Université Paris Diderot - Paris 7
École Doctorale de Sciences Mathématiques
de Paris Centre

Thèse de doctorat

Discipline : Mathématiques

présentée par

Ngô Văn Định

Construction de représentations supercuspidales des groupes spinoriels définis sur des corps p-adiques au moyen de types semi-simples

dirigée par Corinne Blondel

Soutenue le 28 oaût 2013 devant le jury composé de :

M$^{\text{me}}$. Laure Blasco	Membre
M$^{\text{me}}$. Corinne Blondel	Directrice de thèse
M. David Goldberg	Rapporteur
M. Vincent Sécherre	Membre
M. Shaun Stevens	Membre

À ma famille,
et plus particulièrement à mes parents,
et plus particulièrement encore à ma femme et ma fille.

Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer ma gratitude envers ma directrice de thèse, Corinne Blondel, pour m'avoir appris tant de mathématiques intéressantes, pour m'avoir consacré beaucoup de son temps sans compter. Sa disponibilité, ses mots de soutien quand j'avais des difficultés ou des problèmes de motivation m'ont bien encouragé pendant ces quatre années de thèse.

Je remercie chaleuresement David Goldberg pour avoir accepté de rapporter ma thèse.

Je suis très heureux que Laure Blasco, Vincent Sécherre et Shaun Stevens aient accepté de faire partie de mon jury et je les remercie sincèrement pour cela.

Je tiens à remercier profondément Shaun Stevens pour m'avoir expliqué ses résultats sur sa construction des types cuspidaux pour les groupes classiques, lesquels se sont révélés très importants pour ma thèse.

Je remercie vivement Corinne Blondel et Guy Henniart pour l'organisation du groupe de travail *Représentations de Groupes Réductifs p-adiques : Types et Applications* qui m'a permis de découvrir ce domaine ; et de nouveau Corinne Blondel pour sa création du petit groupe de travail sur la théorie d'immeuble de Bruhat-Tits des groupes réductifs au cours duquel j'ai beaucoup appris. J'en profite pour remercier Corinne Blondel, Laure Blasco et Guy Rousseau pour leurs exposés ainsi que leurs discussions dans ce petit groupe.

Je remercie également Shaun Stevens, Vincent Sécherre, Bertrand Lemair, Marc Cabanes, Guy Rousseau, François Courtès et Paul Broussous pour leurs aides généreuses et pour leur partience lorsqu'ils ont répondu à mes questions naïves.

Je remercie tous mes amis qui m'ont aidé et encouragé pendant ces longues années de thèse. J'adresse un merci particulier à Dimitri Ara et à Ivan Boyer pour m'avoir beaucoup aidé depuis ma première année en France.

Enfin, je voudrais profiter de cette occasion pour exprimer mes sentiments les plus profonds à ma famille, et plus particulièrement à mes parents, qui m'ont toujours encouragé et soutenu. De tout mon cœur, je pense particulièrement à ma femme, Liên, et à ma fille, Hà Linh, pour leur patience, leur compréhension et leur soutien permanent, depuis le Vietnam, tout au long de mon travail.

Paris, été 2013

Ngô Văn Định

Table des matières

Introduction

Le but de ce travail est de construire des représentations (complexes) irréductibles supercuspidales des groupes spinoriels définis sur des corps p-adiques en utilisant la méthode des types semi-simples. L'étude de la théorie des représentations des groupes algébriques réductifs définis sur des corps p-adiques intéresse de nombreux mathématiciens depuis les années 1950. Roger Evans Howe a présenté dans [21] une approche des représentations du groupe linéaire général par la méthode de restriction à sous-groupes ouverts compacts. La théorie des représentations des groupes linéaires généraux p-adiques a été enfin complétée au moyen de types semi-simples par les travaux de Colin John Bushnell et Philip Caesar Kutzko [13, 14, 15].

Grâce aux travaux indépendants d'Allen Moy et Gopal Prasad [29] et de Lawrence Morris [27] pendant les dernières années du vingtième siècle, nous connaissons une classification complète des représentations de niveau zéro, i.e., les représentations dont la restriction au radical pro-unipotent d'un certain sous-groupe parahorique contient le caractère trivial, d'un groupe réductif connexe p-adique quelconque. Pour les représentations de niveau positif, Jiu-Kang Yu [46] a présenté une construction générale de représentations supercuspidales dont l'exhaustivité est démontrée par Ju-Lee Kim [23] avec des conditions sur le corps de base notamment que la caractéristique résiduelle soit suffisamment grande.

