Proc. London Math. Soc. (3) 85 (2002) 659–685 © 2002 London Mathematical Society
DOI: 10.1112/S0024611502013667

ALGÈBRES DE HECKE ET SÉRIES PRINCIPALES GÉNÉRALISÉES DE $\mathrm{Sp}_4(F)$

LAURE BLASCO ET CORINNE BLONDEL

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle impaire et G le groupe $\mathrm{Sp}_4(F)$. Suivant le programme, décrit par C. Bushnell et P. Kutzko [**6**], de description des représentations lisses de G de support supercuspidal donné à partir de types, nous avons construit dans [**2**] des types induits associés aux représentations supercuspidales des sous-groupes de Levi maximaux de G. Nous calculons maintenant leurs algèbres de Hecke et en déduisons quelques conséquences sur les représentations induites correspondantes.

Le parti-pris adopté ici est d'exploiter au maximum le point de vue et les résultats de [**6**] : les calculs d'algèbres de Hecke sont effectués sur la base du § 11 de cet article.

Soit P un sous-groupe parabolique maximal de G, M un facteur de Levi de P, (J_M, τ_M) un type pour une classe d'inertie de représentations supercuspidales irréductibles π de M, et (J, τ) une paire couvrante de (J_M, τ_M). Le théorème (11.3) de [**6**] affirme que sous certaines hypothèses et pour un bon sous-groupe compact maximal K de G, l'algèbre de Hecke $\mathscr{H}(G, \tau)$ est isomorphe (comme espace vectoriel) au produit tensoriel $\mathscr{H}(M, \tau_M) \otimes \mathscr{H}(K, \tau)$. La structure de $\mathscr{H}(M, \tau_M)$ et la dimension de $\mathscr{H}(K, \tau)$ (dimension deux en l'occurrence) sont données dans [**6**].

Partant de ces résultats et des suites de paires couvrantes de [**2**], nous décrivons complètement les algèbres $\mathscr{H}(G, \tau)$. Le sous-groupe de Levi M étant fixé, la décomposition précédente nous conduit à des algèbres toutes construites sur le même groupe de Coxeter à deux générateurs : le groupe de Weyl affine de $\mathrm{SL}_2(F)$ si M est isomorphe à $F^\times \times \mathrm{SL}_2(F)$, celui de $U(1, 1)(F)$ si M est isomorphe à $\mathrm{GL}_2(F)$. La structure des algèbres est décrite dans le théorème (1.11), les relations quadratiques satisfaites par leurs générateurs par les tableaux (2.17) et (3.17).

La connaissance des algèbres de Hecke $\mathscr{H}(G, \tau)$ permet alors de décrire la structure des induites $\mathrm{ind}_P^G \pi$ et en particulier de déterminer celles qui possèdent une sous-représentation de la série discrète (§§ 1.f, 2.e et 3.e).

Bien entendu ces résultats ne sont pas nouveaux : cette description a été faite complètement par P. Sally et M. Tadić dans [**18**], en caractéristique résiduelle quelconque, à partir de travaux de F. Shahidi, et de J.-L. Waldspurger concernant $G\mathrm{Sp}_4(F)$ [**19**, **20**, **21**]. Il est cependant intéressant de traiter complètement sur un exemple, la question de réductibilité des induites à partir de la théorie des types induits et des algèbres de Hecke associées.

A une exception près (voir (2.17)), les algèbres que nous obtenons sont isomorphes à des algèbres de Hecke sur $\mathrm{SL}_2(F)$ ou $U(1, 1)(F)$ relatives à un caractère quadratique d'un sous-groupe d'Iwahori. On pourrait donc, comme dans

Received 25 October 2000; revised 30 October 2001.

2000 *Mathematics Subject Classification* 22E50, 11F70.

[**17**], étudier la réductibilité des induites à l'aide d'isomorphismes d'algèbres de Hecke convenablement normalisés pour préserver la structure L^2 (voir (1.12)). Compte tenu de notre point de vue et de la présence d'une algèbre 'exceptionnelle', nous avons traité directement cette question à partir de notre description de $\mathscr{H}(G, \tau)$.

Parmi les algèbres de Hecke obtenues, celles 'de niveau 0' ont été calculées par L. Morris dans [**15**], pour un groupe réductif quelconque ; nous les incluons néanmoins parce que notre procédé n'établit pas de distinction entre le niveau 0 et les niveaux supérieurs. D'autres figurent dans l'article de A. Moy [**16**], qui traite de $G\mathrm{Sp}_4(F)$. Par ailleurs, R. Howe et J.-L. Kim [**9**] ont annoncé la structure des algèbres de Hecke sur $\mathrm{Sp}_4(F)$ associées aux types construits dans [**11**], dans des cas de niveau strictement positif, en caractéristique 0 et caractéristique résiduelle suffisamment grande. Sous ces hypothèses et lorsque la représentation τ_M est induite d'une représentation de dimension 1, cette structure est décrite dans [**12**].

La première partie explique la méthode de calcul des algèbres de Hecke utilisée. La deuxième et la troisième parties sont consacrées respectivement aux sous-groupes paraboliques standard associés à la racine longue (de facteur de Levi isomorphe à $F^\times \times \mathrm{SL}_2(F)$) et à la racine courte (de facteur de Levi isomorphe à $\mathrm{GL}_2(F)$).

NOTATIONS. Les notations sont essentiellement celles de [**2**] ; nous rappelons les plus importantes. Le corps de base F est un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p impaire. On note $\mathfrak{o}$ l'anneau des entiers de F, $\mathfrak{p} = \varpi\mathfrak{o}$ son idéal maximal, k ou k_F son corps résiduel, de cardinal q.

(0.1) On travaille sur le groupe $G = \mathrm{Sp}_4(F)$ que l'on identifie au groupe des matrices $g \in M_4(F)$ fixant la forme alternée sur F^4 de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A conjugaison près, G possède deux sous-groupes paraboliques maximaux notés P_α (parabolique de Siegel) et P_β dont les sous-groupes de Levi M_α et M_β sont isomorphes respectivement à $\mathrm{GL}_2(F)$ et $F^\times \times \mathrm{SL}_2(F)$. On note N_α^+ et N_β^+ les radicaux unipotents de P_α et P_β, et N_α^- et N_β^- leurs opposés par rapport à M_α et M_β respectivement. Dans la suite on abrègera en général les notations en M, P, N^+, N^- et $P^- = MN^-$: ainsi P désignera P_α ou P_β indifféremment dans la première partie, P_β dans la deuxième partie, et P_α dans la troisième partie.

(0.2) On identifie M_β à $F^\times \times \mathrm{SL}_2(F)$ au moyen de l'isomorphisme :

$$F^\times \times \mathrm{SL}_2(F) \longrightarrow M_\beta, \quad (\lambda, g) \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}.$$

Notons que

$$N_\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} / x, y, z \in F \right\}.$$

(0.3) On identifie M_α à $\mathrm{GL}_2(F)$ au moyen de l'isomorphisme :

$$\mathrm{GL}_2(F) \longrightarrow M_\alpha, \quad g \longmapsto \tilde{g} = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & {}^{\mathrm{d}}g^{-1} \end{pmatrix}$$

où ${}^{\mathrm{d}}g = \left(\begin{smallmatrix} d & b \\ c & a \end{smallmatrix}\right)$ si $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.

Soit $\Delta_2(F)$ le sous-groupe de $M_2(F)$ formé des matrices dont les coefficients diagonaux sont égaux. Alors $X \mapsto X^+ = \left(\begin{smallmatrix} I & X \\ 0 & I \end{smallmatrix}\right)$ et $X \mapsto X^- = \left(\begin{smallmatrix} I & 0 \\ X & I \end{smallmatrix}\right)$ sont des isomorphismes de $\Delta_2(F)$ sur N_α^+ et N_α^- respectivement.

(0.4) Soit J un sous-groupe ouvert compact de G. On note $J^+ = J \cap N^+$, $J^- = J \cap N^-$ et $J_M = J \cap M$.

(0.5) Soit J un sous-groupe ouvert compact de G et τ une représentation lisse irréductible de J dans un espace vectoriel complexe W. Nous notons $\mathscr{H}(G, \tau)$ l'algèbre de Hecke de G relativement à (J, τ), définie comme l'algèbre de convolution, pour la mesure de Haar sur G donnant à J le volume 1, des fonctions f lisses à support compact de G dans $\mathrm{End}\, W$ vérifiant : $f(kgh) = \tau(k) f(g) \tau(h)$ pour tous éléments h, k de J, et g de G.

Cette définition est celle de $\mathscr{H}(G, \check{\tau})$ dans [**6**]. Certains énoncés sont donc modifiés en conséquence.

1. *L'algèbre de Hecke comme produit tensoriel*

1.a. *Le contexte*

Soient $\mathfrak{s}_M = [M, \pi]_M$ et $\mathfrak{s}_G = [M, \pi]_G$ les classes d'inertie dans M et G respectivement d'une représentation π irréductible et supercuspidale de M. Nous avons rappelé dans [**2**, I.1 et I.2] la description d'un $\mathfrak{s}_M$-type (J_M, τ_M) qui vérifie les hypothèses (11.1) de [**6**] – essentiellement, la représentation π est induite d'un prolongement de τ_M à $\widetilde{J_M}$, sous-groupe compact modulo le centre dont J_M est sous-groupe compact maximal.

Une suite $(J_i, \tau_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de paires couvrantes de (J_M, τ_M) est construite dans [**2**] ; d'après [**6**, théorème (8.3)] et [**4**], chacune des paires (J_i, τ_i) est un $\mathfrak{s}_G$-type dans G. Le point de départ de la description de l'algèbre de Hecke d'une de ces paires est le suivant.

(1.1) *On peut choisir $k \in \mathbb{Z}$ tel que la paire $(J, \tau) = (J_k, \tau_k)$ vérifie les hypothèses* (11.2) *de* [**6**] *relativement au sous-groupe $K = \mathrm{Sp}_4(\mathfrak{o})$ de G.*

Un tel choix sera fait au § 2 pour $P = P_\beta$, et au § 3 pour $P = P_\alpha$. Choisir k tel que J_k soit contenu dans K est facile, et $K = \mathrm{Sp}_4(\mathfrak{o})$ vérifie évidemment (11.2)(i), c'est-à-dire $G = PK$, et (11.2)(ii) : $K \cap M$ est un sous-groupe compact

maximal de M. En fait (11.2)(iii) résulte du fait que J_k est contenu dans un parahorique convenable (c'est la remarque (11.3) de [**6**]). La dernière condition (11.2)(iv) n'est pas liée à J : il s'agit de trouver un système de représentants de $N_G(\mathfrak{s}_M)/M$ dans K formé d'éléments qui normalisent J_M et fixent la classe d'isomorphisme de τ_M.

1.b. *Le cas trivial*

Par définition $N_G(\mathfrak{s}_M)$ est formé des éléments g de $N_G(M)$ tels que les représentations π et π^g soient équivalentes à torsion près par un caractère non ramifié de M. Mais $N_G(M)/M$ est d'ordre 2, engendré par la classe d'un élément w de K. Le cas trivial où les classes d'inertie $[M, \pi]_M$ et $[M, \pi^w]_M$ sont distinctes est donc réglé par le théorème (12.1) de [**6**], qui décrit un isomorphisme d'algèbres : $\mathscr{H}(M, \tau_M) \to \mathscr{H}(G, \tau)$, préservant le support des fonctions. Dans notre contexte l'algèbre $\mathscr{H}(M, \tau_M)$ est commutative et les représentations induites $\mathrm{ind}_P^G \pi'$, où π' est tordue de π par un caractère non ramifié de M, sont irréductibles.

1.c. *Le cas non trivial*

Nous nous plaçons à partir de maintenant dans le cas non trivial où les classes d'inertie $[M, \pi]_M$ et $[M, \pi^w]_M$ sont égales. Le théorème (11.4) de [**6**] décrit alors un isomorphisme d'espaces vectoriels complexes, de $\mathscr{H}(M, \tau_M)$-modules à droite et de $\mathscr{H}(K, \tau)$-modules à gauche :

$$\mathscr{H}(K, \tau) \otimes_{\mathbb{C}} \mathscr{H}(M, \tau_M) \xrightarrow{\sim} \mathscr{H}(G, \tau), \quad f \otimes \varphi \longmapsto f \star t_{P^-}(\varphi). \tag{1.2}$$

La description de l'algèbre $\mathscr{H}(G, \tau)$ repose donc sur celle de $\mathscr{H}(K, \tau)$ et sur l'étude du produit tensoriel ci-dessus.

1.d. *L'algèbre $\mathscr{H}(K, \tau)$*

D'après [**6**, (11.6)], elle est de dimension 2 et a pour base $(\mathbb{I}, T_w)$, où :

(i) $\mathbb{I}$ est l'élément unité de $\mathscr{H}(G, \tau)$, de support J et valeur I_W en 1 ;

(ii) T_w a pour support JwJ, pour un élément w de K d'image non triviale dans $N_G(\mathfrak{s}_M)/M$ et vérifiant $wJ_M w^{-1} = J_M$ et $\tau_M^w \simeq \tau_M$.

