Propagation de paires couvrantes dans les groupes symplectiques

Corinne Blondel

12 décembre 2004

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle impaire et soit $G = Sp(2n, F)$ un groupe symplectique sur F. Le point de départ de ce travail est la question que m'a posée Guy Henniart il y a cinq ans sur la relation possible des travaux de Marko Tadić avec les paires couvrantes et leurs algèbres de Hecke. Voici de quoi il s'agit.

Fixons des entiers $N \geqslant 1$ et $k \geqslant 0$. Si $2n = 2tN + 2k$ avec $t \geqslant 1$, considérons dans $G = G_{t,k}$ le sous-groupe parabolique standard P de facteur de Levi M isomorphe à $GL(N, F) \times \cdots \times GL(N, F) \times Sp(2k, F)$ (avec t copies de $GL(N, F)$). Soient π et ρ des représentations (complexes) irréductibles supercuspidales de $GL(N, F)$ et $Sp(2k, F)$ respectivement et regardons la représentation

$$\pi\nu^{i_1} \times \cdots \times \pi\nu^{i_t} \rtimes \rho = \mathrm{Ind}_P^G \, \pi|\det|^{i_1} \otimes \cdots \otimes \pi|\det|^{i_t} \otimes \rho \quad (i_1, \cdots, i_t \in \mathbb{C})$$

Les résultats de Tadić (voir en particulier [Ta]) peuvent se traduire heuristiquement sous la forme suivante : les réductibilités et suites de composition des représentations ci-dessus sont déterminées par celles des représentations $\pi\nu^i \rtimes \rho$ ($i \in \mathbb{C}$) dans $G_{1,k} = Sp(2N + 2k, F)$.

Comme $\pi\nu^i \rtimes \rho$, pour i réel, est irréductible si π n'est pas autoduale, je me limite dans la suite au cas d'une représentation π autoduale. Supposons donnés des types (Γ, γ) et (Δ, δ) dans $GL(N, F)$ et $Sp(2k, F)$ attachés aux classes d'inertie respectives de π et ρ, et supposons trouvée une paire couvrante (Ω_1, ω_1) de $(\Gamma \times \Delta, \gamma \otimes \delta)$ dans $G_{1,k}$: c'est un type pour la classe d'inertie $[M, \pi \otimes \rho]_G$ dans $G_{1,k}$. La réductibilité de $\pi\nu^i \rtimes \sigma$ ($i \in \mathbb{C}$) et la structure d'une suite de composition sont alors entièrement déterminées par la structure de l'algèbre de Hecke associée $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}(G_{1,k}, \omega_1)$ ([BK2]).

Une version "types" des résultats de Tadić consisterait donc à établir qu'à partir de la paire (Ω_1, ω_1) on peut construire une paire couvrante (Ω_t, ω_t) de $(\Gamma \times \cdots \times \Gamma \times \Delta, \gamma \otimes \cdots \otimes \gamma \otimes \delta)$ dans $G_{t,k}$ – donc un type pour la classe d'inertie $[M, \pi \otimes \cdots \otimes \pi \otimes \rho]_G$ dans $G_{t,k}$ – telle que l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}_t = \mathcal{H}(G_{t,k}, \omega_t)$ correspondante soit entièrement déterminée par $\mathcal{H}_1$, i.e. définie par générateurs et relations se déduisant directement d'une présentation de $\mathcal{H}_1$.

C'est ce que nous établissons dans la suite, pour des paires couvrantes dont la trace sur $G_{1,0}$ est celle d'un type simple de Bushnell-Kutzko dans $GL(2N, F)$ (on détaille les hypothèses ci-dessous).

On utilise un type (Γ, γ), attaché à la représentation supercuspidale autoduale π, possédant des propriétés d'autodualité rappelées en 2.1.c ; ce choix est possible ([Bl3]).

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Le premier jeu d'hypothèses revient essentiellement à demander l'existence de deux paires couvrantes "jumelles" $(\Omega(1,1,k),\omega(1,1,k))$ et $(\Omega(1,2,k),\omega(1,2,k))$ de $(\Gamma\times\Delta,\gamma\otimes\delta)$ dans $G_{1,k}$ dont les "restrictions" à $G_{1,0}$ sont les paires couvrantes construites dans [BL3] – toute classe d'inertie $[GL(N,F),\pi]_{Sp(2N,F)}$ où π est supercuspidale et autoduale possède un type de cette forme, cf. 3.4.b –; il s'agit, sous une forme plus technique, de (H1), (H2) et (H3) en 2.2. Ces hypothèses sont suffisantes pour construire une famille de $t+1$ paires couvrantes $(\Omega(t,r,k),\omega(t,r,k))$, $t\leqslant r\leqslant 2t$, de $(\Gamma\times\cdots\times\Gamma\times\Delta,\gamma\otimes\cdots\otimes\gamma\otimes\delta)$ dans $G_{t,k}$: c'est le théorème 1, en 2.2. Leurs algèbres de Hecke $\mathcal{H}(t,r,k)=\mathcal{H}(G_{t,k},\omega(t,r,k))$ sont deux à deux isomorphes pour $t\leqslant r\leqslant 2t$ (2.7, proposition 5).

Ces mêmes hypothèses suffisent à décrire une sous-algèbre remarquable $\mathcal{H}_W$ de $\mathcal{H}(t,r,k)$, isomorphe à une algèbre de convolution sur un groupe de Coxeter de type $\tilde{C}_t$ et dont la présentation par générateurs et relations est entièrement déterminée par celle de $\mathcal{H}(1,1,k)$ (3.2, proposition 6). Pour la dernière étape, qui consiste à montrer que $\mathcal{H}_W$ est égale à $\mathcal{H}(t,r,k)$, on doit faire une hypothèse supplémentaire – supposer que la représentation $\mathrm{Ind}_{\Delta}^{Sp(2k,F)}\delta$ est irréductible, donc isomorphe à ρ si l'on revient au contexte ci-dessus –, qui permet d'utiliser la présentation de $\mathcal{H}(t,r,k)$ donnée par Bushnell et Kutzko, analogue à la présentation de Bernstein (voir (H4) et théorème 2 en 3.3).

Disons maintenant un mot des deux lignes directrices de la démonstration.

La première est le pendant côté paires couvrantes de la "philosophie" sous-jacente aux travaux de Tadić mentionnés plus haut – voir l'introduction de [ST] : *we have there more parabolic subgroups and we have more possibilities to compare informations coming from the Jacquet modules of various parabolic subgroups* – plus le nombre de sous-groupes paraboliques pertinents est grand, plus le travail est facile. Une partie de la démonstration s'apparente en effet à un amusant "Rummik's cub" faisant apparaître des paires décomposées analogues, mais de taille inférieure, dans certains sous-groupes de Levi. Les propriétés des homomorphismes d'algèbres correspondants (définis par Bushnell et Kutzko, voir 1.1) remplacent alors celles des foncteurs de Jacquet.

La seconde est l'introduction d'une *famille* de paires décomposées. La construction de cette famille repose sur une connaissance fine des types simples de Bushnell et Kutzko auxquels le paragraphe 1 est consacré : nous y précisons la forme, en termes de matrices par blocs, de ces types (proposition 1), de façon à obtenir une famille de paires couvrantes dans $GL(Nt)$ (corollaire 2), dans laquelle les anneaux $\mathfrak{J}_0(\beta,\mathfrak{A}_0)$ et $\varpi_E^{-1}\mathfrak{H}_1(\beta,\mathfrak{A}_0)$ jouent des rôles concurrents (bien entendu il peut arriver que ces deux anneaux coïncident, la famille est alors réduite à un élément).

Cette famille dans $GL(Nt)$ permet de construire au paragraphe 2 une famille de $t+1$ paires décomposées $(\Omega(t,r,k),\omega(t,r,k))$, $t\leqslant r\leqslant 2t$, dans $G_{t,k}$ (moyennant les hypothèses déjà mentionnées pour $t=1$). Pour montrer que ces paires sont couvrantes, on se ramène à prouver que deux éléments particuliers, $E_{s(t,k)}$ et $E_{q(t,k)}$, de l'algèbre de Hecke sont inversibles. Or on sait obtenir l'inversibilité de

$E_{s(t,k)}$ dans l'algèbre d'une des paires et celle de $E_{q(t,k)}$ dans l'algèbre d'une autre paire. L'argument transverse déjà cité (proposition 5 de 2.7), pour passer d'une algèbre à l'autre avec un bon contrôle du support, est donc un point crucial.

L'étude, au paragraphe 3, de la structure des algèbres $\mathcal{H}(t,r,k)$ repose elle-aussi sur les deux ingrédients ci-dessus.

Remarquons pour terminer que les démonstrations utilisent surtout les propriétés des paires pour $k=0$, qui sont obtenues par restriction de $GL(2tN,F)$ à $Sp(2tN,F)$. La construction générale de paires couvrantes $(\Omega(1,1,k),\omega(1,1,k))$ de $(\Gamma\times\Delta,\gamma\otimes\delta)$ dans $G_{1,k}$ est bien entendu une autre histoire, comme l'est celle du calcul effectif de leurs algèbres de Hecke. Nous donnons néanmoins en 3.4 quelques exemples de paires satisfaisant les hypothèses voulues.

1 - Les types simples de Bushnell et Kutzko

Dans cette partie F est un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p quelconque, on note $\mathfrak{o}_F$ son anneau d'entiers, $\mathfrak{p}_F$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}_F$, ϖ_F une uniformisante et q_F le cardinal de son corps résiduel (notations analogues pour les extensions de F).

Le but est d'expliciter la forme d'un type simple de Bushnell et Kutzko en fonction du type simple maximal associé. Certaines définitions et notations nécessaires sont rappelées en 1.1 (paires couvrantes) et 1.2 (types simples dans $GL(N,F)$). La description cherchée des types simples est donnée en 1.3 (Proposition 1), ainsi que ses conséquences indispensables pour la deuxième partie. On obtient en particulier une famille de paires couvrantes (Corollaire 1) dont les algèbres de Hecke sont deux à deux isomorphes avec préservation du support, en un sens précisé en 1.4 (Proposition 2). La démonstration de la proposition essentielle (la proposition 1 de 1.3) est sans rapport avec le reste de l'article : on la trouvera en appendice.

1.1 - Rappels sur les paires couvrantes

Commençons par rappeler rapidement les notions de paire décomposée et paire couvrante définies dans [BK2].

Soit G le groupe des points sur F d'un groupe algébrique réductif et connexe défini sur F, soient M un sous-groupe de Levi propre de G et P un sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi M et radical unipotent N. On note P^- le sous-groupe parabolique de G opposé de P par rapport à M et N^- son radical unipotent.

On fixe un sous-groupe ouvert compact J_M de M et une représentation lisse irréductible τ_M de J_M dans un espace vectoriel complexe $\mathcal{W}$.

On dit qu'un sous-groupe ouvert compact J de G *porte une paire décomposée* au-dessus de (J_M,τ_M) relativement à P si :

(1) $J\cap M = J_M$ et $J = (J\cap N^-)\,J_M\,(J\cap N)$;

(2) il existe une représentation τ de J dont la restriction à J_M est égale à τ_M et dont les restrictions à $J\cap N^-$ et $J\cap N$ sont triviales.

La représentation τ est alors entièrement déterminée et la paire (J,τ) est décomposée au-dessus de (J_M,τ_M) relativement à P.

Dans ces conditions, un élément z de M est dit *positif* relativement à P et J, ou (P,J)-positif, si $z\,(J\cap N)\,z^{-1}\subset J\cap N$ et $z\,(J\cap N^-)\,z^{-1}\supset J\cap N^-$, et *fortement positif* si de plus, pour tous sous-groupes compacts H_1, H_2 de N (resp. N^-) il existe un entier m positif (resp. négatif) tel que $z^m H_1 z^{-m}\subset H_2$.

On dit que J *porte une paire couvrante* de (J_M,τ_M) relativement à P s'il porte une paire décomposée (J,τ) au-dessus de (J_M,τ_M) relativement à P qui est une *paire couvrante,* i.e. si de plus :

(3) il existe un élément z fortement positif du centre de M tel que la double classe JzJ supporte un élément inversible de $\mathcal{H}(G,\tau)$.

On rappelle que l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(G,\tau)$ de (J,τ) est l'algèbre de convolution des fonctions lisses à support compact de G dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}\mathcal{W}$ vérifiant $f(kxh)=\tau(k)f(x)\tau(h)$ pour tous éléments h,k de J et x de G. On note $\mathcal{I}$ son élément unité. Son support est l'ensemble des éléments de G qui entrelacent la représentation τ, c'est-à-dire :

$$I_G(\tau)=\{g\in G\ /\ I_g(\tau)\neq\{0\}\},\ \text{avec } I_g(\tau)=\mathrm{Hom}_{J\cap J^g}\,(\tau,\tau^g).$$

On se permettra l'abus de notation suivant : pour tout $g\in G$ tel que le sous-espace des éléments de $\mathcal{H}(G,\tau)$ de support contenu dans la double classe JgJ soit de dimension 1, on notera E_g un élément non nul arbitraire de ce sous-espace. Un tel élément n'est déterminé qu'à un scalaire près, mais la plupart du temps cela nous suffira. La notation $f\equiv E_g$ signifiera que $f\in\mathcal{H}(G,\tau)$ est un multiple non nul de E_g.

Les résultats suivants ([BK2] proposition 6.3, corollaire 6.12 et théorème 7.2) joueront un rôle essentiel dans la suite :

Théorème (Bushnell-Kutzko). *Soit (J,τ) une paire décomposée au-dessus de (J_M,τ_M) relativement à P. On désigne par M^+ l'ensemble des éléments (P,J)-positifs de M et par $\mathcal{H}(M,\tau_M)^+$ la sous-algèbre de $\mathcal{H}(M,\tau_M)$ formée des éléments de support contenu dans $J_M M^+ J_M$. On choisit les mesures de Haar sur M et G telles que J_M et J respectivement soient de volume* 1.

(i) On définit une injection d'espaces vectoriels $\mathcal{T}_M\ :\ \mathcal{H}(M,\tau_M)\underset{\mathrm{ev}}{\hookrightarrow}\mathcal{H}(G,\tau)$ en associant à $f\in\mathcal{H}(M,\tau_M)$ de support $J_M m J_M$ la fonction $\mathcal{T}_M(f)\in\mathcal{H}(G,\tau)$ de support JmJ et valeur en m : $\mathcal{T}_M(f)(m)=f(m)$.

(ii) On obtient par restriction de $\mathcal{T}_M$ un homomorphisme injectif d'algèbres à unité

$$\mathcal{T}_M^+\ :\ \mathcal{H}(M,\tau_M)^+\ \underset{\mathrm{alg}}{\hookrightarrow}\ \mathcal{H}(G,\tau)$$

dont l'image est l'ensemble des fonctions de support contenu dans JM^+J.

(iii) Si (J,τ) est une paire couvrante de (J_M,τ_M) relativement à P, l'homomorphisme $\mathcal{T}_M^+$ se prolonge de manière unique en un homomorphisme injectif d'algèbres à unité

$$\mathbb{T}_M^+ \ : \ \mathcal{H}(M,\tau_M) \underset{\text{alg}}{\hookrightarrow} \mathcal{H}(G,\tau)$$

Remarque. La définition d'une paire couvrante donnée ci-dessus est un peu plus faible que celle de Bushnell et Kutzko, qui supposent la paire décomposée par rapport à *tout* sous-groupe parabolique de facteur de Levi M. La plupart des résultats de [BK2] que nous utiliserons restent valides avec cette définition plus faible (en particulier le théorème ci-dessus et le théorème de structure des algèbres de Hecke utilisé dans la troisième partie). Il nous faut en revanche préciser les propriétés de transitivité de [BK2] 8.5 qui restent valides (avec la démonstration de *loc. cit.*) dans notre situation :

Propriétés de transitivité (Bushnell-Kutzko). *Soit L un sous-groupe de Levi de G contenu dans M et P' un sous-groupe parabolique de M de facteur de Levi L et radical unipotent N'. Soit $Q = P'N$; c'est un sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi L et radical unipotent $N'N$. On note $J_M = J \cap M$, $\tau_M = \tau_{|J\cap M}$, $J_L = J \cap L$ et $\tau_L = \tau_{|J\cap L}$.*

(i) Si (J,τ) est décomposée (resp. couvrante) au-dessus de (J_M,τ_M) relativement à P et si (J_M,τ_M) est décomposée (resp. couvrante) au-dessus de (J_L,τ_L) relativement à P', alors (J,τ) est décomposée (resp. couvrante) au-dessus de (J_L,τ_L) relativement à Q.

(ii) Si (J,τ) est décomposée au-dessus de (J_L,τ_L) relativement à Q, alors (J_M,τ_M) est décomposée au-dessus de (J_L,τ_L) relativement à P'.

(iii) Si (J,τ) est décomposée (resp. couvrante) au-dessus de (J_L,τ_L) relativement à Q et si

$$\text{(C)} \qquad J \cap N'N = (J\cap N')(J\cap N) \ \text{ et } \ J \cap {N'}^- N^- = (J\cap {N'}^-)(J\cap N^-)$$

alors (J_M,τ_M) est décomposée (resp. couvrante) au-dessus de (J_L,τ_L) relativement à P' et (J,τ) est décomposée (resp. couvrante) au-dessus de (J_M,τ_M) relativement à P.

En pratique, nous travaillerons sur des sous-groupes J de groupes linéaires ou symplectiques décrits sous forme de matrices par blocs par $J = (J_{ij})$ où les J_{ij} sont des réseaux si $i \neq j$ ou des sous-groupes ouverts compacts si $i = j$, autrement dit :

$$\text{(B)} \qquad J = \{x = (x_{ij}) \in GL(\textstyle\sum_i n_i, F) \text{ ou } Sp(\sum_i n_i, F) \ / \ x_{ij} \in J_{ij}\}$$

Soit Q le sous-groupe des matrices triangulaires par blocs et L le sous-groupe des matrices diagonales par blocs relativement à la décomposition en blocs ci-dessus, et supposons que J porte une paire décomposée au-dessus de L relativement à Q. Soit M un sous-groupe de Levi standard dans cette situation, c'est-à-dire formé

de blocs diagonaux de tailles des sommes $m_s = \sum_{i=i_s}^{i_{s+1}} n_i$. Alors la condition (C) ci-dessus est toujours vérifiée puisque :

$$\begin{pmatrix} g_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{m_1} & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & I_{m_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 & & \star' \\ & \ddots & \\ 0 & & g_k \end{pmatrix}$$

Notons d'ailleurs que le cas qui nous occupera relève aussi bien de la définition originale (voir le corollaire 4 de 2.3).

1.2 - Hypothèses et notations

On reprend le contexte de [BL3] §2.1, cette fois avec t blocs diagonaux au lieu de 2 ($t \geqslant 1$ un entier).

Soit (Γ, γ) un type simple maximal dans $GL_N(F)$. D'après [BK1] (définition 5.5.10, où l'on traite (b) comme un cas particulier de (a), et théorèmes 6.2.1, 6.2.2) la paire $(\Gamma, \gamma) = (J(\beta, \mathfrak{A}_0), \lambda(\beta, \mathfrak{A}_0))$ est associée aux données suivantes :

(i) Un ordre principal $\mathfrak{A}_0$ sur $\mathfrak{o}_F$ et une strate simple $[\mathfrak{A}_0, n_0, 0, \beta]$ dans $M_N(F)$; en particulier $E = F[\beta]$ est une extension de F.
Soient $\mathfrak{P}_0$ le radical de $\mathfrak{A}_0$ et B_0 le commutant de E dans $M_N(F)$. Alors $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{A}_0 \cap B_0$ est un ordre maximal sur $\mathfrak{o}_E$ de radical $\mathfrak{Q}_0 = \mathfrak{P}_0 \cap B_0$.

(ii) Un caractère simple $\theta_0 \in \mathcal{C}(\mathfrak{A}_0, 0, \beta)$ et une β-extension κ_0 à $J(\beta, \mathfrak{A}_0)$ de l'unique représentation irréductible η_0 de $J^1(\beta, \mathfrak{A}_0)$ qui contient θ_0.

(iii) Une représentation irréductible cuspidale σ_0 de $GL(f, k_E)$ relevée à Γ via :

$$J(\beta, \mathfrak{A}_0)/J^1(\beta, \mathfrak{A}_0) \simeq \mathbf{U}(\mathfrak{B}_0)/\mathbf{U}^1(\mathfrak{B}_0) \simeq GL(f, k_E), \ f = N/[E:F].$$

Ecrivons $M_{tN}(F)$ sous la forme de matrices $t \times t$ dont les entrées appartiennent à $M_N(F)$. Cela correspond à une décomposition de l'espace vectoriel sous-jacent $V = F^{tN}$, vu comme espace de matrices colonnes, en somme directe $V = \bigoplus_{j=1}^{t} V^{(j)}$ où $V^{(j)}$ est le sous-espace des matrices colonnes dont les seules entrées éventuellement non nulles sont les entrées $(t-j)N+1$ à $(t-j+1)N$.

Soit $(L_{0,i})_{i\in\mathbb{Z}}$ la chaîne de réseaux de F^N associée à l'ordre $\mathfrak{A}_0$. Elle détermine des chaînes de réseaux $(L_{0,i}^{(j)})_{i\in\mathbb{Z}}$ dans $V^{(j)}$, $1 \leqslant j \leqslant t$, moyennant l'identification naturelle de $V^{(j)}$ à F^N. Soit $(L_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ la chaîne de réseaux de V définie par :

$$L_{ti+a} = \bigoplus_{j=1}^{a} L_{0,i+1}^{(j)} \oplus \bigoplus_{j=a+1}^{t} L_{0,i}^{(j)} \quad (i \in \mathbb{Z}, 0 \leqslant a < t).$$

Elle correspond à l'ordre principal $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_t = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}_0 & \mathfrak{A}_0 & \dots & \mathfrak{A}_0 \\ \mathfrak{P}_0 & \mathfrak{A}_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathfrak{P}_0 & \dots & \mathfrak{P}_0 & \mathfrak{A}_0 \end{pmatrix}$ de $M_{tN}(F)$.