Dans les travaux de Colin John Bushnell et Philip Caesar Kutzko [13] pour le groupe linéaire général, ils ont présenté une description délicate de nature arithmétique des représentations irréductibles supercuspidales des groupes linéaires généraux. L'idée de cette description est d'obtenir toutes les représentations irréductibles supercuspidales comme des représentations induites compactes à partir de sous-groupes ouverts compacts (modulo le centre). Développant cette idée, Shaun Stevens [42] a décrit toutes les représentations irréductibles supercuspidales des groupes classiques connexes p-adiques (les groupes unitaires, les groupes symplectiques et les groupes spéciaux orthogonaux) lorsque la caractéristique résiduelle du corps de base est impaire. Parallèlement, les travaux de Vincent Sécherre [34] puis de Vincent Sécherre et Shaun Stevens [35] ont fourni une description des représentations supercuspidales des groupes linéaires généraux sur des algèbres à division sur des corps p-adiques. Suivant la méthode de Shaun Stevens, Laure Blasco et Corinne Blondel [3] ont très récemment construit une famille de représentations irréductibles supercuspidales des groupes exceptionnels G_2 p-adiques avec $p > 3$. Nous nous intéressons à adapter la construction de Shaun Stevens pour construire des représentations irréductibles supercuspidales de groupes spinoriels définis sur des corps p-adiques.

Soit $\widehat{G}$ un groupe spinoriel sur un corps local non-archimédien de caractéristique résiduelle impaire. Le but de la construction est de fabriquer des paires (J, λ) composées d'un sous-groupe ouvert compact J de $\widehat{G}$ et d'une représentation irréductible λ de J telles que la représentation induite compacte $\pi = c\text{-}\mathrm{Ind}_J^{\widehat{G}}\lambda$ est une représentation irréductible supercuspidale de $\widehat{G}$. De plus, nous espérons obtenir toutes les représentations irréductibles supercuspidales de $\widehat{G}$ par cette construction.

Les groupes spinoriels

Puisque les groupes spinoriels ne sont pas bien connus, nous voulons d'abord introduire ces groupes et des concepts reliés. Soit F un corps local localement compact non archimédien de caractéristique résiduelle p impaire et soit V un F-espace vectoriel de dimension finie N muni d'une forme bilinéaire symétrique non-dégénérée h. Notons q la forme quadratique associée à h. Soit C l'algèbre de Clifford définie par (V, h). C'est une algèbre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée, $C = C^+ \oplus C^-$, engendrée par V (vu comme un sous-espace) de dimension 2^N. On définit un automorphisme γ de C de sorte que $\gamma|_{C^+} = \mathrm{Id}_{C^+}$, $\gamma|_{C^-} = -\mathrm{Id}_{C^-}$ et $\gamma^2 = \mathrm{Id}_C$. Soit Γ le groupe des éléments inversibles u de C vérifiant $\gamma(u)Vu^{-1} = V$, appelé le *groupe de Clifford* de q. Chaque élément u de Γ induit une isométrie t_u de (V, h). En particulier, si u est un vecteur non-isotrope de V alors t_u est la réflexion de V par rapport à u. Nous avons donc un homomorphisme surjectif t_Γ de Γ sur le groupe des isométries, noté G^+, de (V, h). Cet homomorphisme a pour noyau $F^\times$. Il est bien connu que G^+ est engendré par les réflexions de V, Γ est donc engendré par les vecteurs non-isotropes de V. En particulier, tout élément du sous-groupe $\Gamma^+ = \Gamma \cap C^+$ est un produit d'un nombre pair de vecteurs non-isotropes de V et l'image de Γ^+ par l'homomorphisme t_Γ est le groupe des rotations, noté G, de (V, h). Il y a une norme Q définie sur Γ telle que $Q(x) = q(x)$ si x est un vecteur non-isotrope de V et que $Q(ku) = k^2 Q(u)$ pour tout $k \in F^\times$ et tout $u \in \Gamma$. Notons $\widehat{G}$ le noyau de la restriction de Q à Γ^+, autrement dit, $\widehat{G}$ est le sous-groupe de Γ^+ composé des éléments de norme 1.

Correspondant à la norme Q, on définit un homomorphisme sn de G^+ à valeur dans $F^\times/(F^\times)^2$. La restriction de cet homomorphisme à G induit une norme sur G, appelée *norme spinorielle*. Le noyau de cette norme est appelé *groupe orthogonal réduit*, noté $\mathrm{O}'(h)$. De plus, la restriction de l'homomorphisme t_Γ à $\widehat{G}$ induit un homomorphisme surjectif t de $\widehat{G}$ sur $\mathrm{O}'(h)$ de noyau fini d'ordre 2 contenu dans le centre. Autrement dit, nous avons une suite exacte de groupes :

