# Critère d'injectivité pour l'application de Jacquet

**Corinne BLONDEL**

Equipe de Théorie des Groupes - Case 7012,

UFR de Mathématiques, Université Paris 7, 2, place Jussieu, F-75251 PARIS Cedex 05.

blondel@math.jussieu.fr

Note présentée par Hervé JACQUET.

---

**Résumé.** Soit $(\pi, V)$ une représentation lisse d'un groupe réductif p-adique $G$ et $(\pi_N, V_N)$ son module de Jacquet relativement à un sous-groupe parabolique propre $P$ de $G$ de décomposition de Levi $P = MN$; soit $K$ un sous-groupe ouvert compact de $G$ possédant une décomposition d'Iwahori par rapport à $P$ et $\tau$ une représentation lisse irréductible de $K$ triviale sur les intersections de $K$ avec $N$ et l'opposé de $N$ par rapport à $M$. Nous établissons un critère d'injectivité de la restriction de $r_N : V \to V_N$ à la composante isotypique de type $\tau$ de $V$ sous l'action de $K$, puis donnons une application au groupe $G_2$.

***Injectivity criterion for the Jacquet map.***

**Abstract.** Let $(\pi, V)$ be a smooth representation of a reductive p-adic group $G$ and $(\pi_N, V_N)$ be its Jacquet module relative to a proper parabolic subgroup $P$ of $G$ with Levi decomposition $P = MN$; let $K$ be a compact open subgroup of $G$ with an Iwahori decomposition with respect to $P$, and $\tau$ be a smooth irreducible representation of $K$ trivial on the intersections of $K$ with $N$ and the opposite of $N$ relative to $M$. We produce an injectivity criterion for the restriction of $r_N : V \to V_N$ to the $\tau$-isotypic component of $V$ under the action of $K$, and we give an application to the group $G_2$.

---

## 1. Critère d'injectivité

Soit $G$ le groupe des points sur un corps local non archimédien $F$, d'un groupe algébrique réductif connexe défini sur $F$. Soit $P$ un sous-groupe parabolique propre de $G$, de radical unipotent $N$, et soit $P = MN$ une décomposition de Levi de $P$. On note $\bar{N}$ l'opposé de $N$ par rapport à $M$ et $\bar{P} = M\bar{N}$ le parabolique opposé de $P$. Les représentations considérées dans la suite seront toujours des représentations dans un espace vectoriel *complexe*.

Soit $(\pi, V)$ une représentation lisse de $G$ ; son module de Jacquet relativement à $P$ est la représentation lisse $(\pi_N, V_N)$ de $M$ dans l'espace quotient $V_N = V/V(N)$, où $V(N)$ est formé des éléments $v$ de $V$ pour lesquels il existe un sous-groupe ouvert compact $N_v$ de $N$ tel que $\int_{N_v} \pi(n) v dn = 0$ ; l'application canonique de $V$ sur $V_N$ est notée $r_N$.

Soit $K$ un sous-groupe ouvert compact de $G$ et $\tau$ une représentation lisse irréductible de $K$ ; on note $V^\tau$ la composante isotypique de type $\tau$ de $V$ sous l'action de $K$. On suppose que $K$ possède une décomposition d'Iwahori par rapport à $P$, c'est-à-dire est produit direct $K \cap \bar{N}.K \cap M.K \cap N$, et que $\tau$ est triviale sur $K \cap \bar{N}$ et $K \cap N$ ; alors la restriction de $\tau$ à $K \cap M$ est une représentation lisse irréductible $\tau_M$ de $K \cap M$, et l'homomorphisme de $M$-modules $r_N$ envoie $V^\tau$ dans $V_N^{\tau_M}$. On aura besoin dans la suite des précisions suivantes sur les liens entre $\tau_M$ et $\tau$ :

**Lemme 1 :** *Soit $J_M$ un sous-groupe ouvert compact de $M$ et $\tau_M$ une représentation lisse irréductible de $J_M$ de noyau $H_M$. Soit $J^+$ (resp. $J^-$) un sous-groupe ouvert compact de $N$ (resp. $\bar{N}$).*

*(i) Le produit $J = J^- J_M J^+$ est un groupe si et seulement si $J_M$ normalise $J^+$ et $J^-$ et $J^+J^- \subset J^- J_M J^+$.*

*(ii) Si le produit $J = J^- J_M J^+$ est un groupe, alors il existe une représentation $\tau$ de $J$ triviale sur $J^+$ et $J^-$ et de restriction $\tau_M$ à $J_M$ si et seulement si le produit $J^- H_M J^+$ est un groupe. Dans ces conditions, pour toute représentation lisse $(\pi, V)$ de $G$, $V^\tau$ est l'ensemble des vecteurs de $V^{\tau_M}$ fixés par $J^+$ et $J^-$.*