On identifie E à son image diagonale par blocs dans $M_{tN}(F)$: on écrit donc β au lieu de $\begin{pmatrix} \beta & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \beta \end{pmatrix}$. On note B_t ou simplement B le commutant de E dans $M_{tN}(F)$ et on définit l'ordre sur $\mathfrak{o}_E$: $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_t = \mathfrak{A}_t \cap B_t$, de radical $\mathfrak{Q} = \mathfrak{P} \cap B$, où $\mathfrak{P}$ est le radical de $\mathfrak{A}$. La période de $(L_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est t fois celle de $(L_{0,i})_{i\in\mathbb{Z}}$; on a donc par [BK1] 1.2.11, 1.4.13, 1.2.4 :

$[\mathfrak{A}, tn_0, 0, \beta]$ est une strate simple dans $M_{tN}(F)$ et toutes les hypothèses de [BK1] *7.1.11 et 7.2.1 sont vérifiées.*

Soit P le sous-groupe parabolique de $GL(tN, F)$ formé des matrices par blocs triangulaires supérieures, c'est-à-dire le fixateur du drapeau

$$\{0\} \subset V^{(t)} \subset V^{(t)} \oplus V^{(t-1)} \subset \cdots \subset V^{(t)} \oplus \cdots \oplus V^{(2)} \subset V.$$

On note U son radical unipotent et T le facteur de Levi des matrices diagonales par blocs, qui conservent chaque $V^{(j)}$. Enfin P^- est l'opposé de P par rapport à T et a pour radical unipotent U^-. Le lien avec les notations de [BK1] est le suivant : T est le M de 7.1.13 , U est le U^- de 7.1.13 et vice-versa.

1.3 - Description des types simples

Nous pouvons maintenant préciser, dans ce contexte, la structure des types simples de Bushnell et Kutzko dans $GL(tN, F)$ dont le type simple maximal associé est (Γ, γ).

Notation. On raccourcit dans la suite les données relatives à $[\mathfrak{A}_0, n_0, 0, \beta]$ sous la forme $\mathfrak{H}^1 = \mathfrak{H}^1(\beta, \mathfrak{A}_0)$, $\mathfrak{J}^1 = \mathfrak{J}^1(\beta, \mathfrak{A}_0)$, $H^1 = H^1(\beta, \mathfrak{A}_0)$, $J^1 = J^1(\beta, \mathfrak{A}_0)$ etc.

Proposition 1. *Les réseaux $\mathfrak{H}^1(\beta, \mathfrak{A})$ et $\mathfrak{J}^1(\beta, \mathfrak{A})$ de $M_{tN}(F)$ ont la forme suivante :*

$$\mathfrak{H}^1(\beta, \mathfrak{A}) = \begin{array}{c} \begin{matrix} \longleftarrow & \left[\frac{t}{2}\right]+1 & \longrightarrow & & & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \mathfrak{H}^1 & \mathfrak{J}^0 & \dots & \mathfrak{J}^0 & \varpi_E^{-1}\mathfrak{H}^1 & \dots & \varpi_E^{-1}\mathfrak{H}^1 \\ \mathfrak{H}^1 & \mathfrak{H}^1 & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \varpi_E^{-1}\mathfrak{H}^1 \\ \mathfrak{H}^1 & & & & & & \mathfrak{J}^0 \\ \varpi_E\mathfrak{J}^0 & \ddots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \mathfrak{H}^1 & \mathfrak{J}^0 \\ \varpi_E\mathfrak{J}^0 & \dots & \varpi_E\mathfrak{J}^0 & \mathfrak{H}^1 & \dots & \mathfrak{H}^1 & \mathfrak{H}^1 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} \longleftarrow & \left[\frac{t}{2}\right] & \longrightarrow \end{matrix} \end{array}$$

$$\mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A}) = \begin{array}{c} \begin{matrix} \longleftarrow & [\frac{t+1}{2}] & \longrightarrow & & & & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccccccc} \mathfrak{J}^1 & \mathfrak{J}^0 & \dots & \mathfrak{J}^0 & \varpi_E^{-1}\mathfrak{H}^1 & \dots & \varpi_E^{-1}\mathfrak{H}^1 \\ \mathfrak{H}^1 & \mathfrak{J}^1 & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \varpi_E^{-1}\mathfrak{H}^1 \\ \mathfrak{H}^1 & & & & & & \mathfrak{J}^0 \\ \varpi_E\mathfrak{J}^0 & \ddots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \mathfrak{J}^1 & \mathfrak{J}^0 \\ \varpi_E\mathfrak{J}^0 & \dots & \varpi_E\mathfrak{J}^0 & \mathfrak{H}^1 & \dots & \mathfrak{H}^1 & \mathfrak{J}^1 \end{array}\right) \\ \begin{matrix} \leftarrow & [\frac{t+1}{2}]-1 & \rightarrow \end{matrix} \end{array}$$

Cette proposition est démontrée en appendice. Tirons-en tout de suite les conséquences. D'après [BK1], §7.1 et théorème 7.2.17, on a

$$\begin{aligned} J(\beta,\mathfrak{A}) =& (J^1(\beta,\mathfrak{A})\cap U^-).(J(\beta,\mathfrak{A})\cap T).(J^1(\beta,\mathfrak{A})\cap U) \\ & \text{avec } J(\beta,\mathfrak{A})\cap T \simeq \Gamma\times\cdots\times\Gamma \quad (t \text{ facteurs}). \end{aligned}$$

De plus les groupes $J_P(\beta,\mathfrak{A}) = (H^1(\beta,\mathfrak{A})\cap U^-).(J(\beta,\mathfrak{A})\cap T).(J^1(\beta,\mathfrak{A})\cap U)$ et $J_{P^-}(\beta,\mathfrak{A}) = (J^1(\beta,\mathfrak{A})\cap U^-).(J(\beta,\mathfrak{A})\cap T).(H^1(\beta,\mathfrak{A})\cap U)$ portent chacun une paire couvrante de $(\Gamma\times\cdots\times\Gamma, \gamma\otimes\cdots\otimes\gamma) = (\Gamma^{\times t}, \gamma^{\otimes t})$ relativement à P. Ces groupes sont aisés à décrire à l'aide de la proposition précédente :

- les blocs diagonaux sont égaux à Γ ;
- les $[\frac{t-1}{2}]$ (pour J_P) ou $[\frac{t}{2}]$ (pour J_{P^-}) premières sous-diagonales au-dessus de la diagonale ont des blocs égaux à $\mathfrak{J}^0$;
- les $[\frac{t-1}{2}]$ (pour J_P) ou $[\frac{t}{2}]$ (pour J_{P^-}) premières sous-diagonales au-dessous de la diagonale ont des blocs égaux à $\mathfrak{H}^1$;
- les autres sous-diagonales supérieures ont des blocs égaux à $\varpi_E^{-1}\mathfrak{H}^1$;
- les autres sous-diagonales inférieures ont des blocs égaux à $\varpi_E\mathfrak{J}^0$.

Par transitivité (voir 1.1), l'intersection d'un de ces groupes avec un sous-groupe de Levi de la forme $GL(kN,F)\times GL((t-k)N,F)$ plongé diagonalement par blocs, est encore une paire couvrante de $(\Gamma^{\times t}, \gamma^{\otimes t})$ dans ce sous-groupe de Levi. En plongeant diagonalement $GL(tN,F)$ dans des $GL(iN,F)$ avec $i \geqslant t$ convenable, on obtient donc une famille de paires couvrantes dans $GL(tN,F)$:

Corollaire 1. *Pour tout entier r tel que $[\frac{t+1}{2}] \leqslant r \leqslant t$, on définit :*

$$\Gamma(t,r) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & \longleftarrow & & r & & \longrightarrow & \\ \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc} \Gamma & \mathfrak{J}^0 & \dots & \mathfrak{J}^0 & \varpi_E^{-1}\mathfrak{H}^1 & \dots & \varpi_E^{-1}\mathfrak{H}^1 \\ \mathfrak{H}^1 & \Gamma & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \ddots & \varpi_E^{-1}\mathfrak{H}^1 \\ \mathfrak{H}^1 & & & & & & \mathfrak{J}^0 \\ \varpi_E\mathfrak{J}^0 & \ddots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \Gamma & \mathfrak{J}^0 \\ \varpi_E\mathfrak{J}^0 & \dots & \varpi_E\mathfrak{J}^0 & \mathfrak{H}^1 & \dots & \mathfrak{H}^1 & \Gamma \end{array} \right) \\ \begin{array}{ccccccc} & \longleftarrow & t-r & \longrightarrow & & & \end{array} \end{array}$$

Alors $\Gamma(t,r)$ est un sous-groupe de $GL(tN)$ qui porte une paire couvrante $(\Gamma(t,r), \gamma(t,r))$ de $(\Gamma^{\times t}, \gamma^{\otimes t})$ relativement à P.

Remarque. Pour $r = t$ on retrouve la forme de Waldspurger [WA] : les blocs au-dessus (resp. au-dessous) de la diagonale appartiennent tous au même réseau. Pour $r = [\frac{t+1}{2}]$ on retrouve bien entendu la paire couvrante J_P de Bushnell et Kutzko.

On peut affiner un peu ce résultat. D'après [BK1] 3.4.1, le groupe de commutateurs $[J^1(\beta,\mathfrak{A}), H^1(\beta,\mathfrak{A})]$ est contenu dans le noyau du caractère simple θ sur $H^1(\beta,\mathfrak{A})$. Via les arguments ci-dessus, on obtient donc aussi :

Corollaire 2. *Soient $H^1(t,r)$ et $J^1(t,r)$ les groupes obtenus respectivement en remplaçant Γ par son sous-groupe $H^1(\beta,\mathfrak{a}_0)$ ou $J^1(\beta,\mathfrak{a}_0)$ dans les blocs diagonaux de $\Gamma(t,r)$. Le groupe $H^1(t,r)$ porte une paire décomposée $(H^1(t,r), \theta_0(t,r))$ au-dessus de $([H^1]^{\times t}, {\theta_0}^{\otimes t})$. De même, le groupe $J^1(t,r)$ porte une paire décomposée $(J^1(t,r), \eta_0(t,r))$ au-dessus de $([J^1]^{\times t}, {\eta_0}^{\otimes t})$. Enfin, $\Gamma(t,r)$ porte également une paire décomposée $(\Gamma(t,r), \kappa_0(t,r))$ au-dessus de $(\Gamma^{\times t}, {\kappa_0}^{\otimes t})$.*

Terminons par une propriété importante du réseau $\varpi_E^{-1}\mathfrak{H}^1$, qui contient $\mathfrak{J}^0$.

Lemme 1. *Le réseau $\varpi_E^{-1}\mathfrak{H}^1$ est un sous-anneau de $M_N(F)$ dont les réseaux $\mathfrak{H}^k$ et $\mathfrak{J}^k$, pour $k \geqslant 1$, sont des idéaux bilatères ; en particulier : $\varpi_E^{-1}\mathfrak{H}^1.\mathfrak{H}^1 = \mathfrak{H}^1$.*

Démonstration. On montre par induction le long de β, comme dans [BK1] §3), que pour tout $k \geqslant 1$:

$$\mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A})\,\mathfrak{H}^k(\beta,\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{Q}\,\mathfrak{H}^k(\beta,\mathfrak{A}) \quad \text{et} \quad \mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A})\,\mathfrak{J}^k(\beta,\mathfrak{A}) \subset \mathfrak{Q}\,\mathfrak{J}^k(\beta,\mathfrak{A}),$$

et de même à droite. L'énoncé ci-dessus est l'application de cette propriété au cas où $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0$ est maximal. □

1.4 - Les algèbres de Hecke

On note $\mathcal{A}(t,r)$ l'algèbre de Hecke de la paire couvrante $(\Gamma(t,r),\gamma(t,r))$ ci-dessus :

$$\mathcal{A}(t,r)=\mathcal{H}(GL(tN),\gamma(t,r)).$$

Nous allons montrer que toutes ces algèbres (à t fixé et r variable) ont la même structure ; celle de $\mathcal{A}(t,[\frac{t+1}{2}])$ est connue grâce à [BK1], 5.6.6 et 7.2.19. On introduit, comme dans *loc. cit.* §5.5, le groupe de Weyl affine étendu $\tilde{W}(\mathfrak{B}_t)$, produit semi-direct de $D(\mathfrak{B}_t)=\{\mathrm{diag}(\varpi_E^{j_1}I_N,\cdots,\varpi_E^{j_t}I_N)/j_1,\cdots,j_t\in\mathbb{Z}\}$ et de $W_0(\mathfrak{B}_t)\simeq\mathfrak{S}_t$ formé des matrices de permutation par blocs dans $GL(tN)$.

Proposition 2. *L'algèbre $\mathcal{A}(t,r)$ a pour support $\Gamma(t,r)\,\tilde{W}(\mathfrak{B}_t)\,\Gamma(t,r)$. Les doubles classes $\Gamma(t,r)\,w\,\Gamma(t,r)$ pour $w\in\tilde{W}(\mathfrak{B}_t)$ sont deux à deux disjointes et chacune supporte un sous-espace de dimension 1 de $\mathcal{A}(t,r)$, dont les éléments non nuls sont inversibles. L'algèbre $\mathcal{A}(t,r)$ peut être décrite par générateurs et relations comme dans* [BK1]*, 5.4.6.*

Démonstration. La proposition est vraie pour $r=[\frac{t+1}{2}]$, il suffit donc de montrer que pour tout r tel que $[\frac{t+1}{2}]\leqslant r<t$, il existe un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{A}(t,r)$ sur $\mathcal{A}(t,r+1)$ qui préserve le support au sens suivant :

> *l'image de $f\in\mathcal{A}(t,r)$ de support $\Gamma(t,r)\,w\,\Gamma(t,r)$, $w\in\tilde{W}(\mathfrak{B}_t)$, a pour support $\Gamma(t,r+1)\,w\,\Gamma(t,r+1)$.*

Les groupes $\Gamma(t,r)$ et $\Gamma(t,r+1)$ diffèrent par leurs intersections avec U et U^-. On introduit le groupe $H(t,r)=(\Gamma(t,r+1)\cap U^-)(\Gamma(t,r)\cap T)(\Gamma(t,r)\cap U)$ qu'ils engendrent. Pour voir que ce produit est bien un groupe, on plonge $GL(tN,F)$ dans le sous-groupe de Levi standard $\mathcal{L}=GL(tN,F)\times GL((2r-t)N,F)$ de $GL(2rN,F)$. On vérifie qu'on a dans ce plongement :

$$\begin{aligned}H(t,r)&=J(\beta,\mathfrak{A}_{2r})\cap GL(tN,F),\\ \Gamma(t,r)&=J_P(\beta,\mathfrak{A}_{2r})\cap GL(tN,F),\\ \Gamma(t,r+1)&=J_{P^-}(\beta,\mathfrak{A}_{2r})\cap GL(tN,F).\end{aligned}$$

En effet, la correspondance entre les notations du corollaire 1 ci-dessus et celles de [BK1], §7, est donnée par $(\Gamma(2r,r),\gamma(2r,r))=(J_P(\beta,\mathfrak{A}_{2r}),\lambda_P(\beta,\mathfrak{A}_{2r}))$ et $(\Gamma(2r,r+1),\gamma(2r,r+1))=(J_{P^-}(\beta,\mathfrak{A}_{2r}),\lambda_{P^-}(\beta,\mathfrak{A}_{2r}))$. Ce sont des paires décomposées par rapport à (P,T) donc décomposées par rapport au parabolique standard de Levi $\mathcal{L}$. L'entrelacement dans $\mathcal{L}$ de la restriction de $\lambda_P(\beta,\mathfrak{A}_{2r})$ à $J_P(\beta,\mathfrak{A}_{2r})\cap\mathcal{L}$ est donc l'intersection avec $\mathcal{L}$ de l'entrelacement de $\lambda_P(\beta,\mathfrak{A}_{2r})$ dans $GL(2rN,F)$ ([BK2] 6.3) et de même pour $\lambda_{P^-}(\beta,\mathfrak{A}_{2r})$. Or les représentations $\mathrm{Ind}_{J_P(\beta,\mathfrak{A}_{2r})}^{J(\beta,\mathfrak{A}_{2r})}\lambda_P(\beta,\mathfrak{A}_{2r})$ et $\mathrm{Ind}_{J_{P^-}(\beta,\mathfrak{A}_{2r})}^{J(\beta,\mathfrak{A}_{2r})}\lambda_{P^-}(\beta,\mathfrak{A}_{2r})$ sont irréductibles (*loc. cit.*, 7.2.17). Un élément de $H(t,r)-\Gamma(t,r)$ ne peut donc pas entrelacer $\gamma(t,r)$, et de même pour $\gamma(t,r+1)$: les représentations $\mathrm{Ind}_{\Gamma(t,r)}^{H(t,r)}\gamma(t,r)$ et $\mathrm{Ind}_{\Gamma(t,r+1)}^{H(t,r)}\gamma(t,r+1)$ sont irréductibles. Elles sont donc isomorphes, par réciprocité de Frobenius (on a

$H(t,r) = \Gamma(t,r)\Gamma(t,r+1))$. Via [BK1] 4.1.3, on obtient donc des isomorphismes d'algèbres :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t,r) &= \mathcal{H}(GL(tN), \gamma(t,r)) \\ &\simeq \mathcal{H}(GL(tN), \mathrm{Ind}_{\Gamma(t,r)}^{H(t,r)}\gamma(t,r)) \\ &\simeq \mathcal{H}(GL(tN), \mathrm{Ind}_{\Gamma(t,r+1)}^{H(t,r)}\gamma(t,r+1)) \\ &\simeq \mathcal{H}(GL(tN), \gamma(t,r+1)) = \mathcal{A}(t,r+1).\end{aligned}$$

Quant à l'assertion sur la préservation du support, elle découle par récurrence sur r de [BK1] 4.1.5, à condition de remarquer que :
– les doubles classes $H(t,r)\, w\, H(t,r)$, pour $w \in \tilde{W}(\mathfrak{B}_t)$, sont deux à deux disjointes – se placer de nouveau dans $GL(2rN, F)$;
– si $\mathcal{A}(t,r)$ a pour support $\Gamma(t,r)\ \tilde{W}(\mathfrak{B}_t)\ \Gamma(t,r)$, le sous-espace de $\mathcal{A}(t,r)$ de support contenu dans $H(t,r)\, w\, H(t,r)$ $(w \in \tilde{W}(\mathfrak{B}_t))$ est de dimension 1 ;
– les éléments de $\tilde{W}(\mathfrak{B}_t)$ entrelacent chaque représentation $\gamma(t,r)$. □

2 - Des paires couvrantes dans $Sp(2tN + 2k, F)$

Les notations de la partie précédente restent en vigueur, nous supposons de plus la caractéristique résiduelle p de F impaire.

Nous allons montrer dans ce paragraphe comment propager des paires couvrantes de $Sp(2N + 2k, F)$ à $Sp(2tN + 2k, F)$. Nous précisons le contexte en 2.1, énonçons le théorème principal en 2.2, puis définissons en 2.3 le groupe de Coxeter W_t qui jouera un rôle essentiel. Le théorème est démontré en 2.4 (les paires proposées sont décomposées), 2.5 (étude des doubles classes des éléments de W_t), 2.6 (certains éléments des algèbres de Hecke impliquées sont inversibles), 2.7 (ces algèbres de Hecke sont isomorphes) et 2.8 (conclusion de la démonstration).

L'entier N et un type simple maximal (Γ, γ) attaché à une représentation autoduale de $GL(N, F)$ sont fixés une fois pour toutes (les propriétés spécifiques de (Γ, γ) sont rappelées plus loin en 2.1.b). On aura souvent besoin de comparer les situations dans $Sp(2tN + 2k, F)$ et $Sp(2tN, F)$, de sorte que l'entier k pourra être remplacé par 0. Quant aux entiers t et r (corollaire 1 de la proposition 1), ils pourront varier. En conséquence, les notations seront parfois indexées par t, k ou r en fonction du contexte ; ces indices seront omis chaque fois qu'aucune ambiguïté ne sera à craindre.

2.1 - Contexte

2.1.a. On travaille dans le groupe $G = G_{t,k} = Sp(2tN + 2k, F)$. On utilisera pour les éléments de $M_{tN+2k+tN}(F)$ diverses notations par blocs que l'on va spécifier dès maintenant. L'espace vectoriel sous-jacent $V(t,k) = F^{tN+2k+tN}$ se décompose en $V_{-t} \oplus V_0 \oplus V_t$, où V_{-t} (resp. V_t) est le sous-espace des vecteurs colonnes dont les $2k + tN$ dernières (resp. premières) coordonnées sont nulles, et $V_0 \simeq F^{2k}$ est le sous-espace des vecteurs colonnes dont les tN premières et tN

dernières coordonnées sont nulles. Les conventions de 1.2 s'appliquent à V_{-t} et V_t, canoniquement isomorphes à F^{tN} : $V_{-t} = \bigoplus_{j=t}^{1} V_{-t}^{(j)}$ et $V_t = \bigoplus_{j=t}^{1} V_t^{(j)}$. Les décompositions suivantes de l'espace $V(t,k)$ seront utilisées plusieurs fois :

$$(1) \qquad V(t,k) = F^{tN+2k+tN} = V_{-t} \oplus V_0 \oplus V_t$$

$$(2) \qquad V(t,k) = F^{tN+2k+tN} = V_{-t}^{(t)} \oplus V(t-1,k) \oplus V_t^{(1)}$$

$$(3) \qquad V(t,k) = F^{tN+2k+tN} = \bigoplus_{j=t}^{1} V_{-t}^{(j)} \oplus V_0 \oplus \bigoplus_{j=t}^{1} V_t^{(j)}$$

Chacune permet d'écrire les éléments de $M_{tN+2k+tN}(F)$ comme des matrices par blocs et le drapeau sous-jacent à chaque décomposition permet de définir un sous-groupe parabolique. Dans le cas particulier $k = 0$ on aura $V_0 = \{0\}$.