Noter que ces conditions entraînent l'inversibilité de $T_w(w)$ dans $\mathrm{End}\, W$. De plus w^2 est un élément de M qui entrelace τ_M, donc un élément de $\widetilde{J}_M \cap K = J_M$, et $T_w(w)T_w(w^{-1})$ est un scalaire non nul ; *on demandera* :

$$T_w(w)\, T_w(w^{-1}) = I_W, \quad \textit{soit } T_w(w)^2 = \tau_M(w^2).$$

La structure de $\mathscr{H}(K, \tau)$ est déterminée par l'expression de $T_w \star T_w$ dans la base $(\mathbb{I}, T_w)$. Or on peut choisir w et la paire $(J, \tau) = (J_k, \tau_k)$ de (1.1) de façon que $wJ_k w^{-1}$ appartienne à la suite de paires (J_i, τ_i) ; précisément :

(1.3) *il existe un entier $h \geqslant k$ tel que*

$$wJ_k^+ w^{-1} = J_h^- \subset J_k^-, \quad wJ_k^- w^{-1} = J_h^+ \supset J_k^+;$$

en conséquence :

$$J \cap wJ\, w^{-1} = J_h^- J_M J_k^+, \quad JwJ = J_k^- J_M\, wJ_k^-.$$

Ceci permet une première réduction du calcul :

$$\begin{aligned} T_w \star T_w(g) &= \int_K T_w(x) T_w(x^{-1}g)\, dx = \sum_{JwJ/J} T_w(x) T_w(x^{-1}g) \\ &= \sum_{J/J\cap wJw^{-1}} T_w(jw) T_w(w^{-1}j^{-1}g) \\ &= T_w(w) \sum_{J^-/J_h^-} T_w(w^{-1}j^{-1}g) \\ &= T_w(w) \sum_{J_h^+/J^+} T_w(j^{-1}w^{-1}g). \end{aligned}$$

Or $T_w \star T_w$ s'écrit sous la forme $bT_w + c\mathbb{I}$ où b et c sont des *scalaires*, d'où :

$$(1.4) \qquad \begin{cases} cI_W = T_w \star T_w(1) = [J^- : J_h^-] T_w(w) T_w(w^{-1}), \\ bI_W = T_w(w)^{-1} T_w \star T_w(w) = \displaystyle\sum_{j \in J^+ \setminus (J_h^+ \cap JwJ)} T_w(j) \\ \qquad\qquad = \displaystyle\sum_{j \in J^+ \setminus (J_h^+ \cap JwJ)} \frac{\operatorname{Tr} T_w(j)}{\dim W} I_W. \end{cases}$$

Comme la valeur de $\operatorname{Tr} T_w(j)$ pour $j \in J_h^+$ est invariante par conjugaison par J_M, on effectue une dernière réduction en introduisant Λ, un système de représentants dans J_h^+ des orbites de l'action par conjugaison de J_M sur le quotient $J^+ \setminus (J_h^+ \cap JwJ)$. On note Ω_x l'orbite de $x \in \Lambda$ pour cette action. On a alors

$$(1.5) \qquad bI_W = \sum_{x \in \Lambda} \operatorname{Card} \Omega_x \frac{\operatorname{Tr} T_w(x)}{\dim W} I_W.$$

1.e. *Le produit tensoriel*

L'algèbre $\mathscr{H}(M, \tau_M)$ est commutative et les hypothèses (11.1) de [**6**] assurent que les éléments du support de $\mathscr{H}(M, \tau_M)$ normalisent J_M. Elle est isomorphe à $\mathbb{C}[Z, Z^{-1}]$ où Z est un élément de $\mathscr{H}(M, \tau_M)$ de support $J_M z J_M$. Nous verrons aux §§ 2 et 3 que l'on peut choisir l'élément z positif relativement à (P^-, J) [**6**, (6.5)], plus précisément :

(1.6) *il existe un entier $j \geqslant h$ tel que*

$$zJ_k^+ z^{-1} = J_j^+ \supset J_h^+, \quad zJ_k^- z^{-1} = J_j^- \subset J_h^-.$$

D'après [**6**, § 7], l'image $\overline{Z} := t_{P^-}(Z)$ de Z dans $\mathscr{H}(G, \tau)$ a pour support JzJ. Grâce à (1.2) la structure de $\mathscr{H}(G, \tau)$ est entièrement caractérisée par les coefficients b et c de (1.4) et par l'expression de $\overline{Z} \star T_w$ et $\overline{Z}^{-1} \star T_w$ dans la base $\{\overline{Z}^i / i \in \mathbb{Z}\} \cup \{T_w \star \overline{Z}^i / i \in \mathbb{Z}\}$ de $\mathscr{H}(G, \tau)$. Or les situations des §§ 2 et 3 présentent les mêmes caractéristiques :

(1.7) *Il y a un sous-groupe réductif H de G tel que la réunion $\{z^i / i \in \mathbb{Z}\} \cup \{wz^i / i \in \mathbb{Z}\}$ forme un système de représentants dans H du groupe de Weyl affine W de H relativement au sous-groupe d'Iwahori $\mathscr{I} = H \cap J$. Le groupe W est un groupe de Coxeter de base $S = \{w, wz\}$.*

Dans cet énoncé et dans la suite on identifie W et son système de représentants $\{z^i / i \in \mathbb{Z}\} \cup \{wz^i / i \in \mathbb{Z}\}$, selon l'abus de notation usuel. On parlera en particulier de *longueur* pour ces éléments : si x est un élément du système de représentants ci-dessus, $l(x)$ désignera la longueur d'une décomposition réduite de la classe de x dans le groupe de Coxeter (W, S).

Le groupe H sera isomorphe à $\mathrm{SL}_2(F)$ au § 2 et à $U(1,1)(F)$, associé à une extension de F ramifiée ou non selon que π appartient à la série ramifiée ou non, au § 3.

(1.8) LEMME. *Posons $s = wz$ et $T_s = T_w^{-1} \star \overline{Z}$. L'élément T_s de $\mathscr{H}(G, \tau)$ a pour support JsJ.*

Démonstration. L'inversibilité de T_w découle de (1.4) : c est non nul. Il suffit de montrer que

(i) s appartient au support de $\mathscr{H}(G, \tau)$;

(ii) si T'_s est un élément de $\mathscr{H}(G, \tau)$ de support JsJ, alors $T_w \star T'_s$ a pour support JzJ.

Or $s = wz$ normalise (J_M, τ_M) comme w et z. Par (1.3) et (1.6) :

$$s^{-1} J^- s \subset J^+, \quad J^- \subset s^{-1} J^+ s ; \tag{1.9}$$

donc s entrelace τ. Alors (ii) est immédiat puisque le support de $T_w \star T'_s$ est contenu dans : $JwJsJ = JwJ^+ J_M w^{-1} wJ^- sJ = Jwss^{-1} J^- sJ = JzJ$. (Rappelons que w^2 appartient à J_M.) □

On normalise T_s comme T_w : s^2 appartient à J_M par (1.7) et $T_s(s)$ est unique à scalaire près; on demande donc

$$T_s(s) T_s(s^{-1}) = I_W, \quad \text{c'est-à-dire } T_s(s)^2 = \tau_M(s^2).$$

Ces normalisations entraînent la normalisation de $\overline{Z} = T_w \star T_s$, donc de Z. Enfin, dans la situation du § 2 et du § 3 nous aurons toujours :

(1.10) *le groupe engendré par J et s est compact et T_s vérifie :*

$$T_s \star T_s = b^\circ T_s + c^\circ \mathbb{1}, \quad \text{où } b^\circ \in \mathbb{C}, c^\circ \in \mathbb{C}^\times.$$

En effet par [**7**], T_s engendre alors une sous-algèbre de dimension 2.

Dans une telle situation on obtient la structure de $\mathscr{H}(G, \tau)$.

(1.11) THÉORÈME. *L'algèbre $\mathscr{H}(G, \tau)$ est une algèbre de convolution sur (W, S). Elle a pour base comme espace vectoriel complexe la famille $(T_x)_{x \in W}$ d'éléments $T_x = T_{\sigma_1} \star \ldots \star T_{\sigma_r}$, de support JxJ, où $x = \sigma_1 \ldots \sigma_r$ est une décomposition réduite de x dans W. Elle est engendrée comme algèbre par T_w et T_s avec les relations :*

$$T_w \star T_w = bT_w + c\mathbb{1} ; \quad T_s \star T_s = b^\circ T_s + c^\circ \mathbb{1}.$$

Démonstration. On suit ici la définition d'algèbre de convolution sur un système de Coxeter donnée par Matsumoto [**14**, § 2]. Noter que les éléments T_x

sont bien définis : z est d'ordre infini donc la décomposition réduite d'un élément x de W est unique. Il suffit de montrer

(i) que $\mathscr{H}(G,\tau)$ est engendrée comme algèbre par T_w et T_s ;

(ii) que le support de T_x est JxJ ;

(iii) que la famille T_x ainsi définie est une base de $\mathscr{H}$.

(i) L'algèbre $\mathscr{H}(G,\tau)$ est engendrée par T_w, $\overline{Z} = T_w \star T_s$ et $\overline{Z}^{-1} = T_s^{-1} \star T_w^{-1}$; or T_w^{-1} (respectivement T_s^{-1}) est combinaison linéaire de T_w (respectivement T_s) et $\mathbb{1}$.

(ii) Remarquons une fois pour toutes que l'inversibilité de T_w et T_s entraîne celle de tous les T_x : il suffit de montrer que leur support est contenu dans JxJ.

Notons déjà que pour $x = z^i$ avec $i \in \mathbb{N}$ on a $T_x = \overline{Z}^i$, de support JxJ par [**6**, § 7]. Si $x = z^i w$, pour $i \in \mathbb{N}$, on déduit de $w^{-1}J^+w \subset J$ et $z^i J^- z^{-i} \subset J$ que $Jz^i JwJ = Jz^i wJ$, d'où le support voulu pour $T_x = T_{z^i} \star T_w$. Ceci règle la question pour les éléments dont la décomposition réduite commence par w.

Les autres sont de la forme z^{-i} ou $z^{-i}s$ avec $i \in \mathbb{N}$. Là encore les conditions $s^{-1}J^-s \subset J$ et $z^{-i}J^+z^i \subset J$ entraînent $Jz^{-i}JsJ = Jz^{-i}sJ$; reste à examiner les z^{-i}. Mais $z^{-1} = sw$ et on montre comme en (1.8) que $JsJwJ = Jz^{-1}J$. Enfin, puisque z^{-1} est (P,J)-positif, $T_{z^{-1}}$ est l'image par t_P d'un élément de $\mathscr{H}(M,\tau_M)$ de support $J_M z^{-1}$ donc $T_{z^{-i}} = (T_{z^{-1}})^i$ a pour support $Jz^{-i}J$.

(iii) L'union $\{\overline{Z}^i / i \in \mathbb{Z}\} \cup \{T_w \star \overline{Z}^i / i \in \mathbb{Z}\}$ est une base de $\mathscr{H}(G,\tau)$, donc $\{T_w^{-1} \star \overline{Z}^i / i \in \mathbb{Z}\} \cup \{\overline{Z}^i / i \in \mathbb{Z}\}$ en est une autre. On a $\overline{Z}^i = T_{z^i}$ si $i \in \mathbb{N}$, et $T_w^{-1} \star \overline{Z}^i = T_s \star \overline{Z}^{i-1}$ est égal à $T_{sz^{i-1}}$ si $i - 1 \geqslant 0$. D'autre part $\overline{Z}^{-1} = T_s^{-1} \star T_w^{-1}$ est combinaison linéaire de $\mathbb{1}$, T_s, T_w et T_{sw}, le coefficient de T_{sw} étant non nul, donc $\overline{Z}^i$, pour $i < 0$, est combinaison linéaire d'éléments T_x pour $l(x) < 2i$ et de T_{z^i}, le coefficient de T_{z^i} étant non nul. En multipliant par T_s on trouve de même pour $T_s \star \overline{Z}^i$, avec $i < 0$, une combinaison linéaire dans laquelle le coefficient de $T_{sz^i} = T_{wz^{i+1}}$ est non nul. □

Précisons pour la suite certaines propriétés de cette algèbre. Posons pour $x \in W$: $q_x = \operatorname{vol} JxJ$ (cette définition est sans rapport avec l'élévation de q à la puissance $l(x)$, car la longueur l est celle de (W,S) considéré comme groupe de Coxeter). Pour $x, y \in W$ tels que $l(xy) = l(x) + l(y)$, on a :

$$T_{xy} = T_x \star T_y, \quad T_{xy}(xy) = T_x(x)T_y(y), \quad q_{xy} = q_x q_y. \tag{1.12}$$

La première identité est tautologique, les suivantes s'obtiennent en détaillant le (ii) de la démonstration précédente. Par exemple, pour $i \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} T_{z^i} \star T_w(z^i w) &= \int_{Jz^iJ} T_{z^i}(g) T_w(g^{-1} z^i w)\, dg \\ &= T_{z^i}(z^i) \sum_{J^-/z^iJ^-z^{-i}} T_w(z^{-i} j z^i w) \quad (\text{car } Jz^iJ = J^- z^i J_M J^+) ; \end{aligned}$$

or la dernière somme n'a qu'un terme car :

$$N^- w \cap JwJ = N^- w \cap J^- J_M w J^- = [N^- \cap J^- J_M (wJ^- w^{-1})]w = J^- w.$$

1.f. *Application à la réductibilité des induites*

Une fois déterminée la structure de $\mathscr{H}(G,\tau)$, on sait décomposer les représentations induites de la forme $\operatorname{ind}_P^G \pi \otimes \nu$ (ν caractère non ramifié de M)

grâce au théorème (8.3) de [**6**], ou plutôt son corollaire (8.4) ; nous le rappelons ci-dessous sous une forme qui permet de travailler avec des induites normalisées.

