il est bon dans le sens de la définition 4.3 et si les orbites $Gx \subset X$ sont fermées. C'est évidemment la meilleure notion de quotient possible, car alors le quotient est à la fois catégorique par le lemme 4.6 et Z est l'ensemble des orbites par le lemme 4.5. L'exemple 4.7 est un exemple d'un bon quotient non géométrique. En effet, il est bien connu que le polynôme caractéristique ne suffit pas à déterminer la classe de conjugaison d'une matrice lorsque ses valeurs propres ne sont pas toutes distinctes. Les fibres du quotient géométrique ne sont donc pas en bijection avec les orbites. Dans ce cas, les orbites fermées sont les orbites des matrices diagonalisables.

4.2 Groupes réductifs

4.2.1 Groupes algébriques affines

Un groupe algébrique est dit affine si la variété algébrique sous-jacente est affine. Les groupes linéaires, spécial-linéaires, orthogonaux, symplectiques, sont affines. Pour le cas de $Gl(n)$ il est défini comme le complémentaire de l'hypersurface $det = 0$ dans $A_k^{n^2}$. Les autres groupes sont fermés dans $Gl(n)$.

Si G est affine, $G = Spec\, A$ et G admet une représentation fidèle sur son algèbre de fonctions A, $G \to Aut\, A$. Si on ne tient pas compte du fait que A est de dimension infinie comme espace vectoriel, un tel G est donc plongé dans un groupe linéaire.

4.2.2 Actions sur des schémas affines, actions linéarisées

Lorsqu'un groupe algébrique G admet une action algébrique sur une variété affine $X = Spec\, A$, on a de même une représentation adjointe de G sur A, qui à $g \in G$ associe la transformation $a \mapsto g^{-1*}(a)$, $a \in A$. Si X admet un point fixe x_0 sous G et est irréductible, cette représentation est une limite de représentations finies, où G agit sur les algèbres artiniennes $A/\mathcal{M}_{x_0}^k$, où $\mathcal{M}_{x_0}$ est l'idéal du point x_0.

Une autre manière d'obtenir naturellement des représentations finies à partir d'une action de groupe sur une variété algébrique X est de supposer que X est projective, et qu'il existe un fibré inversible très ample L sur X invariant sous G et même *linéarisé.*

Ici l'invariance sous G signifie que $g^*L \cong L$, $\forall g \in G$, tandis que la linéarisation est une notion plus forte : on demande que G agisse sur l'espace total du fibré vectoriel L sur X. Cette notion est plus forte que l'invariance de L sous G.

Lemme 4.8 *Soit L un fibré inversible ample sur une variété projective connexe X munie d'une action de G. Supposons L invariant sous G. Il existe un cocycle $\alpha \in H^1(G, k^*)$, dont la classe est triviale si et seulement si l'action de G est linéarisée sur L.*

Démonstration. On dispose pour chaque $g \in G$ d'un isomorphisme $\alpha_g : g^*L \cong L$.

Considérons l'application

$$\mu : G \times G \to k^* : \mu(g, g') = \frac{g'^{*}\alpha_g \alpha_{g'}}{\alpha_{g'g}}.$$

Ceci est bien un élément inversible de k. En effet, $g'^{*}\alpha_g\alpha_{g'}$ et $\alpha_{g'g}$ sont des isomorphismes entre $g'^{*}g^*L$ et L, et le quotient de deux tels isomorphismes est une section de $\mathcal{O}_X^*$, c'est-à-dire un élément de k^* car X est projective connexe. ■

Remarque 4.9 Sous les hypothèses précédentes, supposons que X possède un point fixe sous G. Alors l'action de G est linéarisée sur L. En effet, dans la preuve ci-dessus, on choisit les isomorphismes α_g, qui sont définis à un scalaire multiplicatif près, en demandant que $\alpha_g(x) = Id : L_{|x} \to L_{|x}$. Il est alors clair que le cocycle ci-dessus est trivial, par évaluation au point x.

On peut montrer que si G est un groupe linéaire réductif, une action de G sur une variété projective est toujours linéarisable. C'est-à-dire qu'il existe un fibré inversible L ample G-invariant, et de plus l'action de G est linéarisée sur L. L'hypothèse sur G est nécessaire.

Exemple 4.10 Soit $G = A$, une variété abélienne, agissant sur elle-même par translations. Etant donné un fibré inversible ample L sur A, il n'existe qu'un nombre fini de points $a \in A$ tels que $t_a^*L \cong L$ (ceci peut se montrer par la théorie de Hodge, ou par un calcul infinitésimal). Supposons maintenant que L est topologiquement trivial mais non trivial. Alors on sait que $L \in Pic\, A$ est A-invariant. Cependant l'action de A n'est pas linéarisée sur L. En effet, une telle linéarisation signifierait que les fibrés μ^*L et pr_2^*L sur $A \times A$ sont isomorphes, où $\mu : A \times A \to A$ est l'application somme. Il n'est pas difficile de voir que cette égalité n'est satisfaite que par le fibré trivial.

Revenant au cas d'une action d'un groupe affine G sur un schéma affine $X = Spec\, V$, et regardant l'action (duale) induite sur l'espace vectoriel V qui est de dimension infinie, on peut même sans point fixe ni graduation se ramener au cas de représentations de dimension finie, grâce au lemme suivant, dû à Cartier :

Lemme 4.11 *Soit V une représentation duale d'un groupe algébrique G. Alors V est une union de sous-espaces vectoriels (globalement) G-invariants de dimension finie.*

Ici, par représentation duale, on entend précisément une représentation de G sur V, induite par un morphisme $V \to V \otimes S$, où S est l'anneau des fonctions algébriques de G, correspondant à une action de G sur un schéma affine $X = Spec\, V$.

Démonstration. Il suffit de montrer que si $V_1 \subset V$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie, il existe un sous-espace vectoriel V_2 globalement G-invariant de dimension finie contenant V_1. On dispose du morphisme

$$\sigma : V \to V \otimes S,\ G = Spec\, S,$$

et on peut donc écrire, les v_i formant une base de V :

$$\sigma(v_i) = \sum_{j \leq n_i} w_{ij} \otimes a_{ij},\ w_{ij} \in V,\ a_{ij} \in S,$$

où la somme est finie pour chaque v_i et les a_{ij} sont indépendants sur k. Soit V_2 le sous-espace vectoriel de V engendré par les w_{ij}. V_2 est clairement de dimension finie. Notons que V_2 est indépendant du choix des w_{ij}, c'est-à-dire ne dépend que de l'espace de tenseurs $\sigma(V_1)$. En fait c'est déjà vrai pour l'espace engendré par w_{ij}, avec i fixé : cet espace ne dépend que du tenseur $\sigma(v_i)$.

Il reste donc à montrer que $V_1 \subset V_2$ et que V_2 est globalement invariant sous G. Pour le premier fait, S étant l'algèbre des fonctions de G admet un morphisme d'évaluation au point $e \in G$ (élément neutre).

$$S \to k.$$

Si on regarde le morphisme composé

$$V \to V \otimes S \to V,$$

c'est trivialement l'identité, car e agit par l'identité sur X. Il en résulte immédiatement que $V_1 \subset V_2$.

Il reste à vérifier que V_2 est globalement invariant. Ceci résulte du fait que le morphisme $\sigma : V \to V \otimes S$ est induit par une action de G sur $X = Spec\,V$. Soit $\mu : S \to S \otimes S$ le morphisme adjoint au produit $G \otimes G \to G$. On dispose a priori de deux morphismes de V dans $V \otimes S \otimes S$, l'un étant donné par le composé $(Id_V \otimes \mu) \circ \sigma$, l'autre étant donné par $(\sigma \otimes Id_S) \circ \sigma$. Ces deux morphismes sont égaux, du fait que $gg' \cdot x = g \cdot (g' \cdot x)$, $x \in X$, g, $g' \in G$. Cette égalité entraîne la G invariance de V_2. ■

4.2.3 Groupes réductifs, opérateurs de Reynolds

On va maintenant définir les groupes linéairement réductifs :

Définition 4.12 *Un groupe algébrique affine G est linéairement réductif si pour toute représentation linéaire $G \to Gl(V)$ de dimension finie de G, et tout sous-espace $V' \subset V$ invariant sous G, il existe un supplémentaire $V'' \subset V$ qui est G-invariant et tel que $V \oplus V'' = V$.*

Les groupes $Gl(n)$ sont réductifs. On se ramène au cas où $k = \mathbb{C}$, et on observe que le groupe $Gl(n)$ contient le groupe $U(n)$ (qui n'est pas un groupe algébrique sur $\mathbb{C}$), qui est compact et dense au sens de Zariski dans $Gl(n)$. Si on a une représentation de $Gl(n, \mathbb{C})$ sur un espace vectoriel compact V, il existe une métrique hermitienne h sur V, stable sous l'action de $U(n)$. Une telle métrique est obtenue en choisissant tout d'abord une métrique h_0 arbitraire sur V, puis en faisant la moyenne relativement à une métrique invariante sur $U(n)$ des métriques g^*h_0, $g \in U(n)$. Soit maintenant $V' \subset V$ un sous-espace G-invariant, et soit $V'' \subset V$ le supplémentaire orthogonal de V' dans V par rapport à la métrique $SU(n)$-invariante h. Alors clairement V'' est stable sous l'action de $U(n)$. Mais comme $U(n)$ est dense au sens de Zariski dans $Gl(n)$, V'' est en fait aussi stable sous G.

Ce raisonnement s'applique évidemment à tout groupe algébrique (sur $\mathbb{C}$) contenant un sous-groupe compact pour la topologie usuelle et dense pour la topologie de Zariski.

Dans la suite, on s'intéressera à des représentions adjointes associées à des actions de G sur des schémas affines. D'après le lemme 4.11, ces représentations sont des unions (en fait dénombrables) de sous-représentations de dimension finie. Si G est réductif, une telle représentation s'écrit comme une somme directe de représentations irréductibles de dimension finie. De plus, tout sous-espace G-invariant admet un supplémentaire G-invariant, comme on le voit en passant à la limite sur les sous-représentations de dimension finie. Soit V une telle représentation, et soit $V^G \subset V$ l'ensemble des éléments de V invariants sous G. On dispose d'une décomposition en somme directe

$$V = V^G \oplus W$$

où W est un sous-espace globalement G-invariant, et donc d'un projecteur G-invariant $R^V : V \to V^G$.

Lemme 4.13 *Un tel projecteur R^V est unique. Il est appelé "opérateur de Reynolds" de la représentation.*

Démonstration. On sait que V est somme directe de représentations irréductibles (de dimension finie) de G. Soit $W \subset V$ une telle représentation. Si W n'est pas la représentation triviale, le morphisme G-invariant $R^V_{|W} : W \to V^G$ est nécessairement nul, car sinon W contiendrait des hyperplans définis par une équation G-invariante, contredisant l'irréductibilité de W. D'autre part si $W \cong k$ est la représentation triviale, $W \subset V^G$ et donc $R^V = Id$ sur W. R^V est donc uniquement déterminé.

∎

Lemme 4.14 *Soit G un groupe affine agissant sur un schéma affine $X = Spec\, V$, où V est une k-algèbre de type fini. Alors l'opérateur de Reynolds R^V de V pour la représentation adjointe est un morphisme de V^G-algèbres (la partie invariante V^G étant évidemment une sous-algèbre de V, de sorte qu'on peut voir V comme une V^G-algèbre).*

Démonstration. On montre plus généralement que si on a un morphisme

$$\rho : V_1 \to V_2$$

entre représentations de G qui sont des sommes de représentations finies, on a

$$R^{V_2} \circ \rho = \rho \circ R^{V_1}.$$

Ceci se montre exactement avec la même preuve que précédemment : Les sous-représentations irréductibles non triviales de V_1 sont nécessairement annulées par $R^{V_2} \circ \rho$.

Cela entraîne immédiatement le résultat si on applique cette observation au morphisme de représentations $V \to V$ donné par le produit par un élément de V^G.

∎

4.3 Quotients par les groupes réductifs

4.3.1 Cas affine

Soit $X = Spec\, A$ un schéma affine irréductible, où A est une k-algèbre de type fini. Supposons qu'on ait une action d'un groupe algébrique G sur X. Soit $A^G \subset A$ la sous-algèbre invariante.

Lemme 4.15 *Soit $I \subset A^G$ un idéal. Alors*

$$(I \cdot A) \cap A^G = I. \tag{4.3.1}$$

Démonstration. En effet, on a vu dans le lemme 4.11 que l'algèbre A est une somme de sous-représentations irréductibles de dimension finie, et donc admet un opérateur de Reynolds R^A. Cet opérateur est un morphisme de A^G-algèbres par le lemme 4.14. Soit $a = \sum_i a_i m_i \in A^G$ avec $a_i \in A$ et $m_i \in I$. Appliquant R^A, on obtient, du fait que $m_i \in A^G$:

$$R^A(a) = a = \sum_i m_i R^A(a_i) \in I.$$

■

Corollaire 4.16 *L'algèbre A^G est noethérienne.*

Démonstration. En effet si I_k est une suite croissante d'idéaux de A^G, on a $I_k = (I_k \cdot A) \cap A^G$, et comme la suite des idéaux $I_k \cdot A$ est stationnaire, il en va de même pour I_k. ■

En fait on a plus généralement :

Théorème 4.17 *(Hilbert) Si G est affine réductif et agit sur $X = Spec\, A$, A étant une k-algèbre de type fini, la sous-algèbre invariante A^G est aussi de type fini sur k.*

Soit $Y := Spec\, A^G$. C'est un k-schéma affine de type fini.

Théorème 4.18 *Le morphisme $\rho : X \to Y$ est un bon quotient.*

Démonstration. De toute évidence, ce morphisme est affine. Montrons qu'il est surjectif. Soit $y \in Y = Spec\, A^G$ un point fermé. Soit $I_y \subset A^G$ l'idéal de y, et soit $I := I_y A \subset A$. On a $I \cap A^G = I_y$ par le lemme 4.3.1. En particulier $I \neq A$. Soit $M \subset A$ un idéal maximal de A contenant $I \cdot A$. Alors $M \cap A^G = I_y$, de sorte que si $x \in Spec\, A$ est le point correspondant à M, on a $\rho(x) = y$.

Vérifions maintenant la propriété 3 de la définition 4.3. Soit $X' \subset X$ un fermé G-invariant de X. Soit $I \subset A$ l'idéal de X'. Alors $X' = Spec\, A/I$ et $\rho(X')$ admet pour clôture de Zariski $Spec\, A^G/A^G \cap I$. On va montrer que

$$A^G/A^G \cap I = (A/I)^G. \tag{4.3.2}$$

Cela entraîne que $\rho(X')$ est fermé, puisqu'on a vu précédemment que le morphisme

$$Spec\, A/I \to Spec\, (A/I)^G$$

est surjectif. Montrons (4.3.2) : L'injectivité du morphisme naturel $A^G/A^G \cap I \to (A/I)^G$ est évidente. Pour la surjectivité, prenons $\alpha \in (A/I)^G$. Cela signifie tout d'abord que le sous-espace vectoriel $K =< \alpha, I >$ de A est G-invariant, et d'autre part que G agit trivialement sur α modulo I. Mais l'inclusion $I \subset K$ admet un supplémentaire G-invariant qui est une droite, sur laquelle G agit comme sur K/I. Donc G agit trivialement sur le générateur $\tilde{\alpha}$ de cette droite qui s'envoie sur α. On a donc $\tilde{\alpha} \in A^G$, et $\alpha = \rho(\tilde{\alpha})$.

Soient maintenant deux fermés G-invariants X' et X'' disjoints de X, définis par des idéaux I et I' de A. Par le Nullstellensatz, on a $I + I' = A$. Appliquant l'opérateur de Reynolds à cette égalité, on obtient $I^G + I'^G = A^G$, ce qui montre que $\rho(X')$ et $\rho(X'')$ sont disjoints.

La propriété (2) est une conséquence immédiate de la définition $Y = Spec\, A^G$. ∎

4.3.2 Le quotient de $A_k^n \setminus \{0\}$ par G_m

Considérons maintenant un k-schéma X de type fini muni d'une action d'un groupe algébrique réductif G. On suppose que X est recouvert par des ouverts affines U_i invariants sous G et tels que les $U_i \cap U_j$ soient affines (c'est automatique si X est quasiprojectif).