*(iii) Soit $H$ un sous-groupe de $J_M$ tel que le produit $J^- H J^+$ soit un groupe. Alors le produit $J^- J_M J^+$ est un groupe si et seulement si $J_M$ normalise $J^+$ et $J^-$.*

Les conditions imposées plus haut à la paire $(K, \tau)$ suffisent à assurer la *surjectivité* de $r_N : V^\tau \to V_N^{\tau_M}$, du moins si $\pi$ est admissible (c'est la généralisation d'un résultat de Casselman, *voir* [**5**], théorème 3.3.3), mais non son *injectivité*. Or si $(K, \tau)$ est soit la paire formée d'un sous-groupe d'Iwahori et de son caractère trivial (*voir* [**1**]), soit un *type simple* dans $GL_n(F)$ (*voir* [**3**]), cette injectivité constitue une étape clé pour démontrer que *la paire* $(K, \tau)$ *est un type dans* $G$, c'est-à-dire, par définition (*voir* [**4**], 4.1), que la catégorie des représentations lisses de $G$ engendrées par leur composante isotypique de type $\tau$ sous $K$ est stable par sous-quotients (*voir* [**1**], 4.7 puis 4.11, et [**3**], 7.3.2 puis 7.5.4). En général, les paires $(K, \tau)$ pour lesquelles $r_N : V^\tau \to V_N^{\tau_M}$ est injective devraient jouer un rôle fondamental dans la décomposition de la catégorie des représentations lisses de $G$ selon la théorie des types (*voir* [**4**], §7) ; c'est pourquoi la construction de "types induits" est en jeu dans ce qui suit.

**Théorème 1 :** *Soit $J_M$ un sous-groupe ouvert compact de $M$ et $\tau_M$ une représentation irréductible lisse de $J_M$. Soit $(J_i^+)_{i \geqslant 0}$ (resp. $(J_i^-)_{i \geqslant 0}$) une suite de sous-groupes ouverts compacts de $N$ (resp. $\bar{N}$), vérifiant les conditions suivantes :*

*(i) le produit $J_i = J_i^- J_M J_i^+$ est un groupe pour tout $i \geqslant 0$ ;*

*(ii) la représentation $\tau_M$ se prolonge pour tout $i \geqslant 0$ en une représentation $\tau_i$ de $J_i$ triviale sur $J_i^-$ et $J_i^+$ et égale à $\tau_M$ sur $J_M$ ;*

*(iii) la suite $(J_i^+)_{i \geqslant 0}$ est croissante et $\bigcup_{i \geqslant 0} J_i^+ = N$, la suite $(J_i^-)_{i \geqslant 0}$ est décroissante;*

*(iv) pour tout $x \in J_{i+1}^+$ , $x \notin J_i^+$ , il existe un sous-groupe fermé $H_{i,x}$ de $J_i^-$ dont le conjugué $x^{-1} H_{i,x} x$ est un sous-groupe de $J_i$ n'ayant aucun vecteur fixe non nul dans la représentation $\tau_i$.*

*Alors pour toute représentation lisse $(\pi, V)$ de $G$, et pour tout $i \geqslant 0$, la restriction de $r_N$ à $V^{\tau_i}$ est un homomorphisme* **injectif** *: $V^{\tau_i} \to V_N^{\tau_M}$.*

*Démonstration :* Les hypothèses restant vérifiées par translation d'indices, il suffit de montrer l'assertion pour $i = 0$ ; on pose $\tau_0 = \tau$. L'injectivité recherchée, c'est-à-dire l'égalité $V^\tau \cap V(N) = \{0\}$, résulte d'un jeu de "pousse-pousse" sur les $J_i$ , précisément de la proposition suivante, où $dy$ et $dn$ sont des mesures de Haar sur $\bar{N}$ et $N$ respectivement :

**Proposition 1 :** *Pour tout $i \geqslant 0$ et pour tout $v \in V^\tau$ on a l'égalité :*

$$\int_{J_i^-} \pi(y) dy \int_{J_{i+1}^+} \pi(n) v dn = \mathrm{vol}\ (J_i^-) \int_{J_i^+} \pi(n) v dn$$

Admettons un instant cette proposition (elle sera démontrée au paragraphe suivant) et achevons la démonstration du théorème. Soit $v \in V^\tau$, $v \neq 0$. Alors $J_0^+$ contenu dans $J_0$ agit trivialement sur $v$ par (ii), d'où : $\int_{J_0^+} \pi(n)vdn = v \neq 0$. Par récurrence sur $i$ la proposition implique alors : $\int_{J_i^+} \pi(n)vdn \neq 0$ pour tout $i \geqslant 0$. Vu la condition (iii) et la définition de $V(N)$, il s'ensuit que $v$ n'appartient pas à $V(N)$, d'où le théorème. □

## 2. Décomposition d'Iwahori et lemme de Jacquet

Le but de ce paragraphe est de démontrer la proposition 1, les hypothèses et notations sont celles du théorème 1. Commençons par un lemme fondamental, qui n'est autre que la généralisation du premier lemme de Jacquet (cf Casselman, [**5**], 3.3.4).