$$1 \to \{\pm 1\} \to \widehat{G} \xrightarrow{t} \mathrm{O}'(h) \to 1.$$

Cette suite n'est pas scindée en général. Cependant, il y a un résultat qui joue le rôle d'une clef de cette thèse : la suite est scindée de manière unique au-dessus des pro-p-sous-groupes. C'est-à-dire, pour tout pro-p-sous-groupe H de G (H est donc contenu dans $\mathrm{O}'(h)$), il existe une unique section homomorphe $s_H : H \to \widehat{G}$ telle que $t \circ s_H = \mathrm{Id}_H$, où Id_H est l'homomorphisme d'identité de H. Cela entraîne que la suite est aussi scindée de manière unique au-dessus des radicaux unipotents des sous-groupes paraboliques de G. Pour simplifier, nous allons noter ${}_sH$ l'image dans $\widehat{G}$ d'un pro-p-sous-groupe (ou un radical unipotent) H de G ; et nous notons $\widehat{K}$ l'image inverse dans $\widehat{G}$ par l'homomorphisme t d'un sous-groupe quelconque K de G.

En passant sur une clôture algébrique de F, nous allons voir que $\widehat{G}$ est en fait le groupe des F-points rationnels d'un groupe algébrique réductif simplement connexe $\widehat{\mathbf{G}}$, appelé un *groupe spinoriel*, défini sur F, qui est une extension centrale d'un groupe orthogonal spécial $\mathbf{G}$ défini sur F dont G est le groupe des F-points rationnels. De plus, $\widehat{G}$ partage avec le groupe G l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et les points de l'immeuble de Bruhat-Tits $\mathcal{I}(G,F)$. L'action adjointe sur $\mathfrak{g}$ et l'action sur $\mathcal{I}(G,F)$ de $\widehat{G}$ se factorisent respectivement par celles de G.

Soit $\beta = \oplus_{i=1}^{l}\beta_i$ un élément de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ tel que la F-algèbre $E = F[\beta]$ est une somme directe d'extensions finies $E_i = F[\beta_i], i = 1,\dots,l$, de F. Dans notre construction, il est nécessaire que le fixateur $\widehat{G}_\beta$ de β dans $\widehat{G}$ sous l'action adjointe soit (le groupe des F-points rationnels d')un groupe réductif. Rappelons que le fixateur G_β de β dans G est le groupe des F-points rationnels d'un groupe réductif connexe qui est un produit de groupes linéaires généraux, de groupes unitaires et d'au plus un groupe orthogonal spécial [9]. Malheureusement, nous n'avons pas une description similaire pour le groupe $\widehat{G}_\beta$ (voir §2.3). De plus, nous avons très peu d'information sur $\widehat{G}_\beta$. Nous n'arrivons donc pas à voir que $\widehat{G}_\beta$ est un groupe réductif. Par la théorie générale des groupes réductifs, si les $E_i, i = 1,\dots,l$, sont des extensions finies séparables de F alors $\widehat{G}_\beta$ est le groupe des F-points d'un groupe réductif connexe défini sur une certaine extension de F. **Pour que $\widehat{G}_\beta$ soit un groupe réductif, nous devons donc supposer dans cette thèse que la caractéristique de F soit nulle**. Nous espérons supprimer dans le futur cette hypothèse.

La construction de représentations supercuspidales

Nous rappelons d'abord la notion dans [40] de *strate semi-simple gauche* $[\Lambda, n, m, \beta]$ dans $\mathfrak{g}$ associée à une décomposition orthogonale $V = \perp_{i=1}^{l} V^i$. C'est un ensemble de certaines données locales : β est un élément semi-simple elliptique de $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire, $E = F[\beta]$ est une somme directe d'extensions finies $E_i = F[\beta_i], 1 \le i \le l$, de F stables sous l'involution induite par h, où $\beta = \oplus_{i=1}^{l}\beta_i$; pour chaque $1 \le i \le l$, V^i est un E_i-espace vectoriel ; Λ est une suite autoduale de réseaux dans V attachée à un point rationnel x_Λ de l'immeuble de Bruhat-Tits $\mathcal{I}(\widehat{G}_\beta, F)$ de $\widehat{G}_\beta$; et n, m sont deux nombres entiers. La suite de réseaux Λ définit un sous-groupe ouvert compact $P(\Lambda)$ de G de radical pro-p-unipotent $P_1(\Lambda)$ et donc un sous-groupe ouvert compact $P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) = P(\Lambda) \cap G_\beta$ de G_β de radical pro-p-unipotent $P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) = P_1(\Lambda) \cap G_\beta$.