Notons δ_{P^-} le module de l'action de M sur le radical unipotent N^- :

$$\delta_{P^-}(x) = [J^- : xJ^-x^{-1}]^{-1} \quad (x \in M),$$

et $t_{P^-} : \mathscr{H}(M, \tau_M) \to \mathscr{H}(G, \tau)$ l'homomorphisme d'algèbres injectif caractérisé par $t_{P^-}(f)(x) = \delta_{P^-}(x)^{1/2} f(x)$ si x est un élément (P^-, J)-positif de M. (Le t_{P^-} ici est le $j_{\sqrt{\delta_{P^-}}}$ de [**5**, (7.6.20)] et le t_u de [**17**, Théorème 9.2] et *n'est pas* le t_{P^-} de [**6**] : on tord l'homomorphisme t de [**6**, § 7] par la racine carrée du module et non par le module lui-même. Cette redéfinition de t_{P^-} ne change rien aux paragraphes précédents, dans lesquels la normalisation de Z n'est pas fixée a priori.)

Comme (J, τ) est une paire couvrante de (J_M, τ_M), les catégories $\mathscr{R}^{\mathfrak{s}}(G)$ et Mod-$\mathscr{H}(G, \tau)$ (modules *à droite* non dégénérés sur $\mathscr{H}(G, \tau)$) sont équivalentes via le foncteur

$$M_\tau : \mathscr{R}^{\mathfrak{s}}(G) \longrightarrow \text{Mod-}\mathscr{H}(G, \tau), \quad \pi \longmapsto \pi_\tau = \text{Hom}_J(\tau, \pi).$$

L'action à droite sur π_τ est donnée par

$$\phi \cdot f(w) = \int_G \pi(g^{-1})\phi(f(g)w)\, dg \quad (f \in \mathscr{H}(G, \tau), \phi \in \pi_\tau, w \in W).$$

Enfin, l'image par M_τ de la représentation induite *normalisée* $\text{ind}_P^G \pi \otimes \nu$ est :

$$M_\tau(\text{ind}_P^G \pi \otimes \nu) = \text{Hom}_{\mathscr{H}(M,\tau_M)}(\mathscr{H}(G, \tau), (\pi \otimes \nu)_{\tau_M}).$$

Le $\mathscr{H}(M, \tau_M)$-module à droite $(\pi \otimes \nu)_{\tau_M}$ est de dimension 1 puisque $\pi \otimes \nu$ est irréductible ; il est caractérisé par l'action du générateur Z. On note D_a le $\mathscr{H}(M, \tau_M)$-module de dimension 1 et base v sur lequel Z opère par le scalaire $a \in \mathbb{C}^\times$. Le problème de réductibilité de la représentation induite ci-dessus est maintenant réduit à l'étude de la structure du $\mathscr{H}(G, \tau)$-module à droite

$$X_a = \text{Hom}_{\mathscr{H}(M,\tau_M)}(\mathscr{H}(G, \tau), D_a).$$

La structure de $\mathscr{H}(M, \tau_M)$-module à droite de $\mathscr{H}(G, \tau)$ est fournie par l'isomorphisme (1.2) : $\mathscr{H}(G, \tau)$ est un $\mathscr{H}(M, \tau_M)$-module libre de rang 2. Il est réductible si et seulement si il contient une droite propre, complètement réductible si et seulement si il contient deux droites propres distinctes.

Or l'action de $\mathscr{H}(K, \tau)$ a exactement deux droites propres sur lesquelles T_w opère respectivement par ω_1 et ω_2, les deux racines distinctes de $X^2 - bX - c = 0$ (les racines de ce polynôme sont distinctes dans les cas considérés aux §§ 2 et 3). De même l'action de T_s a deux valeurs propres distinctes σ_1 et σ_2.

(1.13) PROPOSITION. *Le module X_a est réductible si et seulement si a est produit d'une valeur propre de T_w et d'une valeur propre de T_s. Le module X_a est complètement réductible si et seulement si a est un tel produit de deux façons distinctes.*

Démonstration. Le module X_a a pour base les fonctions $\Lambda_{\mathbb{I}}$ et Λ_w définies par $\Lambda_{\mathbb{I}}(\mathbb{I}) = \Lambda_w(T_w) = v$ et $\Lambda_{\mathbb{I}}(T_w) = \Lambda_w(\mathbb{I}) = 0$, dont aucune n'est propre sous T_w ; en effet $\mathscr{H}(G, \tau)$ agit sur X_a par translations à gauche de sorte que $\Lambda \cdot T_w(f) = \Lambda(T_w \star f)$ pour $\Lambda \in X_a$ et $f \in \mathscr{H}(G, \tau)$. Un vecteur propre Λ de $\mathscr{H}(G, \tau)$ vérifie donc $\Lambda(\mathbb{I}) \neq 0$ et $\Lambda \cdot \overline{Z}(\mathbb{I}) = \Lambda(\overline{Z}) = \Lambda(\mathbb{I}) \cdot Z = a\Lambda(\mathbb{I})$; la valeur propre de $\overline{Z}$ associée est donc a et puisque $\overline{Z} = T_w \star T_s$ la condition

de réductibilité donnée est nécessaire. Il suffit maintenant de montrer le résultat suivant.

Si a/ω_i est une valeur propre de T_s, alors tout vecteur propre Λ_i de T_w dans X_a attaché à la valeur propre ω_i est propre sous $\mathscr{H}(G,\tau)$.

En effet Λ_i est propre sous $\mathscr{H}(G,\tau)$ si et seulement si il l'est sous T_s. Or :

$$\Lambda_i(T_s) = \Lambda_i(T_w^{-1} \star \overline{Z}) = \omega_i^{-1}\Lambda_i(\overline{Z}) = a\omega_i^{-1}\Lambda_i(\mathbb{I}),$$

et on vérifie aisément que la relation $\Lambda(T_s) = \sigma_j\Lambda(\mathbb{I}) \neq 0$ caractérise les vecteurs propres de T_s associés à la valeur propre σ_j. □

Dans les algèbres de Hecke que nous obtenons aux §§ 2 et 3, les relations quadratiques vérifiées par T_w et T_s sont de trois types :

Type A : $T^2 = (q-1)T + q\mathbb{I}$; valeurs propres -1 et q ;
Type B : $T^2 = \mathbb{I}$; valeurs propres -1 et 1 ;
Type C : $T^2 = (q^2-1)T + q^2\mathbb{I}$; valeurs propres -1 et q^2.

Autrement dit il y a des scalaires μ et μ' tels que T_w/μ et T_s/μ' vérifient une des relations ci-dessus. On peut déjà préciser les cas de réductibilité obtenus en fonction des types de T_w et T_s (à l'ordre près) :

$$\text{A et A :} \quad \begin{cases} a = -\mu\mu' q & \text{(multiplicité 2)}, \\ a = \mu\mu' \text{ ou } \mu\mu' q^2 & \text{(multiplicité 1)}; \end{cases}$$

$$\text{A et B :} \quad a = \pm\mu\mu' \text{ ou } \pm\mu\mu' q \quad \text{(multiplicité 1)} ; \tag{1.14}$$

$$\text{B et B :} \quad a = \pm\mu\mu' \quad \text{(multiplicité 2)} ;$$

$$\text{B et C :} \quad a = \pm\mu\mu' \text{ ou } \pm\mu\mu' q^2 \quad \text{(multiplicité 1)}.$$

Le scalaire a est relié à la représentation $\pi \otimes \nu$ via :

$$a\phi(w) = \phi \cdot Z(w) = \int_{J_M z} \pi \otimes \nu(g^{-1})\phi(Z(g)w)\, dg \tag{1.15}$$

$$= \pi \otimes \nu(z^{-1})Z(z)\phi(w) \quad (\phi \in (\pi \otimes \nu)_{\tau_M}, w \in W).$$

Rappelons que $Z(z) = \delta_{P^-}(z)^{-1/2}\overline{Z}(z)$, avec $\overline{Z}(z) = \tau_M(w^{-2})T_w(w)T_s(s)$.

On détermine aux §§ 2.e et 3.e les points de réductibilité des induites paraboliques de représentations supercuspidales de M_β et M_α ; on retrouve ainsi les résultats de P. Sally et M. Tadić [**18**, Propositions 5.6 et 5.8]. La traduction s'effectue en fixant la partie unitaire du caractère non ramifié ν ; en effet le point de vue ci-dessus est de travailler sur une classe d'inertie de représentations supercuspidales de M, soit avec un paramètre $s \in \mathbb{C}$, tandis que dans [**18**] la partie unitaire de la représentation est fixée et le paramètre est réel.

Les représentations de carré intégrable de G correspondent via M_τ aux caractères Ω de $\mathscr{H}(G,\tau)$ tels que

$$\sum_{x \in W} \frac{|\Omega(T_x)|^2}{q_x} < +\infty$$

(voir [**5**, (7.7.5); **3**, § 5]). Les propriétés (1.12) permettent de réduire cette expression, avec $a = \Omega(T_z) = \Omega(T_{z^{-1}})$, sous la forme :

$$\left(\sum_{i\in\mathbb{N}}\left(\frac{|a|^2}{q_z}\right)^i\right)\left(2+\frac{|\Omega(T_w)|^2}{q_w}+\frac{|\Omega(T_s)|^2}{q_s}\right)-1$$

d'où une condition nécessaire et suffisante sur a pour que la représentation irréductible de G associée soit de carré intégrable :

$$|a|^2 < q_z \quad (q_z = \delta_{P^-}(z)^{-1}). \tag{1.16}$$

2. *Algèbres de Hecke associées à* $\mathrm{SL}_2(F)$

2.a. *L'algèbre* $\mathscr{H}(M, \tau_M)$

Le contexte est celui de (0.2) et du § 1.a. Le $\mathfrak{s}_M$-type (J_M, τ_M) est de la forme :

$$(J_M = \mathfrak{o}^\times \times J_M^\circ, \tau_M = \chi \otimes \tau_M^0),$$

où [**2**, I.2] :

(i) χ est un caractère de $\mathfrak{o}^\times$ de conducteur l ;

(ii) J_M° est un sous-groupe parahorique de $\mathrm{SL}_2(F)$, égal soit à $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})$ (*cas non ramifié*), soit au sous-groupe d'Iwahori

$$\begin{pmatrix}\mathfrak{o}^\times & \mathfrak{o}\\ \mathfrak{p} & \mathfrak{o}^\times\end{pmatrix} \cap \mathrm{SL}_2(F) \quad (\textit{cas ramifié});$$

(iii) τ_M° est une représentation de J_M° de conducteur n et défaut 0.

REMARQUE. Le cas où J_M° est conjugué de $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})$ par $\left(\begin{smallmatrix}\varpi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ se déduit de celui où $J_M^\circ = \mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})$ par conjugaison par un élément g de $G\mathrm{Sp}_4(F)$, comme indiqué dans [**2**, I.2.3]. Les algèbres de Hecke obtenues sont les mêmes puisque la conjugaison par g induit un isomorphisme d'algèbres de $\mathscr{H}(G, \tau)$ sur $\mathscr{H}(G, \tau^g)$.

La représentation induite de τ_M° à $\mathrm{SL}_2(F)$ est irréductible. Le support de $\mathscr{H}(M, \tau_M)$ est donc $F^\times \times J_M^\circ$ et l'algèbre a pour base les éléments Z_i de support $J_M z^i$, avec $i \in \mathbb{Z}$, et valeur t^i ($t \in \mathbb{C}^\times$ fixé) en z^i, où $z = \mathrm{diag}(\varpi^{-1}, I_2, \varpi)$. On a en outre $Z_{-1} = Z^{-1}$ et $Z_i = Z \star \ldots \star Z$ (i fois) pour $i > 1$, d'où $\mathscr{H}(M, \tau_M) \simeq \mathbb{C}[Z, Z^{-1}]$.

La représentation π de $M = M_\beta = F^\times \times \mathrm{SL}_2(F)$ est produit d'un caractère η prolongeant χ et de la représentation induite à $\mathrm{SL}_2(F)$ de τ_M°. Un élément non trivial du quotient $N_G(M)/M$ est

$$w = \zeta\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

où l'on note $\zeta = \zeta_{2\alpha+\beta}$ le plongement de $\mathrm{SL}_2(F)$ dans G associé à la racine $2\alpha + \beta$, orthogonale à β (cf. [**2**, I]).

Comme $w\,\mathrm{diag}(a, g, a^{-1})w^{-1} = \mathrm{diag}(a^{-1}, g, a)$ pour $a \in F^\times$ et $g \in \mathrm{SL}_2(F)$, la représentation π^w est produit de π par le caractère $\eta^{-2} \otimes 1$ de $F^\times \times \mathrm{SL}_2(F)$: π et π^w sont dans la même classe d'inertie si et seulement si η^2 est trivial sur $\mathfrak{o}^\times$, c'est-à-dire si $\chi^2 = 1$. C'est ce cas non trivial que l'on examine dans la suite.