Notons $g \mapsto {}^{\tau}g$, $g \in M_{i,j}(F)$, la transposition par rapport à l'antidiagonale :

$${}^{t\tau}g = {}^{\tau t}g = w_i \; g \; w_j \text{ , avec } w_i = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in GL(i,F).$$

Le groupe G est vu comme groupe symplectique de $F^{tN+2k+tN}$ muni de la forme symplectique de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -w_{tN} \\ 0 & w_{2k}\alpha^{-1} & 0 \\ w_{tN} & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique, où $\alpha \in GL(2k,F)$ vérifie $\alpha\,{}^{\tau}\alpha^{-1} = -I_{2k}$. On note $X \mapsto {}^{T}X$ l'involution associée sur $M_{tN+2k+tN}(F)$:

$${}^{T}\begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{\tau}J & {}^{\tau}F\alpha^{-1} & -{}^{\tau}C \\ \alpha\,{}^{\tau}H & \alpha\,{}^{\tau}E\alpha^{-1} & -\alpha\,{}^{\tau}B \\ -{}^{\tau}G & -{}^{\tau}D\alpha^{-1} & {}^{\tau}A \end{pmatrix}.$$

Pour ne pas alourdir les notations, on identifiera au besoin :
– $G_{t,0}$ à son image dans $G_{t,k}$ via l'inclusion (1) de $V_{-t} \oplus V_t$ dans $V(t,k)$;
– $G_{t-1,k}$ à son image dans $G_{t,k}$ via l'inclusion (2) de $V(t-1,k)$ dans $V(t,k)$.
On notera en outre ι l'injection de $GL(tN,F)$ dans $G_{t,k}$ définie par

$$\iota(g) = \begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & I_{2k} & 0 \\ 0 & 0 & {}^{\tau}g^{-1} \end{pmatrix}$$

2.1.b. On utilisera les sous-groupes paraboliques suivants de $G_{t,k}$:

$P = P_{t,k} = M_{t,k}\; N_{t,k}$: le sous-groupe parabolique maximal de G formé des matrices par blocs triangulaires supérieures dans la décomposition (1). $N = N_{t,k}$ est son radical unipotent et $M = M_{t,k}$ son facteur de Levi formé des matrices diagonales par blocs, isomorphe à $GL(tN,F) \times Sp(2k,F)$:

$$P_{t,k} = M_{t,k}\; N_{t,k} = \begin{pmatrix} GL(tN,F) & * & * \\ 0 & Sp(2k,F) & * \\ 0 & 0 & GL(tN,F) \end{pmatrix} \cap G_{t,k}$$

En particulier, $P_{t,0}$ est le sous-groupe parabolique de Siegel de $G_{t,0}$ et le Levi de Siegel $M_{t,0}$ s'identifie à $GL(tN,F)$.

$Q = Q_{t,k} = L_{t,k}\ R_{t,k}$: le sous-groupe parabolique maximal de G formé des matrices par blocs triangulaires supérieures dans la décomposition (2). $R = R_{t,k}$ est son radical unipotent et $L = L_{t,k}$ son facteur de Levi formé des matrices diagonales par blocs, isomorphe à $GL(N,F) \times G_{t-1,k}$:

$$Q_{t,k} = L_{t,k}\ R_{t,k} = \begin{pmatrix} GL(N,F) & * & * \\ 0 & G_{t-1,k} & * \\ 0 & 0 & GL(N,F) \end{pmatrix} \cap G_{t,k}$$

$P^0 = P^0_{t,k} = M^0_{t,k}\ N^0_{t,k}$: le sous-groupe parabolique de G formé des matrices par blocs triangulaires supérieures dans la décomposition (3). $N^0 = N^0_{t,k}$ est son radical unipotent et $M^0 = M^0_{t,k}$ son facteur de Levi formé des matrices diagonales par blocs, isomorphe à $GL(N,F) \times \cdots \times GL(N,F) \times Sp(2k,F)$:

$$P^0_{t,k} = M^0_{t,k}\ N^0_{t,k} = \begin{pmatrix} GL(N,F) & * & \dots & \dots & * \\ & \ddots & & & \vdots \\ 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & Sp(2k,F) & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & * \\ 0 & \dots & \dots & 0 & GL(N,F) \end{pmatrix} \cap G_{t,k}$$

On notera respectivement $N^- = N^-_{t,k}$, $R^- = R^-_{t,k}$ et $N^{0-} = N^{0-}_{t,k}$ les opposés de N, R et N_0 par rapport à M, L et M^0.

2.1.c. Soit (Γ, γ) un type simple maximal dans $GL(N,F)$ comme en 1.1.b. On suppose (Γ, γ) attaché à une représentation *autoduale* de $GL(N,F)$ et on suppose que l'ordre $\mathfrak{A}_0$ est *standard.* Quitte à changer l'élément β dans la strate initiale, ce type possède alors les propriétés suivantes ([BL3], corollaire 2.3 et proposition 2.2) :

(i) $E = F[\beta]$ est une extension quadratique de $F[\beta^2]$. On note $x \mapsto \bar{x}$ l'élément non trivial du groupe de Galois de $F[\beta]$ sur $F[\beta^2]$.

(ii) Il existe un élément σ de $U(\mathfrak{A}_0)$ tel que $\sigma^{-1} x \sigma = {}^{\tau}\bar{x}$ pour tout $x \in E$.

(iii) Les réseaux $\mathfrak{H}^1 = \mathfrak{H}^1(\beta, \mathfrak{A}_0)$ et $\mathfrak{J}^0 = \mathfrak{J}^0(\beta, \mathfrak{A}_0)$ sont stables par l'application $x \mapsto \sigma\, {}^{\tau}x \sigma^{-1}$. Les paires $(H^1 = H^1(\beta, \mathfrak{A}_0), \theta_0)$, $(J^1 = J^1(\beta, \mathfrak{A}_0), \eta_0)$ et (Γ, γ) sont stables par $\tilde{\sigma} : x \mapsto \sigma\, {}^{\tau}x^{-1} \sigma^{-1}$ (le groupe est stable et la représentation transformée en une représentation équivalente).

(iv) Les éléments $\sigma\, {}^{\tau}\sigma^{-1}$ et $\varpi_E^{-1} \sigma\, {}^{\tau}\varpi_E\, {}^{\tau}\sigma^{-1}$ appartiennent à Γ.

Si ξ est une représentation d'un sous-groupe H de $GL(i,F)$, on notera ξ^* la représentation de ${}^{\tau}H$ définie par $\xi^*(g) = \xi({}^{\tau}g^{-1}), g \in {}^{\tau}H$. La propriété (iii) exprime en particulier l'équivalence des représentations γ^* et γ^σ.

2.1.d. Reprenons la paire couvrante $(\Gamma(2t,r),\gamma(2t,r))$ de 1.3, corollaire 1, en dimension $2tN$, et écrivons le groupe sous forme de matrices 2×2 par blocs de taille tN:

$$\Gamma(2t,r)=\begin{pmatrix}\Gamma\ (t,t) & \Gamma^+(t,r)\\ \Gamma^-(t,r) & \Gamma\ (t,t)\end{pmatrix}\quad t\leqslant r\leqslant 2t$$

Ceci définit $\Gamma^+(t,r)$ et $\Gamma^-(t,r)$; on a par exemple :

$$\Gamma^+(1,1)=\varpi_E^{-1}\mathfrak{H}^1,\ \Gamma^+(1,2)=\mathfrak{J}^0,\ \Gamma^-(1,2)=\mathfrak{H}^1\ \text{ et }\Gamma^-(1,1)=\varpi_E\mathfrak{J}^0.$$

Par transitivité des paires couvrantes (1.1), la paire $(\Gamma(2t,r),\gamma(2t,r))$ est une paire couvrante de $(\Gamma(t,t)\times\Gamma(t,t),\gamma(t,t)\otimes\gamma(t,t))$ dans $GL(2tN,F)$ relativement à $P_{t,0}$. Conjuguons cette paire comme dans [BL3] 2.2 par

$$S=S_t=\text{diag}\ (I_N,\cdots,I_N,\sigma,\cdots,\sigma)$$

(les t premiers blocs diagonaux sont égaux à I_N et les t suivants à σ). Grâce aux propriétés rappelées en 2.1.c, il est facile de vérifier qu'on obtient une paire couvrante $(\Gamma(2t,r)^S,\gamma(2t,r)^S)$ de $(\Gamma(t,t)\times\ {}^\tau\Gamma(t,t),\gamma(t,t)\otimes\gamma(t,t)^*)$. On peut dès lors appliquer la proposition 1.2 de [BL3], qui affirme que :

L'intersection $\Omega(t,r,0)$ de $\Gamma(2t,r)^S$ avec $Sp(2tN,F)$ porte une paire décomposée au-dessus de $(\iota(\Gamma(t,t)),\gamma(t,t))$ relativement à $P_{t,0}$.

Il est agréable de visualiser les choses encore une fois sous forme de matrices par blocs. On identifie $M_{aN,bN}(F)$ à $M_{a,b}(M_N(F))$ de sorte que multiplier $X\in M_{aN,bN}(F)$ par σ à droite (ou à gauche) signifie multiplier chacune de ses entrées, éléments de $M_N(F)$, par σ à droite (ou à gauche). Avec ces conventions :

$$\Omega(t,r,0)=\begin{pmatrix}\Gamma\ (t,t) & \Gamma^+(t,r)\ \sigma\\ \sigma^{-1}\Gamma^-(t,r) & {}^\tau\Gamma\ (t,t)\end{pmatrix}\cap G_{t,0}$$

2.2 - Le théorème principal

On fixe dans $Sp(2k,F)$ une paire (Δ,δ) formée d'un sous-groupe ouvert compact Δ de $Sp(2k,F)$ et d'une représentation lisse irréductible δ de Δ. Par ailleurs (Γ,γ) est un type simple maximal dans $GL_N(F)$, attaché à une représentation autoduale, et choisi comme en 2.1.c.

On définit les éléments suivants de $G_{t,k}$:

$$s(t,k)=\begin{pmatrix}0 & 0 & \sigma\\ 0 & I_{2k+2(t-1)N} & 0\\ -{}^\tau\sigma^{-1} & 0 & 0\end{pmatrix},\quad q(t,k)=\begin{pmatrix}0 & 0 & -{}^\tau\sigma\,{}^\tau\varpi_E^{-1}\\ 0 & I_{2k+2(t-1)N} & 0\\ \sigma^{-1}\varpi_E & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Hypothèses :

(H1) *Il existe des réseaux* $\Delta^+ \subset M_{N,2k}(F)$ *et* $\Delta^- \subset M_{2k,N}(F)$ *tels que :*

$$\Omega(1,1,k) = \begin{pmatrix} \Gamma & \Delta^+ & \varpi_E^{-1}\mathfrak{H}^1\sigma \\ \Delta^- & \Delta & \alpha\,{}^\tau\Delta^+ \\ \sigma^{-1}\mathfrak{J}^0\varpi_E & {}^\tau\Delta^-\alpha^{-1} & {}^\tau\Gamma \end{pmatrix} \cap G_{1,k}$$

$$\textit{et} \quad \Omega(1,2,k) = \begin{pmatrix} \Gamma & \Delta^+ & \mathfrak{J}^0\sigma \\ \Delta^- & \Delta & \alpha\,{}^\tau\Delta^+ \\ \sigma^{-1}\mathfrak{H}^1 & {}^\tau\Delta^-\alpha^{-1} & {}^\tau\Gamma \end{pmatrix} \cap G_{1,k}$$

soient des sous-groupes de $G_{1,k}$ *qui portent des paires décomposées, notées respectivement* $(\Omega(1,1,k),\ \omega(1,1,k))$ *et* $(\Omega(1,2,k),\ \omega(1,2,k))$*, au-dessus de* $(\iota(\Gamma)\times\Delta, \gamma\otimes\delta)$ *relativement à* $P_{1,k}$*.*

(H2) *L'algèbre de Hecke* $\mathcal{H}(1,2,k) = \mathcal{H}(G_{1,k}, \omega(1,2,k))$ *contient un élément* $e_{s(1,k)}$ *de support* $\Omega(1,2,k)\ s(1,k)\ \Omega(1,2,k)$ *qui vérifie une relation quadratique de la forme* $e^2_{s(1,k)} = a_s e_{s(1,k)} + b_s\mathcal{I}$ *avec* $a_s \in \mathbb{C}$*,* $b_s \in \mathbb{C}^\times$*.*

(H3) *L'algèbre de Hecke* $\mathcal{H}(1,1,k) = \mathcal{H}(G_{1,k}, \omega(1,1,k))$ *contient un élément* $e_{q(1,k)}$ *de support* $\Omega(1,1,k)\ q(1,k)\ \Omega(1,1,k)$ *qui vérifie une relation quadratique de la forme* $e^2_{q(1,k)} = a_q e_{q(1,k)} + b_q\mathcal{I}$ *avec* $a_q \in \mathbb{C}$*,* $b_q \in \mathbb{C}^\times$*.*

Théorème 1. *Sous les hypothèses* (H1), (H2) *et* (H3)*, on définit, pour tout* $t \geqslant 1$ *et pour* $t \leqslant r \leqslant 2t$*, des sous-groupes de* $G_{t,k}$ *par :*

$$\Omega(t,r,k) = \begin{pmatrix} \Gamma(t,t) & M_{t,1}(\Delta^+) & \Gamma^+(t,r)\ \sigma \\ M_{1,t}(\Delta^-) & \Delta & M_{1,t}(\alpha\,{}^\tau\Delta^+) \\ \sigma^{-1}\Gamma^-(t,r) & M_{t,1}({}^\tau\Delta^-\alpha^{-1}) & {}^\tau\Gamma(t,t) \end{pmatrix} \cap G_{t,k}$$

Chaque sous-groupe $\Omega(t,r,k)$ *porte une paire couvrante* $(\Omega(t,r,k), \omega(t,r,k))$ *de* $(\iota(\Gamma^{\times t})\times\Delta, \gamma^{\otimes t}\otimes\delta)$ *relativement à* $P^0_{t,k}$*.*

Par transitivité des paires couvrantes, la paire $(\Omega(t,r,k), \omega(t,r,k))$ est aussi une paire couvrante de $(\iota(\Gamma(t,t))\times\Delta, \gamma(t,t)\otimes\delta)$ relativement à $P_{t,k}$ (1.1).

La démonstration de ce théorème occupe toute la suite de la partie 2, le paragraphe 2.8 en résume les éléments essentiels. Ceci sera complété dans la partie 3 par une description de l'algèbre de Hecke attachée à $(\Omega(t,r,k), \omega(t,r,k))$.

Notation. On convient d'étendre les notations $\Omega(t,r,k)$, $\Gamma^+(t,r)$ etc., aux entiers r supérieurs à $2t$ en posant $\Omega(t,r,k) = \Omega(t,2t,k)$ pour $r \geqslant 2t$, etc.

2.3 - Le groupe de Coxeter sous-jacent

Soit $(\mathbf{W}_t, \mathbf{S}_t)$ le groupe de Coxeter de type $\tilde{C}_t$, défini par générateurs et relations comme suit : les générateurs sont les éléments de $\mathbf{S}_t = \{\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \dots \mathbf{s}_t\}$ et les relations sont $\mathbf{s}_i^2 = 1$ (pour $0 \leqslant i \leqslant t$) et les *relations de tresse* :

$$\begin{cases} \mathbf{s}_i\mathbf{s}_j = \mathbf{s}_j\mathbf{s}_i \quad \text{si } |i-j| \geqslant 2 \\ \mathbf{s}_i\mathbf{s}_{i+1}\mathbf{s}_i = \mathbf{s}_{i+1}\mathbf{s}_i\mathbf{s}_{i+1} \quad \text{si } 1 \leqslant i \leqslant t-1 \\ \mathbf{s}_0\mathbf{s}_1\mathbf{s}_0\mathbf{s}_1 = \mathbf{s}_1\mathbf{s}_0\mathbf{s}_1\mathbf{s}_0 \quad \text{si } t > 1 \\ \mathbf{s}_t\mathbf{s}_{t+1}\mathbf{s}_t\mathbf{s}_{t+1} = \mathbf{s}_{t+1}\mathbf{s}_t\mathbf{s}_{t+1}\mathbf{s}_t \quad \text{si } t > 1 \end{cases}$$

On notera l la longueur dans le système de Coxeter $(\mathbf{W}_t, \mathbf{S}_t)$ et $(\mathbf{W}_t^0, \mathbf{S}_t^0)$ le sous-groupe engendré par $\mathbf{S}_t^0 = \{\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \dots \mathbf{s}_{t-1}\}$.

Pour $1 \leqslant i \leqslant t-1$ soit $s_i = \iota(\psi_i) \in G_{t,k}$ l'image par ι de la matrice de transposition par blocs $\psi_i = \begin{pmatrix} I_{(t-i-1)N} & & & \\ & 0 & I_N & \\ & I_N & 0 & \\ & & & I_{(i-1)N} \end{pmatrix} \in GL(tN, F)$. Soit $s_t = q(t,k)$ et soit s_0 l'image de $s(1,k)$ dans $G_{t,k}$ i.e. $s_0 = \begin{pmatrix} I_{(t-1)N} & & & \\ & 0 & 0 & \sigma \\ & 0 & I_{2k} & 0 \\ & -{}^\tau\sigma^{-1} & 0 & 0 \\ & & & I_{(t-1)N} \end{pmatrix}$.

On notera $S_t = \{s_0, s_1, \dots s_t\}$ et $S_t^0 = \{s_0, s_1, \dots s_{t-1}\}$.

On vérifie aisément que les éléments s_0, s_1, $\dots$ s_t vérifient les relations de tresse ci-dessus, de sorte que l'application $\mathbf{s}_i \mapsto s_i$ $(0 \leqslant i \leqslant t)$ se prolonge de manière unique en une application de $\mathbf{W}_t$ dans $G_{t,k}$, qui à $\mathbf{w} \in \mathbf{W}_t$ de décomposition réduite $\mathbf{w} = \mathbf{s}_{i_1}\mathbf{s}_{i_2}\cdots\mathbf{s}_{i_z}$ associe $w = s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_z}$ ([Bo], IV.1.5). L'image W_t de cette application est contenue dans le normalisateur du sous-groupe de Levi $M_{t,k}^0$ et l'image W_t^0 de $\mathbf{W}_t^0$ fournit ([Go])un système de représentants du quotient

$$N_{G_{t,0}}(M_{t,k}^0)/M_{t,k}^0 \;\simeq\; \mathbf{W}_t^0.$$

Notons $\Omega_{M^0}(t,k)$ l'intersection de (l'ensemble) $\Omega(t,r,k)$ avec $M_{t,k}^0$, isomorphe à $\Gamma^{\times t} \times \Delta$, et $\omega_{M^0}(t,k)$ la représentation $\gamma^{\otimes t} \otimes \delta$ de ce sous-groupe. On s'intéresse à leur normalisateur dans $G_{t,k}$.

Proposition 3. *Le groupe $N_{G_{t,0}}(\Omega_{M^0}(t,0), \omega_{M^0}(t,0))/\Omega_{M^0}(t,0) = \bar{W}_t$ est un groupe de Coxeter de type $\tilde{C}_t$ dont W_t est un système de représentants.*

Le groupe $N_{G_{t,k}}(\Omega_{M^0}(t,k), \omega_{M^0}(t,k))/\Omega_{M^0}(t,k)$ est produit direct de $\bar{W}_t$ par $N_{Sp(2k,F)}(\Delta,\delta)/\Delta$.

Démonstration. La notation $N_{Sp(2k,F)}(\Delta,\delta)$ (par exemple) désigne le sous-groupe de $N_{Sp(2k,F)}(\Delta)$ formé des éléments x tels que les représentations δ et δ^x soient équivalentes. Comme les éléments s_i normalisent $\Omega_{M^0}(t,k)$ et vérifient $\omega_{M^0}(t,k)) \simeq \omega_{M^0}(t,k))^{s_i}$ (voir 2.1.c et [Bl3]), l'ensemble W_t est contenu dans $\mathcal{N} = N_{G_{t,k}}(\Omega_{M^0}(t,k), \omega_{M^0}(t,k))$.

Un élément g de $\mathcal{N}$ doit normaliser $M_{t,k}^0$, il y a donc un élément w de W_t^0 tel que $w^{-1}g$ appartienne à $\mathcal{N} \cap M_{t,k}^0$. Les blocs diagonaux de $w^{-1}g$ de type $GL(N,F)$ appartiennent donc à $\varpi_E^{\mathbb{Z}}\Gamma$ ou à son anti-transposé ([BK1] 6.1.2) et son bloc diagonal de type $Sp(2k,F)$ appartient à $N_{Sp(2k,F)}(\Delta,\delta)$. Comme les éléments de la forme $\iota(\mathrm{diag}(\varpi_E^{j_t}, \dots, \varpi_E^{j_1}))$ appartiennent à $W_t\,\Omega_{M^0}(t,k)$ (vérification immédiate avec 2.1.c (iv)) on a bien, si $k=0$, $\mathcal{N} = W_t\Omega_{M^0}(t,0)$.

Enfin, l'injectivité de la composition $\mathbf{W}_t \to W_t \to \mathcal{N}/\Omega_{M^0}(t,k)$ est claire (tout élément de W_t s'écrit de manière unique comme produit d'un élément de W_t^0 par un élément de $W_t \cap M_{t,k}^0$). □

Remarque. Soit B_{2t}^S le commutant de E^S dans $M_{2tN}(F)$ (voir 1.2 et 2.1.c). On a $\Omega(t,r,0)\cap B_{2t}^S=\mathcal{J}^S$ où $\mathcal{J}$ est le sous-groupe parahorique suivant de B_{2t} :

$$\mathcal{J}=\begin{pmatrix}\mathfrak{B}_0^\times & \mathfrak{B}_0 & \dots & \mathfrak{B}_0\\ \mathfrak{Q}_0 & \mathfrak{B}_0^\times & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \mathfrak{Q}_0 & \dots & \mathfrak{Q}_0 & \mathfrak{B}_0^\times\end{pmatrix}$$

Soit $G_{t,0}^E=G_{t,0}\cap B_{2t}^S$ et soit $\Omega_{M^0}^E=\Omega_{M^0}(t,0)\cap B_{2t}^S$. Alors W_t est aussi un système de représentants dans $G_{t,0}^E$ du quotient $N_{G_{t,0}^E}(\Omega_{M^0}^E)/\Omega_{M^0}^E$.