Attachés à une strate semi-simple gauche $[\Lambda, n, m, \beta]$ dans $\mathfrak{g}$, Shaun Stevens [41] a défini une suite décroissante $\{H^i(\beta,\Lambda)\}_{i\ge1}$ de pro-p-sous-groupes de G et un ensemble fini $\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$ de caractères abéliens de $H^{m+1}(\beta,\Lambda)$. Ces caractères généralisent les *caractères simples* pour les groupes linéaires généraux de [13] et ils sont appelés les *caractères semi-simples gauches*. Comme les caractères simples pour les groupes linéaires généraux, les caractères semi-simples gauches possèdent des “bonnes propriétés” d'entrelacement et des *propriétés de transfert*. Comme t induit sur les pro-p-sous-groupes des isomorphismes, nous définissons les caractères semi-simples pour $\widehat{G}$ de manière naturelle : en relevant les caractères semi-simples gauches, nous obtenons un ensemble de caractères abéliens de ${}_sH^{m+1}(\beta,\Lambda)$:

$$ {}_s\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta) = \{{}_s\theta = \theta \circ t|_{{}_sH^{m+1}(\beta,\Lambda)} : \theta \in \mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)\}. $$

Cet ensemble est appelé l'ensemble des *caractères semi-simples gauches relevés* de ${}_sH^{m+1}(\beta,\Lambda)$. Par définition, les propriétés de transfert des caractères semi-simples gauches se tranportent pour les caractères semi-simples gauches relevés. Par ailleurs, les propriétés d'entrelacement des caractères semi-simples gauches sont aussi préservées par un résultat général (lemme 3.6) : soient $\sigma_i, i=1,2$, deux représentations d'un pro-p-sous-groupe H de G. Posons ${}_s\sigma_i = \sigma_i \circ t|_{{}_sH}$ pour $i=1,2$. Alors

$$I_{\widehat{G}}({}_s\sigma_1, {}_s\sigma_2) = t^{-1}(I_G(\sigma_1,\sigma_2) \cap \mathrm{O}'(h))$$

et

$$I_{\overline{g}}({}_s\sigma_1, {}_s\sigma_2) = I_{t(\overline{g})}(\sigma_1,\sigma_2), \text{ pour tout } \overline{g} \in I_{\widehat{G}}({}_s\sigma_1, {}_s\sigma_2).$$

Nous décrivons maintenant la construction de représentations irréductibles supercuspidales de $\widehat{G}$. Rappelons que notre construction est l'adaptation de celle de [42] pour le groupe $\widehat{G}$. Nous partons donc d'une strate semi-simple gauche $[\Lambda, n, 0, \beta]$ dans $\mathfrak{g}$. Pour le groupe G, Shaun Stevens [41] a défini deux sous-groupes ouverts compacts $J(\beta,\Lambda) \supseteq J^1(\beta,\Lambda)$ contenant $H^1(\beta,\Lambda)$ et entrelaçant chaque caractère semi-simple gauche de $H^1(\beta,\Lambda)$, où $J^1(\beta,\Lambda)$ est un pro-p-sous-groupe et $J(\beta,\Lambda) = P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})J^1(\beta,\Lambda)$. Posons $\widehat{J}(\beta,\Lambda) = t^{-1}(J(\beta,\Lambda)\cap \mathrm{O}'(h))$. Alors $\widehat{J}(\beta,\Lambda)$ et ${}_sJ^1(\beta,\Lambda)$ jouent les mêmes rôles que $J(\beta,\Lambda)$ et $J^1(\beta,\Lambda)$. Les caractères semi-simples gauches relevés de ${}_sH^1(\beta,\Lambda)$ héritent des propriétés importantes des caractères semi-simples gauches de $H^1(\beta,\Lambda)$: pour chaque caractère semi-simple gauche relevé ${}_s\theta \in {}_s\mathcal{C}(\Lambda,0,\beta)$, il existe un unique prolongement ${}_s\eta$ de ${}_s\theta$ à ${}_sJ^1(\beta,\Lambda)$ (*extension de Heisenberg*) ; l'ensemble d'entrelacement de ${}_s\eta$ est celui de ${}_s\theta$; et, de plus, tout espace d'entrelacement de ${}_s\eta$ est de dimension 1.

L'étape suivante de la construction est de chercher des bons prolongements de ${}_s\eta$ à $\widehat{J}(\beta,\Lambda)$ - les *β-extensions*. De manière naturelle, nous définissons les β-extensions en relevant celles pour G définies par Shaun Stevens dans [42]. Autrement dit, nous cherchons les β-extensions dans l'ensemble des prolongements de ${}_s\eta$ qui sont triviaux sur le centre de l'extension. Nous vérifions ensuite que nos β-extensions respectent des propriétés nécessaires. Rappelons que, dans le cas où $P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ est un sous-groupe ouvert compact maximal de G_β, les β-extensions pour G généralisent celles pour les groupes linéaires généraux dans [13] et que, dans le cas général, en choisissant une suite de réseaux Λ^M dans V telle que $P(\Lambda^M_{\mathfrak{o}_E})$ est un sous-groupe ouvert compact maximal de G_β contenant $P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$, une β-extension κ de $J(\beta,\Lambda)$ correspondant à un caractère semi-simple gauche $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda,0,\beta)$ est définie en *compatibilité* avec une β-extension κ_M de $J(\beta,\Lambda^M)$ correspondant au transfert de θ dans $\mathcal{C}(\Lambda^M,0,\beta)$. Cette propriété de compatibilité est préservée pour nos β-extensions à $\widehat{J}(\beta,\Lambda)$: si $P(\Lambda^M)$ contient $P(\Lambda)$, la représentation $\widehat{\kappa} = \kappa \circ t|_{\widehat{J}(\beta,\Lambda)}$ est l'unique extension de ${}_s\eta$ à $\widehat{J}(\beta,\Lambda)$ qui vérifie la condition de compatibilité relativement à $\widehat{\kappa}_M = \kappa_M \circ t|_{\widehat{J}(\beta,\Lambda^M)}$