**Lemme 2 :** *On suppose les conditions (i), (ii) et (iii) du théorème 1 vérifiées. Soit $v$ un élément de $V^\tau$. Pour tout $i \geqslant 0$, $w = \int_{J_i^+} \pi(x)vdx$ est un élément de $V^{\tau_i}$.*

*Démonstration :* Soit $m \in J_M$ ; on a $\pi(m)w = \int_{J_i^+} \pi(mxm^{-1})\pi(m)vdx$. Comme $J_M$ est compact et normalise $J_i^+$, il vient par changement de variable $\pi(m)w = \int_{J_i^+} \pi(x)\pi(m)vdx$. Ainsi $v \mapsto \int_{J_i^+} \pi(x)vdx$ est un opérateur d'entrelacement pour l'action de $J_M$ sur $V$. L'image par cet opérateur de $V^\tau$, isotypique de type $\tau_M$ sous $J_M$, est donc contenue dans $V^{\tau_M}$. D'autre part, comme $v$ est fixé par $J_i^- \subset J_0^-$ et par le noyau $H_M$ de $\tau_M$, et comme le produit $J_i^- H_M J_i^+$ est un groupe d'après le lemme 1, on peut écrire :

$$w = C_1 \int_{J_i^+} \pi(x) \int_{H_M} \pi(m) \int_{J_i^-} \pi(y)vdydmdx = C_2 \int_{J_i^- H_M J_i^+} \pi(z)vdz$$

où $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ sont des constantes dépendant du choix des mesures de Haar sur les groupes $N$, $\bar{N}$, $M$, et $G$. Ainsi $w$ est fixé par le groupe $J_i^- H_M J_i^+$, d'où le lemme. □

Nous pouvons maintenant démontrer la proposition 1. Soit $v \in V^\tau$ et $i \geqslant 0$ ; posons $c_i = \text{vol } (J_i^+)^{-1}$ et $w = \int_{J_i^+} \pi(x)vdx$. Puisque $J_i^+ \subset J_{i+1}^+$ l'expression à calculer s'écrit :

$$\begin{aligned} I = \int_{J_i^-} \pi(y)dy \int_{J_{i+1}^+} \pi(n)vdn &= c_i \int_{J_i^-} \pi(y)dy \int_{J_{i+1}^+} \pi(n)wdn \\ &= c_i \int_{J_{i+1}^+} \pi(n)dn \int_{J_i^-} \pi(n^{-1}yn)wdy \end{aligned}$$

Comme $w$ est fixé par $J_i^+$ la fonction sur $J_{i+1}^+$ : $n \mapsto \pi(n) \int_{J_i^-} \pi(n^{-1}yn)wdy$ est invariante à droite par $J_i^+$ et il reste : $I = \sum_{x \in J_{i+1}^+/J_i^+} \pi(x) \int_{J_i^-} \pi(x^{-1}yx)wdy$.

Le terme en $x = 1$ dans cette somme est vol $(J_i^-)w$ puisque $w$ est fixé par $J_i^-$ (lemme 2), c'est-à-dire le résultat voulu. Il suffit donc de montrer que les autres termes sont nuls. Or on a pour tout sous-groupe fermé $H$ de $J_i^-$:

$$\int_{J_i^-} \pi(x^{-1}yx)wdy = \text{vol } (H)^{-1} \int_{J_i^-} \pi(x^{-1}yx) \int_H \pi(x^{-1}hx)wdhdy$$

Si $x \in J_{i+1}^+$, $x \notin J_i^+$, prenant $H = H_{i,x}$, le sous-groupe fourni par la condition (iv) du théorème 1, on voit puisque $w$ appartient à $V^{\tau_i}$ (lemme 2) que l'intégrale sur $H$ est un vecteur de $V^{\tau_i}$ fixé par $x^{-1}H_{i,x}x$ ; il est donc nul, d'où la proposition. □