2.b. *Le choix des types*

Des suites de paires couvrantes de (J_M, τ_M) sont construites en [**2**, II, (1.4) et (1.5)]. Choisir une paire $(J, \tau) = (J_k, \tau_k)$ dans chacune de ces suites telle que les conditions (1.1) et (1.3) ci-dessus soient satisfaites, c'est choisir un cran de la suite pour lequel J_k est contenu dans un parahorique convenable et $wJ_k w^{-1} = J_h$ est un cran suivant de la suite, encore contenu dans $K = \mathrm{Sp}_4(\mathfrak{o})$. Comme $\chi^2 = 1$ on a $l = 1$, cependant les suites dépendent de J_M° et n. Le choix est le suivant (il est implicite que l'on entend les intersections avec $\mathrm{Sp}_4(F)$ ou parfois $\mathrm{SL}_2(F)$ des groupes indiqués).

Cas non ramifié : $J_M = \mathfrak{o}^\times \times \mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})$, $k = -n+2$, $h = -n+3$.

n pair :

$$J = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{p}^{n/2} & \mathfrak{p}^{n/2} & \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p}^{n/2} & & & \mathfrak{p}^{n/2} \\ \mathfrak{p}^{n/2} & & \mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}) & \mathfrak{p}^{n/2} \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{p}^{n/2} & \mathfrak{p}^{n/2} & \mathfrak{o}^\times \end{pmatrix},$$

$$J_h = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{p}^{n/2} & \mathfrak{p}^{n/2} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p}^{n/2} & & & \mathfrak{p}^{n/2} \\ \mathfrak{p}^{n/2} & & \mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}) & \mathfrak{p}^{n/2} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{p}^{n/2} & \mathfrak{p}^{n/2} & \mathfrak{o}^\times \end{pmatrix};$$

n impair :

$$J = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{p}^{(n+1)/2} & \mathfrak{p}^{(n+1)/2} & \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p}^{(n-1)/2} & & & \mathfrak{p}^{(n+1)/2} \\ \mathfrak{p}^{(n-1)/2} & & \mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}) & \mathfrak{p}^{(n+1)/2} \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{p}^{(n-1)/2} & \mathfrak{p}^{(n-1)/2} & \mathfrak{o}^\times \end{pmatrix},$$

$$J_h = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{p}^{(n-1)/2} & \mathfrak{p}^{(n-1)/2} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p}^{(n+1)/2} & & & \mathfrak{p}^{(n-1)/2} \\ \mathfrak{p}^{(n+1)/2} & & \mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}) & \mathfrak{p}^{(n-1)/2} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{p}^{(n+1)/2} & \mathfrak{p}^{(n+1)/2} & \mathfrak{o}^\times \end{pmatrix}.$$

Cas ramifié: $J_M = \mathfrak{o}^\times \times \begin{pmatrix} \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{o}^\times \end{pmatrix} \cap \mathrm{SL}_2(F)$, $k = -n-1$, $h = -n$.

n pair:

$$J = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{p}^{(n/2)+1} & \mathfrak{p}^{n/2} & \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p}^{n/2} & \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{o} & \mathfrak{p}^{n/2} \\ \mathfrak{p}^{n/2} & \mathfrak{p} & \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{p}^{(n/2)+1} \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{p}^{n/2} & \mathfrak{p}^{n/2} & \mathfrak{o}^\times \end{pmatrix},$$

$$J_h = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{p}^{n/2} & \mathfrak{p}^{n/2} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p}^{n/2} & \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{o} & \mathfrak{p}^{n/2} \\ \mathfrak{p}^{(n/2)+1} & \mathfrak{p} & \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{p}^{n/2} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{p}^{(n/2)+1} & \mathfrak{p}^{n/2} & \mathfrak{o}^\times \end{pmatrix};$$

n impair:

$$J = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{p}^{(n+1)/2} & \mathfrak{p}^{(n+1)/2} & \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p}^{(n-1)/2} & \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{o} & \mathfrak{p}^{(n+1)/2} \\ \mathfrak{p}^{(n+1)/2} & \mathfrak{p} & \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{p}^{(n+1)/2} \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{p}^{(n+1)/2} & \mathfrak{p}^{(n-1)/2} & \mathfrak{o}^\times \end{pmatrix},$$

$$J_h = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{p}^{(n+1)/2} & \mathfrak{p}^{(n-1)/2} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p}^{(n+1)/2} & \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{o} & \mathfrak{p}^{(n-1)/2} \\ \mathfrak{p}^{(n+1)/2} & \mathfrak{p} & \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{p}^{(n+1)/2} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{p}^{(n+1)/2} & \mathfrak{p}^{(n+1)/2} & \mathfrak{o}^\times \end{pmatrix}.$$

2.c. *L'algèbre* $\mathscr{H}(K, \tau)$

Puisque τ_M^w est égale à τ_M, l'opérateur d'entrelacement $T_w(w)$ est scalaire: on pose $T_w(w) = \lambda I_W$, pour $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. Comme w^2 opère par $\chi(-1)$ on normalise par $T_w(w)^2 = \chi(-1) I_W$, et si χ est trivial on choisira $T_w(w) = I_W$. Par (1.4):

(2.1) *$c = q$ ou q^3 dans le cas non ramifié, $c = q^2$ dans le cas ramifié.*

Le calcul du scalaire b ((1.4), (1.5)) s'appuie sur l'étude de l'action de J_M sur le quotient $J^+ \backslash (J_h^+ \cap JwJ)$. On utilise les notations de [**2**, I] pour faire référence aux sous-groupes radiciels.

(2.2) Lemme. *L'intersection $J_h^+ \cap JwJ$ est formée des éléments de J_h^+ dont le terme en $2\alpha + \beta$, c'est-à-dire l'entrée* (1,4)*, est de valuation* 0.

Démonstration. Si n n'est pas égal à 1, il suffit de remarquer que les éléments de J_h^+ dont le terme en $2\alpha + \beta$ est de valuation au moins égale à 1 appartiennent

à un sous-groupe parahorique $\mathscr{J}$ contenant J et disjoint de $\mathscr{J}w\mathscr{J}$:

$$\mathscr{J} = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{p} & \mathfrak{p} & \mathfrak{p} \\ \mathfrak{o} & & & \mathfrak{p} \\ \mathfrak{o} & & J_M^\circ & \mathfrak{p} \\ \mathfrak{o} & & & \mathfrak{p} \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o}^\times \end{pmatrix}.$$

Si $n = 1$, de tels éléments, s'ils n'appartiennent pas à J^+, appartiennent à la double classe $Jx_{\alpha+\beta}(1)J$ qui n'entrelace pas τ d'après [**2**, II].

Réciproquement tous les éléments de la forme indiquée appartiennent à l'intersection $J_h^+ \cap JwJ$ par (2.6) ci-dessous. □

L'action par conjugaison de J_M sur $J^+ \backslash (J_h^+ \cap JwJ)$ est décrite dans [**2**, II]. Elle a deux ou quatre orbites, mais nous utiliserons seulement le fait que toute orbite contient un ou plusieurs éléments de la forme :

$x_{2\alpha+\beta}(u)$, $u \in \mathfrak{o}^\times$ (cas non ramifié, n pair),

$x_{2\alpha+\beta}(u)$ ou $x_\alpha(\varpi^{[n/2]})x_{2\alpha+\beta}(u)$, $u \in \mathfrak{o}^\times$ (cas non ramifié, n impair),

$x_{2\alpha+\beta}(u)$ ou $x_\alpha(\varpi^{[n/2]})x_{2\alpha+\beta}(u)$, $u \in \mathfrak{o}^\times$ (cas ramifié, n pair),

$x_{2\alpha+\beta}(u)$ ou $x_{\alpha+\beta}(\varpi^{[n/2]})x_{2\alpha+\beta}(u)$, $u \in \mathfrak{o}^\times$ (cas ramifié, n impair).

Ceci permet de calculer b sous une forme intermédiaire entre (1.4) et (1.5), faisant intervenir un système de représentants noté $\{k^\times\}$ de $k^\times$ dans $\mathfrak{o}^\times$:

(2.3) *Posons*

$$S = \frac{1}{\dim W} \sum_{u \in \{k^\times\}} \operatorname{Tr} T_w(x_{2\alpha+\beta}(u)) ;$$

alors :

$b = S$ (*cas non ramifié, n pair*),

$$b = S + \frac{(q^2-1)}{\dim W} \sum_{u \in \{k^\times\}} \operatorname{Tr} T_w(x_\alpha(\varpi^{[n/2]})x_{2\alpha+\beta}(u))$$

(*cas non ramifié, n impair*),

$$b = S + \frac{(q-1)}{\dim W} \sum_{u \in \{k^\times\}} \operatorname{Tr} T_w(x_\alpha(\varpi^{[n/2]})x_{2\alpha+\beta}(u)) \quad (\textit{cas ramifié, n pair}),$$

$$b = S + \frac{(q-1)}{\dim W} \sum_{u \in \{k^\times\}} \operatorname{Tr} T_w(x_{\alpha+\beta}(\varpi^{[n/2]})x_{2\alpha+\beta}(u)) \quad (\textit{cas ramifié, n impair}).$$

Dans les trois dernières expressions, les coefficients (q^2-1) et $(q-1)$ comptent les éléments de $J^+ \backslash (J_h^+ \cap JwJ)$ de terme en $2\alpha+\beta$ donné.

Reste à calculer la trace de $T_w(x)$ pour de tels éléments. On part de

l'identité habituelle :

$$\begin{pmatrix} 0 & u \\ -u^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -u^{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad (u \in F^\times).$$

Transportée par ζ elle fournit : $T_w(x_{2\alpha+\beta}(u)) = \chi(u)T_w(w)$, avec $u \in \mathfrak{o}^\times$, d'où :

$$S = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi \text{ n'est pas trivial,} \\ q-1 & \text{si } \chi \text{ est trivial.} \end{cases} \tag{2.5}$$

Ceci règle le cas non ramifié, n pair. Traitons maintenant les cas non ramifié et n impair, ou ramifié et n pair, en posant $m = [n/2]$. La relation de commutation

$$x_\alpha(\varpi^m)x_{-2\alpha-\beta}(u^{-1}) \tag{2.6}$$
$$= x_{-2\alpha-\beta}(u^{-1})x_{-\alpha-\beta}(-\varpi^m u^{-1})x_{-\beta}(\varpi^{2m}u^{-1})x_\alpha(\varpi^m)$$

permet, avec (2.4), de décomposer $x_\alpha(\varpi^m)x_{2\alpha+\beta}(u)$, avec $u \in \mathfrak{o}^\times$, sur la double classe JwJ ; on calcule maintenant modulo $J \cap \operatorname{Ker}\tau$ à droite et à gauche :

$$x_\alpha(\varpi^m)x_{2\alpha+\beta}(u) \equiv x_\alpha(\varpi^m)x_{-2\alpha-\beta}(u^{-1})\zeta\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}w$$
$$\equiv x_{-\beta}(\varpi^{2m}u^{-1})x_\alpha(\varpi^m)\zeta\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}w$$
$$\equiv x_{-\beta}(\varpi^{2m}u^{-1})\zeta\begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & u^{-1} \end{pmatrix}w \quad (\text{car } w^{-1}J_h^+ w \subset J^-),$$

soit:

$$T_w(x_\alpha(\varpi^m)x_{2\alpha+\beta}(u)) = \chi(u)\lambda\tau_M^\circ\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{2m}u^{-1} & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.7}$$

Il s'agit maintenant de calculer la trace de

$$\tau_M^\circ\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{2m}u^{-1} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } u \in \mathfrak{o}^\times.$$

Le sous-groupe en jeu est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{p}^{n-1} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{cas non ramifié, } n \text{ impair})$$

ou

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{p}^{n} & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{cas ramifié, } n \text{ pair}) ;$$

vu l'hypothèse de défaut 0 faite sur τ_M°, il opère par une somme de caractères non triviaux de $\mathfrak{p}^{2m}/\mathfrak{p}^{2m+1}$.

Notons

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^n y & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \psi(y) \quad (y \in \mathfrak{o}),$$

l'un d'entre eux : ψ est un caractère non trivial de $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$. L'action par conjugaison de

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \quad \text{avec } a \in \mathfrak{o}^\times,$$

le transforme en

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \varpi^{2m} y & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \psi(a^2 y)$$

qui intervient donc dans τ_M° avec la même multiplicité.