Chaque $U_i = Spec\, A_i$ admet un bon quotient $Y_i := Spec\, A_i^G$. Les intersections $U_i \cap U_j = Spec\, A_{ij}$ sont affines G-invariantes, et

$$Spec\, A_{ij}^G \subset Spec\, A_i^G,\ Spec\, A_{ij}^G \subset Spec\, A_j^G$$

sont des ouverts de Zariski, comme il résulte du théorème 4.18 et de la définition d'un bon quotient.

On peut donc construire un bon quotient Y de X en recollant les $Spec\, A_i^G$ le long de leurs ouverts affines $Spec\, A_{ij}^G$.

Examinons le cas de l'action de G_m sur $A_k^n \setminus \{0\}$. Notons que chaque ouvert U_i de $A_k^n \setminus \{0\}$ défini par l'équation $X_i \neq 0$ est un ouvert affine invariant sous G_m. De plus, ces ouverts recouvrent $A_k^n \setminus \{0\}$. On a $U_i = Spec\, k[X_1, \ldots, X_n]_{X_i}$, où l'indice inférieur signifie la localisation le long de X_i. La partie invariante de $k[X_1, \ldots, X_n]_{X_i}$ sous G_m est la partie de degré 0, car G_m agit par multiplication scalaire sur les coordonnées. On en déduit (par définition du "*Proj*") que le quotient de $A_k^n \setminus \{0\}$ par G_m n'est autre que $\mathbb{P}_k^{n-1} = Proj\, k[X_1, \ldots, X_n]$.

4.3.3 Cas projectif, points stables et semi-stables

Soit maintenant X un schéma projectif, et soit G un groupe algébrique réductif agissant sur X. On suppose qu'il existe un fibré en droites L très ample sur X, tel que L soit G-linéarisé. G agit donc sur les sections de $L^{\otimes k}$ pour tout k.

Définition 4.19 *Un point $x \in X$ est semi-stable pour cette action linéarisée de G sur la variété polarisée (X, L), s'il existe un entier $k > 0$ et une section G-invariante $\sigma \in H^0(X, L^{\otimes k})^G$, tels que $\sigma(x) \neq 0$.*

Soit $X^{ss} \subset X$ l'ensemble des points semi-stables de X. Un bon quotient

$$X^{ss}//G$$

existe et est construit comme précédemment en observant que X^{ss} est couvert par des ouverts affines G-invariants. Notons aussi que le quotient $X^{ss}//G$ est projectif. En effet, écrivant $X = Proj\, A$ pour une k-algèbre graduée A, il résulte des deux constructions décrites précédemment (dans les sections 4.3.1 et 4.3.2) que $X^{ss}//G = Proj\, A^G$.

Définition 4.20 *Un point x de X est stable pour cette action de G sur la variété polarisée (X, L) s'il est semi-stable et si le morphisme $G \to X^{ss}$, $g \mapsto gx$ est propre.*

L'intérêt de cette dernière définition réside dans le fait suivant :

Proposition 4.21 *$X^s \subset X^{ss}$ est un ouvert de Zariski G-invariant, et le quotient $X^s//G$ est un quotient géométrique.*

Démonstration. La propreté du morphisme $G \to X^{ss}$, $g \mapsto gx$ est une propriété ouverte sur X^{ss}. Ceci garantit que $X^s \subset X^{ss}$ est ouvert. La propreté de ce morphisme garantit aussi que l'orbite Gx est fermée dans X^{ss}, et donc aussi dans X^s. Or on a vu que si on a un bon quotient et que les orbites sont fermées, c'est un quotient géométrique. ■

Une formulation de la (semi)-stabilité fait intervenir l'action de G sur le cône affine $\widehat{X}$ au-dessus de X (rappelons que $X = Proj\, A$, et on définit alors $\widehat{X}$ comme $Spec\, A$). La linéarisation est équivalente au fait que l'action de G sur X se relève en une action de G sur $\widehat{X}$, d'une façon qui commute avec l'action de G_m. Si x est un point de X, soit $\hat{x} \in \widehat{X}$ un relèvement de x.

Lemme 4.22 *Le point $x \in X$ est instable (c'est-à-dire n'est pas semi-stable) relativement à la linéarisation de l'action de G sur L si et seulement si la clôture de Zariski de l'image $G\hat{x}$ de l'application*

$$G \to \widehat{X},$$

$$g \mapsto g\hat{x},$$

contient $0 \in \widehat{X}$.

Démonstration. Soit $\overline{G\hat{x}}$ cette clôture de Zariski. Supposons que $\overline{G\hat{x}}$ contient 0. Soit P un polynôme homogène de degré > 0 G-invariant. Alors P fournit une fonction G-invariante sur $\widehat{X}$, et donc constante sur $\overline{G\hat{x}}$, qui s'annule en 0. Donc P s'annule sur $\overline{G\hat{x}}$ et en particulier en $\hat{x}$, de sorte que x est instable.

Inversement, si $\overline{G\hat{x}}$ ne contient pas 0, $\overline{G\hat{x}}$ est un ensemble G-invariant fermé qui ne rencontre pas 0. Comme $\widehat{X}$ est affine, il existe donc un polynôme P qui est G-invariant, vaut 0 en 0 et vaut 1 sur $\overline{G\hat{x}}$. Toutes ses composantes homogènes sont de degré > 0 et l'une de ses composantes homogènes Q ne s'annule pas identiquement sur $\overline{G\hat{x}}$. Donc $Q(x) \neq 0$ et x est semi-stable. ■

Proposition 4.23 *Le point x est stable (relativement à la linéarisation de l'action de G sur L) si et seulement si l'application*

$$G \to \widehat{X},$$

$$g \mapsto g\hat{x},$$

est propre.

Démonstration. Supposons d'abord x stable. Soit $\widehat{X^{inst}}$ le cône au-dessus de $X^{inst} := X \setminus X^{ss}$. (Si $X^{inst} := X \setminus X^{ss}$ est vide, on pose $\widehat{X^{inst}} = \{0\}$.) Soit $\widehat{X}^{ss} := \widehat{X} \setminus \widehat{X^{inst}}$. On a donc un morphisme (qui est une fibration en $A^1_k \setminus \{0\}$) :

$$\widehat{X}^{ss} \to X^{ss}.$$

Le morphisme $g \mapsto gx$ de G dans X^{ss} est propre ; d'autre part la clôture $\overline{G\widehat{x}}$ ne rencontre pas 0 d'après le lemme 4.22. Il en résulte que le morphisme $g \mapsto g\hat{x}$ de G dans $\widehat{X}^{ss}$ est aussi propre. (Il faut utiliser pour cela le fait que si $Z \subset \widehat{X}^{ss}$ est fermé et sa clôture dans $\widehat{X}$ ne contient pas 0, la projection naturelle $Z \to X^{ss}$ est propre.)

D'autre part, pour en déduire que $g \mapsto g\hat{x}$, $G \to \widehat{X}$ est propre, il suffit de voir que l'orbite $G\widehat{x}$ est fermée dans $\widehat{X}$. Mais sa clôture $\overline{G\widehat{x}}$ dans $\widehat{X}$ ne rencontre pas $\widehat{X^{inst}}$. En effet, le point x étant semi-stable, il existe un polynôme homogène G-invariant P tel que $P(\widehat{x}) \neq 0$. Or la fonction P est constante non nulle sur l'orbite $G\widehat{x}$ et donc aussi sur $\overline{G\widehat{x}}$. Donc tout point $\hat{y} \in \overline{G\widehat{x}}$ se projette sur un point semi-stable de X.

Inversement, supposons que l'application $g \mapsto g\hat{x}$, $G \to \widehat{X}$ est propre. Son image étant fermée, G-invariante et ne contenant pas 0, x est semi-stable par le lemme 4.22.

Il reste à voir que l'application $g \mapsto gx$, $G \to X^{ss}$ est propre. Le lemme 4.22 montre que $G\hat{x}$ est contenue dans $\widehat{X}^{ss}$ et comme $G\hat{x}$ est fermée dans $\widehat{X}$, l'application

$$G \to \widehat{X}^{ss},\ g \mapsto g\hat{x}$$

est propre à valeurs dans $\widehat{X}^{ss}$. De plus la clôture de $G\hat{x}$ dans $\widehat{X}$ ne contient pas 0. Donc l'application $g \mapsto gx$, $G \to X^{ss}$, composée de l'application $G \to \widehat{X}^{ss}$, $g \mapsto g\hat{x}$ et de la restriction à $G\hat{x}$ de la projection $\widehat{X}^{ss} \to X^{ss}$, est aussi propre.

■

4.4 Critère de Hilbert-Mumford

4.4.1 Sous-groupes à un paramètre

Définition 4.24 *Soit G un groupe algébrique. Un sous-groupe à un paramètre de G est un morphisme non constant de G_m dans G.*

Rappelons que si G agit de façon linéarisée sur une variété projective X, un point $x \in X$ est stable si et seulement si l'application

$$g \mapsto g\hat{x},\ G \to \widehat{X},$$

est propre. Rappelons le critère valuatif de propreté (cf. théorème 2.21) :

Théorème 4.25 *(cf [7]) Un morphisme*

$$\rho : Z \to Z'$$

de k-schémas est de type fini si et seulement si pour toute courbe lisse C définie sur k, et tout paire de morphismes :

$$\alpha : C \to Z',\ \beta : Spec\, k(C) \to Z,$$

satisfaisant la condition :

$$\rho \circ \beta = \alpha_{|Spec\, k(C)},$$

il existe un morphisme $\beta' : C \to Z$ *tel que* $\beta = \beta'_{|Spec\, k(C)}$.

Ceci dit que la propreté d'une application équivaut à la propreté de cette application restreinte aux courbes lisses de l'espace de départ. Le théorème suivant qu'on ne montrera pas est un analogue de cet énoncé pour l'étude de la (semi)-stabilité. Pour la stabilité, qui se vérifie en termes de propreté de l'application d'orbite, c'est déjà un raffinement du critère valuatif de propreté, puisque cet énoncé dit qu'il suffit de vérifier le critère valuatif sur les courbes données par les sous-groupes à un paramètre :

Théorème 4.26 *Soit G un groupe affine réductif agissant de façon linéarisée sur une variété projective X. Un point $x \in X$ est (semi-)stable pour cette action si et seulement si il est (semi-)stable pour l'action induite de tout sous-groupe à un paramètre de G.*

Dans le cas d'un sous-groupe $\rho : G_m \to G$ à un paramètre, la semi-stabilité et la stabilité sont très faciles à vérifier. Pour la stabilité, qui se traduit en termes de propreté de l'application d'orbite, il suffit que d'une part le stabilisateur de $\hat{x}$ dans G_m soit fini, (ce qui garantit que le morphisme $\rho_{\hat{x}} : G_m \to \widehat{X}$, $t \mapsto \rho(t)x$ est non constant,) et d'autre part ce morphisme ne s'étende ni en zéro ni en ∞, où l'on voit G_m comme $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, \infty\}$.

4.4.2 Pentes et critère de Hilbert-Mumford

Soit G un groupe algébrique agissant de façon linéarisée sur une variété projective polarisée $X \subset \mathbb{P}^n_k$. Le cône affine $\widehat{X}$ est contenu dans A^{n+1}_k et par définition d'une linéarisation, l'action de G sur X remonte en une action linéaire de G sur A^{n+1}_k, c'est-à-dire fournit une représentation linéaire $G \to Sl(n+1)$.

Soit $x \in X$ et $\hat{x} \in \widehat{X} \setminus \{0\}$ un point au-dessus de x. On a vu que la stabilité de x se réduit à montrer que pour tout sous-groupe à un paramètre

$$\rho : G_m \to G$$

l'application $\rho_x : t \mapsto \rho(t)x$ est non constante et ne s'étend pas en zéro. (En effet, en remplaçant ρ par ρ' défini par $\rho'(t) = \rho(t^{-1})$, la vérification à l'infini se réduit à une vérification en 0.) Considérons le composé $\chi : G_m \to G \to Sl(n+1)$. Tout sous-groupe à un paramètre de $Sl(n+1)$ se diagonalise dans une base adéquate de k^{n+1} et s'écrit dans une base adéquate

$$\chi(t)(u_1, \ldots, u_{n+1}) = (t^{\mu_1} u_1, \ldots, t^{\mu_{n+1}} u_{n+1}),\ \sum_i \mu_i = 0.$$

Définition 4.27 *La pente de x par rapport au sous-groupe à un paramètre ρ est le nombre*

$$\mu_\rho(x) = inf\,\{\mu_i,\, x_i \neq 0\}.$$

Ici les μ_i sont les poids introduits ci-dessus et les x_i sont les coordonnées de x dans la base diagonalisant ρ.

Nous avons le résultat suivant (critère numérique de Castelnuovo-Mumford) :

Lemme 4.28 *Le point $x \in X$ est stable si et seulement si pour tout sous-groupe à un paramètre $\rho : G_m \to G_m$, on a $\mu_\rho(x) < 0$. Il est semi-stable si et seulement si pour tout sous-groupe à un paramètre $\rho : G_m \to G_m$, on a $\mu_\rho(x) \leq 0$.*

Démonstration. En effet, le morphisme

$$t \mapsto \rho_x(t) = (t^{\mu_1}x_1, \ldots, t^{\mu_{n+1}}x_{n+1}),\ A^1_k \setminus \{0\} \to A^{n+1}_k$$

ne s'étend pas en $t = 0$ si et seulement si il existe un i avec $x_i \neq 0$ et $\mu_i < 0$.

Pour la semi-stabilité de x sous G_m, elle est équivalente à l'existence d'un polynôme homogène P sur $\widehat{X}$ qui est invariant sous G_m et ne s'annule pas en $\hat{x}$. Ceci équivaut clairement au fait que la clôture de Zariski de l'orbite $G_m x$ ne contienne pas 0. Or il est immédiat de vérifier que si $\mu_\rho(x) \geq 0$, on a

$$\lim_{t\to 0} \rho_x(t) = 0 \Leftrightarrow \mu_\rho(x) > 0.$$

■

4.4.3 Diviseurs de $\mathbb{P}^1$ et $\overline{M_{0,d}}$

Fixons un entier d et considérons l'espace projectif $X := \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(d)))$ paramétrant les diviseurs de degré d sur $\mathbb{P}^1_k$.

Le groupe $Sl(2)$ agit sur X. On peut s'intéresser au quotient $X//Sl(2)$. On a le résultat suivant :

Théorème 4.29 *Un diviseur D de $\mathbb{P}^1$ de degré d (autrement dit un point de X) est semi-stable pour l'action de $Sl(2)$ si et seulement si ses multiplicités sont $\leq \frac{d}{2}$ et stable si on a l'inégalité stricte.*

Démonstration. Supposons tout d'abord que D a un point x de multiplicité $a > \frac{d}{2}$. On peut supposer que $x = (0, 1)$ dans des coordonnées homogènes X, Y adéquates. L'équation F définissant D (qui est aussi le point $\widehat{D}$ dans la notation précédente) s'écrit donc $X^a B_1 \ldots B_{d-a}$, où les B_i sont des formes linéaires en X, Y ne s'annulant pas au point x défini par $X = 0$. Considérons le groupe a un paramètre donné par $\rho_t(X, Y) = (tX, t^{-1}Y)$. On a $\rho_t(F) = t^a X \prod_i \rho_t(B_i)$. Le dénominateur apparaissant dans $\prod_i \rho_t(B_i)$ est de degré $d - a$ en t, et comme $a > \frac{d}{2}$, il en résulte que $\lim_{t\to 0} \rho_t(F) = 0$. Ceci montre que la condition est nécessaire pour la semi-stabilité. Cela montre de même que la condition que les multiplicités sont $< \frac{d}{2}$ est nécessaire pour la stabilité, car dans le calcul précédent, on voit que si $a = \frac{d}{2}$, la limite $\lim_{t\to 0} \rho_t(F)$ existe.

Inversement, ρ étant comme ci-dessus, et a étant la multiplicité de D en 0, le calcul ci-dessus nous montre clairement que la pente $\mu_\rho(F)$ est égale à $2a - d$, et le critère numérique 4.28 nous dit donc que la condition $a \leq \frac{d}{2}$ pour tout point de D entraîne la semi-stabilité, et de même pour la stabilité. ■

Remarque 4.30 La théorie des invariants géométriques nous donne un quotient $\mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^1_k, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1_k}(d)))//Sl(2)$ qui est une variété projective contenant un ouvert M_0^d paramètrant les orbites de d points distincts sur $\mathbb{P}^1_k$ sous l'action de $Sl(2)$. Ceci n'est pas l'espace de modules $\overline{M_0^d}$, qui est une autre compactification de cet espace M_0^d. L'espace $\overline{M_0^d}$ paramètre des courbes rationnelles singulières (nodales) munies de d points distincts pris en dehors des singularités.

