Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

THÉORIE DES GROUPES (THÉORIE DES NOMBRES). — *Sur des représentations supercuspidales exceptionnelles de groupes métaplectiques locaux.* Note de **Corinne Blondel**, présentée par Hervé Jacquet.

Soit F un corps local non archimédien; soient q le cardinal de son corps résiduel k, et n un diviseur de $q-1$. On construit certaines représentations supercuspidales irréductibles spécifiques du groupe métaplectique d'ordre n sur $GL_r(F)$ à partir des représentations cuspidales du groupe fini $GL_r(k)$. On calcule la dimension de leur espace de Whittaker et on caractérise les cas où elle vaut 1. Quand n égale r, on obtient des représentations supercuspidales irréductibles spécifiques du groupe métaplectique ayant unique modèle de Whittaker.

GROUP THEORY (NUMBER THEORY). — On some exceptional supercuspidal representations of metaplectic groups.

Let F *be a local non archimedean field; let q be the order of its residual field k, and n be a divisor of* $q-1$. *We build some genuine irreducible supercuspidal representations of the n-fold metaplectic group over* $GL_r(F)$ *starting from the cuspidal representations of the finite group* $GL_r(k)$. *We compute the dimension of their Whittaker space and characterize the cases when this dimension is* 1. *When n is equal to r, we obtain genuine irreducible supercuspidal representations of the metaplectic group with unique Whittaker model.*

1. Soit F un corps local non archimédien; on note $\mathcal{O}$ son anneau d'entiers, $\mathfrak{p}$ son idéal premier, k son corps résiduel, de cardinal q. Soit $n \geqq 1$ un entier premier à q tel que le groupe $\mu_n(F)$ des racines n-ièmes de l'unité dans F ait pour cardinal n. Soit $r \geqq 2$ un entier et $G = GL_r(F)$. On notera $\tilde{G}$ l'extension centrale $\tilde{G}^{(c)}$ de G par $\mu_n(F)$ décrite dans [3] :

$$1 \to \mu_n(F) \xrightarrow{i} \tilde{G} \underset{\underset{s}{\curvearrowleft}}{\xrightarrow{p}} G \to 1$$

(les notations sont celles de [3] et s est une section fixée).

L'hypothèse n premier à q permet d'identifier de façon canonique [3] le sous-groupe compact maximal standard $K = GL_r(\mathcal{O})$ de G à un sous-groupe de $\tilde{G}$ noté encore K. On va montrer ici comment les représentations de K provenant de représentations cuspidales irréductibles de $GL_r(k)$ via l'isomorphisme $K/I + M_r(\mathfrak{p}) \simeq GL_r(k)$ permettent de construire des représentations supercuspidales irréductibles spécifiques de $\tilde{G}$ [où *spécifique* signifie toujours que la composée avec i est un isomorphisme de $\mu_n(F)$ sur $\mu_n(\mathbf{C})$].

2. Soit k_r une extension de degré r de k. Le groupe de Galois Σ de k_r sur k agit sur le groupe des caractères de $k_r^\times$ par $\theta^\sigma(x) = \theta(x^\sigma)$ (θ caractère de $k_r^\times$, $x \in k_r^\times$, $\sigma \in \Sigma$). Les caractères *réguliers* de $k_r^\times$ sont ceux dont le fixateur dans Σ est réduit à l'identité. Les représentations cuspidales irréductibles de $GL_r(k)$ s'obtiennent de la manière suivante (*voir* [5], théorème 7-12 et [2], théorèmes 4 à 8) :

THÉORÈME. — *A tout caractère régulier* θ *de* $k_r^\times$ *correspond un caractère irréductible* $\tau(\theta)$ *de* $GL_r(k)$, *de degré* $(q-1)\ldots(q^{r-1}-1)$; *il est nul sur tout élément semi-simple régulier de centralisateur non isomorphe à* $k_r^\times$; *sur un élément semi-simple régulier x de centralisateur isomorphe à* $k_r^\times$ *il vaut* $(-1)^{r-1}\sum_{\sigma\in\Sigma}\theta^\sigma(j(x))$, *où j est un k-isomorphisme du centralisateur de x sur* $k_r^\times$.