(2.8) *Cas ramifié, n pair.* Comme τ_M° est une représentation irréductible d'un sous-groupe d'Iwahori de $\mathrm{SL}_2(F)$, les caractères de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{p}^n & 1 \end{smallmatrix}\right)$ figurant dans τ_M° forment une seule orbite modulo les carrés : ils sont tous de la forme ci-dessus et leur multiplicité est $\dim W / \frac{1}{2}(q-1)$, soit :

$$\begin{aligned} (2.9) \qquad & \frac{(q-1)}{\dim W} \sum_{u \in \{k^\times\}} \operatorname{Tr} T_w(x_\alpha(\varpi^{[n/2]}) x_{2\alpha+\beta}(u)) \\ & = 2\lambda \sum_{u \in k^\times} \chi(u) \Big(\sum_{a \in k^{\times 2}} \psi(au^{-1}) \Big) \\ & = 2\lambda \sum_{a \in k^{\times 2}} \Big(\sum_{u \in k^\times} \chi(u) \psi(au^{-1}) \Big) \\ & = \begin{cases} -(q-1) & \text{si } \chi \text{ est trivial (alors } \lambda = 1), \\ \lambda \xi q^{1/2}(q-1) & \text{si } \chi \text{ n'est pas trivial,} \end{cases} \end{aligned}$$

où $\xi q^{1/2}$ est la valeur de la somme de Gauss $\sum_{u \in k^\times} \chi(u)\psi(u)$; en particulier $\xi^2 = (-1)^{(q-1)/2}$. Notons que si χ n'est pas trivial, on a $\lambda^2 = \chi(-1) = \xi^2$, donc $\lambda\xi = \pm 1$. On achève le calcul de b selon (2.3) :

$$(2.10) \qquad b = \begin{cases} (q-1) - (q-1) = 0 & \text{si } \chi \text{ est trivial,} \\ 0 \pm (q-1) q^{1/2} & \text{si } \chi \text{ n'est pas trivial.} \end{cases}$$

(2.11) *Cas non ramifié, n impair.* Lorsque τ_M° est la restriction à $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})$ d'une représentation irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})$, on peut utiliser la conjugaison par $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, avec $a \in \mathfrak{o}^\times$: les caractères de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{p}^{n-1} & 1 \end{smallmatrix}\right)$ intervenant dans τ_M° forment une orbite sous $\mathfrak{o}^\times$ et leur multiplicité est $\dim W/(q-1)$, d'où dans (2.9) une somme intérieure qui porte sur $a \in k^\times$, donc vaut toujours -1. La contribution analogue à (2.9) est finalement

$$\frac{(q^2-1)}{\dim W} \frac{\dim W}{q-1} \Big(-\lambda \sum_{u \in k^\times} \chi(u) \Big).$$

On achève le calcul de b via (2.3) :

$$b = \begin{cases} (q-1)+(q^2-1)(-1) = -q(q-1) & \text{si } \chi \text{ est trivial,} \\ 0+0=0 & \text{si } \chi \text{ n'est pas trivial.} \end{cases} \tag{2.12}$$

Plaçons-nous maintenant dans le cas 'exceptionnel' où τ_M° est l'une des deux composantes irréductibles de la restriction à $\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o})$ d'une représentation irréductible de $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})$ [**13**]. Alors n est nécessairement égal à 1 et $\dim W$ égal à $\frac{1}{2}(q-1)$, les caractères de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \mathfrak{o} & 1 \end{smallmatrix}\right)$ intervenant dans τ_M° forment une orbite modulo les carrés et on reproduit (2.9) en remplaçant le facteur $(q-1)$ par (q^2-1), d'où :

$$b = \begin{cases} (q-1)+(q^2-1)(-1) = -q(q-1) & \text{si } \chi \text{ est trivial,} \\ 0 \pm (q^2-1)q^{1/2} & \text{si } \chi \text{ n'est pas trivial.} \end{cases} \tag{2.13}$$

(2.14) *Cas ramifié, n impair*. Il est semblable au cas ramifié, n pair, et donne le même résultat, à savoir (2.10), mais nous aurons besoin par la suite de précisions sur le signe intervenant dans ce résultat. Il nous faut remplacer α par $\alpha+\beta$ dans (2.6), ce que l'on peut faire en conjuguant par l'élément

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

de $G\mathrm{Sp}_4(F)$. Cette conjugaison change β en $-\beta$ et w en $\zeta(-1)w$, de sorte que :

$$x_{\alpha+\beta}(\varpi^m)x_{2\alpha+\beta}(-u) \equiv x_\beta(\varpi^{2m}u^{-1})\zeta\begin{pmatrix} -u & 0 \\ 0 & -u^{-1} \end{pmatrix} w \quad (\text{modulo } J \cap \mathrm{Ker}\,\tau).$$

Notons alors

$$\begin{pmatrix} 1 & \varpi^{n-1}y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \psi'(-y) \quad (y \in \mathfrak{o}),$$

un caractère de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathfrak{p}^{n-1} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ intervenant dans $\tau_M : \psi'$ est un caractère non trivial de $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$. Par un raisonnement identique à (2.8) on obtient :

$$b = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi \text{ est trivial,} \\ \lambda\,\xi'(q-1)q^{1/2} & \text{si } \chi \text{ n'est pas trivial,} \end{cases} \tag{2.15}$$

où $\xi' q^{1/2}$ est la valeur de la somme de Gauss $\sum_{u \in k^\times} \chi(u)\psi'(u)$; en particulier $\lambda\xi' = \pm 1$.

2.d. *Le groupe de Weyl de* $\mathrm{SL}_2(F)$

Avec les choix ci-dessus de

$$w = \zeta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad z = \zeta\begin{pmatrix} \varpi^{-1} & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix}$$

on a

$$s = wz = \zeta\begin{pmatrix} 0 & \varpi \\ -\varpi^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Le groupe de Weyl W sous-jacent est le groupe de Weyl affine de $H = \zeta(\mathrm{SL}_2(F))$ relativement au sous-groupe d'Iwahori $\mathscr{I}$ image par ζ de

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{o}^\times & \mathfrak{p} \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{o}^\times \end{pmatrix} \cap \mathrm{SL}_2(F) :$$

c'est un groupe de Coxeter de base $S = \{w, s\}$. Comme pour T_w au § 2.c, on pose $T_s(s) = \lambda' I_W$, avec $\lambda' \in \mathbb{C}^\times$, et on normalise par $T_s(s)^2 = \chi(-1) I_W$; si χ est trivial, on choisira $\lambda' = 1$.

On a dans tous les cas $sJs^{-1} = J_{k-1}$ et le groupe engendré par J et sJs^{-1} est compact, contenu dans le sous-groupe parahorique associé à l'ordre

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{p} & \mathfrak{p} & \mathfrak{p} \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{p} \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p}^{-1} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \end{pmatrix}.$$

En échangeant les rôles de J^+ et J^-, on peut déduire les coefficients de la relation quadratique (1.10) vérifiée par T_s des résultats du paragraphe précédent : ceux-ci dépendent du cardinal $[J^- : J^-_{k+1}] = [J^+_{k+1} : J^+] = c$ de (2.1), de τ°_M, de n et de χ. Or la suite de paires couvrantes $(J_i, \tau_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de [**2**, II.1] est périodique de période 2 par rapport à z, central dans $M : zJ_i z^{-1} = J_{i+2}$, avec $[J_i^- : J_{i+2}^-] = [J_{i+2}^+ : J_i^+] = q^4$. De $[J^+_{k+1} : J^+][J^+ : J^+_{k-1}] = q^4$ on tire $[J^+ : sJ^-s^{-1}] = q^2$ dans le cas ramifié, q^3 (n pair) ou q (n impair) dans le cas non ramifié.

La valeur de b° dans le cas non ramifié, n pair (respectivement impair), se calcule comme celle de b dans le cas non ramifié, n impair (respectivement pair). La valeur de b° dans le cas ramifié, n pair (respectivement impair), se calcule comme celle de b dans le cas ramifié, n impair (respectivement pair), via conjugaison par w des relations de commutation utilisées. Cela donne :

(2.16) *Cas non ramifié, n pair :*

$$c^\circ = q^3 ; \quad b^\circ = -q(q-1) \text{ si } \chi = 1, \quad b^\circ = 0 \text{ si } \chi \neq 1.$$

Cas non ramifié, n impair :

$$c^\circ = q ; \quad b^\circ = q - 1 \text{ si } \chi = 1, \quad b^\circ = 0 \text{ si } \chi \neq 1.$$

Cas ramifié, n pair :

$$c^\circ = q^2 ; \quad b^\circ = 0 \text{ si } \chi = 1, \quad b^\circ = \lambda' \xi'(q-1) q^{1/2} \text{ si } \chi \neq 1.$$

Cas ramifié, n impair :

$$c^\circ = q^2 ; \quad b^\circ = 0 \text{ si } \chi = 1, \quad b^\circ = \lambda' \xi (q-1) q^{1/2} \text{ si } \chi \neq 1.$$

Récapitulons en donnant les relations quadratiques vérifiées par T_w et T_s normalisés comme ci-dessus :

$$\begin{cases} T_w(w) = \lambda I_W \\ T_s(s) = \lambda' I_W \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda = \lambda' = 1 & \text{si } \chi = 1, \\ \lambda^2 = \lambda'^2 = \chi(-1) & \text{si } \chi \neq 1. \end{cases}$$

(2.17) TABLEAU. *Cas non ramifié, $n = 1$ et $\dim W = \frac{1}{2}(q-1)$:*

$$\chi = 1 : \begin{cases} T_w^2 = -q(q-1)T_w + q^3, \\ T_s^2 = (q-1)T_s + q ; \end{cases} \qquad \chi \neq 1 : \begin{cases} T_w^2 = \pm(q^2-1)q^{1/2}T_w + q^3, \\ T_s^2 = q. \end{cases}$$

Cas non ramifié, n impair et $\dim W \neq \frac{1}{2}(q-1)$:

$$\chi = 1 : \begin{cases} T_w^2 = -q(q-1)T_w + q^3, \\ T_s^2 = (q-1)T_s + q ; \end{cases} \qquad \chi \neq 1 : \begin{cases} T_w^2 = q^3, \\ T_s^2 = q. \end{cases}$$

Cas non ramifié, n pair :

$$\chi = 1 : \begin{cases} T_w^2 = (q-1)T_w + q, \\ T_s^2 = -q(q-1)T_s + q^3 ; \end{cases} \qquad \chi \neq 1 : \begin{cases} T_w^2 = q, \\ T_s^2 = q^3. \end{cases}$$

Cas ramifié :

$$\chi = 1 : \begin{cases} T_w^2 = q^2, \\ T_s^2 = q^2 ; \end{cases} \qquad \chi \neq 1 : \begin{cases} T_w^2 = \pm(q-1)q^{1/2}T_w + q^2, \\ T_s^2 = \pm(q-1)q^{1/2}T_s + q^2. \end{cases}$$

D'après le théorème (1.11) l'algèbre $\mathscr{H}(G, \tau)$ est l'algèbre de convolution sur W engendrée par T_w et T_s avec les relations ci-dessus. Quitte à renormaliser T_w et T_s on reconnaît :

(i) l'algèbre de groupe de W, soit l'algèbre de Hecke de $\mathrm{SL}_2(F)$ relativement au caractère quadratique non trivial du sous-groupe d'Iwahori $\mathscr{I}$, dans les cas non ramifié, $\dim W \neq \frac{1}{2}(q-1)$ et $\chi \neq 1$, ou ramifié et $\chi = 1$;

(ii) l'algèbre de Hecke affine de paramètre q sur W, soit l'algèbre de Hecke affine de $\mathrm{SL}_2(F)$ (relative au caractère trivial du sous-groupe d'Iwahori $\mathscr{I}$), dans les cas non ramifié et $\chi = 1$, ou ramifié et $\chi \neq 1$.

Reste le cas non ramifié 'exceptionnel' : $n = 1$, $\dim W = \frac{1}{2}(q-1)$ et $\chi \neq 1$. On obtient une algèbre de convolution sur $\mathrm{SL}_2(F)$ qui mélange les deux types précédents, une relation de type 'algèbre affine' et paramètre q^2 pour T_w, une relation de type 'algèbre de groupe' pour T_s. Elle est isomorphe à l'algèbre de Hecke affine pour PGL_2 sur une extension non ramifiée du corps de base, comme nous l'a précisé L. Morris.

2.e. *Les représentations induites associées*

Nous suivons ici le procédé décrit au § 1.f, pour une représentation supercuspidale irréductible π de $M = F^\times \times \mathrm{SL}_2(F)$ de la forme $\pi = \eta \otimes \pi^\circ$, avec $\pi^\circ = \mathrm{Ind}_{J_M^\circ}^{\mathrm{SL}_2(F)} \tau_M^\circ$. On suppose η unitaire et on étudie la représentation

$$I(\pi^\circ, \eta, s) = \mathrm{ind}_P^G \pi \nu^s = \mathrm{ind}_P^G(\eta \nu^s) \otimes \pi^\circ \quad (s \in \mathbb{C}),$$

avec $\nu(\mathrm{diag}(x, g, x^{-1})) = |x|_F$ $(x \in F^\times, g \in \mathrm{SL}_2(F))$. Rappelons (voir le § 2.a) que si la restriction χ de η à $\mathfrak{o}^\times$ vérifie $\chi^2 \neq 1$, cette représentation est toujours irréductible. On suppose donc $\chi^2 = 1$.

La confrontation de (1.14), (1.16) et (2.17) fournit les cas de réductibilité du tableau 1 en termes de la valeur propre a du § 1.f. On indique la traduction en

fonction de η et s en restreignant s à $\mathbb{R}$: on retrouve les résultats de [**18**] et [**19**]. Dans les cas de réductibilité, avec s réel, η est quadratique : on note 1 le caractère trivial de $F^\times$, η_0 celui attaché à l'extension quadratique non ramifiée de F, et η_1 et η_2 ceux qui sont attachés aux extensions quadratiques ramifiées de F. Lorsque π° appartient à la série ramifiée, elle est attachée à un caractère d'une extension ramifiée de F et on convient que η_1 désigne le caractère associé à cette extension.