$$\mathrm{Ind}_{\widehat{J}(\beta,\Lambda)}^{\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})_sP_1(\Lambda)}\widehat{\kappa} \simeq \mathrm{Ind}_{\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})_sJ^1(\beta,\Lambda^M)}^{\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})_sP_1(\Lambda)}\widehat{\kappa}_M|_{\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})_sJ^1(\beta,\Lambda^M)}.$$

Comme dans [42], nous choisissons pour $\widehat{\kappa}$ une *β-extension standard* de ${}_s\eta$, c'est-à-dire, une β-extension de ${}_s\eta$ relativement à un bon choix de Λ^M.

La dernière étape de la construction est d'ajouter une pièce de niveau zéro. Noter que $\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ est le fixateur dans $\widehat{G}_\beta$ du point x_Λ et que ${}_sP_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ est son radical pro-p-unipotent. Le quotient $\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/{}_sP_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ est donc un groupe réductif $\widehat{M}$ défini sur un corps fini. Notons $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ l'image inverse de la composante connexe M de $\widehat{M}$ dans $\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ par l'application du quotient. $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ est un sous-groupe parahorique de $\widehat{G}_\beta$. De même, comme $\widehat{J}(\beta,\Lambda)/{}_sJ^1(\beta,\Lambda) \simeq \widehat{M}$, nous notons $\widehat{J}^o(\beta,\Lambda)$ l'image inverse dans $\widehat{J}(\beta,\Lambda)$ de M. Soit ρ^o l'inflation à $\widehat{J}^o(\beta,\Lambda)$ d'une représentation irréductible cuspidale de M et soit ρ une représentation irréductible de $\widehat{J}(\beta,\Lambda)$ contenant ρ^o. Les représentations ρ^o et ρ sont aussi dites *cuspidales*. Posons $\lambda = \widehat{\kappa} \otimes \rho$.

La paire $(\widehat{J}(\beta,\Lambda),\lambda)$ est dite un *type cuspidal* si le centre de $\widehat{G}_\beta$ est compact et si $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ est un sous-groupe parahorique maximal de $\widehat{G}_\beta$. Si $(\widehat{J}(\beta,\Lambda),\lambda)$ est un type cuspidal, nous allons voir que l'entrelacement de λ est $\widehat{J}(\beta,\Lambda)$. En particulier, l'induite compacte $\pi = c\text{-}\mathrm{Ind}_{\widehat{J}(\beta,\Lambda)}^{\widehat{G}}\lambda$ est irréductible supercuspidale et $(\widehat{J}(\beta,\Lambda),\lambda)$ est un $[\widehat{G},\pi]_{\widehat{G}}$-type au sens de [14]. L'idée du calcul de l'entrelacement de λ est la même que dans [42] : nous pouvons d'abord restreindre à l'entrelacement de $\lambda^o = \widehat{\kappa} \otimes \rho^o$ en utilisant la théorie de réductibilité de Clifford [18] ; ensuite, en remarquant que l'entrelacement de la restriction de $\widehat{\kappa}$ à un pro-p-sous-groupe de Sylow est celui de ${}_s\eta$, nous pouvons restreindre encore à l'entrelacement de la restriction de ρ^o au radical unipotent d'un sous-groupe d'Iwahori de $\widehat{G}_\beta$ contenu dans $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$; par [42, Proposition 1.1], l'hypothèse de maximalité de $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ nous permet de restreindre l'entrelacement au normalisateur de $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ dans $\widehat{G}_\beta$; enfin, puisque le centre de $\widehat{G}_\beta$ est compact, $\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ est le normalisateur de $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$.

Le problème d'exhaustivité

Comme pour les groupes classiques, nous espérons montrer que toute représentation irréductible supercuspidale π de $\widehat{G}$ contient un type cuspidal. Autrement dit, nous espérons montrer que nous pouvons obtenir toutes les représentations irréductibles supercuspidales de $\widehat{G}$ par notre construction au-dessus. Nous suivons toujours l'idée de [42] (après celle de [13]). Cette idée comporte trois étapes principales : montrer que π contient une strate semi-simple gauche ; montrer que π contient un caractère semi-simple gauche relevé dans un certain ${}_s\mathcal{C}(\Lambda,0,\beta)$; montrer que π contient un type cuspidal.