— *L'application* $\theta \mapsto \tau(\theta)$ *détermine une bijection entre les* Σ*-orbites de caractères réguliers de* $k_r^\times$ *et les classes d'isomorphie de représentations cuspidales irréductibles de* $GL_r(k)$.

— *Soit* π_θ *une représentation de* $GL_r(k)$ *de caractère* $\tau(\theta)$. *Soient* $\bar{N}$ *le sous-groupe de* $GL_r(k)$ *formé des matrices unipotentes triangulaires supérieures et* $\bar{e}$ *un caractère de* $\bar{N}$

0249-6291/86/03030599 \$ 2.00

non dégénéré [c'est-à-dire dont le fixateur, dans le sous-groupe des matrices diagonales de $GL_r(k)$ *agissant par conjugaison sur les caractères de* $\bar{N}$, *est réduit aux matrices scalaires]. Il y a à scalaire près un seul vecteur non nul* $v_{\bar{e}}$ *dans l'espace de* π_θ *sur lequel* $\bar{N}$ *opère par* $\bar{e}$.

3. Fixons un isomorphisme ε de $\mu_n(F)$ sur $\mu_n(\mathbb{C})$. Pour tout $a \in F^\times$, notons c_a le caractère de $F^\times$ défini par $c_a(x) = \varepsilon((a, x)_{n,F}^{r-1+2rc})$ (où $(\ ,\ )_{n,F}$ désigne le symbole de Hilbert d'ordre n sur $F^\times$, et où c est l'entier modulo n figurant dans [3] dans la définition du cocycle sur $\tilde{G}$); puisque n est premier à q, c_a est trivial sur $1+\mathfrak{p}$ et détermine un caractère de $k^\times$ noté encore c_a. Identifions $F^\times$ au centre de G par $a \mapsto a\mathrm{I}$, $a \in F^\times$. Le commutateur dans $\tilde{G}$ de relèvements quelconques de $a \in F^\times$ et $g \in G$ ne dépend pas de ces relèvements; son image par ε est $c_a(\det g)$. Le centre de $\tilde{G}$ est $\tilde{Z} = p^{-1}(F^{\times n'})$ avec $n' = n/(n, r-1+2rc)$.

Soient θ un caractère régulier de $k_r^\times$ et π_θ une représentation de $GL_r(k)$ de caractère $\tau(\theta)$: notons encore π_θ la représentation du sous-groupe K de $\tilde{G}$ qui s'en déduit. Soit χ un quasi-caractère de $\tilde{Z}$ (tel que $\chi \circ i = \varepsilon$) coïncidant sur $\tilde{Z} \cap K$ avec le caractère central de π_θ; alors $\chi \otimes \pi_\theta$ est une représentation irréductible spécifique de $\tilde{Z}K$, dont la conjuguée par un élément a de $F^\times$ est équivalente à $\chi \otimes \pi_{\theta c_{a,r}}$, où $c_{a,r}$ est le caractère de $k_r^\times$ obtenu par composition de c_a avec la norme de $k_r^\times$ sur $k^\times$. Le fixateur dans $\widetilde{F^\times}$ de la classe de $\chi \otimes \pi_\theta$, noté $\widetilde{F^\times(\theta)}$, est donc l'image inverse du sous-groupe des $a \in F^\times$ tels que $\theta . c_{a,r}$ soit dans l'orbite de θ sous Σ. L'étude de cette condition fournit le :

THÉORÈME. — 1. *Soit* k_θ *la plus petite sous-extension de* k_r *sur* k *telle que* θ^n *soit trivial sur le noyau de la norme de* $k_r^\times$ *sur* $k_\theta^\times$. *Alors le degré* d_θ *de* k_r *sur* k_θ *divise* n', *et l'entier* $j_\theta = n'/d_\theta$ *vérifie :*

$$\widetilde{F^\times(\theta)} = p^{-1}(\mathcal{O}^\times . F^{\times j_\theta}).$$