2.4 - Propagation de paires décomposées

Proposition 4. *Sous l'hypothèse* (H1), *chaque groupe* $\Omega(t,r,k)$ *porte une paire décomposée* $(\Omega(t,r,k),\omega(t,r,k))$ *au-dessus de* $(\iota(\Gamma^{\times t})\times\Delta,\gamma^{\otimes t}\otimes\delta)$ *relativement à* $P_{t,k}^0$.

Démonstration. Montrer qu'une paire est décomposée n'est pas très amusant, mais c'est fondamental. On va montrer que $\Omega(t,r,k)$ porte une paire décomposée au-dessus de $(\iota(\Gamma(t,t))\times\Delta,\ \gamma(t,t)\otimes\delta)$ relativement à $P_{t,k}$; cela entraîne l'assertion de la proposition par transitivité (voir 1.1), puisque $(\Gamma(t,t)\times\Delta,\gamma(t,t)\otimes\delta)$ est elle-même décomposée au-dessus de $(\Gamma^{\times t}\times\Delta,\gamma^{\otimes t}\otimes\delta)$ (Corollaire 1). Noter que le cas $k=0$ a été traité en 2.1.d. Pour le cas général on procède par récurrence sur t : l'assertion est vraie pour $t=1$, c'est l'hypothèse (H1) ; on la suppose vraie jusqu'au rang $t-1$ et on l'établit au rang t.

Le groupe $\Omega=\Omega(t,r,k)$ est tel que : $\Omega\cap M=\Gamma(t,t)\times\Delta$. Il porte une paire décomposée au-dessus de $(\iota(\Gamma(t,t))\times\Delta,\gamma(t,t)\otimes\delta)$ relativement à $P=P_{t,k}$ si et seulement si ([BL1]) :

(i) Les intersections $\Omega\cap N^-$ et $\Omega\cap N$ sont des groupes normalisés par $\Omega\cap M$.
(ii) Le produit $(\Omega\cap N^-)$ (Ker $\gamma(t,t)\times$ Ker $\delta)$ $(\Omega\cap N)$ est stable par produit à gauche par $(\Omega\cap N)$.

Commençons par vérifier (i). Le fait que $\Omega\cap N^-$ et $\Omega\cap N$ soient des groupes fait apparaître les conditions

$$\Delta^+\alpha\,{}^\tau\Delta^+\subset\mathfrak{J}^0\sigma\quad\text{et}\quad{}^\tau\Delta^-\alpha^{-1}\Delta^-\subset\sigma^{-1}\mathfrak{J}^0\varpi_E \tag{1}$$

qui sont forcément vérifiées vu l'hypothèse (H1). La normalisation par $\Omega\cap M$ est acquise pourvu que

$$\mathfrak{J}^0\Delta^+\subset\Delta^+\quad\text{et}\quad\Delta^-\mathfrak{J}^0\subset\Delta^- \tag{2}$$

Or (H1) assure que $\Gamma\Delta^+\subset\Delta^+$ et $\Delta^-\Gamma\subset\Delta^-$. On passe de Γ à $\mathfrak{J}^0$ comme dans [BL3] lemme 2.2, en utilisant le fait que $\mathfrak{B}_0=\mathfrak{o}_E[\mathfrak{B}_0^\times]$ ([BU] p. 190).

Passons à (ii). Le point essentiel est l'usage de plusieurs paraboliques en même temps ; de fait, on a (voir la fin de 1.1) :

$$\begin{aligned}
\Omega \cap N &= (\Omega \cap N \cap L) \rtimes (\Omega \cap N \cap R) \\
\Omega \cap N^- &= (\Omega \cap N^- \cap L) \rtimes (\Omega \cap N^- \cap R^-) \\
\Omega \cap R &= (\Omega \cap R \cap M) \rtimes (\Omega \cap R \cap N) \\
\Omega \cap R^- &= (\Omega \cap R^- \cap M) \rtimes (\Omega \cap R^- \cap N^-)
\end{aligned}$$

Il suffit donc dans (ii) de montrer séparément la stabilité par produit à gauche par $\Omega \cap N \cap L$ et $\Omega \cap N \cap R$. La première stabilité est facile :

$$\begin{aligned}
(\Omega \cap N \cap L)(\Omega \cap N^-) &= (\Omega \cap N \cap L)(\Omega \cap N^- \cap L)(\Omega \cap N^- \cap R^-) \\
&\subset (\Omega \cap N^- \cap L)(I_N \times \mathrm{Ker}\ \gamma(t-1,t-1) \times \mathrm{Ker}\ \delta)(\Omega \cap N \cap L)(\Omega \cap N^- \cap R^-)
\end{aligned}$$

par l'hypothèse de récurrence appliquée à $\Omega \cap L = \Gamma \times \Omega(t-1,r,k)$ dans $L \simeq GL(N,F) \times G_{t-1,k}$. En outre L normalise R^- donc $(\Omega \cap N \cap L)(\Omega \cap N^- \cap R^-)$ est contenu dans $(\Omega \cap R^-)(\Omega \cap N \cap L) = (\Omega \cap R^- \cap N^-)(\Omega \cap R^- \cap M)(\Omega \cap N \cap L)$. Le terme médian $\Omega \cap R^- \cap M$ est contenu dans $\mathrm{Ker}\ \gamma(t,t) \times \mathrm{Ker}\ \delta$ vu la définition de R – les blocs diagonaux sont unipotents inférieurs par blocs – d'où le résultat.

La seconde stabilité est plus fastidieuse et on ne donnera pas tous les détails. On reproduit tout de même le calcul à la base de toutes les vérifications :

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} I_i & A & B \\ 0 & I_{2j} & A^* \\ 0 & 0 & I_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_i & 0 & 0 \\ -X^* & I_{2j} & 0 \\ Y & X & I_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_i - AX^* + BY & A + BX & B \\ -X^* + A^*Y & I_{2j} + A^*X & A^* \\ Y & X & I_i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I_i & 0 & 0 \\ -X'^* & I_{2j} & 0 \\ Y' & X' & I_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & {}^\tau g^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_i & A' & B' \\ 0 & I_{2j} & A'^* \\ 0 & 0 & I_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g & gA' & gB' \\ -X'^* g & h - X'^* g A' & \cdots \\ Y'g & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

On décompose encore $\Omega \cap N \cap R$ sous la forme $\Omega \cap N \cap R = \mathcal{N}_1 \mathcal{N}_2$ avec :

$$\mathcal{N}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} I_{tN} & A & C \\ 0 & I_{2k} & A' \\ 0 & 0 & I_{tN} \end{pmatrix} \in G_{t,k} \ / A \in \begin{pmatrix} \Delta^+ \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} ; C \in \Gamma^+(t,r)\sigma \cap \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & * \\ & & & 0 \\ & 0 & & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{N}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} I_{tN} & 0 & B \\ 0 & I_{2k} & 0 \\ 0 & 0 & I_{tN} \end{pmatrix} \in G_{t,k} \ / B \in \Gamma^+(t,r)\sigma \cap \begin{pmatrix} * & \cdots & * & 0 \\ & & & * \\ & 0 & & \vdots \\ & & & * \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ sont des sous-groupes générateurs de $\Omega \cap N \cap R$ et $\mathcal{N}_2$ y est central. On décompose de même : $\Omega \cap N^- \cap R^- = \mathcal{N}_1^- \mathcal{N}_2^-$. On va montrer dans (ii) la stabilité par $\mathcal{N}_1$ et $\mathcal{N}_2$ à gauche. Commençons par $\mathcal{N}_2$; on a :

$$\mathcal{N}_2(\Omega \cap N^-) = \mathcal{N}_2(\Omega \cap N^- \cap R^-)(\Omega \cap N^- \cap L) = \mathcal{N}_2 \mathcal{N}_2^- \mathcal{N}_1^- (\Omega \cap N^- \cap L)$$

Pour le produit $\mathcal{N}_2\mathcal{N}_2^-$, tout se passe dans $G_{t,0}$ dans lequel on a une paire décomposée (2.1.d), d'où $\mathcal{N}_2\mathcal{N}_2^- \subset (\Omega \cap N^-)(\mathrm{Ker}\ \gamma(t,t) \times \mathrm{Ker}\ \delta)(\Omega \cap N \cap G_{t,0})$; on vérifie via $(*)$ que le terme de droite appartient encore à $\mathcal{N}_2$, soit

$$\mathcal{N}_2(\Omega \cap N^-) \subset (\Omega \cap N^-)(\mathrm{Ker}\ \gamma(t,t) \times \mathrm{Ker}\ \delta)\ \mathcal{N}_2\ \mathcal{N}_1^-\ (\Omega \cap N^- \cap L)$$

On examine alors le produit $\mathcal{N}_2\mathcal{N}_1^-$ en utilisant $(*)$ et ses notations : il s'agit d'identifier les deux lignes de $(*)$. Or $g = I_{tN} + BY$ appartient à $\Gamma(t,t)$ par 2.1.d et est de la forme $g = \begin{pmatrix} I_N & 0 \\ * & I_{(t-1)N} \end{pmatrix}$, de sorte que $X' = X$ et $Y' = Y$. D'autre part $h = I_{2k}$ donc $\mathrm{diag}(g, h, {}^\tau g^{-1})$ appartient au noyau de $\gamma(t,t) \otimes \delta$. Vérifions maintenant que $\begin{pmatrix} I_{tN} & A' & B' \\ 0 & I_{2k} & A'^* \\ 0 & 0 & I_{tN} \end{pmatrix}$ appartient à $\Omega \cap N$. On a $A' = g^{-1}BX$, ses entrées (blocs $N \times 2k$) appartiennent à $\mathfrak{J}^0 \sigma\, {}^\tau\Delta^- \alpha^{-1}$ ou $\varpi_E^{-1}\mathfrak{H}^1\sigma\, {}^\tau\Delta^-\alpha^{-1}$, d'où la condition

$$\varpi_E^{-1}\mathfrak{H}^1\sigma\, {}^\tau\Delta^-\alpha^{-1} \subset \Delta^+ \tag{3}$$

qui est vérifiée par hypothèse puisque $\Omega(1,1,k)$ est décomposée. La vérification pour B' est immédiate (voir Lemme 1).

Il reste :

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_2(\Omega \cap N^-) &\subset (\Omega \cap N^-)(\mathrm{Ker}\ \gamma(t,t) \otimes \delta)(\Omega \cap N)\ (\Omega \cap N^- \cap L)\\ &\subset (\Omega \cap N^-)(\mathrm{Ker}\ \gamma(t,t) \otimes \delta)(\Omega \cap N \cap L)(\Omega \cap N \cap R)(\Omega \cap N^- \cap L)\\ &\subset (\Omega \cap N^-)(\mathrm{Ker}\ \gamma(t,t) \otimes \delta)(\Omega \cap N \cap L)\ (\Omega \cap N^- \cap L)(\Omega \cap R)\\ &\qquad\qquad (\text{car } L \text{ normalise } R)\end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à utiliser de nouveau l'hypothèse de récurrence dans $\Omega \cap L$ et la décomposition de $\Omega \cap R$.

La stabilité par $\mathcal{N}_1$ se montre de façon analogue et fait intervenir la condition

$$\alpha\, {}^\tau\Delta^+\sigma^{-1}\mathfrak{H}^1 \subset \Delta^- \tag{4}$$

vérifiée car $\Omega(1,2,k)$ est décomposée. On omet les détails. □

Corollaire 3. *La paire $(\Omega(t,r,k), \omega(t,r,k))$ est décomposée au-dessus de $(\iota(\Gamma^{\times t}) \times \Delta, \gamma^{\otimes t} \otimes \delta)$ relativement à wP^0w^{-1} pour tout élément w de $N_G(M^0)$.*

Démonstration. La démonstration par récurrence sur la longueur de l'image de w dans $N_G(M^0)/M^0 \simeq \mathbf{W}_t^0$ est immédiate, une fois établie l'assertion :

Soit J un sous-groupe de $G_{t,k}$ défini par blocs comme en 1.1 (B) relativement à la décomposition (3) de V en 2.1.a. Soit $s \in S_t^0$. Si J porte une paire décomposée au-dessus de M^0 relativement à P^0, alors J porte une paire décomposée au-dessus de M^0 relativement à sP^0s^{-1}.

En effet, par transitivité (voir 1.1), J porte une paire décomposée au-dessus de $M^0(s)$, sous-groupe de Levi de G engendré par M^0 et s, relativement à $P^0(s) = M^0(s)N^0$, de radical unipotent $N^0(s)$. Comme $s \in M^0(s)$ on en déduit :

$$s^{-1}Js = s^{-1}Js \cap N^0(s)^- \,.\, s^{-1}Js \cap M^0(s) \,.\, s^{-1}Js \cap N^0(s)$$

D'autre part $J \cap M^0(s)$ est également décomposée et la conjugaison par s échange $M^0(s) \cap N^0$ et $M^0(s) \cap N^{0^-}$, d'où

$$s^{-1}Js \cap M^0(s) = s^{-1}Js \cap M^0(s) \cap N^{0^-} \,.\, s^{-1}Js \cap M^0 \,.\, s^{-1}Js \cap M^0(s) \cap N^0$$

et le résultat. □

2.5 - Quelques propriétés des doubles classes

L'hypothèse (H1) est en vigueur dans tout ce paragraphe, la proposition 4 est donc valide. On travaillera constamment dans la suite avec les éléments de W_t : image de $\mathbf{W}_t$ décrite en 2.3 sur laquelle la longueur l de $\mathbf{W}_t$ se transporte. On raccourcit les notations en

$$\mathcal{H}(t,r,k) = \mathcal{H}\left(G_{t,k}\,,\ \omega(t,r,k)\right).$$

Lemme 2. *Soit $w \in W_t$. La double classe $\Omega(t,r,k)\, w\, \Omega(t,r,k)$ supporte un élément non nul et un seul de $\mathcal{H}(t,r,k)$ à scalaire non nul près.*

Notation. On note un tel élément $E_w^{(r)}$ ou E_w, la normalisation ne sera précisée que quand elle sera nécessaire.

Démonstration. Les paires (Ω,ω) et (Ω^w,ω^w) sont toutes deux décomposées relativement à $w^{-1}P^0w$ (corollaire 3 ci-dessus). L'intersection $\Omega \cap \Omega^w$ s'obtient donc par intersection terme à terme :

$$\Omega \cap \Omega^w = [\Omega \cap N^{0^{-w}} \cap (\Omega \cap N^{0^-})^w]\ [\Omega \cap M^0 \cap (\Omega \cap M^0)^w]\ [\Omega \cap N^{0^w} \cap (\Omega \cap N^0)^w]$$

Comme ω et ω^w sont triviales sur les intersections avec $N^{0^{-w}}$ et N^{0^w}, il reste :

$$\mathrm{Hom}_{\,\Omega\cap\Omega^w}\ (\omega,\omega^w) \simeq \mathrm{Hom}_{\,\iota(\Gamma^{\times t})\times\Delta}\ ((\gamma^{\otimes t}\otimes\delta),(\gamma^{\otimes t}\otimes\delta)^w) \simeq \mathbb{C}$$

puisque les représentations sont irréductibles et équivalentes (Proposition 3). □

L'intérêt essentiel de travailler avec la famille $(\Omega(t,r,k),\omega(t,r,k))_{t\leqslant r\leqslant 2t}$ de paires décomposées est que les calculs de doubles classes se simplifient à condition de bien choisir r.

Lemme 3. *Soit $w \in W_t$ et $\Omega = \Omega(t,2t,k)$. On a pour $0 \leqslant i \leqslant t-1$:*

$$l(s_iw) = 1 + l(w) \implies \Omega\, s_i\, \Omega\, w\, \Omega = \Omega\, s_i w\, \Omega$$

Démonstration. On peut réaliser $\mathbf{W}_t$ comme le groupe de Weyl affine d'un groupe symplectique $Sp(2t,K)$ sur un corps local non archimédien K (avec les conventions de 2.1.a) relativement au sous-groupe d'Iwahori standard

$$\mathfrak{J} = \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_K^\times & \mathfrak{o}_K & \dots & \mathfrak{o}_K \\ & \ddots & & \vdots \\ \mathfrak{p}_K & & \ddots & \\ \vdots & & & \mathfrak{o}_K \\ \mathfrak{p}_K & \dots & \mathfrak{p}_K & \mathfrak{o}_K^\times \end{pmatrix} \cap Sp(2t,K),$$

en envoyant les générateurs $\mathbf{s}_i$ de $\mathbf{W}_t$ sur les éléments s_i de $Sp(2t,K)$ définis comme les s_i de 2.3 en remplaçant N par 1, k par 0, σ par 1 et ϖ_E par ϖ_K. La condition de longueur s'exprime alors de la manière suivante ([Bo], IV.2.4) :

$$l(\mathrm{s}_i\mathrm{w}) = 1 + l(\mathrm{w}) \iff \mathfrak{J}\,\mathrm{s}_i\,\mathfrak{J}\,\mathrm{w}\,\mathfrak{J} = \mathfrak{J}\,\mathrm{s}_i\mathrm{w}\,\mathfrak{J}$$

soit encore, en notant respectivement U et U^- les sous-groupes unipotents triangulaires supérieur et inférieur de $Sp(2t,K)$, T le sous-groupe diagonal et $< T, \mathrm{s}_i >$ le sous-groupe de Levi engendré par T et s_i :

$$l(\mathrm{s}_i\mathrm{w}) = 1 + l(\mathrm{w}) \iff \begin{cases} \mathrm{w}^{-1}\,(\,\mathfrak{J} \cap < T, \mathrm{s}_i > \cap U\,)\,\mathrm{w} \subset \mathfrak{J} & \text{si } i < t \\ \mathrm{w}^{-1}\,\big(\,\mathfrak{J} \cap < T, \mathrm{s}_t > \cap U^-\,\big)\,\mathrm{w} \subset \mathfrak{J} & \text{si } i = t \end{cases}$$

Cette condition peut s'exprimer à son tour en termes des valuations des entrées non nulles de w (qui appartiennent à $\pm\varpi_K^{\mathbb{Z}}$).

Revenons à $G_{t,k}$ et notons $P^0(i) = M^0(i)N^0(i)$, pour $0 \leqslant i \leqslant t-1$, le sous-groupe parabolique triangulaire supérieur par blocs dont le sous-groupe de Levi $M^0(i)$ est le plus petit sous-groupe de Levi contenant M^0 et s_i. L'équivalence précédente, portant sur les valuations des entrées de w, implique alors dans $G_{t,k}$

$$l(s_iw) = 1 + l(w) \implies w^{-1}\,\big(\,\Omega(t,r,k) \cap M^0(i) \cap N^0\,\big)\,w \subset \Omega(t,r,k) \quad (i < t).$$

(Rappelons que $\varpi_E\mathfrak{J}^0 \subset \mathfrak{H}^1 \subset \mathfrak{J}^0 \subset \varpi_E^{-1}\mathfrak{H}^1$; l'implication est donc évidente pour $i > 0$ ou $k = 0$. Pour $i = 0$ les détails sont analogues au cas de $i = t$ traité dans le lemme 4.)

Soit maintenant $\Omega = \Omega(t, 2t, k)$. Pour $0 \leqslant i \leqslant t-1$, l'élément s_i vérifie $s_i\,(\Omega \cap N^{0-})s_i^{-1} \subset \Omega$ et $s_i\,(\Omega \cap N^0(i))s_i^{-1} \subset \Omega$, de sorte que

$$\Omega\,s_i\,\Omega = \Omega\,s_i\,(\Omega \cap M^0(i) \cap N^0).$$

Le lemme en découle immédiatement. □

Lemme 4. *Soit $w \in W_t$ et $\Omega = \Omega(t,t,k)$. On a :*

$$l(s_tw) = 1 + l(w) \implies \Omega\,s_t\,\Omega\,w\,\Omega = \Omega\,s_tw\,\Omega$$

Démonstration. On reprend celle du lemme précédent, en définissant cette fois $M^0(t)$ comme l'image de $G_{1,k}$ dans $G_{t,k}$ par le plongement :

$$j_t\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 & c \\ 0 & I_{(t-1)N} & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & e & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & I_{(t-1)N} & 0 \\ g & 0 & h & 0 & i \end{pmatrix}$$

On a cette fois :

$$l(s_tw) = 1 + l(w) \implies w^{-1}\,\Big(\,\Omega(t,r,k) \cap M^0(t) \cap N^{0-}\,\Big)\,w \subset \Omega(t,r,k).$$

Ecrivons en effet l'élément correspondant de $Sp(2t,K)$ sous la forme $\mathrm{w} = \mathrm{d}\mathrm{w}_0$ avec $\mathrm{w}_0 \in \mathrm{W}_t^0$ et $\mathrm{d} = \mathrm{diag}\,(\varpi_K^{j_1}, \cdots, \varpi_K^{j_t}, \varpi_K^{-j_t}, \cdots \varpi_K^{-j_1})$, et appelons ϵ la permutation de $\{1, \ldots, 2t\}$ correspondant à w_0. Alors

$$l(\mathrm{s}_t\mathrm{w}) = 1 + l(\mathrm{w}) \iff \begin{cases} 2j_1 \geqslant -1 & \text{si } \epsilon^{-1}(1) > \epsilon^{-1}(2t) \\ 2j_1 \geqslant 0 & \text{si } \epsilon^{-1}(1) < \epsilon^{-1}(2t) \end{cases} \iff j_1 \geqslant 0$$

De façon analogue w s'écrit dw_0 dans $G_{t,0}$, plongé dans $G_{t,k}$ comme en 2.1.a. Il nous faut examiner l'image de $j_t\left(\begin{pmatrix} I_N & 0 & 0 \\ \Delta^- & I_{2k} & 0 \\ \sigma^{-1}\mathfrak{H}^1 & {}^\tau\Delta^-\alpha^{-1} & I_N \end{pmatrix}\right)$ dans la conjugaison $x \mapsto w^{-1}xw$. Le bloc Δ^- d'origine (en $(2,1)$) va prendre une place sur la ligne médiane (ligne $t+1$) et être multiplié par $\varpi_E^{j_1}$ (à des produits par σ près) ; il restera dans Ω pourvu que $j_1 \geqslant 0$ (conditions (2) et (3) de 2.4).