Chapitre 5

Stabilité géométrique et stabilité GIT

5.1 Actions de groupes sur certaines grassmanniennes

Rappelons que nous avons ramené dans le chapitre 3 la construction des espaces de modules de faisceaux sans torsion (sur une surface lisse projective, mais la construction est valable en toute généralité) à la construction d'un quotient d'un schéma $Quot_{X,N,P}$ par un certain groupe linéaire. Ceci nous a amenés à écarter les faisceaux instables, qui ne peuvent pas être paramétrés par un nombre fini de familles. Ce schéma $Quot_{X,N,P}$ peut être plongé dans une certaine grassmannienne $G(r, V \otimes W)$, où $V \cong k^N$, et $W \cong H^0(S, \mathcal{O}_S(n))$ pour n grand. L'action de groupe est induite par l'action de $Sl(N)$ sur V et est triviale sur W.

Exercice 5.1 *Montrer que cette action est linéarisée pour le plongement de Plücker.*

Dans ce chapitre, on se propose d'étudier le quotient du schéma $Quot_{X,N,P}$ par les méthodes du chapitre précédent. Le principal problème que nous allons rencontrer désormais est le suivant : le schéma $Quot_{X,N,P}$ paramètre des faisceaux cohérents de polynôme de Hilbert P et quotients de $\mathcal{O}_X^N$. Certains de ces faisceaux ne sont pas semi-stables ou μ-semi-stables. D'autre part, un point du schéma $Quot_{X,N,P}$ plongé dans une grassmannienne peut être stable ou instable ou semi-stable relativement à l'action du groupe linéaire considéré. La question est : Etant donné un quotient $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X^N(-l)$, quelle est la relation entre la stabilité du faisceau quotient $\mathcal{F}$ et la stabilité du point $q : \mathcal{O}_X^N \to \mathcal{F}$ de $Quot_{X,N,P}$?

La réponse est que ces deux notions sont équivalentes, à condition de choisir le plongement du schéma $Quot_{X,N,P}$ de façon adéquate. De même pour la semi=stabilité.

L'argument donné ici est dû à Simpson (cf [10], [16]). Nous le donnerons dans le cas où X est maintenant une courbe, ce qui simplifie certains détails techniques. Notons que dans ce cas, il n'y a qu'une notion de semi-stabilité, équivalente à la notion de μ-semi-stabilité, et indépendante de la polarisation. En effet, le polynôme de Hilbert d'un faisceau ne dépend alors que de son rang et de son degré, le quotient étant la pente, alors que dans le cas des surfaces il dépendait également de la seconde classe de Chern c_2.

5.1.1 Etude du critère de Hilbert-Mumford

Nous allons calculer ici les points stables de $G(r, V \otimes W)$ pour l'action de $Sl(V)$.

Théorème 5.2 *Un point $K \in G(r, V \otimes W)$ est stable pour l'action de $Sl(V)$ si et seulement si pour tout sous espace vectoriel $0 \neq V' \subsetneq V$, notant $K' := K \cap (V' \otimes W)$, on a*

$$\frac{dim\, K'}{dim\, K} < \frac{dim\, V'}{dim\, V}.$$

De même, le point K est semi-stable si l'égalité a lieu pour tout $V' \neq 0$.

Remarque 5.3 On peut noter l'analogie, qui n'est nullement un hasard, avec la définition de la μ-(semi)-stabilité d'un faisceau. Ce critère nous permettra plus loin de calculer les points stables du schéma *Quot*.

Démonstration du théorème 5.2. On va montrer que cette condition est nécessaire. Supposons par l'absurde qu'il existe un sous-espace vectoriel $V' \subset V$ tel que $\frac{dim\, K'}{dim\, K} \geq \frac{dim\, V'}{dim\, V}$. Soit V'' un supplémentaire de V' dans V, et notant $v' := dim\, V'$, $v'' = dim\, V''$, considérons le sous-groupe à un paramètre

$$\rho : G_m \to Sl(V),\ \rho(t)_{|V'} = t^{v''} Id_{V'},\ \ \rho(t)_{|V''} = t^{-v'}_{|V''}.$$

Soit $k' := dim\, K'$. Alors si $e_1, \ldots, e_{k'}$ est une base de K', complétée en une base de K par des vecteurs $f_1, \ldots, f_{k''}$, $k'' = dim\, K - k'$, le sous-groupe $\rho(t)$ agit sur le multivecteur $p_K := e_1 \wedge \ldots e_{k'} \wedge f_1 \wedge \ldots \wedge f_{k''}$, qui est le représentant de K dans le plongement de Plücker par

$$\rho(t) p_K = t^{v''k'} e_1 \wedge \ldots \wedge e_{k'} \wedge \rho(t) f_1 \wedge \ldots \wedge \rho(t) f_{k''}.$$

Les vecteurs f_i ont des projections indépendantes dans $V'' \otimes W$. Donc la projection de p_K dans $\bigwedge^{k'}(V' \otimes W) \otimes \bigwedge^{k''}(V'' \otimes K)$ est non nulle. On trouve donc que $\mu_\rho(K') = v''k' - v'k''$. Or l'inégalité $\frac{dim\, K'}{dim\, K} \geq \frac{dim\, V'}{dim\, V}$ est aussi équivalente à $v''k' - v'k'' \geq 0$ car $k'' = dim\, K - k'$, $v'' = dim\, V - v'$. Donc $\mu_\rho(K) \geq 0$ et le point K n'est pas stable.

Dans l'autre direction, prenons un sous-groupe à un paramètre de $SL(V)$, qui se diagonalise en

$$\rho(t) = (t^{\mu_1} Id_{V_1}, \ldots, t^{\mu_r} Id_{V_r})$$

dans une décomposition

$$V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$$

de V. Notant $r_i = dim\, V_i$, on doit avoir $\sum_i r_i \mu_i = 0$. On suppose que $\mu_1 > \ldots > \mu_r$. Posons $V_i' := V_1 \oplus \ldots \oplus V_i$, et soit $K_i := (V_i' \otimes W) \cap K$. Soit $k_i := dim\, K_i / K_{i-1}$. On montre que

$$\mu_\rho(p_K) = \sum_i k_i \mu_i.$$

Posant $k_i' := k_1 + \ldots + k_i = dim\, K_i$, on a donc $k_i = k_i' - k_{i-1}'$, d'où

$$\mu_\rho(p_K) = \sum_i (k_i' - k_{i-1}') \mu_i = \sum_i k_i' (\mu_i - \mu_{i+1}) + (dim\, K) \mu_r.$$

Il reste donc à montrer que $\sum_i k'_i(\mu_i - \mu_{i+1}) + (dim\, K')\mu_r < 0$. Or on a par hypothèse

$$\frac{k'_i}{dim\, K} < \frac{dim\, V'_i}{dim\, V}.$$

Donc $\sum_i k'_i(\mu_i - \mu_{i+1}) + (dim\, K)\mu_r < \frac{dim\, K}{dim\, V}(\sum_i dim\, V'_i(\mu_i - \mu_{i+1}) + \mu_r dim\, V)$. Or le terme de droite vaut 0 car $dim\, V'_i - dim\, V'_{i-1} = dim\, V_i$ et $\sum_i \mu_i dim\, V_i = 0$.

On raisonne de même pour la semi-stabilité. ∎

5.1.2 Application aux points du schéma *Quot*

X est ici une courbe projective lisse de genre g. On choisit un polynôme de Hilbert $P(n) = rn + d + r(1-g)$. On s'intéresse aux faisceaux quotients sans torsion $\mathcal{F}$ de $\mathcal{O}_X^N$ de polynôme de Hilbert P, tels que l'application quotient induise un isomorphisme

$$H^0(X, \mathcal{O}_X^N) \cong H^0(X, \mathcal{F}).$$

Rappelons que pour un polynôme de Hilbert P fixé, on a montré qu'il existe un entier l tel que tout faisceau semi-stable de polynôme de Hilbert P est un tel quotient de $\mathcal{O}_X^N(-l)$, de façon que l'application

$$H^0(X, \mathcal{O}_X^N) \to H^0(X, \mathcal{F}(l))$$

soit un isomorphisme. Tensorisant les faisceaux $\mathcal{F}$ par $\mathcal{O}_X(l)$ (où l ne dépend que de P), on est ramené à la situation précédente. (Noter que cette opération change le polynôme de Hilbert : $P_l(n) = P(l+n)$.) Dans la suite P sera en fait P_l. On s'autorise dans la suite à prendre un l très grand dépendant de P, X, $deg\, \mathcal{O}_X(1)$. D'autre part, le schéma $Quot_{X,N,P}$ est plongé dans $Grass\,(r, V \otimes W)$, où

$$V = k^N,\ r = dim\, V \otimes W - P(n),\ W = H^0(X, \mathcal{O}_X(n)).$$

On s'autorisera à prendre n très grand dépendant de P, X, $deg\, \mathcal{O}_X(1)$. On a tout d'abord le résultat suivant :

Proposition 5.4 *Un point $q : \mathcal{O}_X^N \to \mathcal{F}$ du schéma*

$$Quot_{X,N,P} \subset Grass\,(r, V \otimes W)$$

est semi-stable pour l'action de $Sl(V)$ si et seulement si pour tout sous-espace vectoriel $V' \subset V$, notant $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ le sous-faisceau engendré par V', c'est-à-dire $q(V' \otimes \mathcal{O}_X)$, on a

$$\frac{P_{\mathcal{F}'}}{dim\, V'} \geq \frac{P}{dim\, V}. \tag{5.1.1}$$

Ici l'ordre des polynômes (de degré 1) est lexicographique : $P' \leq P$ si le terme dominant de P' est strictement inférieur à celui de P', ou bien ils sont égaux et le terme constant de P' est inférieur ou égal à celui de P.

Démonstration. On utilise le théorème 5.2. Celui-ci nous dit que le point q, correspondant au sous-espace $K = Ker\,(V \otimes H^0(X, \mathcal{O}_X(n)) \to H^0(X, \mathcal{F}(n)))$ de $Grass(r, V \otimes W)$ satisfait la condition que pour tout $V' \subset V$, on a

$$\frac{dim\,(V' \otimes W) \cap K}{dim\,V'} \leq \frac{dim\,K}{dim\,V}. \tag{5.1.2}$$

Notons que par définition de K, $(V' \otimes W) \cap K$ est le noyau de la flèche

$$V' \otimes W \to H^0(X, \mathcal{F}'(n))$$

tandis que K est le noyau de la flèche surjective :

$$V \otimes W \to H^0(X, \mathcal{F}(n))$$

L'inégalité (5.1.2) fournit donc

$$\frac{P_{\mathcal{F}'}(n)}{dim\,V'} \geq \frac{P_{\mathcal{F}}(n)}{dim\,V}.$$

Pour conclure, il faut noter que l'inégalité ci-dessus pour n fixé assez grand (dépendant de P, N) entraîne l'inégalité (5.1.1), ce qui est dû au fait qu'il n'y a qu'un nombre fini de polynômes de Hilbert possibles pour les $\mathcal{F}'$ ci-dessus, indépendamment du choix de $\mathcal{F}$.

■

Remarque 5.5 Cette condition peut sembler aller dans le sens contraire à l'inégalité de pentes ou de polynômes de Hilbert qui décrit la semi-stabilité géométrique. Il n'en est rien. En effet, supposons pour simplifier que $dim\,V' = h^0(X, \mathcal{F}')$ et $h^1(X, \mathcal{F}') = 0$. On a alors

$$P_{\mathcal{F}'}(l) = r'ld + deg\,\mathcal{F}' + r'(1-g),$$

où $r' = rang\,\mathcal{F}'$, $d = deg\,L$. Sous les hypothèses ci-dessus, on trouve donc

$$\frac{P_{\mathcal{F}'}(l)}{rang\,V'} = \frac{r'ld + deg\,\mathcal{F}' + r'(1-g)}{deg\,\mathcal{F}' + r'(1-g)}$$

$$= \frac{ld + \mu(\mathcal{F}') + 1 - g}{\mu(\mathcal{F}') + 1 - g}.$$

De même on a

$$\frac{P(l)}{rang\,V} = \frac{ld + \mu(\mathcal{F}) + 1 - g}{\mu(\mathcal{F}) + 1 - g}$$

et on voit donc que $\frac{P_{\mathcal{F}'}}{rang\,V'} \geq \frac{P}{rang\,V}$ équivaut à

$$\mu(\mathcal{F}') \leq \mu(\mathcal{F})$$

dès que

$$\mu(\mathcal{F}) + 1 - g > 0,\ \mu(\mathcal{F}') + 1 - g > 0.$$

Les inégalités vont donc bien dans le bon sens !

5.2 Stabilité des faisceaux cohérents

5.2.1 Une autre caractérisation de la μ-(semi)-stabilité

Le lemme suivant nous sera utile par la suite. Nous allons le montrer seulement pour des faisceaux engendrés par N sections, ce qui est le cas que nous considérons désormais. Cependant il est vrai plus généralement, ce qu'on voit en combinant l'argument ci-dessous et les résultats de la section 3.3.3.

On considère donc des faisceaux cohérents sans torsion de polynôme de Hilbert P fixé et quotients de $\mathcal{O}_X^N$. Ce qui suit est une caractérisation simplifiée de la semi-stabilité :

Proposition 5.6 *Il existe un entier l ne dépendant que de N et P (et bien sûr de $(X, \mathcal{O}_X(1))$), tel que un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ comme ci-dessus est semi-stable si et seulement si pour tout sous-faisceau cohérent $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ non trivial (et saturé), on a*

$$\frac{h^0(X, \mathcal{F}'(l))}{r'} \leq \frac{h^0(X, \mathcal{F}(l))}{r},$$

où $r = rang\, \mathcal{F}$, $r' = rang\, \mathcal{F}'$. De même $\mathcal{F}$ est stable si l'inégalité stricte a lieu ci-dessus lorsque $\mathcal{F}' \neq \mathcal{F}$.

Démonstration. Supposons que $\mathcal{F}$ soit semi-stable de pente μ. Considérons les sous-faisceaux $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$. Un tel sous-faisceau $\mathcal{F}'$ admet une filtration de Harder-Narasimhan

$$0 \neq \mathcal{F}'_0 \subset \ldots \mathcal{F}'_s = \mathcal{F}'$$

où les $\mathcal{F}'_i$ sont sans torsion semi-stables de pentes μ_i strictement décroissantes. Soit $r_i = rang\, \mathcal{F}'_i/\mathcal{F}'_{i-1}$, $i \geq 1$. La semi-stabilité de $\mathcal{F}$ implique $\mu_0 \leq \mu$.