Par définition des caractères semi-simples gauches relevés, nous voyons que les deux premières étapes sont en fait totalement identiques à celles du cas des groupes classiques. Précisément, le résultat de [40] est parfaitement adapté à la première étape alors que celui de [41] est transporté à la deuxième par les sections homomorphes des pro-p-sous-groupes. L'idée pour la première étape : d'abord, d'après un résultat de Allen Moy et Gopal Prasad [28], la représentation π contient une *strate fondamentale* dans $\mathfrak{g}$, de plus, on peut montrer que cette strate n'est pas *G-scindée* au sens de [40] ; ensuite, par [40, Théorème 4.4], on peut raffiner cette strate pour obtenir une strate semi-simple gauche $[\Lambda,n,n-1,\beta]$ contenue dans π. Alors, la représentation π contient un caractère semi-simple gauche relevé de ${}_sH^n(\beta,\Lambda)$. L'idée pour la deuxième étape est de prolonger ce caractère pour obtenir un caractère semi-simple gauche relevé de ${}_sH^{n-1}(\beta,\Lambda)$ qui est aussi contenu dans π et répéter cette procédure pour trouver un caractère semi-simple gauche relevé ${}_s\theta \in {}_s\mathcal{C}(\Lambda,0,\beta)$ qui est contenu dans π.

Pour la dernière étape, nous suivons l'idée de [42, §7]. Cependant, il y a des détails plus compliqués. D'abord, nous pouvons voir que π contient une représentation $\vartheta = \widehat{\kappa} \otimes \rho$ de $\widehat{J}^o(\beta, \Lambda)$, où $\widehat{\kappa}$ est une β-extension standard et ρ est une représentation cuspidale. Ensuite, nous utilisons l'absurde : en supposant que $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ n'est pas maximal ou que le centre de $\widehat{G}_\beta$ n'est pas compact, nous devons montrer que π n'est pas supercuspidale, donc une contradiction.

Pour montrer que π n'est pas supercuspidale, nous utilisons la méthode de *paires couvrantes* de Bushnell-Kutzko [14] : chercher une paire couvrante contenue dans π. Utilisant la notion de *décomposition exactement subordonnée à la strate* de V de [42], nous pouvons choisir un sous-groupe de Levi $\widehat{L}$ de $\widehat{G}$ tel que, pour tout sous-groupe parabolique $\widehat{P}$ de facteur de Levi $\widehat{L}$, le sous-groupe $\widehat{J}^o(\beta, \Lambda)$ admet une décomposition d'Iwahori relativement à $(\widehat{L}, \widehat{P})$. Noter que, dans le cas où $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ est un sous-groupe parahorique maximal de $\widehat{G}_\beta$, nous avons $\widehat{L} = \widehat{G}$. Comme dans [42], pour un sous-groupe parabolique $\widehat{P} = \widehat{L}_s U$, nous définissons

$$\widehat{J}^o_{\widehat{P}} = {}_sH^1(\beta, \Lambda)(\widehat{J}^o(\beta, \Lambda) \cap \widehat{P})$$

et notons $\vartheta_{\widehat{P}}$ la représentation naturelle de $\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$ sur l'espace des vecteurs de ϑ fixés par $\widehat{J}^o(\beta, \Lambda) \cap {}_sU$. Alors $\vartheta_{\widehat{P}}$ est triviale sur le radical unipotent de tout sous-groupe parabolique de facteur de Levi $\widehat{L}$ et sa restriction sur $\widehat{J}^o_{\widehat{P}} \cap \widehat{L}$ est irréductible. Autrement dit, $(\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ est une *paire décomposée*. De plus, la restriction de π à $\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$ contient $\vartheta_{\widehat{P}}$. L'idée est de montrer que $(\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ est une paire couvrante. Il nous reste à chercher un sous-groupe de Levi $\widehat{L}^M$ de $\widehat{G}$ contenant $\widehat{L}$ et un sous-groupe parabolique $\widehat{P}^M$ de $\widehat{G}$ de facteur de Levi $\widehat{L}^M$ tels qu'il existe un élément inversible de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\widehat{G}, \widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ qui a pour support $\widehat{J}^o_{\widehat{P}} \widehat{\zeta} \widehat{J}^o_{\widehat{P}}$, où $\widehat{\zeta}$ est un élément fortement positif relativement à $(\widehat{P}^M, \widehat{J}^o_{\widehat{P}})$ du centre de $\widehat{L}^M$.