Ce point étant acquis, le lemme découle de ce que l'élément s_t vérifie, pour $\Omega = \Omega(t,t,k)$: $\Omega\, s_t\, \Omega = \Omega\, s_t\, (\Omega \cap M^0(t) \cap N^{0^-})$. □

2.6 - Propagation d'inversibilité

Moyennant la proposition 4 (et donc l'hypothèse (H1)), un ingrédient essentiel de la démonstration du théorème 1 est le théorème de Bushnell et Kutzko cité en 1.1. Nous utiliserons tout particulièrement les homomorphismes injectifs d'algèbres à unité suivants.

a) Soit $G_{t-1,k}^+$ l'ensemble des éléments de $G_{t-1,k}$ dont le plongement dans $L_{t,k}$ est $(Q_{t,k}, \Omega)$-positif, et soit $\mathcal{H}(t-1,r,k)^+$ la sous-algèbre de $\mathcal{H}(t-1,r,k)$ formée des éléments de support contenu dans $\Omega(t-1,r,k)G_{t-1,k}^+\Omega(t-1,r,k)$. Comme $\mathcal{H}(t-1,r,k)$ est naturellement une sous-algèbre de $\mathcal{H}(L_{t,k}, \gamma \otimes \omega(t-1,r,k)) \simeq \mathcal{H}(GL(N,F),\gamma) \otimes \mathcal{H}(t-1,r,k)$ (plongement via $f \mapsto \mathcal{I} \otimes f$), on obtient par restriction de $\mathcal{T}_{L_{t,k}}^+$:

$$(\mathbf{a}) \qquad \mathcal{R}_{t-1}^+ \ : \ \mathcal{H}(t-1,r,k)^+ \underset{\text{alg}}{\hookrightarrow} \mathcal{H}(t,r,k)$$

qui vérifie $\mathrm{Supp}\ \mathcal{R}_{t-1}^+(f) = \Omega(t,r,k)\ \mathrm{Supp} f\ \Omega(t,r,k)$ et dont l'image est le sous-espace des fonctions de support contenu dans $\Omega(t,r,k)\ G_{t-1,k}^+\ \Omega(t,r,k)$.

b) Soit $GL(tN,F)^+$ l'ensemble des éléments de $GL(tN,F)$ dont le plongement dans $M_{t,k}$ via ι est $(P_{t,k}, \Omega)$-positif, et soit $\mathcal{A}(t,t)^+$ la sous-algèbre de $\mathcal{A}(t,t)$ (1.4) formée des éléments de support contenu dans $\Gamma(t,t)GL(tN,F)^+\Gamma(t,t)$. Comme $\mathcal{A}(t,t)$ est naturellement une sous-algèbre de $\mathcal{H}(M_{t,k}, \gamma(t,t) \otimes \delta) \simeq \mathcal{H}(GL(tN,F), \gamma(t,t)) \otimes \mathcal{H}(Sp(2k,F), \delta)$, on obtient par restriction de $\mathcal{T}_{M_{t,k}}^+$:

$$(\mathbf{b}) \qquad \mathcal{T}_{\mathcal{A}}^+ \ : \ \mathcal{A}(t,t)^+ \underset{\text{alg}}{\hookrightarrow} \mathcal{H}(t,r,k)$$

qui vérifie $\mathrm{Supp}\ \mathcal{T}_{\mathcal{A}}^+(f) = \Omega(t,r,k)\ \iota(\mathrm{Supp} f)\ \Omega(t,r,k)$ et dont l'image est le sous-espace des fonctions de support contenu dans $\Omega(t,r,k)\ \iota\,(GL(tN,F)^+)\ \Omega(t,r,k)$.

Remarque. On a renoncé à faire apparaître dans les notations le fait que les ensembles d'éléments positifs $G^+_{t-1,k}$ et $GL(tN,F)^+$ dépendent de $\Omega = \Omega(t,r,k)$ c'est-à-dire de r, comme on va le voir immédiatement.

Lemme 5. *Supposons $r = 2t$.*

(i) La sous-algèbre $\mathcal{A}(t,t)^+$ est formée des fonctions de support contenu dans $\Gamma(t,t)\tilde{W}(\mathfrak{B}_t)^+\Gamma(t,t)$, où $\tilde{W}(\mathfrak{B}_t)^+$ est le semi-groupe produit de $W_0(\mathfrak{B}_t)$ par $D(\mathfrak{B}_t)^+ = \{diag(\varpi_E^{j_1} I_N, \cdots, \varpi_E^{j_t} I_N)/ j_1, \ldots, j_t \in \mathbb{N}\}$.

(ii) Les éléments de $W^0_{t-1} \subset G_{t-1,k}$ sont $(Q_{t,k}, \Omega(t,2t,k))$-positifs.

Démonstration. (i) Il s'agit de vérifier que les éléments de $\iota(\tilde{W}(\mathfrak{B}_t)^+) \subset M_{t,k}$ sont précisément les éléments $(P_{t,k}, \Omega(t,2t,k))$-positifs de $\iota(\tilde{W}(\mathfrak{B}_t))$. Or le choix de $r = 2t$ assure précisément que toute permutation $\iota(w)$, $w \in W_0(\mathfrak{B}_t)$, normalise $\Omega(t,2t,k) \cap N_{t,k}$ et $\Omega(t,2t,k) \cap N^-_{t,k}$, puisque tous les blocs $N \times N$ de $\Gamma^+(t,2t)$ σ sont identiques, et de même pour $\sigma^{-1}\Gamma^-(t,2t)$. L'action des éléments de $\iota(D(\mathfrak{B}_t))$ est facile à examiner.

(ii) Là aussi l'hypothèse $r = 2t$ est cruciale. Le bloc (1,2) de $\Omega(t,2t,k)$ par exemple (dans une écriture par blocs subordonnée à la décomposition (2) de V dans 2.1.a), a la forme $[\,\mathfrak{J}^0 \quad \ldots \quad \mathfrak{J}^0 \quad \Delta^+ \quad \mathfrak{J}^0\sigma \quad \ldots \quad \mathfrak{J}^0\sigma\,]$, d'où sa stabilité par les générateurs de W^0_{t-1}. □

Lemme 6. *Sous l'hypothèse (H2), l'élément $E^{(2t)}_{s(t,k)}$ de l'algèbre $\mathcal{H}(t,2t,k)$ est inversible.*

Démonstration. L'inversibilité de $E^{(2)}_{s(1,k)}$ dans $\mathcal{H}(1,2,k)$ résulte de (H2) puisque le coefficient b_s est non nul. Soit $t \geqslant 2$. L'élément $s(t,k)$ est conjugué de s_0 par h, où $h = s_{t-1}s_{t-2}\ldots s_1$. Posons $\Omega = \Omega(t,2t,k)$. On a :

$$(*) \qquad \Omega\ h\ \Omega\ s_0\ \Omega\ h\ \Omega = \Omega\ hs_0h\ \Omega = \Omega\ s(t,k)\ \Omega$$

En effet, comme tous les générateurs considérés appartiennent à S^0_t, il suffit, grâce au lemme 3, de vérifier que la longueur de hs_0h est $(t-1)+1+(t-1)$.

Il découle du lemme 2 et de $(*)$ que l'on a dans $\mathcal{H}(t,2t,k)$:

$$E^{(2t)}_{s(t,k)} \equiv E_h E^{(2t)}_{s_0} E_h$$

Comme h appartient à $\iota(W_0(\mathfrak{B}_t))$ on sait par le lemme 5 (i) et (b) que E_h est l'image par $\mathcal{T}^+_{\mathcal{A}}$ d'un élément $a_{h'}$ de $\mathcal{A}(t,t)^+$ de support $\Gamma(t,t)h'\Gamma(t,t)$ (avec $h = \iota(h')$). De la structure de $\mathcal{A}(t,t)$ (Proposition 2 et [BK1] 5.4.6) on déduit que $a_{h'}$ est *inversible dans* $\mathcal{A}(t,t)^+$ (car son inverse est combinaison linéaire d'éléments de support contenu dans $\Gamma(t,t)W_0(\mathfrak{B}_t)\Gamma(t,t)$). Alors E_h est inversible dans $\mathcal{H}(t,2t,k)$, d'inverse $\mathcal{T}^+_{\mathcal{A}}(a^{-1}_{h'})$.

Enfin l'hypothèse (H2) assure également que l'élément $E^{(2t)}_{s(1,k)}$ de $\mathcal{H}(1,2t,k) = \mathcal{H}(1,2,k)$ (multiple non nul de $E^{(2)}_{s(1,k)}$) a pour inverse une combinaison linéaire de

lui-même et de $\mathcal{I}$. Ses images successives par les homomorphismes $\mathcal{R}_j^+$ (Lemme 5 (ii) et (a)) gardent la même propriété donc E_{s_0} est inversible dans $\mathcal{H}(t,2t,k)$. Finalement $E^{(2t)}_{s(t,k)}$ est inversible comme produit d'éléments inversibles. □

Lemme 7. *Sous l'hypothèse (H3), l'élément $E^{(t)}_{q(t,k)}$ de l'algèbre $\mathcal{H}(t,t,k)$ peut être normalisé de façon à vérifier la relation quadratique*

$$\left(E^{(t)}_{q(t,k)}\right)^2 = a_q E^{(t)}_{q(t,k)} + b_q \mathcal{I}.$$

Démonstration. On va produire un sous-groupe parabolique $\mathcal{P}$ de $G_{t,k}$ et un facteur de Levi $\mathcal{M}$ de $\mathcal{P}$ vérifiant les conditions suivantes :

(i) On a un isomorphisme $\epsilon : GL((t-1)N,F) \times G_{1,k} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$;
(ii) La paire $(\Omega,\omega) = (\Omega(t,t,k),\omega(t,t,k))$ est décomposée au-dessus de $\epsilon(\Gamma(t-1,t-1)\times\Omega(1,1,k),\gamma(t-1,t-1)\otimes\omega(1,1,k))$ relativement à $\mathcal{P}$;
(iii) On a $\epsilon(I_{(t-1)N}\times q(1,k)) = q(t,k)$ et $q(t,k)$ est $(\mathcal{P},\Omega)$-positif.

Montrons que ces propriétés permettent de conclure. On utilise l'homomorphisme d'algèbres $\mathcal{T}^+_{\mathcal{M}} : \mathcal{H}(\mathcal{M},\omega_{|\Omega\cap\mathcal{M}})^+ \hookrightarrow \mathcal{H}(t,t,k)$ de 1.1.a. L'algèbre $\mathcal{H}(\mathcal{M},\omega_{|\Omega\cap\mathcal{M}})$ s'identifie via ϵ à $\mathcal{A}(t-1,t-1)\otimes\mathcal{H}(1,1,k)$, dans laquelle $e^{(1)}_{q(1,k)}$ vérifie la relation $(e^{(1)}_{q(1,k)})^2 = a_q e^{(1)}_{q(1,k)} + b_q\mathcal{I}$. L'image de $q(1,k)$ par ϵ appartient à $\mathcal{M}^+$, donc l'image de $e^{(1)}_{q(1,k)}$ par $\mathcal{T}^+_{\mathcal{M}}$, qui est un élément de support $\Omega q(t,k)\Omega$, vérifie la même relation, c.q.f.d.

Pour produire $\mathcal{P}$, on part du parabolique standard $\mathcal{P}'$ de Levi $GL((t-1)N,F)\times G_{1,k}$ et on le conjugue par $w = \iota(\begin{pmatrix} 0 & I_{(t-1)N} \\ I_N & 0 \end{pmatrix})$. Alors $\mathcal{M}$ est l'image de l'homomorphisme ϵ donné par :

$$\epsilon(g,h) = \begin{pmatrix} A & 0 & B & 0 & C \\ 0 & g & 0 & 0 & 0 \\ D & 0 & E & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 & {}^\tau g^{-1} & 0 \\ G & 0 & H & 0 & J \end{pmatrix} \quad (g\in GL((t-1)N,F), h = \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & J \end{pmatrix} \in G_{1,k})$$

Le point (i) est donc acquis et (ii) découle du corollaire 3 : Ω^w est décomposé relativement à P^0 donc aussi relativement au parabolique standard $\mathcal{P}'$. Le point (iii) est évidemment crucial. L'élément $q(t,k)$ est en fait à la fois $(\mathcal{P},\Omega)$-positif et $(\mathcal{P},\Omega)$-négatif, soit :

$$q(t,k)\,\Omega\cap\mathcal{N}^-\,q(t,k)^{-1} = \Omega\cap\mathcal{N}^- \quad ; \quad q(t,k)\,\Omega\cap\mathcal{N}\,q(t,k)^{-1} = \Omega\cap\mathcal{N}\ .$$

Vérifions la première égalité :

$$q(t,k)\begin{pmatrix} I_N & V_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{(t-1)N} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & I_{2k} & 0 & 0 \\ V_3' & T & V_2' & I_{(t-1)N} & V_1' \\ 0 & V_3 & 0 & 0 & I_N \end{pmatrix} q(t,k)^{-1} = \begin{pmatrix} I_N & W_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{(t-1)N} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_2 & I_{2k} & 0 & 0 \\ W_3' & T & V_2' & I_{(t-1)N} & W_1' \\ 0 & W_3 & 0 & 0 & I_N \end{pmatrix}$$

avec $W_1 = -\,{}^\tau\sigma\,{}^\tau\varpi_E^{-1}V_3$, $W_3 = \sigma^{-1}\varpi_E V_1$, $W_3' = -V_1'\,{}^\tau\varpi_E\,{}^\tau\sigma^{-1}$, $W_1' = V_3'\varpi_E^{-1}\sigma$.

Comme le bloc V_1 décrit $M_{1,t-1}(\mathfrak{J}^0)$, en tenant compte de 2.1.c, l'égalité est vérifiée si et seulement si le bloc V_3 décrit $M_{1,t-1}(\sigma^{-1}\varpi_E\mathfrak{J}^0)$, ce qui est le cas dans $\Omega(t,r,k)$ si et seulement si $r=t$. □

2.7 - Isomorphismes d'algèbres de Hecke

Nous avons prouvé l'inversibilité de $E^{(2t)}_{s(t,k)}$ dans $\mathcal{H}(t,2t,k)$ et celle de $E^{(t)}_{q(t,k)}$ dans $\mathcal{H}(t,t,k)$ (lemmes 6 et 7). Pour exploiter ces résultats, ainsi que ceux des lemmes 3 et 4, il faut pouvoir passer d'une algèbre à l'autre. La proposition qui suit est donc le point-clé de la démonstration du théorème 1 (ainsi que du théorème 2, au paragraphe suivant).

Proposition 5. *Pour tout r tel que $t \leqslant r \leqslant 2t-1$ il y a un isomorphisme canonique d'algèbres à unité*

$$\mathcal{E}_r : \ \mathcal{H}(t,r,k) \ \xrightarrow{\simeq} \ \mathcal{H}(t,r+1,k)$$

qui vérifie, pour tout $w \in W_t$: $\mathcal{E}_r(\, E^{(r)}_w\,) \ \equiv \ E^{(r+1)}_w$.

Plus précisément, soit $H(t,r,k)$ le sous-groupe engendré par $\Omega(t,r,k)$ et $\Omega(t,r+1,k)$. Pour tout $w \in W_t$, le sous-espace de $\mathcal{H}(t,r,k)$ formé des fonctions de support contenu dans $H(t,r,k)wH(t,r,k)$ est de dimension 1.

Démonstration. L'idée de base est celle de la démonstration de la proposition 2, mais cette fois on a moins de renseignements sur les algèbres considérées, la mise en œuvre est donc plus élaborée.

1ère étape : description du sous-groupe $H(t,r,k)$. Montrons que :

(i) *le produit $H(t,r,k) = (\Omega(t,r+1,k)\cap N^-)\ (\Omega\cap M)\ (\Omega(t,r,k)\cap N)$ est un groupe (engendré par $\Omega(t,r,k)$ et $\Omega(t,r+1,k)$).*

On a $\Omega(t,r,k) = (\Omega(t,r,k)\cap N^-)(\Omega(t,r,k)\cap M)(\Omega(t,r,k)\cap N)$ et

$$\begin{cases} \Omega(t,r,k)\cap M \ = \ \Omega(t,r+1,k)\cap M, \\ \Omega(t,r,k)\cap N^- \subset \ \Omega(t,r+1,k)\cap N^-, \\ \Omega(t,r,k)\cap N \ \supset \ \Omega(t,r+1,k)\cap N. \end{cases}$$

On remarque que $\Omega(t,r+1,k)\cap N^- = \mathcal{Z}^-\,(\Omega(t,r,k)\cap N^-)$ et $\Omega(t,r,k)\cap N = \mathcal{Z}\,(\Omega(t,r+1,k)\cap N)$ où $\mathcal{Z}^-$ et $\mathcal{Z}$ sont les sous-groupes centraux de N^- et N suivants :

$$\mathcal{Z}^- = \left\{ \begin{pmatrix} I_{tN} & 0 & 0 \\ 0 & I_{2k} & 0 \\ Y & 0 & I_{tN} \end{pmatrix} \in G_{t,k} \ / Y \in \sigma^{-1}\Gamma^-(t,r+1) \text{ et } Y_{ij}=0 \text{ si } i-j \neq r-t \right\}$$

$$\mathcal{Z} = \left\{ \begin{pmatrix} I_{tN} & 0 & C \\ 0 & I_{2k} & 0 \\ 0 & 0 & I_{tN} \end{pmatrix} \in G_{t,k} \ / C \in \Gamma^+(t,r)\sigma \text{ et } C_{ij}=0 \text{ si } j-i \neq r-t \right\}$$

Autrement dit, on isole dans $\sigma^{-1}\Gamma^-(t,r+1)$ la sous-diagonale qui diffère de $\sigma^{-1}\Gamma^-(t,r)$ (blocs dans $\sigma^{-1}\mathfrak{H}^1$), et on isole dans $\Gamma^+(t,r)\,\sigma$ la sous-diagonale qui diffère de $\Gamma^+(t,r+1)\,\sigma$ (blocs dans $\varpi_E^{-1}\mathfrak{H}^1\sigma$).

Il s'agit donc de voir que le produit $\mathcal{Z}^-\Omega(t,r,k)$ est un groupe, i.e. de vérifier que $\Omega(t,r,k)\mathcal{Z}^- \subset \mathcal{Z}^-\Omega(t,r,k)$, ou encore $(\Omega(t,r,k)\cap N)\,\mathcal{Z}^- \subset \mathcal{Z}^-\Omega(t,r,k)$.

Mais le produit $(\Omega(t,r,k)\cap N)\,\mathcal{Z}^- = \mathcal{Z}\,(\Omega(t,r+1,k)\cap N)\,\mathcal{Z}^-$ est contenu dans $\mathcal{Z}\,\Omega(t,r+1,k)$, lui-même contenu dans $\mathcal{Z}\mathcal{Z}^-\Omega(t,r,k)$; on n'a plus qu'à montrer que $\mathcal{Z}\mathcal{Z}^- \subset \mathcal{Z}^-\Omega(t,r,k)$. Cette fois le calcul a lieu dans $G_{t,0}$, dans lequel (i) a été établi en 1.4 (démonstration de la proposition 2), c.q.f.d.

2ème étape : première réduction.

La deuxième assertion de la proposition entraîne la première. En effet son application à $w = 1$ montre que la représentation $\mathrm{Ind}_{\Omega(t,r,k)}^{H(t,r,k)}\omega(t,r,k)$ est irréductible. Comme $H(t,r,k) = \Omega(t,r+1,k)\Omega(t,r,k)$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}_{H(t,r,k)}(\mathrm{Ind}_{\Omega(t,r,k)}^{K(t,r,k)}\omega(t,r,k), \mathrm{Ind}_{\Omega(t,r+1,k)}^{H(t,r,k)}\omega(t,r+1,k))\\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\Omega(t,r,k)}(\omega(t,r,k), (\mathrm{Ind}_{\Omega(t,r+1,k)}^{H(t,r,k)}\omega(t,r+1,k))|_{\Omega(t,r,k)})\\
&\simeq \mathrm{Hom}_{\Omega(t,r,k)}(\omega(t,r,k), \mathrm{Ind}_{\Omega(t,r,k)\cap\Omega(t,r+1,k)}^{\Omega(t,r,k)}(\omega(t,r+1,k)|_{\Omega(t,r,k)\cap\Omega(t,r+1,k)}))
\end{aligned}$$

La représentation $\mathrm{Ind}_{\Omega(t,r,k)}^{H(t,r,k)}\omega(t,r,k)$ est donc une sous-représentation de $\mathrm{Ind}_{\Omega(t,r+1,k)}^{H(t,r,k)}\omega(t,r+1,k)$ qui a même dimension : elles sont irréductibles et isomorphes. L'isomorphisme $\mathcal{E}_r$ cherché provient alors directement de [BK1, 4.1.3]) par composition :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(t,r,k) &\xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}(G_{t,k}, \mathrm{Ind}_{\Omega(t,r,k)}^{H(t,r,k)}\omega(t,r,k))\\
&\xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}(G_{t,k}, \mathrm{Ind}_{\Omega(t,r+1,k)}^{H(t,r,k)}\omega(t,r+1,k)) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}(t,r+1,k)
\end{aligned}$$

Un entrelacement entre les deux représentations induites est unique à scalaire près, donc le deuxième isomorphisme est uniquement déterminé puiqu'il doit envoyer unité sur unité. L'assertion sur l'image de $E_w^{(r)}$ est conséquence directe de [BK1, 4.1.5] et du lemme 2, puisque $\Omega(t,r+1,k)w\Omega(t,r+1,k) \subset H(t,r,k)wH(t,r,k)$.

Il reste donc à montrer que :

(ii) *La seule $\Omega(t,r,k)$-double classe de $H(t,r,k)\,w\,H(t,r,k)$ qui entrelace $\omega(t,r,k)$ est $\Omega(t,r,k)\,w\,\Omega(t,r,k)$.*

3ème étape : réduction à $G_{t,0}$.

Comme $H(t,r,k) = \Omega(t,r,k)\mathcal{Z}^-$, on a

$$H(t,r,k)\,w\,H(t,r,k) \;= \Omega(t,r,k)\mathcal{Z}^-\,w\,\mathcal{Z}^-\Omega(t,r,k)$$

et vu le lemme 2, (ii) équivaut à montrer que

(iii) $z \in \mathcal{Z}^-\,w\,\mathcal{Z}^-$ *et* z *entrelace* $\omega(t,r,k) \Longrightarrow z \in \Omega(t,r,k)\,w\,\Omega(t,r,k)$.