On a le lemme suivant :

Lemme 5.7 *Notant $E(t)$ la partie entière d'un nombre t, pour tout faisceau semi-stable $\mathcal{G}$ de pente $\mu_\mathcal{G}$ et de rang $r_\mathcal{G}$, on a*

$$\frac{h^0(X, \mathcal{G})}{r_\mathcal{G}} \leq Sup\,\{E(\mu_\mathcal{G} + 1), 0\}.$$

Démonstration. En effet si $\mu_\mathcal{G} < 0$, la semi-stabilité de $\mathcal{G}$ implique $h^0(X, \mathcal{G}) = 0$ et donc on a bien l'inégalité voulue. En général, supposons $\mu_\mathcal{G} \geq 0$ et $\frac{h^0(X,\mathcal{G})}{r_\mathcal{G}} > E(\mu_\mathcal{G} + 1)$. Soit $D \subset X$ un diviseur effectif de degré $E(\mu_\mathcal{G} + 1)$. Alors $h^0(X, \mathcal{G}(-D)) \neq 0$ ce qui contredit le fait que $\mathcal{G}(-D)$ est semi-stable de pente < 0. ■

Appliquons ce lemme aux gradués successifs $\mathcal{F}'_i/\mathcal{F}'_{i-1}$ tordus par $\mathcal{O}_X(n)$. Il vient :

$$\frac{h^0(X, \mathcal{F}'(n))}{r'} \leq \sum_i \frac{r_i}{r'} h^0(X, \mathcal{F}'_i/\mathcal{F}'_{i-1}(n))$$

$$\leq \sum_i \frac{r_i}{r'} Sup\,(E(\mu_i + n + 1), 0\}.$$

Comme on a $r_s \geq 1$, $\mu_i \leq \mu_0 \leq \mu$, notant $\nu := \mu_s$, on obtient :

$$\frac{h^0(X,\mathcal{F}'(n))}{r'} \leq \frac{r'-1}{r'} Sup\,(E(\mu+n+1),0\} + \frac{1}{r'} Sup\,\{E(\nu+n+1),0\},$$

et comme $r \geq r'$, $Sup\,(E(\mu+n+1),0\} \geq Sup\,\{E(\nu+n+1),0\}$, cela fournit aussi

$$\frac{h^0(X,\mathcal{F}'(n))}{r'} \leq \frac{r-1}{r} Sup\,(E(\mu+n+1),0\} + \frac{1}{r} Sup\,\{E(\nu+n+1),0\}.$$

Supposons tout d'abord que $\nu < \mu - gr$. Alors l'inégalité ci-dessus fournit pour $n+1+\mu gr \geq 0$:

$$\frac{h^0(X,\mathcal{F}'(n))}{r'} \leq \frac{r-1}{r} E(\mu+n+1) + \frac{1}{r} E(\mu+n+1-gr) \leq \mu+n+1-g,$$

ce dernier terme étant $\leq \frac{h^0(X,\mathcal{F}(n))}{r}$ par la formule de Riemann-Roch.

Il reste à considérer le cas où $\nu \geq \mu - gr$. Ce cas est facile. En effet, dans ce cas la pente de $\mathcal{F}'$ est supérieure ou égale à une constante ne dépendant que de μ et donc le quotient $\mathcal{F}'' := \mathcal{F}/\mathcal{F}'$ est de rang et de pente bornés. Par ailleurs $\mathcal{F}''$ est un quotient de $\mathcal{O}_X^N$. On a déjà vu (corollaire 2.19) qu'il existe alors une union finie de schémas *Quot* qui sont quasiprojectifs (en fait projectifs) et paramètrent les tels quotients $\mathcal{F} \to \mathcal{F}''$. Il existe donc un entier l ne dépendant que de $X, \mathcal{O}_X(1)$, N, P tel que pour tout sous-faisceau $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ avec $\nu(\mathcal{F}') \geq \mu - gr$ on ait

$$H^1(X,\mathcal{F}'(l)) = 0,\; H^1(X,\mathcal{F}(l)) = 0.$$

La formule de Riemann-Roch et l'inégalité $\mu_{\mathcal{F}'} \leq \mu_{\mathcal{F}}$ impliquent alors

$$\frac{h^0(X,\mathcal{F}'(l))}{r'} \leq \frac{h^0(X,\mathcal{F}(l))}{r}.$$

Inversement, nous voulons montrer qu'il existe un entier l tel que si $\mathcal{F}$ est instable, l'inégalité

$$\frac{h^0(X,\mathcal{F}'(l))}{r'} > \frac{h^0(X,\mathcal{F}(l))}{r}$$

est satisfaite pour un faisceau (saturé) $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$. (Ici $\mathcal{F}$ est de polynôme de Hilbert fixé P et quotient de $\mathcal{O}_X^N$). Or il existe une union finie de schémas projectifs paramétrant les paires $(\mathcal{F}, q : \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{F}'')$, où le quotient $\mathcal{F}''$ est de pente $< \mu$. En effet, il n'y a qu'un nombre fini de polynômes de Hilbert possibles pour de tels faisceaux $\mathcal{F}''$, et le résultat découle donc du corollaire 2.19.

Il en résulte qu'il existe un entier l ne dépendant que de P, N, $X, \mathcal{O}_X(1)$, tel que pour toute paire comme ci-dessus, avec $\mu(\mathcal{F}') > \mu(\mathcal{F})$, le faisceau $\mathcal{F}'$ satisfait $h^1(X,\mathcal{F}'(l)) = 0$. Alors on a

$$\frac{h^0(X,\mathcal{F}'(l))}{r'} > \frac{h^0(X,\mathcal{F}(l))}{r}$$

■

5.2.2 Comparaison des stabilités-pentes et stabilités GIT

On considère comme toujours des faisceaux localement libres de rang r (c'est-à-dire sans torsion car on est sur une courbe) de polynôme de Hilbert P fixé et quotients de $\mathcal{O}_X^N$. Quitte à remplacer ces faisceaux $\mathcal{F}$ par $\mathcal{F}(l)$, où l ne dépend que de P et N, on peut supposer que la conclusion de la proposition 5.6 est satisfaite. Ceci décale bien sûr P en P_l, $P_l(n) = P(l+n)$. On peut également changer N en $N' = P(l)$.

Ainsi, les faisceaux semi-stables quotients de $\mathcal{O}_X^N$ de polynôme de Hilbert P_l sont caractérisés par le fait que

$$\frac{h^0(X,\mathcal{F}')}{r'} \leq \frac{h^0(X,\mathcal{F})}{r}$$

pour tout $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ de rang r'.

Le schéma $Quot_{X,N',P_l}$ admet d'après les résultats de la section 2.3 un plongement naturel j_n dans $Grass\,(V \otimes H^0(X, \mathcal{O}_X(n)))$, $V = k^{N'}$, $N' = P_l(0)$ pour tout n suffisamment grand. Le groupe $Sl(V)$ agit de façon linéarisée sur cette grassmannienne. Lorsque le quotient $q : V \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ satisfait la propriété que l'application induite $V \to H^0(X,\mathcal{F})$ est un isomorphisme, il est clair que la donnée de $\mathcal{F}$ équivaut à celle de q modulo l'action de $Sl(V)$.

Donnons-nous un quotient $q : V \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ avec $P_{\mathcal{F}} = P_l$, $P_l(0) = dim\,V$. On a le résultat suivant :

Théorème 5.8 *Pour n suffisamment grand, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{F}$ est (semi)-stable et q induit un isomorphisme $V \cong H^0(X,\mathcal{F})$.*
2. *Le point $j_n(q)$ est (semi)-stable pour l'action de $Sl(V)$.*

Démonstration. On se contentera de montrer les implications suivantes : 1 (stable) $\Rightarrow$ 2 (semi-stable) et 2 (stable) $\Rightarrow$ 2 (semi-stable).

1 $\Rightarrow$ 2 : On suppose que $\mathcal{F}$ est stable et que $q : V \otimes \mathcal{O}_X \to \mathcal{F}$ induit un isomorphisme $V \cong H^0(X,\mathcal{F})$. On applique le critère donné par la proposition 5.4. Il faut donc montrer que pour tout $0 \neq V' \subsetneq V$ engendrant $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, on a l'inégalité de polynômes :

$$\frac{P_{\mathcal{F}'}}{dim\,V'} > \frac{P_{\mathcal{F}}}{dim\,V'}.$$

Mais le terme dominant de ces polynômes est respectivement

$$\frac{r'd}{dim\,V'}, \frac{rd}{dim\,V},$$

où $r' = rang\,\mathcal{F}'$, $r = rang\,\mathcal{F}$, $d = deg\,\mathcal{O}_X(1)$. Donc il suffit de montrer que

$$\frac{r'}{dim\,V'} > \frac{r}{dim\,V},$$

ou encore

$$\frac{dim\,V'}{r'} < \frac{dim\,V}{r}. \tag{5.2.3}$$

Or comme l'application $V' \to H^0(X,\mathcal{F})$ est injective et l'application $V \to H^0(X,\mathcal{F})$ est bijective, (5.2.3) est entraînée par l'inégalité

$$\frac{h^0(X,\mathcal{F}')}{r'} < \frac{h^0(X,\mathcal{F})}{r}$$

ci-dessus.

$2 \Rightarrow 1$: On suppose que le point $j_n(q)$ est stable pour l'action de $SL(V)$. Le critère donné par la proposition 5.4 est donc satisfait. Cela entraîne tout d'abord que $q : V \to H^0(X,\mathcal{F})$ est injectif, car sinon on pose $V' = Ker\, q \subset V$, et on a $\mathcal{F}' = 0$ d'où $P_{\mathcal{F}'} = 0$, contredisant le fait que $\frac{P_{\mathcal{F}'}}{dim\, V'} > \frac{P_{\mathcal{F}}}{dim\, V}$ et que $P_{\mathcal{F}}$ est un polynôme de degré > 0. Par ailleurs, comme on a pris l suffisamment grand, on sait que $h^1(X,\mathcal{F}) = 0$ et donc $h^0(X,\mathcal{F}) = dim\, V$. Donc $q : V \to H^0(X,\mathcal{F})$ est un isomorphisme.

On veut maintenant montrer que $\mathcal{F}$ est semi-stable, c'est-à-dire d'après la proposition 5.6 et notre choix de l que

$$\frac{h^0(X,\mathcal{F}')}{r'} \leq \frac{h^0(X,\mathcal{F})}{r},$$

pour tout sous-faisceau cohérent $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$. On peut bien entendu supposer que $\mathcal{F}'$ est engendré par ses sections. Soit $V' := H^0(X,\mathcal{F}') \subset H^0(X,\mathcal{F}) = V$. On veut montrer que

$$\frac{dim\, V'}{r'} \leq \frac{dim\, V}{r},$$

On a d'après la proposition 5.4

$$\frac{P_{\mathcal{F}'}}{dim\, V'} \geq \frac{P_{\mathcal{F}}}{dim\, V}.$$

Mais le terme dominant de ces polynômes est respectivement

$$\frac{r'd}{dim\, V'}, \frac{rd}{dim\, V},$$

où $r' = rang\, \mathcal{F}'$, $r = rang\, \mathcal{F}$, $d = deg\, \mathcal{O}_X(1)$. On a donc bien $\frac{r'}{dim\, V'} \leq \frac{r}{dim\, V}$.

■

5.2.3 Points semi-stables non stables

On a construit ci-dessus un espace de modules $M(r,d)$ pour les faisceaux semi-stables sans torsion sur une courbe X lisse projective de genre g. La construction s'étend en dimension supérieure mais les lemmes utilisés deviennent plus difficiles à montrer. Cet espace de modules se présente, à condition de prendre d suffisamment grand, comme le quotient d'un schéma $Quot(V \otimes \mathcal{O}_X^N)$ plongé dans une grassmannienne $G(r, V \otimes W)$ où $W = H^0(X, \mathcal{O}_X(n))$ avec n suffisamment grand. Le groupe qui agit est le groupe $Sl(V)$ agissant naturellement sur cette grassmannienne.

Cet espace de modules contient un ouvert de points stables $M(r,d)^s$ dont les points paramètrent exactement les fibrés stables de rang r et degré d, d'après le théorème 5.8. Les points du bord $M(r,d)^{ss} \setminus M(r,d)^s$ paramètrent des classes d'équivalence de faisceaux semi-stables pour une relation qu'on décrira géométriquement ci-dessous, et qui du point de vue de la théorie des invariants géométriques correspond au fait que les clôtures des orbites s'intersectent.

Cet espace de modules satisfait la propriété suivante :

Proposition 5.9 *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur $S \times X$, plat sur S et dont la restriction aux fibres $t \times X$ est semi-stable, de rang r et degré d. Alors il existe un morphisme $\phi : S \to M(r,d)$ qui à un point $s \in S$ associe la classe d'équivalence du faisceau $\mathcal{F}_s$.*

Démonstration. En effet, on peut localement sur des ouverts U recouvrant S, à l'aide du théorème 3.18, déduire de $\mathcal{F}$ un morphisme de U à valeurs dans le schéma *Quot* ci-dessus. Ce morphisme est d'après le théorème 5.8 à valeurs dans la partie semi-stable du schéma *Quot* pour l'action de $Sl(V)$ (à condition de prendre un plongement adéquat du schéma *Quot*). Par composition avec l'application quotient, il fournit donc un morphisme à valeurs dans $M(r,d) = Quot^{ss}//Sl(V)$. Il est clair que les différents morphismes coïncident sur les intersections et fournissent donc le morphisme cherché. ∎

Décrivons maintenant les points du bord :

Théorème 5.10 *Deux faisceaux semi-stables $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de rang r et degré d sur X sont représentés par le même point de $M(r,d)$ si et seulement si ils ont des gradués de Jordan-Hölder (cf théorème 3.11) isomorphes.*

Démonstration. Pour un faisceau semi-stable sans torsion $\mathcal{F}$ sur X de pente μ, tous les morceaux du gradué $Gr_j^{JH}(\mathcal{F})$ de Jordan-Hölder sont de même pente μ. Le faisceau

$$\oplus_j Gr_j^{JH}(\mathcal{F})$$

est donc semi-stable de mêmes invariants numériques que $\mathcal{F}$. Montrons que $\mathcal{F}$ et $\oplus_j Gr_j^{JH}(\mathcal{F})$ sont représentés par le même point dans $M(r,d)$. Supposons pour simplifier que le gradué n'a que deux termes. Alors $\mathcal{F}$ entre dans une suite exacte

$$0 \to \mathcal{F}_0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{F}_1 \to 0,$$

qui est décrite par une extension $e \in Ext^1_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_0)$. Ici $\mathcal{F}_0$ et $\mathcal{F}_1$ sont stables de même pente μ. Sur $A^1_k \times X$, $A^1_k = Spec\, k[t]$, considérons la classe d'extension $te \in Ext^1_{\mathcal{O}_{A^1_k \times X}}(pr_2^*\mathcal{F}_1, pr_2^*\mathcal{F}_0)$. Cette classe fournit un faisceau $\mathcal{G}$ sur $A^1_k \times X$, plat sur A^1_k, et ayant la propriété que toutes ses fibres $\mathcal{G}_s$, $s \in A^1_k$ sont semi-stables d'après le lemme 3.9, isomorphes à $\mathcal{F}$ pour $s \neq 0$, la fibre $\mathcal{G}_0$ étant isomorphe à $\mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1$. Le morphisme associé $A^1_k \to M(r,d)$ est donc constant, puisqu'il est constant en dehors de 0, de sorte que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1$ sont représentés par le même point de $M(r,d)$.

Inversement, il suffit de voir que si $\mathcal{F}$ s'identifie à son gradué de Jordan-Hölder, c'est-à-dire est une somme directe

$$\mathcal{F} = \oplus_i \mathcal{F}_i \tag{5.2.4}$$

de faisceaux stables de même pente, correspondant à un point d'un schéma $Quot(V\otimes\mathcal{O}_X)$, son orbite sous $Sl(V)$ est fermée. Mais l'argument donné ci-dessus montre que l'adhérence de l'orbite $O_{\mathcal{F}}$ contient au moins un point qui paramètre un faisceau $\mathcal{F}'$ qui est une somme directe de l' faisceaux stables de même pente. Notons que les faisceaux $\mathcal{F}_t$ paramétrés par $\mathcal{O}_{\mathcal{F}}$ sont isomorphes à $\mathcal{F}$ et satisfont donc d'après la proposition 3.7 et le corollaire 3.8 $dim\,Hom\,(\mathcal{F}_i,\mathcal{F}_t)=m_i$, où m_i est le nombre de faisceaux stables isomorphes à $\mathcal{F}_i$ apparaissant dans la décomposition (5.2.4) de $\mathcal{F}$. Il en résulte par semi-continuité supérieure de h^0 que $dim\,Hom\,(\mathcal{F}_i,\mathcal{F}')\geq m_i$. Comme $\mathcal{F}'$ est une somme directe de faisceaux stables de même pente que chaque $\mathcal{F}_i$, on en déduit toujours par la proposition 3.7 et le corollaire 3.8 que la multiplicité avec laquelle $\mathcal{F}_i$ apparaît dans la décomposition de $\mathcal{F}'$ est $\geq m_i$. Donc $\mathcal{F}\cong\mathcal{F}'$, et $\mathcal{F}'$ est dans l'orbite de $\mathcal{F}$.

■

Chapitre 6

Stabilité et métriques d'Hermite-Einstein

6.1 Rappels de géométrie complexe

6.1.1 Variétés complexes

Une variété complexe compacte X est une variété différentiable compacte sur laquelle on s'est donné des cartes $\phi_i : U_i \cong V_i$, où les U_i forment un recouvrement ouvert de X et les V_i sont des ouverts de $\mathbb{C}^n$, les isomorphismes ϕ_i étant des difféomorphismes tels que les $\phi_j \circ \phi_i^{-1}$ soient holomorphes là où ils sont définis, c'est-à-dire sur $\phi_i(U_i \cap U_j)$.