2. *Notons* $\tilde{H}_\theta = \widetilde{F^\times(\theta)}\,K$. *La représentation* $\chi \otimes \pi_\theta$ *de* $\tilde{Z}K$ *admet exactement* d_θ *prolongements non isomorphes à* $\tilde{H}_\theta$. *Leur restriction à* $\widetilde{F^\times(\theta)}$ *a* d_θ *composantes isotypiques, toutes de même dimension, dont les types sont les* d_θ *quasi-caractères de* $\widetilde{F^\times(\theta)}$ *prolongeant le caractère central de* $\chi \otimes \pi_\theta$. *Le choix d'un caractère non dégénéré* $\bar{e}$ *de* $\bar{N}$ *permet d'indexer les prolongements par ces quasi-caractères : on notera* $\pi(\theta, \Theta)$ *la représentation de* $\tilde{H}_\theta$ *prolongeant* $\chi \otimes \pi_\theta$ *dans laquelle* $v_{\bar{e}}$ *est de type* Θ *sous* $\widetilde{F^\times(\theta)}$.

3. *La représentation* $\tilde{\pi}(\theta, \Theta) = \mathrm{Ind}_{\tilde{H}_\theta}^{\widetilde{F^\times}K} \pi(\theta, \Theta)$ *est spécifique irréductible de degré* $j_\theta(q-1) \ldots (q^{r-1}-1)$. *La représentation* $\tilde{T}(\theta, \Theta) = \mathrm{Ind}_{\widetilde{F^\times}K}^{\tilde{G}} \tilde{\pi}(\theta, \Theta)$ *est spécifique irréductible supercuspidale.*

4. Soit N le sous-groupe des matrices unipotentes triangulaires supérieures de G; la section s restreinte à N est un homomorphisme de N dans $\tilde{G}$ (*voir* [3]) grâce auquel on identifie N à un sous-groupe de $\tilde{G}$ noté encore N. *L'espace de Whittaker*, relatif à un caractère non dégénéré e de N, d'une représentation admissible $\tilde{T}$ de $\tilde{G}$ dans l'espace $\tilde{V}$ est l'espace $\mathrm{Wh}(\tilde{V}, e)$ des formes linéaires λ sur $\tilde{V}$ vérifiant :

$$\lambda \circ \tilde{T}(n) = e(n)\lambda \quad \text{pour tout } n \in N.$$

C'est le dual de l'espace $\tilde{V}_{N,e}$ quotient de $\tilde{V}$ par le sous-groupe engendré par les vecteurs de la forme $\tilde{T}(n)v - e(n)v$ pour $v \in \tilde{V}$, $n \in N$. Si $\tilde{T}$ est irréductible, ces espaces sont de dimension finie (*voir* [3]; cette dimension est le nombre de modèles de Whittaker). Ils sont naturellement munis d'une action, déduite de $\tilde{T}$, du centralisateur de e : l'image réciproque $\widetilde{F^{\times}}$ du centre de G. Si $\tilde{T}$ est spécifique, les espaces $\mathrm{Wh}(\tilde{V}, e)$ et $\tilde{V}_{N,e}$ sont des représentations spécifiques de $\widetilde{F^{\times}}$, groupe d'Heisenberg de centre $\widetilde{F^{\times n''}}$ avec $n''=n'/(n, r)$: leur dimension est donc multiple de n''.

5. Fixons $\tilde{\pi}=\tilde{\pi}(\theta, \Theta)$ et son induite $\tilde{T}=\tilde{T}(\theta, \Theta)$ comme en 3 et notons $\tilde{Y}$ et $\tilde{V}$ leurs espaces respectifs; l'espace $\tilde{V}$ est celui des fonctions f, lisses et à support compact modulo le centre, de $\tilde{G}$ dans $\tilde{Y}$, vérifiant $f(kg)=\tilde{\pi}(k)f(g)$ pour tous $k\in\widetilde{F^{\times}K}$ et $g\in\tilde{G}$, et la représentation $\tilde{T}$ y est la translation à droite par les éléments de $\tilde{G}$.

Posons $N_0=N\cap K$, $N_1=N\cap(I+M_r(\mathfrak{p}))$, et fixons un caractère non dégénéré e de N trivial sur N_1 et dont la restriction e_0 à N_0 détermine un caractère non dégénéré $\bar{e}$ de $\bar{N}\simeq N_0/N_1$. Les définitions de 4 s'appliquent de manière évidente aux représentations de $\widetilde{F^{\times}K}$, relativement à (N_0, e_0).