Mais $\mathcal{Z}^-\,w\,\mathcal{Z}^-$ est contenu dans $G_{t,0}$ qui commute à $Sp(2k,F)$ dans $G_{t,k}$: si z entrelace $\omega(t,r,k)$, il entrelace sa restriction $\omega(t,r,0)\otimes\delta$ à

$$\Omega(t,r,k)\cap(G_{t,0}\times Sp(2k,F)) \simeq \Omega(t,r,0)\times\Delta.$$

Il entrelace donc $\omega(t,r,0)$, et si (iii) est établi pour $k=0$ on déduit

$$z \in \Omega(t,r,0)\, w\, \Omega(t,r,0) \subset \Omega(t,r,k)\, w\, \Omega(t,r,k), \text{ c.q.f.d.}$$

4ème étape : réduction au cas où $r = t$.

On suppose maintenant $k = 0$; par 2.1.d : $\Omega(t,r,0) = \Gamma(2t,r)^{S_t} \cap G_{t,0}$. On reprend alors le procédé du corollaire 1 et de la proposition 2 : on identifie $G_{t,0}$ au sous-groupe de $G_{r,0}$ image du plongement

$$g \longmapsto \begin{pmatrix} I_{(r-t)N} & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & I_{(r-t)N} \end{pmatrix} \quad (g \in G_{t,0}),$$

de sorte que $\Omega(t,r+1,0) = \Omega(r,r+1,0) \cap G_{t,0}$ et $\Omega(t,r,0) = \Omega(r,r,0) \cap G_{t,0}$. Travaillons dans $G_{r,0}$ par rapport au sous-groupe parabolique $\mathcal{P}$ formé de matrices triangulaires supérieures par blocs, avec un facteur de Levi $\mathcal{M}$ diagonal par blocs et isomorphe à $GL(N,F) \times \dots GL(N,F) \times G_{t,0}$ ($r-t$ facteurs $GL(N,F)$, le facteur $G_{t,0}$ étant l'image du plongement ci-dessus).

Comme la paire $(\Omega(r,r,0), \omega(r,r,0))$ est décomposée par rapport à $\mathcal{P}$, si un élément $z \in \mathcal{Z}^-\, w\, \mathcal{Z}^- \subset G_{t,0}$ entrelace $\omega(t,r,0)$ dans $G_{t,0}$, il entrelace $\gamma \otimes \dots \otimes \gamma \otimes \omega(t,r,0)$ dans $\mathcal{M}$, donc il entrelace $\omega(r,r,0)$ dans $G_{r,0}$. Si donc (iii) est prouvé pour $r = t$, on conclut que $z \in G_{t,0} \cap \Omega(r,r,0)\, w\, \Omega(r,r,0)$. Or soient a et b dans $\Omega(r,r,0)$ tels que $za = bw$; en écrivant cette égalité avec des matrices $(3,3)$ par blocs comme dans le plongement de $G_{t,0}$ ci-dessus, et vu la forme des éléments z et w de $G_{t,0}$, on voit qu'alors $za_{22} = b_{22}w$, donc z appartient à $\Omega(t,r,0)\, w\, \Omega(t,r,0)$, c.q.f.d.

5ème étape : cas de $\Omega(t,t,0)$.

Travaillons avec le parabolique de Siegel $P_{t,0} = P = MN$ de $G_{t,0}$. On a (2.1.d)

$$\Omega(t,t,0) = J_P(\beta, \mathfrak{A}_{2t})^{S_t} \cap G_{t,0}, \quad \Omega(t,t+1,0) = J_{P^-}(\beta, \mathfrak{A}_{2t})^{S_t} \cap G_{t,0}$$
$$\text{et} \quad H(t,t,0) = J(\beta, \mathfrak{A}_{2t})^{S_t} \cap G_{t,0}.$$

Modifions provisoirement les notations pour faciliter la comparaison avec [BL3]. Notons $\bar{X}$ l'intersection de $X \subset GL(2tN,F)$ avec $G_{t,0} = Sp(2tN,F)$ et notons $H^1 = H^1(\beta, \mathfrak{A}_{2t})^{S_t}$, $J^1 = J^1(\beta, \mathfrak{A}_{2t})^{S_t}$ et $J = J(\beta, \mathfrak{A}_{2t})^{S_t}$, de sorte que $\Omega(t,t,0) = \bar{J}_P$ et $H(t,t,0) = \bar{J}$. On peut alors reproduire le diagramme de *loc. cit.* §4.2 en remplaçant respectivement θ_0, η_0 et κ_0 par $\theta_0(t,t)$, $\eta_0(t,t)$ et $\kappa_0(t,t)$ (Corollaire 2). Les arguments (et les conventions) de *loc. cit.,* proposition 4.2, s'appliquent de la même façon pour établir que :

1) $\omega(t,t,0)$ est produit tensoriel de $i(\widetilde{\sigma_0(t,t)})$ par $i(\widetilde{\kappa_0(t,t)})$ (où $(\bar{J}_P, i(\widetilde{\sigma_0(t,t)}))$ et $(\bar{J}, i(\widetilde{\sigma_0(t,t)}))$ sont des paires décomposées au-dessus de $(\Gamma^{\times t}, \sigma_0^{\otimes t})$) ;
2) la restriction de $\mathrm{Ind}_{\bar{J}_P}^{\bar{J}} i(\widetilde{\kappa_0(t,t)})$ à $\bar{J}^1$ est isomorphe à $\mathrm{Ind}_{\bar{J}_P^1}^{\bar{J}^1} i(\widetilde{\eta_0(t,t)})$ qui est une représentation irréductible ;
3) pour tout $w \in W_t$, l'espace d'entrelacements $I_w(\mathrm{Ind}_{\bar{J}_P^1}^{\bar{J}^1} i(\widetilde{\eta_0(t,t)}))$ est de dimension 1 (on vérifie aisément que W_t est contenu dans $B^\times$).

On veut en déduire (ii), autrement dit (lemme 2 et [BK1], 4.1.5) que l'espace d'entrelacements $I_w(\mathrm{Ind}_{\bar{J}_P}^{\bar{J}}\omega(t,t,0))$ est lui-même de dimension 1. Or la représentation $\mathrm{Ind}_{\bar{J}_P}^{\bar{J}}\omega(t,t,0)$ est équivalente à $i(\widetilde{\sigma_0(t,t)})\otimes \mathrm{Ind}_{\bar{J}_P}^{\bar{J}}\kappa(t,t,0)$. Comme dans [BL3], on reprend donc la démonstration de [BK1], Proposition 5.3.2 ; les trois propriétés ci-dessus permettent d'exprimer un élément non nul de $I_w(\mathrm{Ind}_{\bar{J}_P}^{\bar{J}}\omega(t,t,0))$ sous la forme $X\otimes Y$ où $Y\neq 0$ appartient à $I_w(\mathrm{Ind}_{\bar{J}_P^1}^{\bar{J}^1} i(\widetilde{\eta_0(t,t)}))$ et $X\neq 0$ est un endomorphisme de l'espace de $i(\widetilde{\sigma_0(t,t)})$. On a pour tout $x\in \bar{J}\cap(\bar{J})^w$:

$$\begin{aligned}(X\circ i(\widetilde{\sigma_0(t,t)})(x))\otimes (Y\circ \mathrm{Ind}_{\bar{J}_P}^{\bar{J}}\kappa(t,t,0)(x))&\\ = \ (i(\widetilde{\sigma_0(t,t)})(wxw^{-1})\circ X)\otimes (\mathrm{Ind}_{\bar{J}_P}^{\bar{J}}\kappa(t,t,0)(wxw^{-1})\circ Y)&\end{aligned}$$

d'où l'existence d'un scalaire $\alpha(x)$ tel que

$$\begin{aligned}&\text{(a)}\quad X\circ i(\widetilde{\sigma_0(t,t)})(x)=\alpha(x)\ i(\widetilde{\sigma_0(t,t)})(wxw^{-1})\circ X\\ \text{et}\quad &\text{(b)}\quad Y\circ \mathrm{Ind}_{\bar{J}_P}^{\bar{J}}\kappa(t,t,0)(x)=\alpha(x)^{-1}\ \mathrm{Ind}_{\bar{J}_P}^{\bar{J}}\kappa(t,t,0)(wxw^{-1})\circ Y\end{aligned}$$

On vérifie aisément que α est un caractère de $\bar{J}\cap(\bar{J})^w/\bar{J}^1\cap(\bar{J}^1)^w$. Cependant, pour $w\in W_t$, l'intersection $\bar{J}\cap(\bar{J})^w$ contient $\bar{J}\cap M^0\simeq \Gamma^{\times t}$, sur lequel α est entièrement déterminé par la condition (b) puisque Y est unique à scalaire près. L'opérateur X doit entrelacer les représentations irréductibles $\iota(\sigma_0^{\otimes t})$ et $\iota(\sigma_0^{\otimes t})^w\otimes\alpha$ de $\Gamma^{\times t}$, il est donc unique à scalaire près, c.q.f.d. □

2.8 - Conclusion de la démonstration

Rappelons que notre objectif est de prouver le théorème 1, autrement dit que les paires décomposées $(\Omega(t,r,k),\omega(t,r,k))$ de la proposition 4 sont des paires couvrantes. Nous allons montrer que pour tout $t\geqslant 1$, et sous les hypothèses (H1), (H2) et (H3), $(\Omega(t,r,k),\omega(t,r,k))$ est une paire couvrante de $(\Gamma\times\Omega(t-1,r,k),\gamma\otimes\omega(t-1,r,k))$ relativement à $Q_{t,k}$ – on convient de poser $(\Omega(0,r,k),\omega(0,r,k))=(\Delta,\delta)$. Le théorème 1 en découle par récurrence sur t, le cas $t=0$ étant tautologique.

Le lemme 6 affirme que $E^{(2t)}_{s(t,k)}$ est inversible dans l'algèbre $\mathcal{H}(t,2t,k)$, le lemme 7 que $E^{(t)}_{q(t,k)}$ est inversible dans l'algèbre $\mathcal{H}(t,t,k)$ (car $b_q\neq 0$). La proposition 5 implique que leurs images successives dans les algèbres $\mathcal{H}(t,r,k)$ sont aussi inversibles, et multiples de $E^{(r)}_{s(t,k)}$ et $E^{(r)}_{q(t,k)}$ respectivement. Les éléments $E^{(r)}_{s(t,k)}$ et $E^{(r)}_{q(t,k)}$ sont donc inversibles dans $\mathcal{H}(t,r,k)$ pour tout r.

Notons $\Omega=\Omega(t,r,k)$ et posons $z=\begin{pmatrix}\varpi_E & 0 & 0\\ 0 & I_{2(t-1)N+2k} & 0\\ 0 & 0 & {}^{\tau}\varpi_E^{-1}\end{pmatrix}$. On a :

$$z=s(t,k)q(t,k)\quad\text{et}\quad \Omega\, s(t,k)\,\Omega\, q(t,k)\,\Omega=\Omega\, z\,\Omega$$

(Les relations (3) et (4) de 2.4 permettent de vérifier que :
$s(t,k)(\Omega \cap Q^-)s(t,k)^{-1} \subset \Omega \cap Q$ et $q(t,k)(\Omega \cap Q)q(t,k)^{-1} \subset \Omega \cap Q^-$.
Alternative : obtenir la conclusion ci-dessous via le lemme 4 et la proposition 5.)

Il en résulte que $E_z^{(r)} \equiv E_{s(t,k)}^{(r)} E_{q(t,k)}^{(r)}$ dans $\mathcal{H}(t,r,k)$, donc $E_z^{(r)}$ est inversible. Or z est un élément $(Q_{t,k},\Omega)$-positif de $L_{t,k}$ dont la puissance e-ième ($e = e(E/F)$) appartient à $z'(\Omega \cap L_{t,k})$ avec $z' = \mathrm{diag}\,(\varpi_F I_N, I_{2(t-1)N+2k}, \varpi_F^{-1} I_N)$, élément fortement $(Q_{t,k},\Omega)$-positif du centre de $L_{t,k}$. Les doubles classes $\Omega z \Omega$ et $\Omega z' \Omega$ supportent un sous-espace de dimension 1 de $\mathcal{H}(t,r,k)$ et la relation $(\Gamma z \Gamma)^e = \Gamma z' \Gamma$ entraîne (par positivité de z et z' et grâce à l'homomorphisme $\mathcal{T}^+_{L_{t,k}}$ de 1.1) : $E_z^e \equiv E_{z'}$ dans $\mathcal{H}(t,r,k)$. L'élément $E_{z'}$ est donc inversible, ce qui équivaut au fait que (Ω,ω) soit couvrante relativement à $Q_{t,k}$ (1.1). □

3 - Structure des algèbres de Hecke

Nous allons dans ce paragraphe décrire la structure des algèbres de Hecke $\mathcal{H}(t,r,k) = \mathcal{H}(G_{t,k},\omega(t,r,k))$ des paires couvrantes obtenues au théorème 1 ; on y conserve donc les hypothèses de ce théorème et les notations du paragraphe 2 (en particulier celles de 2.3 concernant W_t). On rappelle pour commencer la définition d'une algèbre de convolution sur un groupe de Coxeter (3.1). On définit ensuite des éléments remarquables de nos algèbres $\mathcal{H}(t,r,k)$ qui vérifient les relations (quadratiques et de tresse) nécessaires pour engendrer une sous-algèbre qui est de convolution sur le groupe de Coxeter $(\mathbf{W}_t,\mathbf{S}_t)$ de type $\tilde{C}_t$ et dont les paramètres sont entièrement déterminés par le cas $t = 1$ (3.2). On montre enfin, moyennant une hypothèse supplémentaire, que cette sous-algèbre est $\mathcal{H}(t,r,k)$ tout entière (3.3). On termine par quelques exemples (3.4).

3.1 - L'algèbre de convolution sur $(\mathbf{W}_t,\mathbf{S}_t)$

L'ensemble de générateurs $\mathbf{S}_t$ de $\mathbf{W}_t$ rencontre exactement trois classes de conjugaison de $\mathbf{W}_t$, dont les intersections avec $\mathbf{S}_t$ sont $\{\mathbf{s}_0\}$, $\{\mathbf{s}_1,\dots\mathbf{s}_{t-1}\}$ et $\{\mathbf{s}_t\}$ ([Bo] IV.1.3). Une algèbre de convolution sur $(\mathbf{W}_t,\mathbf{S}_t)$ est donc donnée par trois paires de paramètres, $(a_{\mathbf{s}_0},b_{\mathbf{s}_0})$, $(a_{\mathbf{s}_i},b_{\mathbf{s}_i})$ (pour $1 \leqslant i \leqslant t-1$) et $(a_{\mathbf{s}_t},b_{\mathbf{s}_t})$. On pose ici $(a_{\mathbf{s}_0},b_{\mathbf{s}_0}) = (a_s,b_s)$ (cf. (H2)), $(a_{\mathbf{s}_i},b_{\mathbf{s}_i}) = (q_E^f - 1, q_E^f)$ pour $1 \leqslant i \leqslant t-1$ – rappelons que $f = N/[E:F]$, cf. 1.2 – et $(a_{\mathbf{s}_t},b_{\mathbf{s}_t}) = (a_q,b_q)$ (cf. (H3)).

Rappelons (voir par exemple [Bo], exercice IV.2.23) que l'algèbre de convolution (complexe) sur $(\mathbf{W}_t,\mathbf{S}_t)$ attachée à ces paramètres est la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbf{H}(\mathbf{W}_t,\mathbf{S}_t)$ admettant la présentation par générateurs et relations suivante :

$$\begin{array}{ll} \text{générateurs :} & \mathbf{e}_{\mathbf{s}_i} \quad (0 \leqslant i \leqslant t); \\ \text{relations quadratiques} & \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_{\mathbf{s}_0}^2 = a_s\,\mathbf{e}_{\mathbf{s}_0} + b_s\,\mathcal{I}\ ; \\ \mathbf{e}_{\mathbf{s}_i}^2 = (q_E^f - 1)\,\mathbf{e}_{\mathbf{s}_i} + q_E^f\,\mathcal{I} \quad \text{pour } 1 \leqslant i \leqslant t-1\ ; \\ \mathbf{e}_{\mathbf{s}_t}^2 = a_q\,\mathbf{e}_{\mathbf{s}_t} + b_q\,\mathcal{I}\ ; \end{array} \right. \end{array}$$

$$\text{relations de tresse} \quad \begin{cases} \mathbf{e}_{\mathbf{s}_i}\mathbf{e}_{\mathbf{s}_j} = \mathbf{e}_{\mathbf{s}_j}\mathbf{e}_{\mathbf{s}_i} & \text{si } |j-i| \geqslant 2 \ ; \\ \mathbf{e}_{\mathbf{s}_0}\mathbf{e}_{\mathbf{s}_1}\mathbf{e}_{\mathbf{s}_0}\mathbf{e}_{\mathbf{s}_1} = \mathbf{e}_{\mathbf{s}_1}\mathbf{e}_{\mathbf{s}_0}\mathbf{e}_{\mathbf{s}_1}\mathbf{e}_{\mathbf{s}_0} & \text{si } t \geqslant 2 \ ; \\ \mathbf{e}_{\mathbf{s}_i}\mathbf{e}_{\mathbf{s}_{i+1}}\mathbf{e}_{\mathbf{s}_i} = \mathbf{e}_{\mathbf{s}_{i+1}}\mathbf{e}_{\mathbf{s}_i}\mathbf{e}_{\mathbf{s}_{i+1}} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant t-2 \ ; \\ \mathbf{e}_{\mathbf{s}_t}\mathbf{e}_{\mathbf{s}_{t-1}}\mathbf{e}_{\mathbf{s}_t}\mathbf{e}_{\mathbf{s}_{t-1}} = \mathbf{e}_{\mathbf{s}_{t-1}}\mathbf{e}_{\mathbf{s}_t}\mathbf{e}_{\mathbf{s}_{t-1}}\mathbf{e}_{\mathbf{s}_t} & \text{si } t \geqslant 2 \ . \end{cases}$$

Elle a pour base comme espace vectoriel complexe la famille $(\mathbf{e}_{\mathbf{w}})_{\mathbf{w}\in\mathbf{W}_t}$ d'éléments $\mathbf{e}_{\mathbf{w}} = \mathbf{e}_{\mathbf{s}_{i_1}} \cdots \mathbf{e}_{\mathbf{s}_{i_v}}$, où $\mathbf{w} = \mathbf{s}_{i_1} \cdots \mathbf{s}_{i_v}$ est une décomposition réduite de $\mathbf{w}$ dans $(\mathbf{W}_t, \mathbf{S}_t)$ – l'élément $\mathbf{e}_{\mathbf{w}}$ ne dépend pas de la décomposition réduite de $\mathbf{w}$ choisie pour le définir. Noter que les éléments $\mathbf{e}_{\mathbf{w}}$ sont inversibles puisque les $\mathbf{e}_{\mathbf{s}_i}$ le sont (on a supposé b_s et b_q non nuls).

3.2 - Les relations de tresse

Revenons à $\mathcal{H} = \mathcal{H}\,(G_{t,k}\,,\,\omega(t,r,k))$ et raccourcissons $\Omega(t,r,k)$ en Ω.

1) *Il existe un élément e_{s_t} de $\mathcal{H}$, de support $\Omega s_t \Omega$, qui vérifie la relation quadratique $e_{s_t}^2 = a_q\, e_{s_t} + b_q\, \mathcal{I}$.*

Pour $r = t$ l'existence d'un tel élément $e_{s_t}^{(t)}$ est donnée par le lemme 7 ; les images successives de $e_{s_t}^{(t)}$ par les isomorphismes $\mathcal{E}_r$ conviennent (proposition 5).

2) *Soit $1 \leqslant i \leqslant t-1$. Il existe un élément e_{s_i} de $\mathcal{H}$, de support $\Omega s_i \Omega$, qui vérifie la relation quadratique $e_{s_i}^2 = (q_E^f - 1)\, e_{s_i} + q_E^f\, \mathcal{I}$.*

Il suffit d'exhiber un tel e_{s_i} pour $r = 2t$ (proposition 5). Il existe un élément x de $\mathcal{A}(t,t)$ de support $\Gamma(t,t)\psi_i\Gamma(t,t)$ qui vérifie la relation quadratique voulue (Proposition 2 et [BK1] 5.4.6). Son image par $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}^{+}$ convient (lemme 5 et 2.6 (b)).

3) *Il existe un élément e_{s_0} de $\mathcal{H}$, de support $\Omega s_0 \Omega$, qui vérifie la relation quadratique $e_{s_0}^2 = a_s\, e_{s_0} + b_s\, \mathcal{I}$.*

Le cas $r = 2t$ suffit ; comme dans la démonstration du lemme 6, on prend l'image de $e_{s(1,k)} \in \mathcal{H}(1,2,k)$ par le composé des homomorphismes $\mathcal{R}_j^{+}$ (ou bien on travaille avec un sous-groupe parabolique de facteur de Levi isomorphe à $GL(N,F)^{t-1} \times G_{1,k}$).

Proposition 6. *Les éléments e_{s_0}, ... , e_{s_t} de $\mathcal{H}$ définis ci-dessus vérifient les relations de tresse de 3.1. L'unique homomorphisme d'algèbres à unité de $\mathbf{H}(\mathbf{W}_t, \mathbf{S}_t)$ dans $\mathcal{H}$ envoyant $\mathbf{e}_{\mathbf{s}_i}$ sur e_{s_i} pour $0 \leqslant i \leqslant t$ envoie $\mathbf{e}_{\mathbf{w}}$, $\mathbf{w} \in \mathbf{W}_t$, sur un élément e_w de support $\Omega w \Omega$. Cet homomorphisme est injectif. Son image, la sous-algèbre $\mathcal{H}_W$ de $\mathcal{H}$ formée des éléments de support contenu dans $\Omega W_t \Omega$, admet pour base la famille des e_w, $w \in W_t$, qui sont inversibles dans $\mathcal{H}_W$.*

Démonstration. Montrons d'abord que :

$$(*) \qquad w, x \in W_t \text{ et } l(wx) = l(w) + l(x) \quad \Longrightarrow \quad E_w^{(r)} E_x^{(r)} \equiv E_{wx}^{(r)}$$

Si pour une paire (w,x), ceci est vrai pour une valeur de r, c'est vrai pour toute valeur de r (proposition 5). On se ramène – récurrence sur $l(w)$ – à démontrer

l'assertion pour $w \in S_t$. Alors, si $w = s_i$ avec $i < t$, l'assertion, pour $r = 2t$, découle du lemme 3, tandis que si $w = s_t$ et $r = t$ elle découle du lemme 4.