TABLEAU 1.

	Type	$\mu\mu'$	a	Réductibilité de $I(\pi^\circ, \eta, s)$	s	η
Série non ramifiée			q^2	Complète réductibilité	0	1
$\chi = 1$	AA	$-q$	$-q^3$	Unique sous-module irréductible	-1	η_0
			$-q$	Unique sous-module irréductible, L^2	1	η_0
Série ramifiée $\chi = 1$	BB	q^2	$\pm q^2$	Complète réductibilité	0	$1, \eta_0$
Série non ramifiée			$\pm q^3$	Unique sous-module irréductible	-1	η_1, η_2
$\chi \neq 1$	BC	$\pm q$				
$\dim W = \frac{1}{2}(q-1)$			$\pm q$	Unique sous-module irréductible, L^2	1	η_1, η_2
Série non ramifiée $\chi \neq 1$ $\dim W > \frac{1}{2}(q-1)$	BB	q^2	$\pm q^2$	Complète réductibilité	0	η_1, η_2
Série ramifiée			$-q^2$	Complète réductibilité	0	η_2
$\chi \neq 1$	AA	q	q^3	Unique sous-module irréductible	-1	η_1
			q	Unique sous-module irréductible, L^2	1	η_1

La traduction de ces résultats en fonction de la représentation induisante $(\eta\nu^s) \otimes \pi^\circ$ s'obtient grâce à (1.15). On a ici

$$z = \zeta \begin{pmatrix} \varpi^{-1} & 0 \\ 0 & \varpi \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \delta_{P^-}(z)^{-1/2} = q^2.$$

L'action de Z sur $(\pi\nu^s)_{\tau_M}$ est donnée par le scalaire a tel que :

$$aI_W = \eta(\varpi) q^{2-s} \chi(-1) T_w(w) T_s(s), \quad \text{soit } a = \eta(\varpi) q^{2-s} \chi(-1) \lambda\lambda'.$$

Si $\chi = 1$, la traduction est immédiate puisque a vaut $\eta(\varpi) q^{2-s}$. Il en est de même si $\chi \neq 1$ dans le cas non ramifié, en normalisant T_w et T_s de façon que $\lambda\lambda' = \chi(-1)$.

Le cas ramifié avec $\chi \neq 1$ est plus délicat : contrairement aux cas précédents la détermination du signe est indispensable afin de distinguer η_1 et η_2. Normalisons T_w et T_s pour avoir des coefficients b et b° positifs, soit $\lambda\xi = \lambda'\xi' = 1$ si n est pair, $\lambda\xi' = \lambda'\xi = 1$ si n est impair. Comme $\xi q^{1/2}$ et $\xi' q^{1/2}$ sont les sommes de Gauss attachées à χ et aux caractères ψ et ψ' définis en (2.8) et (2.14), elles sont égales si ψ et ψ' sont dans la même orbite modulo les carrés, opposées sinon. Autrement dit le produit $\xi\xi' = \lambda\lambda'$ vaut $\chi(-1)$ ou $-\chi(-1)$ selon que ψ et ψ' sont dans la même orbite modulo les carrés ou non.

Examinons cette dernière condition. La représentation τ_M est attachée à une extension ramifiée de F, engendrée par un élément

$$\delta = \begin{pmatrix} 0 & -e \\ \varpi & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{avec } e \in \mathfrak{o}^\times,$$

telle que la restriction de τ_M à $I+\begin{pmatrix}\mathfrak{p} & \mathfrak{o}\\ \mathfrak{p} & \mathfrak{p}\end{pmatrix}^n$ contienne le caractère

$$g \mapsto \psi_0 \circ \mathrm{Tr}(\varpi^{-n}\delta(g-1)),$$

où ψ_0 est un caractère non trivial fixé de $\mathfrak{o}/\mathfrak{p}$. Ce caractère vaut

$$\psi_0(-ey) \text{ en } \begin{pmatrix}1 & 0\\ \varpi^n y & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \psi_0(y) \text{ en } \begin{pmatrix}1 & \varpi^{n-1}y\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

donc ψ et ψ' sont dans la même orbite modulo les carrés si et seulement si e est un carré. Finalement :

$$a = \begin{cases} \eta(\varpi)q^{2-s} & \text{si } e \text{ est un carré,}\\ -\eta(\varpi)q^{2-s} & \text{sinon,}\end{cases} \qquad \text{soit } a = \eta(N_{E/F}(\delta))q^{2-s}. \qquad \square$$

3. *Algèbres de Hecke associées à* $U(1,1)(F)$

On s'intéresse maintenant au cas où $M = M_\alpha$, identifié via (0.2) à $\mathrm{GL}_2(F)$.

3.a. *Les acteurs cités au* § 1.a

Choisissons un $\mathfrak{s}_M$-type (J_M, τ_M) pour chaque classe d'inertie $\mathfrak{s}_M = [M,\pi]_M$ de M parmi ceux de [**2**, I.1]. Il est de la forme [**2**, III.3, III.7] :

(3.1) $J_M = \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})$ *et* τ_M *est une représentation irréductible de* J_M *de quasi-conducteur* $n=1$ *et de défaut* 0, ou

(3.2) $J_M = \mathfrak{o}_E^\times(I+\mathfrak{P}^{[n\mathfrak{e}/2]})$ *et* τ_M *est une représentation irréductible de* J_M *de quasi-conducteur* n *et de défaut* 0 $(n\mathfrak{e} \geqslant 2)$,

où E est une extension quadratique de F, d'indice de ramification $\mathfrak{e}$, engendrée dans $M_2(F)$ par :

(i) l'unité $\delta = \left(\begin{smallmatrix}0 & -e\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right)$, $e \in \mathfrak{o}^\times$ et $-e \notin (\mathfrak{o}^\times)^2$, si $\mathfrak{e}=1$;

(ii) l'uniformisante $\delta = \left(\begin{smallmatrix}0 & -e\\ \varpi & 0\end{smallmatrix}\right)$, $e \in \mathfrak{o}^\times$, si $\mathfrak{e}=2$.

Dans le cas non ramifié, E normalise $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})$ et, pour $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathfrak{P}^m$ désigne $\begin{pmatrix}\mathfrak{p}^m & \mathfrak{p}^m\\ \mathfrak{p}^m & \mathfrak{p}^m\end{pmatrix}$. Dans le cas ramifié, E normalise le sous-groupe d'Iwahori $\begin{pmatrix}\mathfrak{o}^\times & \mathfrak{o}\\ \mathfrak{p} & \mathfrak{o}^\times\end{pmatrix}$ et, pour $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathfrak{P}^m = \begin{pmatrix}\mathfrak{p}^{[(m+1)/2]} & \mathfrak{p}^{[m/2]}\\ \mathfrak{p}^{[m/2]+1} & \mathfrak{p}^{[(m+1)/2]}\end{pmatrix}.$$

Notons que τ_M contient par restriction à $I+\mathfrak{P}^{[(n\mathfrak{e}+1)/2]}$ un caractère $\psi_\delta \otimes \chi_0 \circ \det$ où χ_0 est un caractère de $F^\times$ et $\psi_\delta(g) = \psi \circ \mathrm{Tr}(\varpi^{2-\mathfrak{e}-n}\delta(g-1))$.

On désigne encore par χ le caractère central de τ_M, par l son conducteur.

On pose $\varpi_E = \varpi$ si E est non ramifiée, $\varpi_E = \delta$ si E est ramifiée et

$$z = \begin{pmatrix}\varpi_E^{-1} & 0\\ 0 & {}^{\mathrm{d}}\varpi_E\end{pmatrix}.$$

Dans tous les cas, la représentation π est l'induite irréductible d'un prolongement $\widetilde{\tau}_M$ de τ_M au groupe $\widetilde{J}_M = \langle z\rangle J_M$. Par [**6**, (5.6)], l'algèbre $\mathscr{H}(M,\tau_M)$ est isomorphe à $\mathbb{C}[Z,Z^{-1}]$ où Z est un élément de $\mathscr{H}(M,\tau_M)$ de support $J_M z$.

L'action par conjugaison de $\gamma = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right)$ sur E induit la conjugaison $x \mapsto \bar{x}$ de E

sur F. L'élément $w = \left(\begin{smallmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma & 0 \end{smallmatrix}\right)$ de K normalise M et représente la classe non triviale de $N_G(M)/M$. La représentation π^w est équivalente à $\pi^{\sigma w}$ où $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)^{\sim} \in M$. Comme $(\sigma w)\tilde{g}(\sigma w)^{-1} = ({}^t g^{-1})^{\sim}$ pour tout $\tilde{g} \in M$, par le théorème de Gelfand–Kazhdan, π^w est équivalente à la contragrédiente de π. Ainsi w fixe la classe d'inertie $[M, \pi]_M$ si et seulement si π est équivalente à $\check{\pi} \otimes \nu \circ \det$ pour un caractère non ramifié ν de $F^\times$, c'est-à-dire si et seulement si π est autoduale à torsion près par un caractère non ramifié.

Or si π est autoduale, elle est attachée à un caractère admissible Θ de $E^\times$ qui est trivial sur $N_{E/F}(E^\times)$ [**1**, Proposition 5.3] ce qui entraîne que χ est trivial sur $N_{E/F}(\mathfrak{o}_E^\times)$. Réciproquement, si χ est trivial sur $N_{E/F}(\mathfrak{o}_E^\times)$ alors

$$J_M^w = J_M \quad \text{et} \quad \tau_M^w = \tau_M, \tag{3.3}$$

puisque, pour $g \in \mathrm{GL}_2(F)$ on a $w\tilde{g}w^{-1} = (\gamma^d g^{-1} \gamma^{-1})^{\sim} = (g/\det g)^{\sim}$, et pour $g \in J_M$, $\tau_M^w(g) = \chi(\det g)^{-1}\tau_M(g) = \tau_M(g)$. Donc la classe d'inertie de π est fixée par w.

Il s'en suit que le cas trivial (voir le § 1.b) se produit dès que $\chi \circ N_{E/F}$ n'est pas trivial sur $\mathfrak{o}_E^\times$. On poursuit donc sous l'hypothèse : $\chi \circ N_{E/F}$ *est trivial sur* $\mathfrak{o}_E^\times$; noter qu'alors l vaut 1.

3.b. *L'algèbre* $\mathscr{H}(K, \tau)$ *et le produit tensoriel dans le cas non ramifié*

Quand E est non ramifiée, les réseaux $\Gamma_0(j, k)$ de $\Delta_2(F)$ [**2**, Lemme III.1.2] s'écrivent tout simplement :

$$\Gamma_0(j, k) = \mathfrak{p}_E^j + \mathfrak{p}_F^k \xi \quad \text{avec } \xi = \begin{pmatrix} 0 & e \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -\gamma\delta = \delta\gamma,\ \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'opérateur $T_w(w)$ est scalaire par (3.3) : $T_w(w) = \epsilon I_W$, avec $\epsilon = \pm 1$ pour la normalisation usuelle $(w^2 = 1)$.

On choisit les types (J, τ) dans les suites de paires couvrantes $(J_i, \tau_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de [**2**, III.2.2, III.4.1]. Le choix est dicté par l'action de $\sigma_0 = -\tilde{\delta} w$ décrite en [**2**, III.4], soit $J = J_k$, $wJw^{-1} = J_h$ avec $h = k + 1$ et :

n impair, $k = -[n/2] - 1$, $h = -[n/2]$:

$$J = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ \mathfrak{p}_E^{[n/2]} + \mathfrak{o}_F \xi & I_2 \end{pmatrix} \widetilde{J_M} \begin{pmatrix} I_2 & \mathfrak{p}_E^{[n/2]+1} + \mathfrak{p}_F \xi \\ 0 & I_2 \end{pmatrix},$$

$$J_h = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ \mathfrak{p}_E^{[n/2]+1} + \mathfrak{p}_F \xi & I_2 \end{pmatrix} \widetilde{J_M} \begin{pmatrix} I_2 & \mathfrak{p}_E^{[n/2]} + \mathfrak{o}_F \xi \\ 0 & I_2 \end{pmatrix};$$

n pair, $k = -n$, $h = -n + 1$:

$$J = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ \mathfrak{p}_E^{[n/2]} + \mathfrak{o}_F \xi & I_2 \end{pmatrix} \widetilde{J_M} \begin{pmatrix} I_2 & \mathfrak{p}_E^{[n/2]} + \mathfrak{p}_F \xi \\ 0 & I_2 \end{pmatrix},$$

$$J_h = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ \mathfrak{p}_E^{[n/2]} + \mathfrak{p}_F \xi & I_2 \end{pmatrix} \widetilde{J_M} \begin{pmatrix} I_2 & \mathfrak{p}_E^{[n/2]} + \mathfrak{o}_F \xi \\ 0 & I_2 \end{pmatrix}.$$

On a immédiatement $T_w \star T_w = bT_w + c\mathbb{1}$ avec $c = q^3$ si n est impair, q si n est pair (1.4). Passons au calcul de b.