## 3. Exemple de type induit dans le groupe $G_2$

Voici maintenant une application du théorème 1 dans le cadre suivant :
- Le corps $F$ est de caractéristique résiduelle différente de 2 et 3 ; on note $\mathfrak{O}$ son anneau d'entiers, d'idéal maximal $\mathfrak{P}$.
- Le groupe $G$ est un groupe de Chevalley de type $G_2$ sur $F$, une base $\{\alpha, \beta\}$ de son système de racines $\Phi$ est fixée ($\alpha$ est courte, $\beta$ longue), $\Phi^+$ est formé des racines positives. On utilise les notations de **[2]**, 6.1.3.b : pour tout $a \in \Phi$ on dispose d'homomorphismes $\zeta_a$ de $SL_2(F)$ dans $G$, $x_a$ et $x_{-a}$ de $F$ dans $G$, $h_a$ de $F^\times$ dans $G$ tels que $x_a(u) = \zeta_a\left(\begin{pmatrix} 1 & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et $x_{-a}(u) = \zeta_a\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ u & 1 \end{pmatrix}\right)$, $u \in F$ ; et $h_a(x) = \zeta_a\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}\right)$, $x \in F^\times$.
- Le sous-groupe $M$ est engendré par $\zeta_\beta(SL_2(F))$ et le tore déployé maximal de $G$; il a pour centre $h_{2\alpha+\beta}(F^\times)$ et $\zeta_\beta$ se prolonge en un isomorphisme $\bar{\zeta}_\beta$ de $GL_2(F)$ sur $M$. Deux sous-groupes paraboliques de $G$ exactement ont pour facteur de Levi $M$: $P = MN$ et son opposé $\bar{P} = M\bar{N}$, avec $N = \prod_{a\in\Phi^+-\{\beta\}} x_a(F)$ et $\bar{N} = \prod_{a\in\Phi^+-\{\beta\}} x_{-a}(F)$.

On fixe des entiers $m$ et $n$ tels que $2 \leqslant m \leqslant n$ ; la fonction $v$ sur $\Phi$ définie par :

(a) $v(\beta) = v(-\beta) = n$, $v(2\alpha+\beta) = 0$, $v(-2\alpha-\beta) = m$,

(b) $v(a) = [n/2]$ et $v(-a) = n - [n/2]$ pour $a \in \Phi^+$, $a \neq \beta$, $a \neq 2\alpha+\beta$,

est *concave.* Il découle de **[2]** (6.4.9), que le sous-groupe $K_v$ de $G$ engendré par les $x_a(\mathfrak{P}^{v(a)})$, $a \in \Phi$, possède une décomposition d'Iwahori par rapport à $P$, avec:
$N \cap K_v = J_v^+ = \prod_{a\in\Phi^+-\{\beta\}} x_a(\mathfrak{P}^{v(a)})$, $\quad \bar{N} \cap K_v = J_v^- = \prod_{a\in\Phi^+-\{\beta\}} x_{-a}(\mathfrak{P}^{v(-a)})$,
$M \cap K_v = K_M = h_{2\alpha+\beta}(1+\mathfrak{P}^m)\bar{\zeta}_\beta\left(\begin{pmatrix} 1+\mathfrak{P}^n & \mathfrak{P}^n \\ \mathfrak{P}^n & 1+\mathfrak{P}^n \end{pmatrix}\right)$.
En outre $J_M = \bar{\zeta}_\beta(GL_2(\mathfrak{O}))$ normalise $K_v$ donc le produit $J_v = J_v^+ J_M J_v^-$ est un groupe. En insérant le sous-groupe $J_v$ dans une suite de sous-groupes $J_i$ vérifiant les hypothèses du théorème 1, on parvient au résultat suivant :

**Théorème 2 :** *Soit $\tau_M$ une représentation de $J_M$ telle que :*

*(i) $\tau_M$ est irréductible et triviale sur $K_M$ ;*

*(ii) $\tau_M$ n'a pas de vecteur fixe non nul sous $x_\beta(\mathfrak{P}^{n-1})$ ni sous $x_{-\beta}(\mathfrak{P}^{n-1})$ ;*

*(iii) le caractère central de $\tau_M$ est non trivial sur $h_{2\alpha+\beta}(1+\mathfrak{P}^{m-1})$.*

*La représentation $\tau_M$ se prolonge en une représentation $\tau$ de $J_v$ triviale sur $K_v$. Pour toute représentation lisse $(\pi, V)$ de $G$ la restriction de $r_N$ à $V^\tau$ est injective. La paire $(J_v, \tau)$ est un type dans $G$.*

## Références bibliographiques


**[1]** A. Borel, *Admissible representations of a semisimple group with vectors fixed under an Iwahori subgroup.* Invent. Math. **35** (1976), 233-259.

**[2]** F. Bruhat et J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local I.* Publ. Math. de l'IHES **41** (1972), 1-251.

**[3]** C.J. Bushnell and P. C. Kutzko, *The admissible dual of $GL(N)$ via compact open subgroups.* Annals of Math. Studies **129**, Princeton University Press 1993.

**[4]** C.J. Bushnell and P.C. Kutzko, *Smooth representations of reductive p-adic groups : structure theory via types.* Preprint, 1995.

**[5]** W. Casselman, *Introduction to the theory of admissible representations of $\mathfrak{p}$-adic reductive groups.* Preprint 1974.