Notons que comme les fonctions de transition sont holomorphes, elles sont de classe analytique, et donc X est en particulier une variété différentiable de classe C^∞.

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert U de X.

Définition 6.1 *f est dite holomorphe sur U, si le composé $f \circ \phi_i^{-1}$, défini sur l'ouvert $\phi_i(U \cap U_i)$ de $\mathbb{C}^n$, est une fonction holomorphe sur cet ouvert.*

Cette définition est cohérente car on sait que $\phi_j^{-1} \circ \phi_i$ est holomorphe, et que la composition d'applications holomorphes est holomorphe, de sorte que $f \circ \phi_i^{-1}$ est holomorphe sur $\phi_i(U \cap U_i \cap U_j)$ si et seulement si $f \circ \phi_j^{-1}$ est holomorphe sur $\phi_j(U \cap U_i \cap U_j)$.

On peut introduire le faisceau des fonctions holomorphes $\mathcal{O}_X$ sur une variété complexe X. C'est le sous-faisceau du faisceau des fonctions différentiables à valeurs complexes qui à $U \subset X$ associe l'ensemble des fonctions holomorphes sur U (noter que c'est un anneau, et plus précisément une $\mathbb{C}$-algèbre, car la somme et le produit de deux fonctions holomorphes est holomorphe).

Muni de ce faisceau d'anneaux, X est un espace localement annelé, localement isomorphe à $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n})$. Lorsqu'on a une variété projective définie sur $\mathbb{C}$ qu'on verra comme une variété complexe, on doit en principe distinguer les topologies (usuelle et Zariski), ainsi que les faisceaux de fonctions (holomorphe et algébrique). On peut utiliser la notation X pour la variété algébrique munie de sa topologie de Zariski et de son faisceau de fonctions algébrique et X^{an} pour la variété complexe munie de la topologie usuelle et de son faisceau de fonctions holomorphes. On a un morphisme d'espaces annelés :

$$\phi : X^{an} \to X$$

obtenu en notant que la topologie usuelle est plus fine que la topologie de Zariski et que les fonctions algébriques sont holomorphes. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent sur X, on note $\mathcal{F}^{an}$ le faisceau analytique cohérent

$$\mathcal{F}^{an} = \phi^{-1}\mathcal{F} \otimes_{\phi^{-1}\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X^{an}}.$$

La raison pour laquelle on ne distingue pas dans la pratique X et X^{an}, du moins pour ce qui est des faisceaux cohérents et leur cohomologie est le principe GAGA de Serre qui dit que $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}^{an}$ est une équivalence de catégories (lorsque X est projective).

6.1.2 Fibrés vectoriels holomorphes

Sur une telle variété complexe, un fibré vectoriel holomorphe de rang r est un fibré vectoriel différentiable complexe muni de trivialisations $\psi_i : E_{|U_i} \cong U_i \times \mathbb{C}^r$ relatives à un recouvrement ouvert adéquat de X, telles que les matrices de transition

$$M_{ij} := \psi_j \circ \psi_i^{-1} : U_i \cap U_j \times \mathbb{C}^r \cong U_i \cap U_j \times \mathbb{C}^r$$

qui sont $\mathbb{C}$-linéaires en la seconde variable et commutent avec la première projection, et peuvent donc être vues comme des fonctions sur $U_i \cap U_j$ à valeurs dans l'espace des endomorphismes $\mathbb{C}$-linéaires de $\mathbb{C}^n$, ou encore dans l'espace des matrices de type (n, n) à coefficients complexes, soient holomorphes sur $U_i \cap U_j$.

La donnée d'un fibré vectoriel holomorphe de rang r est équivalente à la donnée de son faisceau de sections holomorphes, qui est un faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules libres de rang r. En effet, ils ont les mêmes matrices de transition.

Exemple 6.2 Le fibré tangent T_X. *Les cartes holomorphes $\psi_U : U \subset X \to \mathbb{C}^n$ identifient sur les ouverts U le fibré tangent T_X au fibré trivial de fibre $\mathbb{C}^n$. Les fonctions de transition sont données par les différentielles*

$$d(\psi_V \circ \psi_U^{-1})$$

sur $U \cap V$. Comme $\psi_V \circ \psi_U^{-1}$ est holomorphe sur $\psi_U(U \cap V)$, ces matrices de transition sont holomorphes, données par la matrice jacobienne holomorphe de $\psi_V \circ \psi_U^{-1}$.

Le fibré tangent d'une variété complexe est donc naturellement muni d'une structure de fibré vectoriel holomorphe de rang égal à $dim_{\mathbb{C}} X$.

6.1.3 Opérateur $\overline{\partial}$

Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang r sur X, de faisceau de sections holomorphes $\mathcal{E}$. Notons $\mathcal{A}^0(E)$ le faisceau des sections de classe C^∞ à valeurs dans E et $\mathcal{A}^{0,1}(E) := \mathcal{A}^{0,1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}$ le faisceau des $(0,1)$-formes sur X à valeurs dans E. Dans une trivialisation holomorphe locale de E, on a $\mathcal{E} \cong \mathcal{O}_X^r$, et donc toute section

α s'écrit dans cette trivialisation $(\alpha_1, \dots, \alpha_r)$, où les α_i sont des fonctions définies sur le même ouvert. Posons

$$\overline{\partial}_E \alpha = (\overline{\partial}\alpha_1, \dots, \overline{\partial}\alpha_r).$$

On vérifie, du fait que les matrices de transition de E sont holomorphes et donc annulées par $\overline{\partial}$ et à l'aide de la règle de Leibniz, que la section ainsi obtenue de $\mathcal{A}_X^{0,1}(E)$ sur l'ouvert considéré ne dépend pas du choix de la trivialisation. On a donc défini l'opérateur de Dolbeault $\overline{\partial}_E$ de E, qui satisfait la règle de Leibniz par rapport à l'opérateur $\overline{\partial}$ agissant sur les fonctions.

6.1.4 Métriques hermitiennes et connexions de Chern

On rappelle (cf [3]) qu'une connexion ∇ sur un fibré vectoriel différentiable réel E de rang k et de classe C^∞ est un opérateur permettant de « dériver les sections de E », c'est-à-dire une application $\mathbb{R}$-linéaire

$$\nabla : \mathcal{C}^\infty(E) \to A^1(E),$$

où $A^1(E)$ est l'espace des sections de classe C^∞ du fibré $\Omega_{X,\mathbb{R}} \otimes E = Hom_{\mathbb{R}}(T_X, E) = Hom_{\mathbb{C}}(T_{X,\mathbb{C}}, E)$, satisfaisant la règle de Leibniz

$$\nabla(f\sigma) = df \otimes \sigma + f\nabla\sigma.$$

Considérons maintenant un fibré vectoriel holomorphe E sur une variété complexe X. Supposons que E soit muni d'une métrique hermitienne (de classe C^∞ pour simplifier). C'est-à-dire que chaque fibre E_x est munie d'une métrique hermitienne h_x dont la matrice dans chaque trivialisation holomorphe varie de façon C^∞ avec x.

On dira qu'une connexion ∇ sur E est compatible avec h si pour σ, τ deux sections de E, on a

$$d(h(\sigma, \tau)) = h(\nabla\sigma, \tau) + h(\sigma, \nabla\tau), \tag{6.1.1}$$

où comme plus haut le terme de droite est une 1-forme. (Il faut faire attention néanmoins au caractère sesquilinéaire de h qui mène à définir $h(e, \alpha \otimes f) = \overline{\alpha} h(e, f)$ pour $e, f \in E_x$ et $\alpha \in \Omega_{X,x}$.)

On a défini dans la section précédente l'opérateur

$$\overline{\partial}_E : \mathcal{C}^\infty(E) \to A^{0,1}(E)$$

qui est presque une connexion, puisqu'il satisfait la règle de Leibniz par rapport à l'opérateur $\overline{\partial}$ sur les fonctions. Soit maintenant ∇ une connexion complexe sur E. Alors l'opérateur

$$\nabla^{0,1} : \mathcal{C}^\infty(E) \to A^{0,1}(E)$$

obtenu en composant ∇ avec la projection $A^1(E) \to A^{0,1}(E)$ satisfait aussi la règle de Leibniz par rapport à l'opérateur $\overline{\partial}$ sur les fonctions.

On a la proposition suivante :

Proposition 6.3 *Il existe sur E une unique connexion ∇ qui satisfait les propriétés suivantes :*

1. *∇ est compatible avec h.*
2. *On a l'égalité*
$$\nabla^{0,1} = \overline{\partial}_E.$$

Cette connexion est appelée la connexion de Chern de (E, h).

Démonstration de la proposition 6.3. Si on prend la partie de type $(1, 0)$ de l'égalité (6.1.1), on obtient, en notant $\nabla^{1,0}$ la partie de type $(1, 0)$ de E

$$\partial(h(\sigma, \tau)) = h(\nabla^{1,0}\sigma, \tau) + h(\sigma, \overline{\partial}\tau), \tag{6.1.2}$$

puisque $\nabla^{0,1} = \overline{\partial}$. Comme h est non dégénérée, la matrice de $\nabla^{1,0}$ dans une base holomorphe $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ locale de E est déterminée par (6.1.2) qui devient :

$$h(\nabla^{1,0}\sigma_i, \sigma_j) = \partial(h(\sigma_i, \sigma_j)). \tag{6.1.3}$$

Ceci détermine $\nabla^{1,0}$ et donc ∇ puisque $\nabla = \nabla^{1,0} + \overline{\partial}$.

Pour montrer l'unicité, il suffit de noter que la connexion ∇ définie par $\nabla = \nabla^{1,0} + \overline{\partial}$, où $\nabla^{1,0}$ est donnée par (6.1.3), ne dépend pas du choix de la base holomorphe σ_i de E. ∎

6.1.5 Théorie de Chern-Weil

On a déjà vu précédemment (cf section 3.1) comment construire des classes de Chern pour des fibrés vectoriels complexes, une fois définie la classe de Chern $c_1(L)$ d'un fibré en droites complexes. Posant $c(L) = 1 + c_1(L)$, les classes de Chern sont alors déterminées par la condition de fonctorialité (3.1.1) et par la formule de Whitney (3.1.2).

La première classe de Chern $c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ d'un fibré en droites complexes L est définie comme l'image de $L \in H^1(X, (\mathcal{C}_X^\infty)^*)$ dans $H^2(X, \mathbb{Z})$ par la flèche de connexion associée à la suite exacte exponentielle :

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{C}_X^\infty \stackrel{exp(2\iota\pi)}{\to} (\mathcal{C}_X^\infty)^* \to 0.$$

Ici $(\mathcal{C}_X^\infty)^*$ est le faisceau des fonctions sur X de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans $\mathbb{C}^*$ et $\mathcal{C}_X^\infty$ est le faisceau des fonctions sur X de classe $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

La théorie de Chern-Weil fournit des représentants en cohomologie de de Rham pour les classes de Chern $c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{R})$ d'un fibré vectoriel complexe sur X. Ici on utilise le fait que la cohomologie de Betti à coefficients dans $\mathbb{R}$ peut se calculer à l'aide des formes différentielles (cf [19]) :

$$H^{2k}(X, \mathbb{R}) = \frac{2k- \text{ formes fermés réelles sur } X}{2k- \text{ formes exactes réelles sur } X}.$$

On choisit une connexion complexe ∇ sur E compatible avec une métrique hermitienne h sur E. ∇ s'étend par la règle de Leibniz et fournit encore un opérateur différentiel

$$\nabla : \mathcal{A}_X^1(E) \to \mathcal{A}_X^2(E),$$

où on note $\mathcal{A}_X^i(E)$ le faisceau des i-formes différentielles sur X à coefficients dans E. On a le lemme suivant

Lemme 6.4 *L'opérateur différentiel $\nabla \circ \nabla := R_\nabla : E \to \mathcal{A}^2_X(E)$ est d'ordre 0, c'est-à-dire est une section de $\mathcal{A}^2_X(End\, E)$. De plus cet opérateur est antihermitien, c'est-à-dire satisfait l'équation*

$$^t(R_\nabla) = -R_\nabla,$$

où la transposition est relative à la métrique hermitienne h (et en particulier est une opération $\mathbb{C}$-antilinéaire : pour un opérateur dont les coefficients sont des formes, on étend alors la transposition par $\mathbb{C}$-antilinéarité).

Démonstration. Pour le premier point, il suffit de voir que $R_\nabla(fe) = f\nabla(E)$, où $f \in C^\infty(X)$, et e est une section de E. Or $\nabla(fe) = f\nabla e + dfe$, d'où

$$R_\nabla(fe) = \nabla(f\nabla e + dfe) = df \wedge \nabla e + fR_\nabla e - df \wedge \nabla e = fR_\nabla(e),$$

où l'on a utilisé la formule de Leibniz et $d(df) = 0$.

Pour le second point, il suffit de noter que $dh(e, e') = h(e, \nabla e') + h(\nabla e, e')$. Il vient donc en différentiant une seconde fois :

$$0 = d(h(e, \nabla e') + h(\nabla e, e')) = h(\nabla e, \nabla e') + h(e, R_\nabla e') + h(R_\nabla e, e') - h(\nabla e, \nabla e')$$
$$= h(e, R_\nabla e') + h(R_\nabla e, e').$$

(Ici il y a une petite subtilité de signe dans le dernier terme du développement de Leiniz de $d(h(\nabla e, e'))$ due au fait que le produit des 1-formes est anticommutatif). ■

Soit maintenant σ_i le polynôme de degré i en les coefficients d'une matrice de taille (r, r), invariant sous la conjugaison, et associant à une matrice la i-ème fonction symétrique de ses racines (en particulier σ_1 est la trace). Un tel polynôme associe plus généralement à tout endomorphisme ϕ d'un espace vectoriel de rang r un scalaire $\sigma_i(\phi)$. Nous pouvons donc définir, en utilisant le produit (commutatif) des formes différentiel de degré pair sur X, la $2i$-forme $\sigma_i(\frac{\iota}{2\pi}R_\nabla) \in A^{2i}_X$.

Lemme 6.5 *Cette forme est fermée et à coefficients dans $\mathbb{R}$.*

La théorie de Chern-Weil dit maintenant :

Théorème 6.6 *La classe de cohomologie de de Rham de la forme $\sigma_i(\frac{\iota}{2\pi}R_\nabla) \in A^{2i}_X$ est indépendante du choix de la connexion ∇. Cette forme est un représentant de la classe de Chern $c_i(E)$.*

Démonstration. Une fois qu'on sait que la classe est indépendante du choix de la connexion, il suffit, pour vérifier qu'elle représente $c_i(E)$, de montrer que pour un fibré en droites L, la forme $\sigma_1(\frac{\iota}{2\pi}R_\nabla)$ représente la classe $c_1(L)$, puis de montrer que les classes des formes fermées $\sigma_i(\frac{\iota}{2\pi}R_\nabla) \in A^{2i}_X$ satisfont la fonctorialité (3.1.1) et la formule de Whitney (3.1.2). Or ces deux axiomes sont très faciles à vérifier car si on a une connexion ∇ sur le fibré vectoriel complexe E sur X, et une application différentiable $\phi : X \to Y$, on a une connexion induite sur l'image inverse ϕ^*E pour laquelle les formes ci-dessus ne sont autres que les $\phi^*(\sigma_i(\frac{\iota}{2\pi}R_\nabla))$.

Pour ce qui est de la formule de Whitney, on observe qu'en géométrie différentielle, toute suite exacte $0 \to E \to F \to G \to 0$ de fibrés vectoriels complexes est scindée, comme on le voit en mettant une métrique hermitienne sur F. Soit donc $F = E \oplus G$, avec $r = rang\, F$, $r_E = rang\, E$, $r_G = rang\, G$, et soient ∇_E, ∇_G des connexions complexes sur E et G. On met sur F la connexion ∇ qui est la somme directe des connexions ∇_E et ∇_G. Il est immédiat de vérifier que pour cette connexion ∇, on a l'égalité des *formes différentielles* sur Y :

$$1 + \sigma_1(\frac{\iota}{2\pi} R_\nabla) \oplus \ldots \oplus \sigma_r(\frac{\iota}{2\pi} R_\nabla)$$
$$= (1 + \sigma_1(\frac{\iota}{2\pi} R_{\nabla_E}) \oplus \ldots \oplus \sigma_{r_E}(\frac{\iota}{2\pi} R_{\nabla_E}))(1 + \sigma_1(\frac{\iota}{2\pi} R_{\nabla_G}) \oplus \ldots \oplus \sigma_{r_G}(\frac{\iota}{2\pi} R_{\nabla_G})),$$

ce qui montre a fortiori la formule de Whitney au niveau des classes.