Admettons pour l'instant les relations de tresse et vérifions la suite de l'énoncé. Le fait que le support de e_w soit $\Omega w \Omega$ et son inversibilité sont conséquences de $(*)$ et des définitions.

Pour avoir injectivité de l'homomorphisme ainsi construit, il suffit de montrer que les doubles classes $\Omega w \Omega$, $w \in W_t$, sont disjointes. Si $k = 0$ cela provient du fait que $\Omega(t,r,0) = \Gamma(2t,r)^S \cap Sp(2tN,F)$: les doubles classes $\Gamma(2t,r)\, w\, \Gamma(2t,r)$ pour $w \in \tilde{W}(\mathfrak{B}_{2t})$ sont deux à deux disjointes (proposition 2), or W_t correspond à $\mathrm{diag}(\Gamma,\dots,\Gamma,\mathrm{T},\dots,\mathrm{T})$ près à un sous-système de $\tilde{W}(\mathfrak{B}_{2t})^S$. Dans le cas général, soient w et x deux éléments de W_t tels que $\Omega w \Omega = \Omega x \Omega$ et soient a et b dans Ω tels que $xa = bw$. Ecrivons cette égalité comme un produit de matrices 3×3 par blocs, de sorte que les éléments de $G_{t,0}$, vus dans $G_{t,k}$ via l'inclusion naturelle de 2.1.a, ont pour deuxième ligne $(0, I_{2k}, 0)$ et pour deuxième colonne ${}^t(0, I_{2k}, 0)$; il en est donc ainsi pour x et w. On obtient alors une égalité semblable dans $G_{t,0}$: $xa' = b'w$, où a' et b' s'obtiennent à partir de a et b en gardant les blocs $(1,1)$, $(1,3)$, $(3,1)$ et $(3,3)$. Comme a et b appartiennent à Ω, les éléments a' et b' appartiennent à $\Gamma(2t,r)^S$, donc $x = w$, c.q.f.d.

Reste à établir les relations de tresse. Grâce à la proposition 5, pour chaque relation on peut choisir la valeur de r la plus commode : on le fera sans plus de commentaires. Rappelons un fait très général (démonstration immédiate) ; soient x et w deux éléments de W_t de carré 1 (modulo Ω) , alors :

$$(\diamond) \quad x^{-1}\Omega x \cap \Omega w \Omega w^{-1} \subset \Omega \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} E_x E_w(xw) = \mathrm{vol}\ (\Omega)\ E_x(x)\, E_w(w) \\ E_w E_x(wx) = \mathrm{vol}\ (\Omega)\ E_w(w)\, E_x(x) \end{cases}$$

– *Relations de commutation : $e_{s_i} e_{s_j} = e_{s_j} e_{s_i}$ si $|j - i| \geqslant 2$.*

Si $1 \leqslant i, j \leqslant t-1$ la relation de commutation analogue est valide dans $\mathcal{A}(t,t)$, elle se transporte donc par $\mathcal{T}^+_{\mathcal{A}}$ si $r = 2t$ (proposition 2 et 2.6).

Si $i = 0$ et $j < t$ (donc $t \geqslant 3$) on se place dans le sous-groupe de Levi $\mathcal{M}_j$ engendré par M^0, s_0 et s_j ; ses blocs diagonaux sont $GL(N,F)$ $(t-3$ facteurs), $GL(2N,F)$ et $G_{1,k}$. Pour $r = 2t$, les éléments s_0 et s_j sont $(\mathcal{M}_j P^0, \Omega)$-positifs donc e_{s_0} et e_{s_j} sont les images par $\mathcal{T}^+_{\mathcal{M}_j}$ d'éléments qui commutent.

Si $j = t$, donc $i \leqslant t-2$, les éléments $e_{s_i} e_{s_t}$ et $e_{s_t} e_{s_i}$ ont même support $\Omega s_i s_t \Omega$ par $(*)$, il suffit de vérifier qu'ils ont même valeur en $s_i s_t$. Vu $(\diamond)$ ci-dessus, on commence par étudier l'intersection $s_i^{-1}\Omega s_i \cap \Omega s_t \Omega s_t^{-1}$. Pour cela, on utilise la décomposition de Ω par rapport à $Q_{t,k} = L_{t,k} R_{t,k}$ et on note $\Omega^- = \Omega \cap R^-_{t,k}$, $\Omega_L = \Omega \cap L_{t,k}$, $\Omega^+ = \Omega \cap R^+_{t,k}$. Comme s_i appartient à L on a

$$s_i^{-1}\Omega s_i = (s_i^{-1}\Omega^- s_i)\,(s_i^{-1}\Omega_L s_i)\,(s_i^{-1}\Omega^+ s_i).$$

D'autre part la conjugaison par s_t échange R et R^- et stabilise L, et on vérifie que $s_t \Omega^+ s_t^{-1} \subset \Omega^-$, d'où

$$\Omega s_t \Omega s_t^{-1} = \Omega^-\, \Omega_L\, (s_t \Omega^- s_t^{-1}).$$

L'intersection cherchée s'effectue donc terme à terme (dans R^-, dans L, dans R) et comme $s_i^{-1}\Omega^- s_i$ est contenu dans Ω^- si $r = 2t$, l'intersection est contenue dans Ω si $r = 2t$.

Il n'y a plus qu'à vérifier que les opérateurs d'entrelacement $e_{s_i}(s_i)$ et $e_{s_t}(s_t)$ commutent. Or soit X_γ l'espace de la représentation γ, soit X_δ celui de δ et soit

$$(\dagger) \qquad X = \bigotimes_{i=1}^{t} X_\gamma \otimes X_\delta.$$

L'opérateur $e_{s_t}(s_t)$ ne travaille que sur la première composante X_γ, tandis que $e_{s_0}(s_0)$ travaille sur la dernière et que $e_{s_i}(s_i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant t-1$ échange les composantes X_γ de rang $t-i+1$ et $t-i$: il ne touche pas à la première composante si $i < t-1$, d'où le résultat.

– *Relation* $e_{s_i} e_{s_{i+1}} e_{s_i} = e_{s_{i+1}} e_{s_i} e_{s_{i+1}}$ *si* $1 \leqslant i \leqslant t-2$.

Elle est valide dans $\mathcal{A}(t,t)$, elle se transporte donc par $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}^+$ si $r = 2t$ (proposition 2 et 2.6).

– *Relation* $e_{s_0} e_{s_1} e_{s_0} e_{s_1} = e_{s_1} e_{s_0} e_{s_1} e_{s_0}$ *si* $t \geqslant 2$.

On peut supposer $r = 2t$ puis travailler dans $G_{2,k}$: la relation se transportera ensuite par les homomorphismes $\mathcal{R}_j^+$ successifs (2.6 (a) et lemme 5). L'élément $x = s_1 s_0 s_1 = s(2,k)$ est de longueur 3 et l'on sait par $(*)$ que le support de $e_{s_1} e_{s_0} e_{s_1}$ est $\Omega x \Omega$; il s'agit donc de montrer que e_{s_0} et E_x commutent. Les produits $e_{s_0} E_x$ et $E_x e_{s_0}$ ont même support $\Omega s_0 x \Omega$ par $(*)$. Les opérateurs $e_{s_0}(s_0)$ et $E_x(x)$ commutent évidemment : comme dans la discussion suivant $(\dagger)$ on voit que le premier ne travaille que sur la deuxième composante X_γ et le second sur la première. D'après $(\diamond)$ il reste à vérifier que $x^{-1}\Omega x \cap \Omega s_0 \Omega s_0^{-1} \subset \Omega$, ce que l'on fait comme ci-dessus (cas $j = t$) en remarquant que $x^{-1}\Omega^- x \subset \Omega^+$ et $s_0 \Omega^- s_0^{-1} \subset \Omega^-$.

– *Relation* $e_{s_{t-1}} e_{s_t} e_{s_{t-1}} e_{s_t} = e_{s_t} e_{s_{t-1}} e_{s_t} e_{s_{t-1}}$ *si* $t \geqslant 2$.

Le principe est le même que précédemment : posant $w = s_t s_{t-1} s_t$ il suffit de montrer que $e_{s_{t-1}} E_w$ et $E_w e_{s_{t-1}}$ ont même valeur en $w s_{t-1}$. On travaille cette fois par rapport à $\mathcal{P} = \mathcal{M} N^0$ de facteur de Levi $\mathcal{M} \simeq GL(2N,F) \times G_{t-2,k}$ engendré par M^0, s_{t-1} et les s_i pour $i \leqslant t-3$ et de radical unipotent $\mathcal{N}$. En effet s_{t-1} appartient à $\mathcal{M}$ et

$$w = \begin{pmatrix} & & & & -{}^\tau\sigma\, {}^\tau\varpi_E^{-1} & 0 \\ & & & & 0 & -{}^\tau\sigma\, {}^\tau\varpi_E^{-1} \\ & & I_{2(t-2)N+2k} & & & \\ \sigma^{-1}\varpi_E & 0 & & & & \\ 0 & \sigma^{-1}\varpi_E & & & & \end{pmatrix}$$

normalise $\mathcal{M}$. En outre w normalise $\Omega \cap \mathcal{M}$ et vérifie $w\Omega \cap \mathcal{N} w^{-1} \subset \Omega \cap \mathcal{N}^-$. L'intersection $s_{t-1}^{-1}\Omega s_{t-1} \cap \Omega w \Omega w^{-1}$ s'effectue donc terme à terme : dans $\mathcal{N}^-$, dans $\mathcal{M}$, dans $\mathcal{N}$; comme $s_{t-1}^{-1}\Omega \cap \mathcal{N} s_{t-1}$ est contenu dans $\Omega \cap \mathcal{N}$ si $r = 2t$, l'intersection est contenue dans Ω si $r = 2t$. Enfin, les opérateurs $e_{s_{t-1}}(s_{t-1})$ et

$E_w(w)$ commutent : tous deux ne travaillent que sur les deux premières composantes X_γ de X, $e_{s_{t-1}}(s_{t-1})$ par $v_1 \otimes v_2 \mapsto v_2 \otimes v_1$ et $E_w(w)$ par $v_1 \otimes v_2 \mapsto \Phi(v_2) \otimes \Phi(v_1)$, où Φ entrelace γ et $(\gamma^{\sigma^{-1}\varpi_E})^*$. □

3.3 - Présentation de Bernstein

La proposition 6 décrit entièrement la sous-algèbre $\mathcal{H}_W$ de $\mathcal{H}$ formée des éléments de support contenu dans $\Omega W_t \Omega$. Pour pouvoir montrer que cette sous-algèbre est en fait $\mathcal{H}$ tout entière il nous faut une hypothèse supplémentaire (voir la proposition 3) :

Hypothèse (H4). *La représentation induite $\rho = \mathrm{Ind}_{\Delta}^{Sp(2k,F)}\delta$ est irréductible (donc supercuspidale).*

Noter qu'alors, si π est une représentation irréductible supercuspidale autoduale de $GL(N,F)$ contenant le type simple maximal (Γ,γ), la paire $(\Gamma^{\times t} \times \Delta, \gamma^{\otimes t} \otimes \delta)$ est un type pour la classe d'inertie de la représentation supercuspidale irréductible $\pi^{\otimes t} \otimes \rho$ de $GL(N,F)^t \times Sp(2k,F) \simeq M^0_{t,k} = M^0$. Comme (Ω,ω) est une paire couvrante de la précédente, la paire (Ω,ω) est elle-même un type pour la classe d'inertie $[M^0, \pi^{\otimes t} \otimes \rho]_G$ dans $G = G_{t,k}$ ([BK2], théorème 8.3).

Puisque la représentation π est autoduale, le normalisateur $N_G(M^0)$ de M^0 dans G fixe la classe d'équivalence de $\pi^{\otimes t} \otimes \rho$ donc aussi la classe d'inertie $[M^0, \pi^{\otimes t} \otimes \rho]_{M^0}$. Le quotient $\mathbf{W}^0_t = N_G(M^0)/M^0$ a été décrit en 2.3. L'hypothèse (H4) nous permet d'utiliser :

Théorème (Bushnell-Kutzko [BK3]**).** *Soit K un sous-groupe compact de G contenant Ω. On définit un homomorphisme (d'espaces vectoriels) injectif par*

$$(\star) \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{H}(M^0, \gamma^{\otimes t} \otimes \delta) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{H}(K,\omega) & \xrightarrow{\mathcal{T}} & \mathcal{H}(G_{t,k},\omega) \\ \varphi \otimes f & \longmapsto & \mathbb{T}^+_{M^0}(\varphi) \star f \end{array}$$

La dimension de $\mathcal{H}(K,\omega)$ est au plus égale au cardinal de $\mathbf{W}^0_t$; s'il y a égalité, l'homomorphisme $\mathcal{T}$ est un isomorphisme.

Ce théorème va nous fournir la surjectivité de l'homomorphisme de la proposition 6 : il suffit de montrer que $\mathbb{T}^+_{M^0}\left(\mathcal{H}(M^0, \gamma^{\otimes t} \otimes \delta)\right)$ est contenue dans la sous-algèbre $\mathcal{H}_W$ de $\mathcal{H}$, puis de trouver un sous-groupe K tel que $\mathcal{H}(K,\omega)$ soit contenue dans $\mathcal{H}_W$ et de dimension $|W^0_t|$.

Le premier point est facile, puisque $\mathbb{T}^+_{M^0}$ est l'unique prolongement de

$$\mathcal{T}^+_{M^0} \ : \ \mathcal{H}(M^0, \gamma^{\otimes t} \otimes \delta)^+ \underset{\text{alg}}{\hookrightarrow} \mathcal{H}(G,\omega)$$

en un homomorphisme d'algèbres $\mathcal{H}(M^0, \gamma^{\otimes t} \otimes \delta) \underset{\text{alg}}{\hookrightarrow} \mathcal{H}(G,\omega)$ (1.1). Son image est engendrée par celle de $\mathcal{T}^+_{M^0}$ et par l'inverse d'un élément de support $\Omega z \Omega$ où z est un élément fortement positif du centre de M^0 (voir [BK2]). Or l'image de $\mathcal{T}^+_{M^0}$ est engendrée comme espace vectoriel par des éléments de support $\Omega x \Omega$ où

x appartient à M^0 et entrelace $\gamma^{\otimes t} \otimes \delta$: un tel x appartient à W_t (Proposition 3) donc ces éléments appartiennent à $\mathcal{H}_W$ et y sont inversibles, c.q.f.d.

Passons au choix de K. Le sous-groupe Γ fixe la chaîne de réseaux $(L_{0,i})_{i\in\mathbb{Z}}$ de F^N associée à l'ordre $\mathfrak{A}_0$ (1.2) ; comme on a supposé $\mathfrak{A}_0$ standard (2.1.c), on peut renuméroter la chaîne de façon que $L_{0,0} = M_{N,1}(\mathfrak{o}_F)$. La chaîne de réseaux de F^{tN} associée à l'ordre $\mathfrak{A}_t$ (1.2) contient donc $M_{tN,1}(\mathfrak{o}_F) = L_0(t)$.

L'espace symplectique ambiant $V(t,k)$ (2.1.a) est somme directe orthogonale de $V_{-t} \oplus V_t$ et de V_0. Pour tout réseau Λ de V_0, la somme $L_0(t) \oplus \Lambda \oplus L_0(t)$ est un réseau de $V(t,k)$ (le premier $L_0(t)$ est plongé dans V_{-t}, le second dans V_t). Fixons alors le réseau $\Lambda = \alpha\, {}^{\tau}\Delta^+ L_0(1)$. On vérifie aisément (à l'aide de l'hypothèse (H1), donc des propriétés de 3.4) que pour tout $t \geqslant 1$ et tout $r \geqslant t$, le réseau somme $L_0(t) \oplus \Lambda \oplus L_0(t)$ est fixé par $\Omega(t,r,k)$. Or ce réseau est aussi fixé par les éléments s_i pour $0 \leqslant i \leqslant t-1$.

Soit alors K le fixateur dans $G_{t,k}$ du réseau $L_0(t)\oplus\Lambda\oplus L_0(t)$: il est compact et contient W_t^0 et $\Omega(t,r,k)$. L'algèbre $\mathcal{H}(K,\omega)$ est de dimension au plus égale à $|W_t^0|$ par le théorème de Bushnell-Kutzko, au moins égale à $|W_t^0|$ par la proposition 6. On a donc égalité et $\mathcal{H}(K,\omega)$ est contenue dans $\mathcal{H}_W$.

Nous venons de montrer :

Théorème 2. *Sous les hypothèses* (H1) *à* (H4), *l'homomorphisme d'algèbres de la proposition 6 est un isomorphisme. En d'autres termes, l'algèbre de Hecke* $\mathcal{H}(G_{t,k},\omega(t,r,k))$ *relative à la paire couvrante* $(\Omega(t,r,k),\omega(t,r,k))$ *du théorème 1 est une algèbre de convolution sur* $(\mathbf{W}_t,\mathbf{S}_t)$, *de paramètres* $(a_{\mathbf{s}_0},b_{\mathbf{s}_0}) = (a_s,b_s)$, $(a_{\mathbf{s}_i},b_{\mathbf{s}_i}) = (q_E^f-1,q_E^f)$ *pour* $1 \leqslant i \leqslant t-1$ *et* $(a_{\mathbf{s}_t},b_{\mathbf{s}_t}) = (a_q,b_q)$.

Remarque. Les théorèmes 1 et 2 sont valides pour $t = 1$: sous les hypothèses (H1) à (H3) les paires $(\Omega(1,1,k),\omega(1,1,k))$ et $(\Omega(1,2,k),\omega(1,2,k))$ sont couvrantes, et moyennant (H4) leur algèbre de Hecke est une algèbre de convolution sur $(\mathbf{W}_1,\mathbf{S}_1)$, comme on pouvait s'y attendre.

Corollaire 4. *La structure de l'algèbre* $\mathcal{H}(G_{t,k},\omega(t,r,k))$ *est entièrement déterminée par les paramètres* q_E^f, *attaché à* (Γ,γ), *et* a_s,b_s,a_q,b_q, *attachés à la paire couvrante "de hauteur* 1*"* $(\Omega(1,1,k),\omega(1,1,k))$ *(ou* $(\Omega(1,2,k),\omega(1,2,k))$*) dans* $Sp(2N+2k,F)$.

3.4 - Quelques exemples

3.4.a. *Le cas de* $Sp(4,F)$.

On trouve dans [BB] la liste des paires couvrantes dans $Sp(4,F)$ correspondant
- aux classes d'inertie $[GL(2,F),\pi]_{Sp(4,F)}$ des représentations supercuspidales autoduales π du sous-groupe de Levi de Siegel $GL(2,F)$ (soit $N=2$ et $k=0$);
- aux classes d'inertie $[F^\times \times SL(2,F),\chi\otimes\rho]_{Sp(4,F)}$ des produits tensoriels d'un caractère χ de $F^\times$ de carré non ramifié par une représentation supercuspidale ρ de $SL(2,F)$ (soit $N=1$ et $k=1$) ;

ainsi que les paramètres des algèbres de Hecke associées.

Ces paires couvrantes vérifient les hypothèses (H1) à (H4) (c'est immédiat dans le cas $N = 1$; pour $N = 2$ la vérification est plus facile dans les notations de 3.4.b ci-dessous), les théorèmes 1 et 2 fournissent donc des paires couvrantes
– attachées aux classes d'inertie $[GL(2,F)^{\times t}, \pi^{\otimes t}]_{Sp(4t,F)}$ dans $Sp(4t,F)$;
– attachées aux classes d'inertie $[GL(1,F)^{\times t} \times Sp(2,F), \chi^{\otimes t} \otimes \rho]_{Sp(2t+2,F)}$ dans $Sp(2t+2,F)$;
ainsi que la structure des algèbres de Hecke associées.

3.4.b. *Le cas de $Sp(2tN,F)$.*

Un résultat essentiel de [BL3] est précisément que les groupes

$$\Omega(1,1,0) = \begin{pmatrix} \Gamma & \varpi_E^{-1}\mathfrak{H}^1\sigma \\ \sigma^{-1}\mathfrak{J}^0\varpi_E & {}^\tau\Gamma \end{pmatrix} \cap Sp(2N,F)$$

$$\text{et} \quad \Omega(1,2,0) = \begin{pmatrix} \Gamma & \mathfrak{J}^0\sigma \\ \sigma^{-1}\mathfrak{H}^1 & {}^\tau\Gamma \end{pmatrix} \cap Sp(2N,F)$$

portent des paires couvrantes de (Γ,γ) relativement au parabolique de Siegel. Les hypothèses (H2) et (H3) sont vérifiées (*loc. cit.* §3.3). Le théorème 1 s'applique donc pour fournir des paires couvrantes dans $Sp(2tN,F)$ attachées aux classes d'inertie $[GL(N,F)^{\times t}, \pi^{\otimes t}]_{Sp(2Nt,F)}$, où π est une représentation supercuspidale autoduale de $GL(N,F)$. La structure des algèbres de Hecke correspondantes est décrite par le théorème 2, mais cette fois les paramètres (a_s,b_s) et (a_q,b_q) du cas $t = 1$ ne sont pas connus.

3.4.c. *Un exemple dans $Sp(2tN+N,F)$.*

Pour ce dernier exemple on fait toutes les hypothèses simplificatrices voulues et on ne donne pas le détail des démonstrations. On part du contexte de 2.1.c en supposant que $[E:F] = N$, que N est au moins égal à 2 (donc pair), que $n_0 > 0$ et que l'élément σ vérifie $\sigma\,{}^\tau\sigma^{-1} = -I_N$. On peut alors définir sur $V_0 \simeq F^N$ une structure symplectique de matrice $w_N\sigma^{-1}$ (i.e. on prend $\alpha = \sigma$ dans les notations de 2.1.a).