Dans le cas où le centre de $\widehat{G}_\beta$ n'est pas compact, $\widehat{G}_\beta$ est contenu dans un sous-groupe de Levi propre $\widehat{L}^M$ de $\widehat{G}$. En particulier, nous avons

$$I_{\widehat{G}}(\vartheta_{\widehat{P}}) \subseteq \widehat{J}^o_{\widehat{P}} \widehat{L}^M \widehat{J}^o_{\widehat{P}}.$$

Alors tout élément fortement positif relativement à $(\widehat{P}^M, \widehat{J}^o_{\widehat{P}})$ du centre de $\widehat{L}^M$ supporte un élément inversible de $\mathcal{H}(\widehat{G}, \widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ [14, Théorème 7.2]. Ainsi, $(\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ est une paire couvrante de $(\widehat{J}^o_{\widehat{P}} \cap \widehat{L}^M, \vartheta_{\widehat{P}}|_{\widehat{J}^o_{\widehat{P}} \cap \widehat{L}^M})$.

Dans le cas où le sous-groupe parahorique $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ n'est pas maximal, le sous-groupe $\widehat{L}$ choisi est un sous-groupe de Levi propre de $\widehat{G}$ - le stabilisateur d'une *décomposition autoduale* $V = \oplus_{j=-m}^m W^{(j)}$ qui est exactement subordonnée à la strate. Pour ce cas, nous pouvons restreindre l'entrelacement de $\vartheta_{\widehat{P}}$ à l'entrelacement de ρ dans un groupe engendré par une famille d'*éléments de groupe de Weyl* $\widehat{s_j}, \widehat{s_j^\varpi}, \widehat{s_{j,k}}, j, k = 1, \ldots, m$, relativement à la décomposition. Ces éléments sont des relèvements dans Γ des éléments $s_j, s_j^\varpi, s_{j,k}$ de [42]. Cependant, contrairement au cas des groupes classiques, il peut arriver des situations plus compliquées :

(i) même si ces éléments ne normalisent pas ρ, leurs produits peuvent normaliser ρ. En effet, on n'a pas toujours de décomposition du quotient $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/{}_sP_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$

en produit direct et donc on n'a pas toujours de décomposition de ρ, vue comme représentation de ce quotient, en produit tensoriel ;

(ii) deux éléments s_j et s_j^{ϖ} sont tous les deux soit des rotations soit des retournements. Cependant, leurs normes spinorielles ne sont pas toujours les mêmes. Il peut donc arriver que $\widehat{s_j} \in \widehat{G}$ mais $\widehat{s_j^{\varpi}} \notin \widehat{G}$ ou que tous les deux ne sont pas dans $\widehat{G}$.

Ces difficultés supplémentaires sont l'obstruction de notre démonstration.

On considère, par exemple, le cas qui est semblable au cas de [42, §7.2.1], c'est-à-dire, le cas où il existe un élément $\widehat{s_k}$ qui ne normalise pas ρ. On définit un ensemble d'indices J semblable à l'ensemble J qui, dans *loc. cit.*, permet de construire un sous-groupe de Levi L^M supportant l'entrelacement de ρ. Ici, il peut arriver qu'il existe un indice j tel que $\pm j \in J$ ce qui empêche de construire un tel sous-groupe de Levi. En fait, ce cas survient quand $\widehat{s_{j,k}}$ et le produit $\widehat{s_k}\widehat{s_j}$ normalisent ρ (c'est impossible dans *loc. cit.*). Même si $-j \notin J$ pour tout $j \in J$, nous n'avons pas réussi à voir s'il existe un sous-groupe de Levi convenable.

Notons que, comme la décomposition $V = \oplus_{j=-m}^{m} W^{(j)}$ est exactement subordonnée à la strate, pour tout $j \neq 0$, il existe un indice $i = i_j$ tel que $W^{(j)}$ est contenu dans le E_i-espace V^i. Soit $E_{i,0}$ le sous corps des points fixes de E_i par l'involution. Lorsqu'il existe un indice $j \neq 0$ tel que $E_i/E_{i,0}$, où $i = i_j$, est une extension quadratique ramifiée, on montre qu'il existe une décomposition du quotient $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/{}_sP_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ en produit direct et donc une décomposition de ρ en produit tensoriel (le corollaire 4.37). On peut alors trouver un sous-groupe de Levi convenable et on peut conclure (la proposition 4.34).

Sinon, on distingue plusieurs cas dont deux sont résolus :

Cas 1 : il existe un indice $j > 0$ tel que $\widehat{s_j}$ normalise ρ et que $\widehat{s_j}$ appartienne à $\widehat{G}$. Alors $\widehat{s_j^{\varpi}}$ appartient aussi à $\widehat{G}$. En utilisant la construction de [42, §7.2.2], on trouve un bon sous-groupe de Levi.