Il reste à voir l'indépendance du choix de la connexion, et le cas des fibrés en droites.

L'indépendance du choix de la connexion est évidente. En effet, si ∇_1 et ∇_2 sont deux connexions sur E, on peut construire une connexion ∇ sur le fibré $pr_1^* E$ sur $X \times [0,1]$, qui se restreint à ∇_1 sur $X \times \{0\}$, et à ∇_2 sur $X \times \{1\}$. Les formes $\sigma_i(\frac{\iota}{2\pi} R_\nabla)$ étant fermées ont des classes de cohomologie sur $X \times [0,1]$, dont les restrictions à $X \times \{t\}$ sont constantes puisque

$$H^*(X, \mathbb{R}) \overset{pr_1^*}{\cong} H^*(X \times [0,1], \mathbb{R}).$$

Le cas des fibrés en droites se traite de la façon suivante : soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X par des ouverts sur lesquels L est trivialisé par des sections de classe C^∞ partout non nulles τ_i. On peut supposer que sur les intersections $U_i \cap U_j$, on a $\tau_i = g_{ij}\tau_j$, avec $g_{ij} = exp(2\iota\pi f_{ij})$, où les f_{ij} sont des fonctions complexes de classe C^∞. Notons qu'on a $g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1$ sur U_{ijk} et donc $f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} \in \mathbb{Z}$ sur U_{ijk} (on suppose U_{ijk} connexe). Le 2-cocycle de Čech

$$a_{ijk} = f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} \tag{6.1.4}$$

à coefficients entiers est alors un représentant de la classe $c_1(L)$ définie par la suite exacte exponentielle.

Une connexion sur $L_{|U_i}$ est déterminée par une 1-forme α_i sur U_i telle que

$$\nabla\tau_i = \alpha_i \tau_i.$$

La courbure R_∇ de cette connexion est alors donnée par

$$R_\nabla(\sigma_i) = \nabla^2(\sigma_i) = d\alpha_i \sigma_i,$$

et donc

$$\sigma_1(\frac{\iota}{2\pi} R_\nabla)_{|U_i} = -\frac{d\alpha_i}{2\iota\pi}. \tag{6.1.5}$$

Les 1-formes ne sont pas choisies de façon indépendante, car elles doivent déterminer la même connexion sur $U_i \cap U_j$. Rappelant que $\tau_i = g_{ij}\tau_j$ sur U_{ij}, où les g_{ij} sont de classe C^∞ inversibles, on doit avoir

$$\nabla\tau_i = \alpha_i\tau_i = \alpha_i g_{ij}\tau_j$$

$$= \nabla g_{ij}\tau_j = g_{ij}\nabla\tau_j + dg_{ij}\tau_j = (\alpha_j g_{ij} + dg_{ij})\tau_j.$$

D'où la relation :

$$\alpha_j - \alpha_i = \frac{dg_{ij}}{g_{ij}} = \frac{1}{2\iota\pi} df_{ij}. \tag{6.1.6}$$

L'égalité dans $H^2(X, \mathbb{R})$ de la classe $c_1(L)$, représentée par le cocycle de (a_{ijk}) et de la classe de la 2-forme fermée $\sigma_1(\frac{\iota}{2\pi}R_\nabla)$ résulte alors de (6.1.4), (6.1.5) et (6.1.6). Il faut en effet voir ces égalités comme des égalités de classes de cohomologie dans le complexe simple associé au complexe double Čech-de Rham de X. ■

Revenant au cas d'un fibré vectoriel holomorphe E sur une variété complex X, on a maintenant :

Théorème 6.7 *Les classes de Chern réelles $c_i(E) \in H^{2i}(X, \mathbb{R})$ peuvent être représentées en cohomologie de de Rham par des formes réelles fermées de type (i, i).*

Ici la notion de forme multilinéaire alternée complexe de type (p, q) sur un espace vectoriel complexe V est la suivante : l'espace $V^* \otimes \mathbb{C}$ des formes $\mathbb{R}$-linéaires sur V à valeurs dans $\mathbb{C}$ sur V se décompose comme la somme directe $V^{*1,0} \oplus V^{*0,1}$, où $V^{*1,0}$ est l'espace des formes $\mathbb{C}$-linéaires sur V et $V^{*0,1}$ est son conjugué complexe, l'espace des formes $\mathbb{C}$-antilinéaires sur V. Alors les formes de type (p, q) sont par définition les combinaisons linéaires à coefficients complexes des $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_p \wedge \beta_1 \wedge \ldots \wedge \beta_q$, où $\alpha_i \in V^{*1,0}$ et $\beta_j \in V^{*0,1}$. Les formes différentielles de type (p, q) sur une variété complexe sont celles qui sont de type (p, q) en chaque point. Dans des coordonnées locales holomorphes, elles s'écrivent

$$\alpha = \sum_{|I|=p, |J|=q} \alpha_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z}_J.$$

Démonstration du théorème 6.7. En effet, le fibré E admet la connexion de Chern ∇ associée à n'importe quelle métrique hermitienne sur E. Comme la partie de type $(0, 1)$ de ∇ est égale à $\overline{\partial}_E$ et que $\overline{\partial}_E \circ \overline{\partial}_E = 0$, on trouve que la partie de type $(0, 2)$ de $R_{\nabla_E} = \nabla_E \circ \nabla_E$ vaut 0. D'autre part on sait d'après le lemme 6.4 que R_{∇_E} est antihermitien. Donc la partie de type $(2, 0)$ de R_{∇_E} est également nulle. En conclusion R_{∇_E} est une section de $A_X^{1,1}(End\, E)$, et les formes $\sigma_i(\frac{\iota}{2\pi}R_{\nabla_E})$ sont de type (i, i). ■

6.2 Géométrie kählérienne

6.2.1 Métriques kählériennes

Sur un espace vectoriel complexe V, une forme sesquilinéaire hermitienne h se décompose en ses parties réelle et imaginaire (qui sont des formes bilinéaires réelles)

$$h = g - \iota\omega,$$

où g est une forme bilinéaire symétrique et ω est une forme bilinéaire alternée. En effet, on a

$$h(v,u) = \overline{h(u,v)} \tag{6.2.7}$$

avec

$$h(v,u) = g(v,u) - \iota\omega(v,u),\ h(u,v) = g(u,v) - \iota\omega(u,v). \tag{6.2.8}$$

Il vient donc d'après (6.2.7) et (6.2.8) :

$$h(v,u) = g(u,v) + \iota\omega(u,v) = g(v,u) - \iota\omega(v,u)$$

et donc :

$$g(v,u) = g(u,v),\ \omega(v,u) = -\omega(u,v).$$

De plus ω est de type $(1,1)$ pour la structure complexe de V. Le fait que ω soit de type $(1,1)$ équivaut au fait que $\omega(Iu,Iv) = \omega(u,v)$, où I est l'opérateur de structure complexe sur $T_{X,\mathbb{R}}$.

Lemme 6.8 *La correspondance $h \mapsto \omega$ est une bijection entre formes sesquilinéaires hermitiennes et 2- formes réelles de type $(1,1)$ sur V.*

Démonstration. Soit I l'opérateur de structure complexe sur V. On sait que

$$\omega(u,v) = \omega(Iu,Iv). \tag{6.2.9}$$

On pose $g(u,v) = \omega(u,Iv)$. La propriété (6.2.9) et le fait que ω soit alternée montrent que g est symétrique. Soit $h = g - \iota\omega$. h est hermitienne bilinéaire car

$$h(u,Iv) = g(u,Iv) - \iota\omega(u,Iv) = \omega(u,v) + \iota g(u,v) = \iota h(u,v),$$

et les propriétés de symétrie (resp. antisymétrie) de g, (resp. ω) montrent que $h(v,u) = \overline{h(u,v)}$. On vérifie que les applications $h \mapsto \omega$ et $\omega \mapsto h$ sont inverses l'une de l'autre. ∎

Il résulte de ce lemme que la notion de (semi)-positivité pour les formes sesquilinéaires hermitiennes fournit la notion correspondante de (semi)-positivité pour les formes réelles de type $(1,1)$.

Définition 6.9 *On dira qu'une forme réelle de type $(1,1)$ sur V est positive si la forme hermitienne correspondante l'est.*

Sur une variété complexe X, l'espace tangent en chaque point $T_{X,x}$ est muni d'une structure complexe qui varie de façon C^∞ avec x et la correspondance ci-dessus induit une correspondance bijective entre formes hermitiennes bilinéaires de classe C^∞ sur T_X, et 2-formes réelles de type $(1,1)$ sur X. En particulier, si h est une métrique hermitienne de classe C^∞ sur T_X, on peut écrire

$$h = g - \iota\omega,$$

où g est une métrique riemannienne (compatible avec la structure presque-complexe car $g(Iu,Iv) = g(u,v)$), et ω est une $(1,1)$-forme définie positive.

Définition 6.10 *La métrique h est dite kählérienne si de plus la 2-forme ω est fermée.*

Cas des variétés projectives. Les variétés projectives complexes, vues comme des sous-variétés complexes de la variété complexe $\mathbb{CP}^N$ sont kählérienne. Plus précisément, soit X une telle variété et soit L un fibré en droites très ample sur X. Alors les sections de L fournissent un plongement de X dans un $\mathbb{CP}^N$. De plus L^{-1} est le sous-fibré tautologique de $H^0(X,L)^* \times \mathcal{O}_X$. Si on choisit une métrique hermitienne sur $H^0(X,L)^*$, on a donc une métrique hermitienne induite sur L^{-1} et une métrique h sur le dual L. On a

Théorème 6.11 *La forme de Chern $\frac{\iota}{2\pi}Tr\,\nabla_h$, qui est réelle de type $(1,1)$ d'après le théorème 6.7, est la forme de Kähler d'une métrique de Kähler sur X.*

Démonstration. C'est un calcul explicite. Noter que cette forme est la restriction de la forme correspondante sur $\mathbb{CP}^N$, $N+1 = h^0(X,L)$. La forme considérée est la forme de Fubini-Study. Sur l'ouvert $\mathbb{C}^N \subset \mathbb{CP}^N$ défini par $X_{N+1} \neq 0$, où on a les coordonnées $z_i = \frac{X_i}{X_{N+1}}$, cette forme a l'expression suivante :

$$\omega_{FS} = \frac{\iota}{2\pi}\partial\overline{\partial}log\,(1 + \sum_i \mid z_i \mid^2),$$

et il n'est pas difficile de vérifier la positivité. ∎

6.2.2 Opérateurs de Hodge et Lefschetz

Opérateur de Hodge. Soit X une variété différentiable orientée munie d'une métrique riemannienne, de dimension n. Pour chaque $x \in X$, on a un isomorphisme naturel, donné par le produit extérieur à droite

$$p : \bigwedge^{n-k} \Omega_{X,x} \cong Hom(\bigwedge^{k} \Omega_{X,x}, \bigwedge^{n} \Omega_{X,x}),$$

où $\bigwedge^n \Omega_{X,x}$ est un espace vectoriel de dimension 1. Comme $\Omega_{X,x}$ est muni d'une métrique et est orienté, $\bigwedge^n \Omega_{X,x}$ est canoniquement isomorphe à $\mathbb{R}$, grâce à la forme volume. D'autre part la métrique $(\ ,\ )_x$ fournit aussi un isomorphisme

$$m : \bigwedge^{k} \Omega_{X,x} \cong Hom(\bigwedge^{k} \Omega_{X,x}, \mathbb{R}).$$

On peut donc définir l'opérateur

$$*_x = p^{-1} \circ m : \bigwedge^{k} \Omega_{X,x} \cong \bigwedge^{n-k} \Omega_{X,x}$$

qui varie différentiablement avec x lorsque g est différentiable et qui est de même classe de différentiabilité que g.

Définition 6.12 *On notera $*$ l'isomorphisme de fibrés vectoriels*

$$* : \Omega^k_{X,\mathbb{R}} \cong \Omega^{n-k}_{X,\mathbb{R}}$$

ainsi construit. On notera également $*$ le morphisme induit au niveau des sections, c'est-à-dire des formes différentielles

$$* : A^k(X) \cong A^{n-k}(X).$$

L'opérateur $*$ est appelé opérateur de Hodge. Sa propriété essentielle (qui résulte de sa définition) est la suivante :

Lemme 6.13 *On a pour $\alpha, \beta \in A^k(X)$ l'égalité des n-formes*

$$(\alpha, \beta)Vol = \alpha \wedge *\beta,$$

et donc

$$(\alpha, \beta)_{L^2} = \int_X \alpha \wedge *\beta. \tag{6.2.10}$$

Ici la forme d'intersection L^2 sur A^k_X est définie sur les formes différentielles à support compact par

$$(\alpha, \beta)_{L^2} = \int_X (\alpha, \beta)Vol$$

où la fonction (α, β) est fournie par les formes d'intersection ponctuelles sur les fibres de $\bigwedge^k \Omega_X$.

Laplacien. Cet opérateur Δ qui agit sur les formes différentielles de X ne dépend que de la métrique g. Il est défini par la formule

$$\Delta : dd^* + d^*d,$$

où $d^* = \pm * d*$ est l'adjoint formel de d pour la métrique L^2, c'est-à-dire satisfait :

$$(\alpha, d\beta)_{L^2} = (d^*\alpha, \beta)_{L^2},$$

pour toutes formes α, β sur X à support compact.

Il en résulte que

$$(\alpha, \Delta\alpha)_{L^2} = (d^*\alpha, d^*\alpha)_{L^2} + (d\alpha, d\alpha)_{L^2},$$

et donc, pour α à support compact :

$$\Delta\alpha = 0 \Leftrightarrow d\alpha = 0 \text{ et } d^*\alpha = 0.$$

Les formes annulées par Δ sont dites harmoniques. Noter que le laplacien dépend de la métrique g. On a le théorème fondamental de Hodge (cf [19]) :

Théorème 6.14 *Soit X une variété orientée compacte munie d'une métrique riemannienne. Alors toute classe de cohomologie $\alpha \in H^i(X, \mathbb{R})$ est représentée par une unique forme harmonique.*

L'opérateur de Lefschetz L. C'est tout simplement l'opérateur de cup-produit par la forme de Kähler ω :

$$L\alpha = \omega \wedge \alpha.$$

Un point important est le fait qu'il commute avec le laplacien, comme il résulte des *identités kählériennes.*

6.2.3 Opérateur de Hodge et formes primitives

Soit X une variété complexe kählérienne de dimension complexe n, et soit ω une forme de Kähler sur X. ω détermine un opérateur de Lefschetz

$$L : \mathcal{A}_X^k \to \mathcal{A}_X^{k+2},$$

qui est un opérateur différentiel d'ordre 0.

Le théorème de Lefschetz sur les formes est le suivant :

Théorème 6.15 *Pour $k \leq n$,*

$$L^{n-k} : \mathcal{A}_X^k \to \mathcal{A}_X^{2n-k}$$

est un isomorphisme.