Pour toute fonction f dans $\tilde{V}$, l'intégrale $\int_N \overline{e(n)}\, f(n)\, dn$ est absolument convergente et l'on a :

Proposition. — *L'homomorphisme de* $\tilde{V}$ *dans* $\tilde{Y}$ *défini par*

$$f\mapsto\int_N \overline{e(n)}\, f(n)\, dn, \qquad f\in\tilde{V}$$

détermine un isomorphisme de $\widetilde{F^{\times}}$*-modules de* $\tilde{V}_{N,e}$ *sur le sous-espace* $\tilde{Y}^{N_0, e_0}$ *des vecteurs de* $\tilde{Y}$ *sur lesquels* N_0 *opère par* e_0.

On obtient par transposition un isomorphisme de $\widetilde{F^{\times}}$-modules de $\mathrm{Wh}(\tilde{V}, e)$ sur le dual de $\tilde{Y}^{N_0, e_0}$, ce qui permet de décrire l'espace de Whittaker : la construction de $\tilde{T}=\tilde{T}(\theta, \Theta)$ a mis en évidence (après choix d'un caractère non dégénéré $\bar{e}$ de $\bar{N}$) le rôle du quasi-caractère Θ de $\widetilde{F^{\times}}(\theta)$, qui est le type de $v_{\bar{e}}$ sous $\widetilde{F^{\times}}(\theta)$ (*voir* 3). Alors :

Théorème. — *L'espace de Whittaker* $\mathrm{Wh}(\tilde{V}, e)$ *de la représentation* $\tilde{T}(\theta, \Theta)$ *est de dimension* j_θ. *Comme représentation de* $\widetilde{F^{\times}}$, *il est isomorphe à l'induite* $\mathrm{Ind}_{\widetilde{F^{\times}}(\theta)}^{\widetilde{F^{\times}}}\Theta^{-1}$; *il se décompose en* j_θ/n'' *représentations irréductibles dont les caractères centraux sont les* j_θ/n'' *prolongements distincts à* $\widetilde{F^{\times n''}}$ *de la restriction de* Θ^{-1} *à* $\widetilde{F^{\times}}(\theta)\cap F^{\times n''}$. *En particulier* $\mathrm{Wh}(\tilde{V}, e)$ *est irréductible sous* $\widetilde{F^{\times}}$ *si et seulement si* $j_\theta=n''$; *c'est-à-dire si et seulement si* d_θ *a la valeur maximale* (n, r).

6. Le groupe $\widetilde{F^{\times}}$ est commutatif si et seulement si $n=(n, r)(n, r-1+2rc)$. Cette condition est réalisée si $n=r$, cas particulier dont l'importance a été mise en évidence dans [3] : les auteurs y construisent (théorème I.2.9) une représentation spécifique irréductible dite *exceptionnelle* de $\tilde{G}$ notée $V_0(\omega)$, unique quotient irréductible d'une représentation de la série principale, dont l'espace de Whittaker est pour $n=r$ de dimension 1 (théorème I.3.5, corollaire I.3.6).

Supposons $n=r$ *impair* pour simplifier; alors la restriction à $F^{\times}$ (identifié au centre de G) de la section s est un homomorphisme grâce auquel on identifie $F^{\times}$ à un sous-groupe de $\tilde{G}$. D'autre part on montre que :

Lemme. — *Soit* r *un diviseur impair de* $q-1$. *La restriction des caractères détermine une bijection* R *de l'ensemble des* Σ*-orbites de caractères réguliers de* $k_r^{\times}$ *dont la puissance* r*-ième factorise à travers la norme de* $k_r^{\times}$ *sur* $k^{\times}$, *sur l'ensemble des caractères de* $k^{\times}$ *dont la restriction à* $\mu_r(k)$ *est injective.*