(3.4) LEMME. *Si $n>1$, l'intersection $J_h^+ \cap JwJ$ est formée des éléments de J_h^+ dont le terme en ξ est de valuation 0, c'est-à-dire des éléments n'appartenant pas à $\mathfrak{p}_E^{[n/2]} + \mathfrak{p}_F \xi$.*

Si $n=1$, elle est formée des éléments de $(\Delta_2(F) \cap \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}))^+$.

Démonstration. Ecrivons la démonstration élémentaire car elle est utile dans la suite. Soit y^+ un élément de l'intersection. Comme $JwJ = J^- J_M w J^-$ (1.3) il existe $X^-, V^- \in J^-$ et $\widetilde{g} \in J_M$, tels que $X^- y^+ = \widetilde{g} w V^-$, soit

$$\begin{pmatrix} I_2 & y \\ X & I_2 + Xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g\gamma V & g\gamma \\ {}^{\mathrm{d}}g^{-1}\gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors $y = g\gamma$ appartient à $(\Delta_2(F) \cap \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}))^+$, et si $n>1$, le terme en ξ de y est de valuation 0. Réciproquement, V et X sont déterminés par l'égalité ci-dessus à condition d'avoir $I_2 + Xy = 0$, soit $\gamma g \gamma^{-1} = -{}^{\mathrm{d}}g$, qui équivaut à ${}^{\mathrm{d}}y = y$, et aussi à $\mathrm{Tr}\, g = 0$. □

Calculons la trace de $T_w(y^+) = \tau_M(y\gamma) T_w(w)$ pour $y^+ \in J_h^+ \cap JwJ$ (ici et dans la suite on allège la notation en notant g au lieu de $\widetilde{g}$ les éléments de M).

Si n est pair, on peut supposer $y = x\xi$ avec $x \in \mathfrak{o}^\times$, soit $\tau_M(y\gamma) = \theta(x\delta)$; on trouve par (1.4) :

$$b = \sum_{x \in \mathfrak{o}^\times/(1+\mathfrak{p})} \theta(x\delta)\epsilon = (q-1)\theta(\delta)\epsilon = \pm(q-1). \tag{3.5}$$

Si n est impair et $n>1$, $y\gamma$ peut s'écrire $y\gamma = \lambda\delta(1+u\gamma)$ avec $u \in \mathfrak{p}_E^{[n/2]}$, soit $\mathrm{Tr}\, \tau_M(y\gamma) = \mathrm{Tr}\, \tau_M(\delta(1+u\gamma))$. Or $(1+u\gamma)(1-u\gamma) = 1 - u\overline{u}$ est central donc opère trivialement, d'où :

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\, \tau_M(\delta) &= \mathrm{Tr}\, \tau_M((1+u\gamma)\delta(1+u\gamma)^{-1}) = \mathrm{Tr}\, \tau_M((1+u\gamma)\delta(1-u\gamma)) \\ &= \mathrm{Tr}\, \tau_M(\delta(1-u\gamma)^2) = \mathrm{Tr}\, \tau_M(\delta(1-2u\gamma+u\overline{u})) \\ &= \mathrm{Tr}\, \tau_M(\delta(1-2u\gamma)(1+u\overline{u})) = \mathrm{Tr}\, \tau_M(\delta(1-2u\gamma)). \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Tr}\, T_w(y^+) = \epsilon\, \mathrm{Tr}\, \tau_M(\delta) = -\epsilon\theta(\delta)$ par [**8**, 3.6] ; comme le degré de τ_M est q et le cardinal de $J^+ \backslash J_h^+ \cap JwJ$ est $q^2(q-1)$, il vient par (1.4) :

$$b = -q(q-1)\epsilon\theta(\delta). \tag{3.6}$$

Si $n=1$, l'action par conjugaison de J_M sur le quotient $J^+ \backslash J_h^+ \cap JwJ$, isomorphe à $\Delta_2(k) \cap \mathrm{GL}_2(k)$, est donnée par $y^+ \mapsto (gy\,{}^{\mathrm{d}}g)^+$, avec $g \in \mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})$. Elle s'identifie, via

$$y \longmapsto y' = yj, \quad \text{où } j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

à l'action $y' \mapsto g y' {}^{\mathrm{t}}g$ de $\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o})$ sur les matrices symétriques de rang 2 sur k, autrement dit les formes quadratiques de rang 2 sur k^2. Cette dernière a deux orbites, classifiées par l'image de $\det y'$ dans $k^\times/k^{\times 2}$. Comme $\det y' = -\det y$ il vient :

(3.7) *L'action par conjugaison de J_M sur $J^+ \backslash J_h^+ \cap JwJ$ a deux orbites, celle de j^+ et celle de δ^+. Les cardinaux de l'orbite de j^+ et de celle de δ^+*

sont respectivement :

$$\tfrac{1}{2}q(q^2-1) \text{ et } \tfrac{1}{2}q(q-1)^2 \text{ si } -1 \text{ est un carré dans } k^\times,$$
$$\tfrac{1}{2}q(q-1)^2 \text{ et } \tfrac{1}{2}q(q^2-1) \text{ si } -1 \text{ n'est pas un carré dans } k^\times.$$

Calculons maintenant $\operatorname{Tr} T_w(j^+)$ et $\operatorname{Tr} T_w(\delta^+)$.

Si -1 est un carré dans $k^\times$, $j\gamma = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ est un élément hyperbolique à valeurs propres distinctes modulo $\mathfrak{p}$ donc $\operatorname{Tr}\tau_M(j\gamma) = 0$. Mais $\delta\gamma = \xi$, de déterminant $-e$, est elliptique régulier modulo $\mathfrak{p}$, de trace nulle, donc conjugué à un élément de $k^\times\delta$ et $\operatorname{Tr}\tau_M(\delta\gamma) = -\theta(\delta) - \theta(\bar{\delta}) = -2\theta(\delta)$ [**8**, 3.5]. Si -1 n'est pas un carré dans $k^\times$ la situation est exactement inversée. On récapitule avec (1.5) :

$$b = \tfrac{1}{2}q(q-1)^2\left(\frac{-2\theta(\delta)}{q-1}\right)\epsilon = -q(q-1)\theta(\delta)\epsilon = \pm q(q-1). \tag{3.8}$$

Passons à l'action de $s = wz$, en normalisant T_s comme T_w par $T_s(s) = \epsilon I_W$. Là encore, l'élément σ_1 de [**2**, III.4] est égal à $-\widetilde{\delta}s$, d'où : $sJs^{-1} = J_{k-1}$ si n est impair, J_{k-3} si n est pair. Le groupe engendré par J et sJs^{-1} est compact, contenu dans le sous-groupe parahorique associé à l'ordre

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{p} & \mathfrak{p} \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{p} & \mathfrak{p} \\ \mathfrak{p}^{-1} & \mathfrak{p}^{-1} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p}^{-1} & \mathfrak{p}^{-1} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \end{pmatrix}.$$

Si n est impair, la structure du quotient $(sJs^{-1})^-/J^-$ est analogue à celle de $(wJw^{-1})^+/J^+$ et on obtient par des calculs semblables :

$$c^\circ = q^3; \quad b^\circ = -q(q-1)\epsilon\theta(\delta). \tag{3.9}$$

(3.10) Si n est pair, on détermine l'intersection $(sJs^{-1})^- \cap JsJ$ comme dans le lemme (3.4), en échangeant les rôles de N^+ et N^-. Soit y^- un élément de l'intersection, il existe X^+, V^+ dans J^+, et g dans J_M tels que $X^+y^- = \widetilde{g}sV^+$, soit

$$\begin{pmatrix} I_2 + Xy & X \\ y & I_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \varpi g\gamma \\ {}^{\mathrm{d}}g^{-1}\varpi_E^{-1}\gamma & {}^{\mathrm{d}}g^{-1}\varpi_E^{-1}\gamma V \end{pmatrix}.$$

Or g appartient à $J_M = (\mathfrak{o}_E^\times K_{[n/2]})^\sim = \mathfrak{o}_E^\times + \mathfrak{p}_E^{[n/2]}\gamma$ (rappelons la décomposition $M_2(F) = E \oplus E\gamma$) et ${}^{\mathrm{d}}g^{-1}$ également, en outre ${}^{\mathrm{d}}y = y$ impose à ${}^{\mathrm{d}}g^{-1}$ d'être de trace nulle, soit ${}^{\mathrm{d}}g^{-1} \in \mathfrak{o}^\times\delta + \mathfrak{p}_E^{[n/2]}\gamma$; il en résulte que $y = {}^{\mathrm{d}}g^{-1}\varpi^{-1}\gamma$ appartient à $\varpi^{-1}\mathfrak{o}^\times\xi + \mathfrak{p}_E^{[n/2]-1}$, donc s'écrit $y = \varpi^{-1}(u\gamma + \lambda\delta)\gamma$, où $\lambda \in \mathfrak{o}^\times$ et $u \in \mathfrak{p}_E^{[n/2]}$. Nous voulons calculer $T_s(y^-) = \tau_M(-u\gamma + \lambda\delta)^{-1}T_s(s)$. Or

$$\tau_M(-u\gamma + \lambda\delta) = \tau_M(\lambda\delta)\tau_M(1 + u'\gamma),$$

avec $u' \in \mathfrak{p}_E^{[n/2]}$. Comme $\operatorname{Tr}(\delta u'\gamma) = 0$, le caractère τ_M est trivial sur $1 + u'\gamma$ et il reste :

$$c^\circ = [J^+ : (sJs^{-1})^+] = q^5; \quad b^\circ = q^2(q-1)\epsilon\theta(\delta). \tag{3.11}$$

Récapitulons en donnant les relations quadratiques vérifiées par T_w et T_s ; on

normalise T_w et T_s en choisissant $\epsilon = \theta(\delta)$ si n est pair, $\epsilon = -\theta(\delta)$ si n est impair :

$$n \text{ impair} : \begin{cases} T_w^2 = q(q-1)T_w + q^3, \\ T_s^2 = q(q-1)T_s + q^3 ; \end{cases} \qquad n \text{ pair} : \begin{cases} T_w^2 = (q-1)T_w + q, \\ T_s^2 = q^2(q-1)T_s + q^5. \end{cases}$$

3.c. *L'algèbre $\mathscr{H}(K, \tau)$ et le produit tensoriel dans le cas ramifié*

Quand E est ramifiée le type (J, τ) choisi dans la suite de paires couvrantes $(J_i, \tau_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ de [**2**, III, proposition 7.5] est (J_1, τ_1), soit

$$J = (\mathfrak{p}_E^n + \mathfrak{o}\xi)^- \widetilde{J_M} (\mathfrak{p}_E^n + \mathfrak{o}\xi)^+ \quad \text{avec } \xi = \begin{pmatrix} 0 & e \\ \varpi & 0 \end{pmatrix} = -\gamma\delta = \delta\gamma.$$

Comme au § 2.c, l'opérateur d'entrelacement $T_w(w)$ est scalaire et w^2 opère trivialement : on normalise par $T_w(w) = 1$. Il est alors immédiat par le § 1.d, que T_w est d'ordre 2 puisque w normalise J.

(3.12) *L'algèbre $\mathscr{H}(K, \tau)$ est isomorphe à l'algèbre de groupe de $\{1, w\}$.*

Notons $s = wz = -z^{-1}w$ et $s' = zw = -wz^{-1}$ (dans G). Il est tout aussi immédiat que

$$T_w \star T_z = T_{z^{-1}} \star T_w \quad \text{et} \quad T_z \star T_w = T_w \star T_{z^{-1}}. \tag{3.13}$$

En effet, les deux premières fonctions (respectivement les deux dernières) sont à support dans JsJ (respectivement $Js'J$) valant $\overline{Z}(z)$ en s (respectivement s'). On les nomme T_s (cf. lemme (1.8)) et $T_{s'}$ respectivement, Z étant normalisé comme au § 1.e. Alors

$$T_{s'} = T_w \star T_s \star T_w. \tag{3.14}$$

(3.15) LEMME. *Si χ n'est pas trivial sur $\mathfrak{o}_F^\times$, $T_s \star T_s = q^3 \mathbb{1}$.*
Si χ est trivial sur $\mathfrak{o}_F^\times$, $T_s \star T_s = q(q-1)T_s + q^3 \mathbb{1}$.

Ceci fournit la structure de $\mathscr{H}(G, \tau)$ dans le cas où χ n'est pas trivial.