Définition 6.16 *Une forme α de degré $k \leq n$ sur X est dite primitive si $L^{n-k+1}\alpha = 0$.*

On a le résultat suivant, qu'on démontrera seulement dans le cas des formes de type $(1, 1)$, le seul qui nous intéressera pour les applications présentes (on renvoie à [19] pour le cas général) :

Théorème 6.17 *Soit α une forme de type (p, q) sur X, primitive, avec $p+q = k \leq n = dim\, X$. Alors on a*

$$*\alpha = (-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\, i^{p-q} \frac{\omega^{n-k}}{(n-k)!} \wedge \alpha.$$

Démonstration dans le cas où $(p, q) = (1, 1)$. Dans ce cas, on a $k = 2$ et donc la formule devient

$$*\alpha = -\frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \wedge \alpha$$

pour α primitive de type $(1, 1)$. Notons tout d'abord que c'est un énoncé de géométrie hermitienne, puisque tous les opérateurs considérés sont d'ordre 0, ce qui signifie qu'il suffit de vérifier l'énoncé de façon ponctuelle. Soit donc V l'espace tangent à X au point x. C'est un espace vectoriel complexe de dimension n, muni d'une métrique hermitienne h de 2-forme associée ω et d'une 2-forme α de type $(1,1)$ qui satisfait la propriété

$$\omega_x^{n-1} \wedge \alpha = 0 \text{ dans } \bigwedge_{\mathbb{R}}^{2n} V^*.$$

On peut bien sûr supposer que α est réelle. Alors α correspond à une forme d'intersection hermitienne h_α (non nécessairement définie positive). Le théorème de diagonalisation simultanée pour les formes hermitiennes dit alors que dans une base adéquate $v_1, \ldots, v_n$ complexe de V, on a

$$h(\sum_i z_i v_i) = \sum_i z_i \overline{z}_i,$$

$$h_\alpha(\sum_i z_i v_i) = \sum_i \lambda_i z_i \overline{z}_i.$$

Les formes ω et α s'écrivent alors :

$$\omega = \frac{\iota}{2} \sum_i dz_i \wedge d\overline{z}_i,$$

$$\alpha = \frac{\iota}{2} \sum_i \lambda_i dz_i \wedge d\overline{z}_i,$$

où les $dz_i \in V^*$ forment la base duale de v_i. On calcule facilement que

$$\frac{\omega^{n-1}}{(n-1)!} = (\frac{\iota}{2})^{n-1} \sum_i dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ldots \widehat{dz_i \wedge d\overline{z}_i} \ldots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_n,$$

et il en résulte que la condition $\omega^{n-1} \wedge \alpha = 0$ devient :$\sum_i \lambda_i = 0$. On vérifie d'autre part qu'on a pour tout j

$$*(dz_j \wedge d\overline{z}_j) = (\frac{\iota}{2})^{n-2} dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ldots \widehat{dz_j \wedge d\overline{z}_j} \ldots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_n, \tag{6.2.11}$$

où $*$ est l'opérateur de Hodge associé à la métrique h sur V et agissant sur $\bigwedge^* V^*$. En effet, notons que

$$dz_j \wedge d\overline{z}_j = -2\iota dx_j \wedge dy_j,$$

où $z_j = x_j + \iota y_j$. La base $dx_1, dy_1, \ldots, dx_n, dy_n$ de $Hom\,(V, \mathbb{R})$ est orthonormée et orientée positivement (relativement à l'orientation complexe). On a donc

$$*(dx_j \wedge dy_j) = dx_1 \wedge dy_1 \ldots \widehat{dx_j \wedge dy_j} \ldots dx_n \wedge dy_n,$$

ce qui donne immédiatement (6.2.11).

Il vient donc

$$*\alpha = (\frac{\iota}{2})^{n-1} \sum_i \lambda_i dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ldots \widehat{dz_i \wedge d\overline{z}_i} \ldots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_n, \tag{6.2.12}$$

tandis que

$$\frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \wedge \alpha = (\frac{\iota}{2})^{n-1} (\sum_{i<j} dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ldots \widehat{dz_i \wedge d\overline{z}_i} \ldots \widehat{dz_j \wedge d\overline{z}_j} \ldots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_n) \wedge (\sum_k \lambda_i dz_k \wedge d\overline{z}_k).$$

Ce produit est très simple à calculer car le produit de deux monômes pris dans chacune des sommes ci-dessus est non nul si et seulement si $k = i$ ou $k = j$. Le développement du produit extérieur ci-dessus nous donne donc :

$$\frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \wedge \alpha = (\frac{\iota}{2})^{n-1} \sum_i (\sum_{j \neq i} \lambda_j dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ldots \widehat{dz_i \wedge d\overline{z}_i} \ldots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_n),$$

et comme $\sum_i \lambda_i = 0$, on trouve finalement :

$$\frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \wedge \alpha = -(\frac{i}{2})^{n-1} \sum_i \lambda_i dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \ldots \widehat{dz_i \wedge d\overline{z}_i} \ldots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_n. \quad (6.2.13)$$

Le résultat découle alors de (6.2.12) et de (6.2.13). ■

6.3 Le théorème d'Uhlenbeck-Yau

6.3.1 Métriques d'Hermite-Einstein

Soit X une variété kählérienne compacte de dimension n, et ω une forme de Kähler sur X. Soit E un fibré vectoriel holomorphe sur X, de faisceau de sections holomorphes $\mathcal{E}$. On définit tout d'abord la notion de μ-stabilité par rapport à ω (en fait la notion ne dépend que de la classe de Kähler $[\omega]$) comme dans le cas projectif).

Définition 6.18 *Le fibré E est ω-stable si pour tout sous-faisceau analytique cohérent $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ tel que $0 < rang\, \mathcal{F} < rang\, \mathcal{E}$, on a*

$$\frac{c_1(\mathcal{F})[\omega]^{n-1}}{rang\, \mathcal{F}} < \frac{c_1(\mathcal{E})[\omega]^{n-1}}{rang\, \mathcal{E}}.$$

Ici on utilise la notation $c_1(\mathcal{F})[\omega]^{n-1}$ pour l'intégrale $\int_X c_1(\mathcal{F}) \smile [\omega]^{n-1}$. On définit la classe $c_1(\mathcal{F})$ comme étant la classe $c_1(det\, \mathcal{F})$. Ici le déterminant $det\, \mathcal{F}$ d'un faisceau analytique cohérent sans torsion $\mathcal{F}$ est défini comme dans le cas algébrique : la puissance extérieure maximale $\bigwedge^{rang\, \mathcal{F}} \mathcal{F}$ est un faisceau localement libre de rang 1 sur l'ouvert $U \stackrel{j}{\hookrightarrow} X$ où $\mathcal{F}$ est localement libre. Le faisceau réflexif $j_* \bigwedge^{rang\, \mathcal{F}} \mathcal{F}$ associé est alors localement libre de rang 1 sur X et on le note $det\, \mathcal{F}$.

Le nombre $\frac{c_1(\mathcal{E})[\omega]^{n-1}}{rang\, \mathcal{E}}$ est appelé la pente de E, et noté $\mu_\omega(E)$.

Soit h une métrique hermitienne sur E. On a vu (cf section 6.1.4) qu'il existe une unique connexion ∇_h ayant les propriétés suivantes :

1. La partie de type $(0,1)$ de ∇_h s'identifie à l'opérateur $\overline{\partial}_E$ de E.
2. ∇_h est compatible avec h.

Soit

$$R_{\nabla_h} = \nabla_h \circ \nabla_h \in \Gamma(X, \mathcal{A}^2_X(End\, E))$$

l'opérateur de courbure associé. Notons qu'on a en fait

$$R_{\nabla_h} = \nabla_h \circ \nabla_h \in \Gamma(X, \mathcal{A}^{1,1}_X(End\, E))$$

d'après le lemme 6.7, (et plus précisément sa démonstration).

On va définir maintenant les métriques d'Hermite-Einstein.

Définition 6.19 *La métrique h sur E est d'Hermite-Einstein (relativement à ω) si l'opérateur de courbure R_{∇_h} s'écrit*

$$R_{\nabla_h} = \mu\omega Id_E + R^0_{\nabla_h},$$

où $\mu \in \mathbb{C}$ et l'opérateur $R^0_{\nabla_h}$ est à coefficients primitifs, c'est-à-dire

$$\omega^{n-1} \wedge R^0_{\nabla_h} = 0.$$

Lemme 6.20 *S'il existe une métrique d'Hermite-Einstein h sur E, le coefficient μ est donné par la formule :*

$$c_1(E)[\omega]^{n-1} = \frac{\iota\mu}{2\pi} rang\, E[\omega]^n.$$

De façon équivalente

$$\mu_\omega(E) = \frac{\iota}{2\pi}\mu[\omega]^n.$$

Démonstration. En effet, d'après le théorème 6.6, la classe $c_1(E)$ est représentée par la forme $\frac{\iota}{2\pi} Tr\, R_{\nabla_h}$. Comme $R^0_{\nabla_h}$ est à coefficients primitifs, on a alors :

$$\frac{\iota}{2\pi}\omega^{n-1} \wedge Tr\, R_{\nabla_h} = \omega^{n-1}\frac{\iota}{2\pi} Tr\,(\mu\omega Id_E) = \frac{\iota}{2\pi}\mu rang\, E\, \omega^n,$$

ce qui entraîne le résultat par intégration sur X.

■

On a les propriétés générales utiles et élémentaires suivantes :

Lemme 6.21 *Le produit tensoriel de deux fibrés vectoriels admettant des métriques d'Hermite-Einstein admet une métrique d'Hermite-Einstein (qui est la métrique induite). Le dual d'un fibré vectoriel admettant une métrique d'Hermite-Einstein admet une métrique d'Hermite-Einstein (qui est la métrique induite). Enfin la somme directe de deux fibrés vectoriels de même pente munis de métriques d'Hermite-Einstein admet la métrique produit qui est d'Hermite-Einstein.*

Un théorème important concernant les métriques d'Hermite-Einstein est le suivant :

Théorème 6.22 *Soit E un fibré vectoriel muni d'une métrique d'Hermite-Einstein sur une variété kälérienne compacte X. Alors si $\mu_\omega(E) < 0$, E n'admet pas de section holomorphe non nulle. Si $\mu_\omega(E) = 0$, les sections holomorphes de E sont parallèles pour la connexion de Chern associée à la métrique d'Hermite-Einstein. En particulier, si σ est une telle section non nulle (et X est connexe) σ ne s'annule nulle part, et la décomposition orthogonale*

$$E = <\sigma> \oplus <\sigma>^\perp$$

est une décomposition en somme directe de sous-fibrés holomorphes.

La preuve de ce résultat fait appel au lemme suivant (formule de Weitzenböck) :

Lemme 6.23 *Soit h une métrique hermitienne sur un fibré vectoriel E sur X et ∇ la connexion de Chern associée. Soit σ une section holomorphe de E. Alors on a l'égalité de formes de type* $(1,1)$ *sur X :*

$$\partial\overline{\partial}h(\sigma) = h(\nabla^{1,0}\sigma, \nabla^{1,0}\sigma) - h(R_\nabla\sigma, \sigma). \tag{6.3.14}$$

Démonstration. Comme ∇ est compatible avec h, on a

$$dh(\sigma) = h(\nabla\sigma, \sigma) + h(\sigma, \nabla\sigma).$$

Comme σ est holomorphe, on a

$$\nabla\sigma = \nabla^{1,0}\sigma.$$

Il vient donc

$$dh(\sigma) = h(\nabla^{1,0}\sigma, \sigma) + h(\sigma, \nabla^{1,0}\sigma)$$

et prenant les parties de type $(0,1)$:

$$\overline{\partial}h(\sigma) = h(\sigma, \nabla^{1,0}\sigma).$$

Différentiant cette égalité, on obtient :

$$\begin{aligned} d\overline{\partial}h(\sigma) = \partial\overline{\partial}h(\sigma) &= h(\nabla^{1,0}\sigma, \nabla^{1,0}\sigma) + h(\sigma, R_\nabla\sigma) \\ &= h(\nabla^{1,0}\sigma, \nabla^{1,0}\sigma) - h(R_\nabla\sigma, \sigma) \end{aligned}$$

■

Preuve du théorème 6.22. Supposons maintenant que X est compacte et que la métrique h est d'Hermite-Einstein, avec $\mu_\omega(E) \leq 0$. On a l'égalité (6.3.14) des formes *réelles* de type $(1,1)$:

$$\iota\partial\overline{\partial}h(\sigma) = \iota h(\nabla^{1,0}\sigma, \nabla^{1,0}\sigma) - \iota h(R_\nabla\sigma, \sigma),$$

où l'on note que la forme réelle de type $(1,1)$ $\iota h(\nabla^{1,0}\sigma, \nabla^{1,0}\sigma)$ est semi-positive, nulle si et seulement si $\nabla^{1,0}\sigma = 0 = \nabla\sigma$. Prenons le produit extérieur avec ω^{n-1}. Comme les coefficients de R_∇ sont des formes primitives, à l'exception du terme diagonal $\mu\omega Id$, on obtient :

$$\begin{aligned} \omega^{n-1} \wedge \iota\partial\overline{\partial}h(\sigma) &= \iota\omega^{n-1}h(\nabla^{1,0}\sigma, \nabla^{1,0}\sigma) - \iota\mu\omega^n h(\sigma, \sigma) \\ &= \iota\omega^{n-1}h(\nabla^{1,0}\sigma, \nabla^{1,0}\sigma) - 2\pi\mu_\omega(E)\omega^n h(\sigma). \end{aligned}$$

Observons maintenant que le terme de gauche est à un coefficient positif près $\Delta h(\sigma)\omega^n$, où Δ est le laplacien agissant sur les fonctions, tandis que les deux termes de droite sont des $2n$-formes semi-positives car $\mu_\omega(E) \leq 0$.

Comme X est compacte, toute fonction différentiable ϕ sur X telle que $\Delta\phi \geq 0$ est constante et satisfait $\Delta\phi = 0$. On en déduit qu'on doit avoir en fait

$$\iota\omega^{n-1}h(\nabla^{1,0}\sigma, \nabla^{1,0}\sigma) = 0,\ 2\pi\mu_\omega(E)\omega^n h(\sigma) = 0.$$

Si $\mu_\omega(E) < 0$, la seconde égalité entraîne $h(\sigma) = 0$ d'où $\sigma = 0$. Si $\mu_\omega(E) = 0$, on conclut simplement que $\iota\omega^{n-1}h(\nabla^{1,0}\sigma, \nabla^{1,0}\sigma) = 0$, ce qui entraîne que $h(\nabla^{1,0}\sigma, \nabla^{1,0}\sigma) = 0$, ou encore $\nabla^{1,0}\sigma = \nabla\sigma = 0$. Il en résulte que $\nabla^{1,0}\sigma = 0 = \nabla\sigma$, donc σ est parallèle et partout non nulle, ce qui entraîne que l'orthogonal $\sigma^\perp \subset E$ est parallèle, c'est-à-dire stable sous ∇, puisque ∇ est compatible avec la métrique. Mais comme $\nabla^{0,1} = \overline{\partial}_E$, un sous-fibré parallèle est nécessairement holomorphe. ■

6.3.2 Polystabilité et métriques d'Hermite-Einstein

Le résultat suivant est montré dans [17]. En dimension 1, ce résultat est dû à Narasimhan-Seshadri [15]. Lorsque $dim\, X = 2$, le résultat est dû à Donaldson [4].

Théorème 6.24 *(Uhlenbeck-Yau). Soit X une variété kählérienne compacte, ω une forme de Kähler sur X, et soit E un fibré vectoriel ω-stable sur X. Alors E admet une métrique d'Hermite-Einstein (relativement à ω), qui est unique à un scalaire près.*

On se contentera de montrer l'existence et l'unicité dans le cas des fibrés en droites (qui sont tous stables), car le résultat joue un rôle dans la preuve du théorème réciproque 6.26 ci-dessous.

Preuve dans le cas des fibrés en droites. Soit L un fibré en droites holomorphe sur X. La courbure R_{∇_h} de la connexion de Chern associée à une métrique h sur L est alors une 2-forme α_h de type $(1,1)$ (égale à $\frac{2\pi}{\iota}$ fois la forme de Chern de h). Dire que la métrique est d'Hermite-Einstein équivaut donc au fait que $\alpha_h = \mu\omega + \alpha_0$, où la forme α_0 est primitive. Le lemme 6.25 ci-dessous nous dit alors que ceci équivaut au fait que la forme α_0 soit harmonique (primitive). Comme ω est également harmonique, le théorème 6.24 dit donc dans le cas d'un fibré L de rang 1 qu'il existe une unique métrique hermitienne h sur L dont la forme de Chern est harmonique.