Pour cette structure, la strate simple $[\mathfrak{A}_0, n_0, 0, \beta]$ dans $M_N(F)$ (1.2) est gauche, ainsi que $[\mathfrak{A}_0, n_0, 0, \frac{1}{2}\beta]$, et les caractères simples θ_0 et $\theta_0^{\frac{1}{2}}$ ([BL3] lemme 4.3.1) sont gauches. Pour tout sous-groupe H de $GL(N,F)$, notons $\bar{H}$ son intersection avec $Sp(N,F)$ (relativement à la structure ci-dessus). Soit $\eta_0^{\frac{1}{2}}$ l'unique représentation irréductible de $\bar{J}^1(\beta,\mathfrak{A}_0)$ qui contient la restriction à $\bar{H}^1(\beta,\mathfrak{A}_0)$ de $\theta_0^{\frac{1}{2}}$. D'après [ST], Théorème 5.2, pour tout prolongement δ de $\eta_0^{\frac{1}{2}}$ à $\bar{J}(\beta,\mathfrak{A}_0) = \bar{\Gamma}$, la représentation $\rho = \mathrm{Ind}_{\bar{\Gamma}}^{Sp(N,F)}\delta$ est supercuspidale irréductible : c'est (H4).

On peut montrer que les groupes

$$\Omega(1,1,N) = \begin{pmatrix} \Gamma & \mathfrak{J}^0 & \varpi_E^{-1}\mathfrak{H}^1\sigma \\ \mathfrak{H}^1 & \bar{\Gamma} & \mathfrak{J}^0\sigma \\ \sigma^{-1}\mathfrak{J}^0\varpi_E & \sigma^{-1}\mathfrak{H}^1 & {}^\tau\Gamma \end{pmatrix} \cap G_{1,N}$$

$$\text{et} \quad \Omega(1,2,N) = \begin{pmatrix} \Gamma & \mathfrak{J}^0 & \mathfrak{J}^0\sigma \\ \mathfrak{H}^1 & \bar{\Gamma} & \mathfrak{J}^0\sigma \\ \sigma^{-1}\mathfrak{H}^1 & \sigma^{-1}\mathfrak{H}^1 & {}^{\tau}\Gamma \end{pmatrix} \cap G_{1,N}$$

portent des paires décomposées au-dessus de $(\iota(\Gamma)\times\bar{\Gamma}, \gamma\otimes\delta)$ relativement à $P_{1,k}$, l'hypothèse (H1) est donc vérifiée (on a $\sigma\,{}^{\tau}\mathfrak{J}^0 = \mathfrak{J}^0\sigma$ et ${}^{\tau}\mathfrak{H}^1\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\mathfrak{H}^1$, cf 2.1.c). Pour établir (H2) et (H3) on utilise le raisonnement de [BL3] §3.3, grandement facilité par l'hypothèse $[E:F] = N$. Les théorèmes 1 et 2 fournissent cette fois des paires couvrantes dans $Sp((2t+1)N, F)$ attachées aux classes d'inertie $[GL(N,F)^{\times t} \times Sp(N,F), \pi^{\otimes t}\otimes\rho]_{Sp((2t+1)N,F)}$, où π est une représentation supercuspidale autoduale de $GL(N,F)$ contenant (Γ,γ), et la description de leur algèbre de Hecke, moyennant les paramètres inconnus du cas $t=1$.

Appendice - Démonstration de la proposition 1

Ce paragraphe est technique et s'appuie fortement sur [BK1] §7.1. On y utilise donc les hypothèses et notations 7.1.11, 7.1.13 et 7.2.1 de *loc. cit.*.

On s'intéresse aux sous-anneaux A' et A'' de $A = \mathrm{End}_F(V)$ définis par $A' = \mathrm{End}_F(V')$ et $A'' = \mathrm{End}_F(V'')$, avec

$$V' = V^{(1)} \oplus \cdots \oplus V^{(t-1)} \quad \text{et} \quad V'' = V^{(t-1)} \oplus V^{(t)}.$$

On définit $M' = M \cap A'$, $\mathbb{N}' = \mathbb{N} \cap A'$ et de même pour M'', $\mathbb{N}''$, $\mathbb{N}'^{-}$ et $\mathbb{N}''^{-}$. On pose $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \cap A'$, $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{A} \cap A''$, et on note $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{P}''$ les radicaux respectifs de $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{A}''$. On note enfin B, B', B'' les commutants de β dans A, A', A'' respectivement, et $\mathfrak{B}' = B' \cap \mathfrak{A} = A' \cap \mathfrak{B}$, etc.

Les ordres $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{A}''$ sont des ordres héréditaires dans A' et A'', attachés respectivement aux suites de réseaux $(L_k \cap V')_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(L_k \cap V'')_{k\in\mathbb{Z}}$ ([BK1] 7.1.6). Il est facile d'écrire ces suites sous forme de chaînes : on a $\mathfrak{A}' = \mathrm{End}^0_{\mathfrak{o}_F}(\{L'_i, i\in\mathbb{Z}\})$ et $\mathfrak{A}'' = \mathrm{End}^0_{\mathfrak{o}_F}(\{L''_i, i\in\mathbb{Z}\})$, où l'on a défini, pour tout entier $k = \alpha + \beta t$, $0 \leqslant \alpha \leqslant t-1$, $\beta \in \mathbb{Z}$:

$$L'_{\phi(k)} = L_k \cap V' \quad \text{avec} \quad \phi(k) = \alpha + \beta(t-1) = [\frac{(t-1)(k+1)}{t}]$$
$$L''_{\psi(k)} = L_k \cap V'' \quad \text{avec} \quad \psi(\alpha+\beta t) = \begin{cases} 2\beta & \text{si } 0 \leqslant \alpha \leqslant t-2 \\ 2\beta+1 & \text{si } \alpha = t-1 \end{cases}$$

La fonction ϕ vérifie : $\phi(k) + \phi(m) - 1 \leqslant \phi(k+m) \leqslant \phi(k) + \phi(m)$ $(k, m \in \mathbb{Z})$. Il en découle immédiatement que

$$(\star) \qquad \mathfrak{P}'^{\,\phi(m)} \;\subset\; \mathfrak{P}^{\,m} \cap A' \;\subset\; \mathfrak{P}'^{\,\phi(m)-1} \quad \text{pour tout } m \in \mathbb{Z}.$$

Le cas de ψ est plus compliqué, mais il nous suffira d'avoir :

Lemme A1. *Supposons $t \geqslant 3$. Pour tout entier positif i, on a les inclusions suivantes :*

si t est impair :

(a) $$\mathfrak{P}'^{\,[\frac{(t-1)i}{2}]+1} \subset \mathfrak{P}^{\,[\frac{ti}{2}]+1} \quad et \quad \mathfrak{P}'^{\,[\frac{(t-1)i+1}{2}]} \cap \mathbb{N}' \subset \mathfrak{P}^{\,[\frac{ti+1}{2}]}$$

si t est pair :

(b) $$\mathfrak{P}'^{\,[\frac{(t-1)i+1}{2}]} \subset \mathfrak{P}^{\,[\frac{ti+1}{2}]} \quad et \quad \mathfrak{P}'^{\,[\frac{(t-1)i}{2}]+1} \cap \mathbb{N}' \subset \mathfrak{P}^{\,[\frac{ti}{2}]+1}$$

dans les deux cas :

(c) $$\mathfrak{P}''^{\,[\frac{2i}{2}]+1} \subset \mathfrak{P}^{\,[\frac{ti}{2}]+1} \quad et \quad \mathfrak{P}''^{\,[\frac{2i+1}{2}]} \cap \mathbb{N}'' \subset \mathfrak{P}^{\,[\frac{ti+1}{2}]}$$

Démonstration. On a dans tous les cas :
$\phi([\frac{ti}{2}]+1) \geqslant [\frac{(t-1)i}{2}]+1$, avec égalité si t est impair ou si i est pair, et
$\phi([\frac{ti+1}{2}]) \geqslant [\frac{(t-1)i+1}{2}]$, avec égalité si t est pair ou si i est pair.
Les inclusions de gauche dans (a) et (b) en découlent immédiatement via $(\star)$, de même que les inclusions de droite si i est pair.

Supposons alors $i = 2a+1$ impair ; l'inclusion de droite de (a) équivaut à :

$$\textit{pour tout } x \in \mathfrak{P}'^{(t-1)a+\frac{t-1}{2}} \cap \mathbb{N}' \textit{ et tout } k \in \mathbb{Z} \ : \ xL_k \subset L_{k+ta+\frac{t+1}{2}}$$

Ecrivons $k = \alpha + \beta t$ avec $\beta \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant \alpha \leqslant t-1$. On a $xL_k = xL'_{\phi(k)}$, donc :

$$(*) \qquad xL_k \subset L'_{\phi(k)+(t-1)a+\frac{t-1}{2}}$$

On a toujours :

$$\phi(k) + (t-1)a + \tfrac{t-1}{2} \leqslant \phi(k+ta+\tfrac{t+1}{2}) \leqslant \phi(k) + (t-1)a + \tfrac{t+1}{2}$$

avec égalité à gauche si $\alpha + \frac{t+1}{2} \geqslant t$, à droite sinon. Dans le premier cas la propriété voulue découle de $(*)$. Dans le second c'est l'hypothèse supplémentaire $x \in \mathbb{N}'$ qui va nous permettre de gagner un cran. Soit donc $\alpha < \frac{t-1}{2}$; on a $L_k = L_{k+1} + L_k \cap V^{(\alpha+1)}$ d'où $xL_k = xL_{k+1} + x(L_k \cap V^{(\alpha+1)})$. On examine séparément les deux termes :

- $\phi(k+ta+\frac{t+1}{2}) = \phi(k+1) + (t-1)a + \frac{t-1}{2}$ donc $xL_{k+1} \subset L_{k+ta+\frac{t+1}{2}}$.
- $x(L_k \cap V^{(\alpha+1)})$ est contenu dans $L_{k+at+\frac{t-1}{2}} \cap (V^{(1)} \oplus \cdots \oplus V^{(\alpha)})$, qui coïncide avec $L_{k+at+\frac{t+1}{2}} \cap (V^{(1)} \oplus \cdots \oplus V^{(\alpha)})$ car les deux réseaux ne diffèrent qu'en $V^{(\alpha+\frac{t+1}{2})}$, c.q.f.d.

Le raisonnement est semblable pour l'inclusion de droite de (b).

Passons à (c). L'inclusion de gauche s'obtient en vérifiant qu'on a pour tout i : $\psi(k+[\frac{ti}{2}]+1) \leqslant \psi(k)+i+1$. Pour l'inclusion de droite, il s'agit de montrer que

$$\textit{pour tout } x \in \mathfrak{P}''^{i} \cap \mathbb{N}'' \textit{ et tout } k \in \mathbb{Z} \ : \ xL_k \subset L_{k+[\frac{ti+1}{2}]}$$

Comme $xL_k = xL''_{\psi(k)} \subset L''_{\psi(k)+i}$, la propriété voulue est certainement vraie pour tout k tel que $\psi(k)+i \geqslant \psi(k+[\frac{ti+1}{2}])$. Cette dernière (in-)égalité est valide pour tout k lorsque i est pair. Si $i = 2a+1$ est impair, on écrit $k = \alpha + \beta t$ avec $\beta \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant \alpha \leqslant t-1$; l'inégalité est valide si $\alpha = t-1$ ou $\alpha < [\frac{t}{2}]$. Ne reste à examiner que les cas $[\frac{t}{2}] \leqslant \alpha \leqslant t-2$: $\psi(k)$ est alors *pair,* et nous pouvons enfin faire intervenir l'hypothèse $x \in \mathbb{N}''$. En effet :

$$xL_k = xL''_{\psi(k)} \subset L''_{\psi(k)+2a+1} \cap V^{(t-1)} = L''_{\psi(k)+2a+2} \cap V^{(t-1)}$$

car les deux réseaux ne diffèrent qu'en $V^{(t)}$. Il suffit donc dans ce dernier cas de vérifier l'inégalité $\psi(k)+i+1 \geqslant \psi(k+[\frac{ti+1}{2}])$, ce qui est aisé. □

Lemme A2. *Supposons $t \geqslant 3$. On a les inclusions suivantes :*

si t est impair :

(a) $$\mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A}') \subset \mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A}) \quad et \quad \mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A}') \cap \mathbb{N}' \subset \mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A})$$

si t est pair :

(b) $$\mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A}') \subset \mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A}) \quad et \quad \mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A}') \cap \mathbb{N}' \subset \mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A})$$

dans les deux cas :

(c) $$\mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A}'') \subset \mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A}) \quad et \quad \mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A}'') \cap \mathbb{N}'' \subset \mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A})$$

Démonstration. Par définition, on a $\mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A}) = \mathfrak{H}(\beta,\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{P}$ et des égalités analogues dans $\mathfrak{A}'$ et $\mathfrak{A}''$. Comme $\mathfrak{P}'$ et $\mathfrak{P}''$ sont contenus dans $\mathfrak{P}$ il suffit d'établir les inclusions annoncées en remplaçant partout $\mathfrak{H}^1$ par $\mathfrak{H}$.

Rappelons que la strate sous-jacente à tout ceci est la strate simple $[\mathfrak{A}, tn_0, 0, \beta]$ et commençons par le cas où β est minimal. Alors $\mathfrak{H}(\beta,\mathfrak{A}) = \mathfrak{B} + \mathfrak{P}^{[\frac{tn_0}{2}]+1}$, $\mathfrak{H}(\beta,\mathfrak{A}') = \mathfrak{B}' + \mathfrak{P}'^{[\frac{(t-1)n_0}{2}]+1}$ et $\mathfrak{H}(\beta,\mathfrak{A}'') = \mathfrak{B}'' + \mathfrak{P}''^{[\frac{2n_0}{2}]+1}$. Mais $\mathfrak{B}'$ et $\mathfrak{B}''$ sont contenus dans $\mathfrak{B}$ donc les inclusions voulues sont des conséquences immédiates du lemme A1.

Passons maintenant à un élément β quelconque. On raisonne par "induction le long de β" comme dans [BK1], 7.1.12 : on choisit γ comme dans *loc. cit.* et on suppose les assertions vraies pour γ. En posant $r = -k_0(\beta,\mathfrak{A}_0)$, on a par définition :

$$\mathfrak{H}(\beta,\mathfrak{A}') = \mathfrak{B}' + \mathfrak{H}(\gamma,\mathfrak{A}') \cap \mathfrak{P}'^{[\frac{(t-1)r}{2}]+1}$$

$$\mathfrak{H}(\beta,\mathfrak{A}'') = \mathfrak{B}'' + \mathfrak{H}(\gamma,\mathfrak{A}'') \cap \mathfrak{P}''^{[\frac{2r}{2}]+1}$$

$$\mathfrak{H}(\beta,\mathfrak{A}) = \mathfrak{B} + \mathfrak{H}(\gamma,\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{P}^{[\frac{tr}{2}]+1}.$$

Les inclusions voulues découlent donc de l'hypothèse sur γ et du lemme A1.

La démonstration est la même pour $\mathfrak{J}$, en remplaçant partout les expressions $[\frac{in_0}{2}]+1$ par des $[\frac{in_0+1}{2}]$. □

Proposition A1. *Supposons $t \geqslant 3$. On a les égalités suivantes :*

si t est impair :

(a) $\mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A}') \cap \mathbb{N}'^- = \mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A}) \cap \mathbb{N}'^-$ *et* $\mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A}') \cap \mathbb{N}' = \mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A}) \cap \mathbb{N}'$

si t est pair :

(b) $\mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A}') \cap \mathbb{N}'^- = \mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A}) \cap \mathbb{N}'^-$ *et* $\mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A}') \cap \mathbb{N}' = \mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A}) \cap \mathbb{N}'$

dans les deux cas :

(c) $\mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A}'') \cap \mathbb{N}''^- = \mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A}) \cap \mathbb{N}''^-$ *et* $\mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A}'') \cap \mathbb{N}'' = \mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A}) \cap \mathbb{N}''$

Démonstration. Le lemme A2 donne dans chaque cas l'inclusion du membre de gauche dans le membre de droite. L'égalité va résulter d'un argument de maximalité des paires couvrantes que l'on ne détaille que dans le cas (b), t pair.

Les résultats de [BK1] (7.3.2, 7.2.17 et 7.1.17) affirment que le produit

$$(H^1(\beta,\mathfrak{A}) \cap (1+\mathbb{N})).(J(\beta,\mathfrak{A}) \cap M).(J^1(\beta,\mathfrak{A}) \cap (1+\mathbb{N}^-))$$

porte une paire couvrante de $(\Gamma^{\times t}, \gamma^{\otimes t})$ relativement à $M(1+\mathbb{N})$. Par transitivité (voir 1.1) on en déduit que le produit

$$(H^1(\beta,\mathfrak{A}) \cap (1+\mathbb{N}')).(J(\beta,\mathfrak{A}) \cap M').(J^1(\beta,\mathfrak{A}) \cap (1+\mathbb{N}'^-))$$

porte une paire décomposée au-dessus de $(\Gamma^{\times t-1}, \gamma^{\otimes t-1})$ relativement à $M'(1+\mathbb{N}')$. Or ce produit contient terme à terme, par le lemme A2, le produit "d'origine"

$$(H^1(\beta,\mathfrak{A}') \cap (1+\mathbb{N}')).(J(\beta,\mathfrak{A}') \cap M').(J^1(\beta,\mathfrak{A}') \cap (1+\mathbb{N}'^-))$$

qui porte lui-même une paire couvrante de $(\Gamma^{\times t-1}, \gamma^{\otimes t-1})$ relativement à $M'(1+\mathbb{N}')$.

Comme une paire couvrante est en particulier une paire décomposée maximale ([BL2] théorème 1), on doit avoir égalité terme à terme des facteurs. □

Démonstration de la proposition 1. On la prouve par récurrence sur t, en utilisant la décomposition $V = \bigoplus_{j=1}^{t} V^{(j)}$ et l'ordre $\mathfrak{A}$ du paragraphe 1.2. Le cas $t = 1$ est tautologique et le cas $t = 2$ est traité dans [BL3], lemme 2.2. Supposons donc la proposition démontrée à l'ordre $t-1$ avec $t \geqslant 3$. On sait déjà ([BK1], 7.1.12) que les blocs diagonaux de $\mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A})$ et $\mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A})$ sont égaux à $\mathfrak{H}^1$ et $\mathfrak{J}^1$ respectivement. Pour le reste, les deux ingrédients de la preuve sont la proposition A1 bien sûr, et le corollaire 3.1.11 de [BK1], qui assure que $\mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A})$ et $\mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A})$ sont normalisés par

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & I_N & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & I_N \\ \varpi_E & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Si t est pair, on a $\mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A})\cap\mathbb{N}'=\mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A}')\cap\mathbb{N}'$ par la proposition A1. Cela permet, grâce à l'hypothèse de récurrence, de déterminer les blocs (i,j) avec $i>j>1$ de $\mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A})$. La normalisation par Π fournit ensuite les blocs (i,j) manquants, à l'exception de ceux pour lesquels $j=i+1$ (modulo t). Il reste à déterminer un des blocs de cette orbite manquante sous Π : c'est la proposition A1, (c) qui nous fournit le bloc $(1,2)$.

La détermination de $\mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A})$ se fait de manière semblable, ainsi que le cas où t est impair (pour lequel on peut facilement montrer a priori que $\mathfrak{H}^1(\beta,\mathfrak{A})$ et $\mathfrak{J}^1(\beta,\mathfrak{A})$ ne diffèrent que par leurs blocs diagonaux). □

Références

[BB] L. BLASCO et C. BLONDEL, 'Algèbres de Hecke et séries principales généralisées de $Sp_4(F)$', *Proc. London Math. Soc.* (3) 85 (2002) 659–685.

[BL1] C. BLONDEL, 'Critère d'injectivité pour l'application de Jacquet', *C. R. Acad. Sci. Paris* (325) I (1997), 1149–1152.

[BL2] C. BLONDEL, 'Quelques propriétés des paires couvrantes', *Math. Annalen* DOI: 10.1007/s00208-004-0579-1.

[BL3] C. BLONDEL, ' $Sp(2N)$-covers for self-contragredient supercuspidals of $GL(N)$', *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.* 37 (2004), 533–558.

[BO] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6,* (Masson, 1981).

[BU] C. J. BUSHNELL, 'Hereditary orders, Gauss sums and supercuspidal representations of GL_N', *J. reine angew. Math.* 375/376 (1987), 184–210.

[BK1] C. J. BUSHNELL and P. C. KUTZKO, *The admissible dual of GL_n via compact open subgroups,* Annals of Math. Studies 129 (Princeton University Press, 1993).

[BK2] C.J. BUSHNELL and P.C. KUTZKO, 'Smooth representations of reductive p-adic groups: structure theory via types', *Proc. London Math. Soc.* 77 (1998), 582–634.

[BK3] C.J. BUSHNELL and P.C. KUTZKO, 'Types in reductive p-adic groups: the Hecke algebra of a cover', *Proc. Amer. Math. Soc.* (2) 129 (2001) 601–607.

[GO] D. GOLDBERG, 'Reducibility of induced representations for $Sp(2N)$ and $SO(N)$', *Amer. J. of Math.* 116 (1994), 1101–1151.

[ST] P. J. SALLY JR. and M. TADIĆ, 'Induced representations and classifications for $GSp(2,F)$ and $Sp(2,F)$', Mémoire SMF 52, supplément au *Bull. Soc. Math. de France* 121 (1993) 75–133.

[ST] S. STEVENS, 'Intertwining and supercuspidal types for p-adic classical groups', *Proc. London Math. Soc.* 83 (2001), 120–140.

[TA] M. TADIĆ, 'Square integrable representations of classical p-adic groups corresponding to segments', *Repr. Theory* 3 (1999), 58–89.

[WA] J.-L. WALDSPURGER, 'Algèbres de Hecke et induites de représentations cuspidales, pour $GL(N)$ ' , *J. reine angew. Math.* 370 (1986), 127–191.