(3.16) COROLLAIRE. *On suppose que χ n'est pas trivial.*

(i) *Le sous-espace vectoriel $\mathscr{H}(G, \tau)_M$ formé des fonctions de $\mathscr{H}(G, \tau)$ à support dans JMJ est une sous-algèbre cyclique de $\mathscr{H}(G, \tau)$.*

(ii) *L'algèbre $\mathscr{H}(G, \tau)$ est diédrale infinie.*

Démonstration du lemme. Remarquons que le sous-groupe engendré par J et s est contenu dans le sous-groupe parahorique maximal correspondant à l'ordre

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{p} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{o} & \mathfrak{p} & \mathfrak{p} \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{p}^{-1} & \mathfrak{o} & \mathfrak{o} \\ \mathfrak{o} & \mathfrak{o} & \mathfrak{p} & \mathfrak{o} \end{pmatrix}$$

et est donc compact. Grâce à (1.10), il ne reste qu'à déterminer les constantes b° et c°. Or sJs^{-1} est encore un sous-groupe de la suite de [**2**, proposition 7.5] (il

s'agit de J_{-2}). En utilisant (1.4), on obtient de suite

$$c^\circ = [sJ^+s^{-1} : J^-]T_s(s)T_s(s^{-1}) = q^3, \qquad b^\circ = T_s(s)\sum_{(sJs^{-1})^-/J^-} T_s(j^{-1}).$$

Soit y^- un élément de $(sJs^{-1})^- \cap JsJ$. Comme en (3.10), on déduit l'existence de $X^+, V^+ \in J^+$, et de $g \in \mathfrak{o}^\times(1+\mathfrak{p}_E^n\gamma)$ tels que $y = X^+\tilde{g}sV^+$ (cette fois, ${}^{\mathrm{d}}y = y$ impose à ${}^{\mathrm{d}}g^{-1}\delta^{-1}$ d'être de trace nulle). Ecrivons $g = \lambda(1+u\gamma)$, où $u \in \mathfrak{p}_E^n$ et $\lambda \in \mathfrak{o}^\times$. Alors, puisque $\mathrm{Tr}\,\delta u\gamma = 0$,

$$T_s(y^-) = \tau_M(\lambda)\tau_M(1+u\gamma)T_s(s) = \chi(\lambda)T_s(s)$$

et par conséquent

$$b^\circ = |\mathfrak{p}_E^{n-1}/\mathfrak{p}_E^n|\Big(\sum_{\lambda\in(\mathfrak{o}/\mathfrak{p})^\times}\chi(\lambda)\Big)\tau_M(s^2) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi \text{ n'est pas trivial,} \\ q(q-1) & \text{si } \chi \text{ est trivial.} \end{cases} \qquad \square$$

3.d. *Le groupe de Weyl de* $U(1,1)(F)$

Le plongement $g \mapsto \left(\begin{smallmatrix} g & 0 \\ 0 & \bar{g} \end{smallmatrix}\right)$ de E dans $M_4(F)$ définit sur F^4 une structure de E-espace vectoriel, d'où une identification de F^4 à E^2 pour laquelle la forme alternée peut s'écrire $(x,y) \mapsto \mathrm{Tr}_{E/F}\langle x, y\rangle$ pour une forme anti-hermitienne non dégénérée $\langle\ ,\ \rangle$ d'indice 1 convenable de E^2. Alors les éléments E-linéaires de G sont exactement les isométries de la forme $\langle\ ,\ \rangle$: ils forment un sous-groupe H isomorphe à $U(1,1)(F)$. Le sous-groupe W de H engendré par w et z est le groupe de Weyl affine de $U(1,1)(F)$. D'après le théorème (1.11), l'algèbre $\mathscr{H}(G,\tau)$ est l'algèbre de convolution sur (W,S) où $S = \{w, s\}$, engendrée par T_w et T_s avec les relations suivantes.

(3.17) TABLEAU. *Cas non ramifié* $(\chi = 1)$ *:*

$$n \text{ impair} : \begin{cases} T_w^2 = q(q-1)T_w + q^3, \\ T_s^2 = q(q-1)T_s + q^3\,; \end{cases} \qquad n \text{ pair} : \begin{cases} T_w^2 = (q-1)T_w + q, \\ T_s^2 = q^2(q-1)T_s + q^5. \end{cases}$$

Cas ramifié :

$$\chi = 1 : \begin{cases} T_w^2 = \mathbb{1}, \\ T_s^2 = q(q-1)T_s + q^3\mathbb{1}\,; \end{cases} \qquad \chi \neq 1 : \begin{cases} T_w^2 = \mathbb{1}, \\ T_s^2 = q^3\mathbb{1}. \end{cases}$$

L'algèbre $\mathscr{H}(G,\tau)$ est donc isomorphe à une algèbre de Hecke sur $U(1,1)(F)$. Dans le cas non ramifié, il s'agit d'une algèbre de Hecke affine de paramètre q sur W, soit l'algèbre de Hecke de $U(1,1)(F)$ associé à une extension non ramifiée, relative au caractère trivial d'un sous-groupe d'Iwahori.

Dans le cas ramifié, si χ n'est pas trivial, c'est l'algèbre de groupe de W, soit l'algèbre de Hecke relative au caractère quadratique non trivial d'un sous-groupe d'Iwahori. Si χ est trivial, par (3.14), on a aussi $T_{s'}^2 = q(q-1)T_{s'} + q^3\mathbb{1}$. La sous-algèbre $\mathscr{H}'$ engendrée par T_s et $T_{s'}$ est donc l'algèbre de Hecke affine de $\mathrm{SU}(1,1)(F)$. Encore par (3.14), $\mathscr{H}(G,\tau)$ est isomorphe au produit tensoriel tordu $\mathscr{H}'\widetilde{\otimes}\mathbb{C}[T_w]$, c'est-à-dire à l'algèbre de Hecke affine de $U(1,1)(F)$ (relative au caractère trivial d'un sous-groupe d'Iwahori) [**10**, § 3].

3.e. *Les représentations induites associées*

Nous suivons comme au § 2.e le procédé décrit au § 1.f, pour une représentation supercuspidale irréductible π de $M \simeq \mathrm{GL}_2(F)$ de la forme $\pi = \mathrm{Ind}_{\widetilde{J_M}}^{\mathrm{GL}_2(F)} \widetilde{\tau_M}$. La représentation $\widetilde{\tau_M}$ de $\widetilde{J_M}$ est attachée comme précédemment à un caractère Θ de $E^\times$ que l'on suppose unitaire. On s'intéresse à la représentation

$$I(\pi, s) = \mathrm{ind}_P^G \pi \nu^s \quad (s \in \mathbb{C})$$

avec $\nu(\mathrm{diag}(g, {}^{\mathrm{d}}g^{-1})) = |\det g|_F$ $(g \in \mathrm{GL}_2(F))$. On note χ_π le caractère central de π. Les cas de réductibilité n'apparaissent (voir le § 3.a) que si la restriction χ de χ_π à $\mathfrak{o}_F^\times$ vérifie $\chi \circ N_{E/F} = 1$. On désigne par η_E le caractère associé à l'extension quadratique E.

Le tableau 2 indique les cas de réductibilité, d'une part en fonction de la valeur propre a (voir (1.14), (1.16) et (3.17)), d'autre part en fonction des paramètres χ_π et s, où s est alors supposé réel de façon à retrouver les résultats de [**18**] et [**20**] ; en particulier la réductibilité de $I(\pi, s)$ pour s réel impose que π soit autoduale.

TABLEAU 2.

	Type	$\mu\mu'$	a	Réductibilité de $I(\pi, s)$	s	χ_π
Série non ramifiée			$-q^3$	Complète réductibilité	0	η_E
$\chi = 1$	AA	q^2	q^4	Unique sous-module irréductible	$-\frac{1}{2}$	1
			q^2	Unique sous-module irréductible, L^2	$\frac{1}{2}$	1
Série ramifiée			$\pm q^2$	Unique sous-module irréductible	$-\frac{1}{2}$	1
$\chi = 1$	AB	q				
			$\pm q$	Unique sous-module irréductible, L^2	$\frac{1}{2}$	1
Série ramifiée						
$\chi \neq 1$	BB	$q^{3/2}$	$\pm q^{3/2}$	Complète réductibilité	0	η_E

La relation entre a et (χ_π, s) est basée sur l'élément

$$z = \begin{pmatrix} \varpi_E^{-1} & 0 \\ 0 & \varpi_E \end{pmatrix},$$

de module $\delta_{P^-}(z)^{-1/2} = q_E^{3/2}$, puisque l'action de Z sur $(\pi\nu^s)_{\tau_M}$ est donnée par (1.15) :

$$aI_W = \Theta(\varpi_E) q_E^{3/2-s} T_w(w) T_s(s).$$

(Noter que dans le cas non ramifié, $\varpi_E = \varpi$ est central dans $\mathrm{GL}_2(F)$ tandis que dans le cas ramifié la représentation $\widetilde{\tau_M}$ est de dimension 1 : on peut remplacer $\pi(\varpi_E)$ par $\Theta(\varpi_E)$ dans l'expression de a.)

Si $\chi = 1$, la correspondance entre a et (χ_π, s) est immédiate puisque T_w et T_s sont normalisés de sorte que $T_s(s) = T_w(w) = I_W$.

Si $\chi \neq 1$, les générateurs sont normalisés par $T_w(w) = I_W$ et $T_s(s) = \lambda' I_W$ avec $\lambda'^2 = \chi(-1)$; alors $a = \Theta(\varpi_E)\lambda' q^{3/2-s}$. La réductibilité impose $\Theta(\varpi_E)\lambda' = \pm 1$, c'est-à-dire $\Theta(\varpi_E)^2 = \chi(-1)$, ou $\Theta \circ N_{E/F} = 1$, ou $\chi_\pi = \eta_E$ comme annoncé. □

Références

1. J. D. ADLER, 'Self-contragredient supercuspidal representations of GL_n', *Proc. Amer. Math. Soc.* 125 (1997) 2471–2479.

2. L. BLASCO et C. BLONDEL, 'Types induits des paraboliques maximaux de $\mathrm{Sp}_4(F)$ et $G\mathrm{Sp}_4(F)$', *Ann. Inst. Fourier* 49 (1999) 1805–1851.

3. A. BOREL, 'Admissible representations of a semi-simple group over a local field with vectors fixed under an Iwahori subgroup', *Invent. Math.* 35 (1976) 233–259.

4. C. J. BUSHNELL, 'Representations of reductive p-adic groups: localization of Hecke algebras and applications', *J. London Math. Soc.* (2) 63 (2001) 364–386.

5. C. J. BUSHNELL and P. C. KUTZKO, *The admissible dual of* GL_n *over a local field via compact open subgroups*, Annals of Mathematics Studies 129 (Princeton University Press, 1993).

6. C. J. BUSHNELL and P. C. KUTZKO, 'Smooth representations of reductive p-adic groups: structure theory via types', *Proc. London Math. Soc.* (3) 77 (1998) 582–634.

7. C. J. BUSHNELL and P. C. KUTZKO, 'Types in reductive p-adic groups: the Hecke algebra of a cover', *Proc. Amer. Math. Soc.* 129 (2001) 601–607.

8. P. GÉRARDIN et P. C. KUTZKO, 'Facteurs locaux pour $\mathrm{GL}(2)$', *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 13 (1980) 349–384.

9. R. HOWE and J.-L. KIM, 'Extension of scalars and Hecke algebras', Résumés des conférences du colloque *Analyse harmonique sur le groupe* $\mathrm{Sp}(4)$, C.I.R.M., Luminy, 1998 (ed. P. J. Sally and M.-F. Vignéras).

10. N. IWAHORI and H. MATSUMOTO, 'On some Bruhat decomposition and the structure of the Hecke rings of p-adic Chevalley groups', *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 25 (1965) 5–48.

11. J.-L. KIM, 'Hecke algebras of classical groups over p-adic fields and supercuspidal representations', *Amer. J. Math.* 121 (1999) 967–1029.

12. J.-L. KIM, 'Hecke algebras of classical groups over p-adic fields II', *Compositio Math.* 127 (2001) 117–167.

13. P. C. KUTZKO and P. J. SALLY JR, 'All supercuspidal representations of SL_l over a p-adic field are induced', *Proceedings of the Utah Conference on Representation Theory*, Progress in Mathematics 40 (Birkhäuser, Boston, 1983) 185–196.

14. H. MATSUMOTO, *Analyse harmonique dans les systèmes de Tits bornologiques de type affine*, Lecture Notes in Mathematics 590 (Springer, Berlin, 1977).

15. L. MORRIS, 'Tamely ramified intertwining algebras', *Invent. Math.* 114 (1993) 1–54.

16. A. MOY, 'Representations of $G\mathrm{Sp}_4$ over a p-adic field', I and II, *Compositio Math.* 66 (1988) 237–284 and 285–328.

17. A. ROCHE, 'Types and Hecke algebras for principal series representations of split reductive p-adic groups', *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 31 (1998) 361–413.

18. P. J. SALLY JR and M. TADIĆ, 'Induced representations and classifications for $G\mathrm{Sp}(2, F)$ and $\mathrm{Sp}(2, F)$', Mémoire SMF 52, supplément au *Bull. Soc. Math. France* 121 (1993) 75–133.

19. F. SHAHIDI, 'A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures: complementary series for p-adic groups', *Ann. of Math.* (2) 132 (1990) 273–330.

20. F. SHAHIDI, 'Langlands' conjecture on Plancherel measures for p-adic groups', *Harmonic analysis on reductive groups*, Brunswick, ME, 1989 (ed. W. Barker and P. J. Sally Jr), Progress in Mathematics 101 (Birkhäuser, Boston, 1991) 277–295.

21. J.-L. WALDSPURGER, 'Un exercice sur $G\mathrm{Sp}(4, F)$ et les représentations de Weil', *Bull. Soc. Math. France* 115 (1987) 35–69.

Laure Blasco
Institut de Recherche Mathématique Avancée
Université Louis Pasteur et C.N.R.S.
7*, rue René Descartes*
F-67084 *Strasbourg Cedex*
France
blasco@math.u-strasbg.fr

Corinne Blondel
C.N.R.S. – Théorie des Groupes – Case 7012
Institut de Mathématiques de Jussieu
Université Paris 7
F-75251 *Paris Cedex* 05
France
blondel@math.jussieu.fr