Or on sait que la forme $\frac{\iota}{2\pi}\alpha_h$ représente la classe de Chern $c_1(L)$. Le théorème de Hodge 6.14, combiné avec les identités kählériennes (cf [19]) dit que $c_1(L)$ est représenté par une unique forme harmonique α de type $(1,1)$; on est donc ramené à montrer qu'étant donnée une forme α de type $(1,1)$ fermée réelle de classe $c_1(L)$, il existe une métrique h sur L dont la forme de Chern $\frac{\iota}{2\pi}\alpha_h$ est égale à α. Ceci se montre grâce au "lemme $\partial\overline{\partial}$" (cf [19]). En effet, partons d'une métrique h_1 sur L. La forme de Chern α_1 associée est une forme de type $(1,1)$ réelle fermée de classe égale à celle de α. Le lemme $\partial\overline{\partial}$ assure qu'il existe une fonction réelle ϕ telle que

$$\frac{1}{2\iota\pi}\partial\overline{\partial}\phi = \alpha - \alpha_1.$$

La forme de Chern de la métrique

$$h := e^{\phi}h_1$$

a alors pour forme de Chern α. ∎

On a utilisé ci-dessus le lemme suivant, concernant les formes fermées de type $(1,1)$. Rappelons qu'une forme différentielle β est dite harmonique si elle est annulée par le laplacien, ce qui équivaut aussi (lorsque X est compacte) que

$$d\beta = 0,\ d(*\beta) = 0,$$

où $*$ est l'opérateur de Hodge.

Lemme 6.25 *Une forme β fermée de type* $(1,1)$ *est harmonique si et seulement si elle s'écrit comme une somme*

$$\beta = \mu\omega + \beta_0,$$

où $\mu \in \mathbb{C}$ et β_0 est primitive.

Démonstration. Si on a $\beta = \mu\omega + \beta_0$, où $\mu \in \mathbb{C}$ et β_0 est primitive, la forme β_0 est fermée et satisfait de plus d'après le théorème 6.17 l'équation $*\beta_0 = -\frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \wedge \beta_0$. Donc $*\beta_0$ est aussi fermée et β_0 est harmonique. Comme la forme ω est harmonique, β l'est donc aussi. Inversement, il faut noter que l'opérateur L^{n-1} de produit extérieur par ω^{n-1} commute avec le laplacien et donc envoie les formes harmoniques sur les formes harmoniques. Comme il n'y a qu'un espace de dimension 1 de formes harmoniques en degré $2n$, engendré par ω^n, l'espace des formes harmoniques de type $(1,1)$ est la somme directe de la droite $< \omega >$ et de l'espace des formes harmoniques annulées par L^{n-1}, c'est-à-dire primitives. ∎

Le théorème 6.24 admet une réciproque partielle :

Théorème 6.26 *Soit E un fibré vectoriel holomorphe sur X admettant une métrique d'Hermite-Einstein. Alors E est une somme directe de fibrés vectoriels stables de même pente.*

Les fibrés vectoriels qui sont somme directe de fibrés vectoriels stables *de même pente* sont dits polystables. La démonstration qui suit est due à Lübke.

Démonstration du théorème 6.26 Soit E un fibré vectoriel holomorphe sur X muni d'une métrique d'Hermite-Einstein (relativement à ω). Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$ un sous-faisceau cohérent qu'on peut supposer saturé. On va montrer que $\mu_\omega(\mathcal{F}) \leq \mu_\omega(E)$, et que si l'égalité a lieu $\mathcal{F}$ correspond en fait à un sous-fibré vectoriel F, tel que l'orthogonal $F^\perp \subset E$ est un sous-fibré holomorphe.

Considérons le fibré en droites $det\,\mathcal{F}$. Rappelons qu'il est défini comme le faisceau réflexif associé au fibré $\bigwedge^{r'} \mathcal{F}$, $r' = rang\,\mathcal{F}$, défini sur l'ouvert $U = X \setminus Z$ où $\mathcal{F}$ est localement libre. Ici $Z \subset X$ est un fermé analytique de codimension au moins 2. L'application

$$\bigwedge^{r'} \mathcal{F} \to \bigwedge^{r'} \mathcal{E}$$

étant définie sur U (et non nulle) s'étend sur X et fournit une section holomorphe non nulle σ de

$$(det\,\mathcal{F})^{-1} \otimes \bigwedge^{r'} \mathcal{E}.$$

Comme le fibré en droites $det\,\mathcal{F}$ et le fibré vectoriel $\bigwedge^{r'} \mathcal{E}$ admettent des métriques d'Hermite-Einstein (pour le second, elle est induite par celle de E) et sont de pentes égales respectivement à $\mu_\omega(\mathcal{F})$, $\mu_\omega(\mathcal{E})$, le fibré $(\bigwedge^{r'} \mathcal{F})^{-1} \otimes \bigwedge^{r'} \mathcal{E}$ admet d'après le lemme 6.21 une métrique d'Hermite-Einstein et est de pente $\mu_\omega(E) - \mu_\omega(\mathcal{F})$. Comme ce fibré admet la section non nulle σ, le théorème 6.22 montre qu'on a $\mu_\omega(E) - \mu_\omega(\mathcal{F}) \geq 0$.

Il reste à voir ce qui se passe en cas d'égalité. Le théorème 6.22 dit que dans ce cas la section σ est parallèle (et en particulier partout non nulle). On en déduit aisément que sur l'ouvert U, le sous-fibré $\mathcal{F}$ a la propriété que son orthogonal pour la métrique d'Hermite-Einstein sur E est parallèle, c'est-à-dire stable sous ∇, et donc holomorphe. Soit $\mathcal{G} \subset \mathcal{E}$ l'extension à X du sous-faisceau cohérent $\mathcal{F}^\perp$ défini sur U (noter que $\mathcal{F}^\perp$ est isomorphe à $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ sur U, ce qui entraîne que $\mathcal{G} = j_*\mathcal{F}^\perp$ est cohérent sur X. On a bien un morphisme étendu $\mathcal{G} \to \mathcal{E}$ du fait que $\mathcal{E}$ est réflexif. Considérons maintenant le morphisme

$$\mathcal{F} \oplus \mathcal{G} \to \mathcal{E}.$$

Ce morphisme est un isomorphisme sur U, et tous les faisceaux considérés sont réflexifs. C'est donc un isomorphisme sur X. ∎

6.3.3 Inégalité de Bogomolov-Lübke

Une conséquence importante du théorème d'existence 6.24 est l'inégalité de Bogomolov-Lübke portant sur les classes de Chern c_1, c_2 d'un fibré vectoriel stable sur une variété kählérienne compacte (Bogomolov fournit une preuve dans le contexte algébrique).

Théorème 6.27 *Soit E un fibré vectoriel ω-stable de rang r sur une variété kählérienne compacte X de dimension n munie d'une forme de Kähler ω. Alors on a l'inégalité suivante :*

$$((r-1)c_1(E)^2 - 2rc_2(E))[\omega]^{n-2} \leq 0. \tag{6.3.15}$$

On utilisera le résultat suivant :

Lemme 6.28 *Soit E un fibré vectoriel de rang r. Alors*

$$c_1(End\, E) = 0,\ c_2(End\, E) = -(r-1)c_1(E)^2 + 2rc_2(E).$$

(C'est une conséquence du principe de scindage, à faire exercice).

Démonstration du théorème 6.27. Le fibré vectoriel E admet une métrique d'Hermite-Einstein. Cette métrique induit une métrique d'Hermite-Einstein sur le fibré $End\, E$, qui satisfait les conclusions du lemme 6.28. Le théorème 6.27 est donc une conséquence du cas particulier suivant :

Théorème 6.29 *Soit F un fibré vectoriel sur X satisfaisant $c_1(F) = 0$ dans $H^2(X, \mathbb{Q})$ et admettant une métrique d'Hermite-Einstein h. Alors*

$$c_2(F)[\omega]^{n-2} \geq 0. \tag{6.3.16}$$

Démonstration. La métrique h induit une métrique sur le fibré $End\, F$, et par ailleurs les fibrés vectoriels complexes $\Omega_X^{p,q}$ de formes différentielles de type (p,q) admettent également des métriques hermitiennes induites par la métrique de Kähler sur X. On en déduit une métrique ponctuelle $|\ |_x^2$, $x \in X$ sur $\Omega_X^{1,1} \otimes End\, F$, et donc une métrique L^2 sur $\Gamma(X, \mathcal{A}_X^{1,1}(End\, F)$. On va calculer le nombre $| R_{\nabla_h} |_{L^2}$, qui est bien sûr ≥ 0.

Tout d'abord, si on combine la formule pour la métrique ponctuelle sur $End\, F$:

$$| \phi |^2 = Tr\,(\phi^t \phi),$$

avec la formule pour la métrique L^2 sur les formes (cf (6.2.10)

$$< \alpha, \beta >_{L^2}= \int_X \alpha \wedge *(\overline{\beta}),$$

on obtient la formule suivante (qui tient compte du fait que l'opérateur de transposition $M \mapsto^t M$ est $\mathbb{C}$-antilinéaire) :

$$| R_{\nabla_h} |_{L^2}= \int_X Tr\,(R_{\nabla_h} * ({}^t R_{\nabla_h})).$$

Nous utilisons maintenant la décomposition :

$$R_{\nabla_h} = \mu\omega Id_F + R^0_{\nabla_h},$$

où $R^0_{\nabla_h}$ est à coefficients primitifs. Comme $c_1(F) = 0$, le lemme 6.20 montre que $\mu = 0$. Donc $R_{\nabla_h} = R^0_{\nabla_h}$.

Il vient donc, du fait que R_{∇_h} est antihermitien :

$$| R_{\nabla_h} |_{L^2}= -\int_X (Tr\, R_{\nabla_h} * (R_{\nabla_h})) = -\int_X Tr\,(R^0_{\nabla_h} * (R^0_{\nabla_h})).$$

On utilise maintenant la formule : $*\alpha = -\frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} \wedge \alpha$ pour α primitive de type de type $(1,1)$ (théorème 6.17). On obtient donc :

$$| R_{\nabla_h} |_{L^2}= \int_X Tr\, \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!}(R^0_{\nabla_h})^2$$

$$= \int_X Tr\, \frac{\omega^{n-2}}{(n-2)!} R^2_{\nabla_h}.$$

On observe maintenant que pour une matrice M de trace nulle, on a $2\sigma_2(M) = -Tr\, M^2$. Le théorème 6.6 montre alors que pour un fibré vectoriel complexe F satisfaisant $c_1(F) = 0$, et pour une connexion ∇ sur F, la classe $2c_2(F)$ est représentée par la forme fermée $-Tr\,(\frac{\iota}{2\pi} R_\nabla) = Tr\,(\frac{R_\nabla}{2\pi})^2$. On en déduit que

$$| R_{\nabla_h} |_{L^2}= \frac{[\omega]^{n-2}}{2(n-2)!} c_2(F) \geq 0.$$

■

Corollaire 6.30 *Si le fibré stable F satisfait $c_1(F) = 0$, on a l'égalité dans (6.3.16) si et seulement si la connexion de la métrique d'Hermite-Einstein sur E est plate. Dans ce cas, les classes de Chern $c_i(F) \in H^{2i}(X, \mathbb{Q})$ sont nulles.*

Démonstration. En effet, la preuve du théorème 6.29 montre que l'égalité dans (6.3.16) n'est satisfaite que si $| R_{\nabla_h} |_{L^2}= 0$, c'est-à-dire $R_{\nabla_h} = 0$. Ceci signifie exactement que la connexion ∇_h est plate. Le théorème 6.6 montre par ailleurs que les classes de Chern d'un fibré vectoriel complexe muni d'une connexion plate sont nulles. ■

Remarque 6.31 Les classes de Chern $c_i(F) \in H^{2i}(X, \mathbb{Z})$ sont alors de torsion, mais non nécessairement nulles.

Exercice 6.32 *Construire un exemple de fibré stable satisfaisant l'égalité ci-dessus avec des classes de Chern de torsion non nulles (considérer des sommes directes de fibrés en droites L_i dont les classes $c_1(L_i)$ sont de torsion).*

6.3.4 Une application : Produits tensoriels

Comme application du théorème 6.26, on obtient finalement le théorème suivant :

Théorème 6.33 *Soient E et F deux fibrés vectoriels ω-stables sur une variété kählérienne compacte X. Alors le produit tensoriel $E \otimes F$ est polystable.*

Démonstration. En effet des métriques d'Hermite-Einstein sur E et F induisent une métrique d'Hermite-Einstein sur $E \otimes F$. ■

Remarque 6.34 Il n'est pas vrai que le produit tensoriel de deux fibrés stables est stable. En effet, prenons l'exemple de $E \otimes E^* = End\, E$, où E est stable. La pente de $End\, E$ est évidemment nulle, et $End\, E$ contient (en facteur direct) le sous-fibré trivial de rang 1 correspondant aux homothéties.

Revenons maintenant au cas projectif. Une variété projective X lisse définie sur $\mathbb{C}$ fournit une variété complexe X_{an}. Ces variétés complexes sont kählériennes d'après le théorème 6.11.

D'après les définitions données dans les sections 3.2.1 et 6.3.1, et en utilisant le principe GAGA, qui dit que les sous-faisceaux analytiques d'un faisceau cohérent $\mathcal{F}_{an}$ analytisé d'un faisceau algébrique $\mathcal{F}$ sur X proviennent par analytisation des sous-faisceaux algébriques de $\mathcal{F}$, on voit que la propriété de μ-stabilité pour $\mathcal{F}_{an}$ est équivalente à la propriété de μ-stabilité pour $\mathcal{F}$.

Le théorème d'Uhlenbeck-Yau fournit alors une métrique d'Hermite-Einstein (relativement à $\omega = c_1(L)$) et en utilisant le lemme 6.21 ainsi que la réciproque (théorème 6.26) du théorème d'Uhlenbeck-Yau, on obtient le résultat suivant :

Théorème 6.35 *Soient $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ des faisceaux algébriques localement libres sur une variété algébrique définie sur $\mathbb{C}$. Supposons que $\mathcal{E}$, $\mathcal{F}$ sont μ-stables. Alors $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ est une somme directe de fibrés μ-stables de même pente (relativement à L).*

Ce résultat est par des principes généraux également vrai sur n'importe quel corps algébriquement clos de caractéristique 0. Il est faux en caractéristique non nulle.

Bibliographie

[1] E. Arbarello, M. Cornalba, P. Griffiths, J. Harris. The geometry of algebraic curves I, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 267. Springer-Verlag, New York, 1985.

[2] A. Borel, J.-P. Serre.Le théorème de Riemann-Roch (d'après Grothendieck), Bull. Soc. Math. France 86 (1959), 97-136.

[3] R. Bott, L. Tu. Differential forms in algebraic topology. Graduate Texts in Mathematics, 82. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[4] S.-K. Donaldson. Anti self-dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles, Proc. London Math. Soc. 50 (1985), 1-26.

[5] W. Fulton. Intersection theory, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) 2. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[6] A. Grothendieck. Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, IV les schémas de Hilbert, Sém. Bourbaki 221 (1960).

[7] R. Hartshorne. Algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[8] H. Matsumura, *Commutative Algebra*, 2nd ed, Benjamin/Cummings, Reading, MA (1980).

[9] D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan, Geometric invariant theory, 3eme édition, Ergebnisse der Math. 34, Springer 1994.

[10] J. Le Potier, Lectures on vector bundles, Cambridge studies in advanced Math 54, CUP 1997.

[11] S. Kobayashi, Differential Geometry of complex vector bundles, Iwanami Shoten and Princeton University Press (1987).

[12] Kodaira, Kunihiko Complex manifolds and deformation of complex structures. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 283. Springer-Verlag, New York, 1986.

[13] S. Mukai : An Introduction to Invariants and Moduli - Cambridge University Press.

[14] J.-P. Serre. Géométrie algébrique et géométrie analytique, Ann. Inst. Fourier 6, (1956) 1-42.

[15] M.S Narasimhan, C.S Seshadri. Stable and unitary vector bundles on compact Riemann surfaces, Ann. of Math. 82, (1965), 540-567.

[16] C. Simpson. Moduli of representations of the fundamental group of a smooth variety, Publ. Math. IHES 79, 80 (1994).

[17] K. Uhlenbeck, S. Yau : On the existence of Hermitian-Yang-Mills connections in stable vector bundles, Comm. Pure and Applied Math. 39-S (1986) 257-293.

[18] E. Viehweg. Quasi-projective moduli for polarized manifolds. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) 30. Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[19] C. Voisin, Théorie de Hodge et géométrie algébrique complexe, Cours spécialisés, SMF 2003.

[20] Geometry of $K3$ surfaces : moduli and periods (Palaiseau, 1981/1982). Astérisque No. 126 (1985), 19–28.

[21] C. Voisin. Notes de cours de DEA 2007.