Soit χ un quasi-caractère de $F^{\times}$ dont la restriction à $\mu_r(F)$ est injective. Puisque $n=r$ est premier à q, on peut choisir un caractère λ de $F^{\times}$ tel que λ^r et χ coïncident sur $1+\mathfrak{p}$; on note encore λ le caractère $g \mapsto \lambda(\text{dét}\, p(g))$ de $\tilde{G}$. Posons $\chi_0=\chi\lambda^{-r}$; alors χ_0 détermine un caractère de $k^{\times}$ et le lemme ci-dessus permet de choisir un caractère θ de $k_r^{\times}$ dans $R^{-1}(\chi_0)$. La représentation $\tilde{T}(\theta, \chi_0 \otimes \varepsilon) \otimes \lambda$ [où ε est un isomorphisme fixé de $i(\mu_n(F))$ sur $\mu_n(\mathbb{C})$] ne dépend, à équivalence près, que de χ : on la note $E(\chi)$. Les résultats de 5 s'interprètent alors en :

THÉORÈME. — *Supposons r impair premier à q et $n=r$. Fixons un caractère non dégénéré e de* N *vérifiant les conditions de 5. Pour tout quasi-caractère χ de* $F^{\times}$ *de restriction à* $\mu_r(F)$ *injective, la représentation* $E(\chi)$ *de* $\tilde{G}$ *vérifie les conditions suivantes :*

(1) *La représentation* $E(\chi)$ *est irréductible spécifique supercuspidale.*

(2) *Son espace de Whittaker* $Wh(E(\chi), e)$ *est de dimension* 1.

(3) *L'action de* $\widetilde{F^{\times}}$ *sur* $Wh(E(\chi), e)$ *est donnée par* $(\chi \otimes \varepsilon)^{-1}$.

Remarque. — Si χ est trivial sur $\mu_r(F)$, l'existence d'une représentation exceptionnelle (au sens de [3], théorème I.2.9) de $\tilde{G}$ vérifiant les conditions (2) et (3) du théorème découle de [3]. Si $n=r$ est impair non premier, les cas intermédiaires où χ est un quasi-caractère de $F^{\times}$ dont la restriction à $\mu_r(F)$ n'est ni triviale, ni injective, mériteraient d'être étudiés. Notons enfin que l'on n'a donné aucun résultat d'unicité.

7. Pour $r=2$, n pair, et q impair, les représentations $\tilde{T}(\theta, \Theta)$ avec $d_\theta=2$ sont les seules représentations supercuspidales spécifiques de $\tilde{G}$ dont l'image dans la correspondance de Shimura est une représentation spéciale de G (*voir* [1]; pour $n=2$ ce sont les représentations de Weil impaires), et, en caractéristique 0, les seules représentations supercuspidales spécifiques de $\tilde{G}$ dont l'espace de Whittaker est irréductible sous $\widetilde{F^{\times}}$.

Pour $r=n=3$ et q premier à 3, la représentation $E(\chi)$ définie en 6 est équivalente à la représentation $V^0(\chi)$ de [4], théorème 4.1.1 (on montre, en utilisant le théorème 6' de [6], l'identité de leurs facteurs Γ).

Reçue le 18 juillet 1986.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] C. BLONDEL, Les représentations supercuspidales des groupes métaplectiques sur GL(2) et leurs caractères, *Bull. Soc. Math. Fr.*, Mém. n° 18, 1985.

[2] S. I. GELFAND, Representations of the general linear group over a finite field, in *Lie groups and their representations*, I. M. GELFAND éd., Halstead, New York, 1975, p. 119-132.

[3] D. A. KAZHDAN et S. J. PATTERSON, Metaplectic forms, *Publ. Math. I.H.E.S.*, 59, 1984, p. 35-142.

[4] S. J. PATTERSON et I. I. PIATETSKI-SHAPIRO, A cubic analogue of the cuspidal theta representations, *J. Math. pures et appl.*, 63, 1984, p. 333-375.

[5] T. A. SPRINGER, Characters of special groups, in *Seminar on algebraic groups and related finite groups*, *Lecture Notes in Maths*, n° 131, Springer Verlag, Berlin, 1970, p. 121-166.

[6] M. J. TAYLOR, Adams operations, local root numbers, and the Galois module structure of rings of integers, *Proc. London Math. Soc.*, (3), 39, 1979, p. 147-175.

U.A. n° 748 du C.N.R.S., U.E.R. de Mathématiques, Université Paris-VII, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.