Cas 2 : il existe deux indices non nuls j et k tels que $i_j = i_k$, que la norme spinorielle de $s_j s_k$ est triviale et que le produit $\widehat{s_j}\widehat{s_k}$ normalise ρ. Utilisons encore la construction de *loc. cit.*, nous trouverons un sous-groupe de Levi convenable.

Nous espérons résoudre dans un travail ultérieur les situations qui restent.

Plan de la thèse

Cette thèse contient quatre chapitres : un chapitre de préliminaires et trois chapitres principaux.

Chapitre 1 : Préliminaires

Le premier chapitre est consacré à des rappels sur les notions utilisées dans cette thèse. Dans la première section, nous donnons quelques notations générales et quelques conventions pour toute la suite. Nous rappelons dans la deuxième section la théorie générale des représentations complexes de groupes algébriques réductifs et la théorie des types de Bushnell-Kutzko. Dans la troisième section, nous rappelons quelques éléments de la théorie des immeubles de Bruhat-Tits des groupes algébriques réductifs connexes, en particulier, quelques propriétés des sous-groupes paraboliques et des sous-groupes parahoriques d'un groupe réductif.

Chapitre 2 : Groupes spinoriels

Comme le groupe spinoriel n'est pas bien connu, nous utilisons ce deuxième chapitre pour le présenter et établir des propriétés importantes qui servent dans toute la suite.

Dans la première section, nous présentons la définition des groupes spinoriels et quelques propriétés de base. Nous rappelons d'abord les notions d'algèbres de Clifford, de groupes de Clifford et de groupes spinoriels. Ensuite, nous décrivons la structure des groupes de Clifford et démontrons que le groupe spinoriel, en tant que groupe algébrique, est un groupe simplement connexe (c'est une extension centrale d'un groupe spécial orthogonal). Nous présentons ensuite des critères de calculs de la norme spinorielle sur un groupe orthogonal. Enfin, nous nous familiarisons avec les calculs dans le groupe spinoriel avec deux exemples simples : le premier exemple est de construire un paramétrage pour le groupe $\mathrm{Spin}_F(1,1)$; le deuxième est de construire un paramétrage d'un tore déployé maximal du groupe $\mathrm{Spin}_F(2,2)$.

Dans la deuxième section, nous présentons une propriété importante qui joue le rôle d'une clef de cette thèse : l'extension est scindée au-dessus des pro-p-sous-groupes et des radicaux unipotents de sous-groupes paraboliques.

La dernière section du chapitre est consacrée à l'étude du centralisateur d'un élément semi-simple de l'algèbre de Lie. En particulier, nous démontrons une relation entre la norme spinorielle sur un groupe spécial orthogonal et la norme spinorielle sur un groupe unitaire que l'on l'appelle la norme de Wall pour éviter des confusions.

Chapitre 3 : Construction de représentations supercuspidales

La première section est formée de rappels sur la notion de strate semi-simple autoduale. C'est la notion initiale de la construction.

Dans la deuxième section, on définit les caractères semi-simples pour le groupe spinoriel. Ensuite, on démontre des propriétés d'entrelacement et des propriétés de transfert des caractères semi-simples.

On établit dans la troisième section l'existence, l'unicité et des propriétés d'entrelacement des extensions de Heisenberg d'un caractère semi-simple.

Dans la quatrième section, on définit les β-extensions d'un caractère semi-simple. On démontre également la propriété de compatibilité des β-extensions.

Dans la dernière section, on construit un type cuspidal à partir d'une β-extension standard d'un caractère semi-simple.

Chapitre 4 : Problème d'exhaustivité

Ce chapitre franchit des étapes importantes en direction d'une démonstration de l'exhaustivité de notre construction. Dans la première section, on démontre d'abord que toute représentation irréductible supercuspidale du groupe spinoriel contient une strate semi-simple gauche, c'est-à-dire, l'exhaustivité des strates semi-simples gauches.

La deuxième section est consacrée à la démonstration de l'exhaustivité des caractères semi-simples gauches relevés.

La troisième section étudie des objets techniques qui servent à la démonstration de l'exhaustivité des types cuspidaux : des morphismes d'algèbres de Hecke ; des éléments de groupe de Weyl $\widehat{s_j}, \widehat{s_{j,k}}$; des espaces d'entrelacements ; etc.

Dans la dernière section, on démontre d'abord que toute représentation irréductible supercuspidale du groupe spinoriel contient un produit tensoriel d'une β-extension standard et d'une représentation cuspidale de niveau zéro. On présente ensuite la stratégie de démontration par l'absurde de l'exhaustivité des types cuspidaux utilisée dans le cas des groupes classiques et on détaille les obstacles rencontrés pour les groupes spinoriels. Enfin, on présente les résultats partiels obtenus.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce premier chapitre, nous rappelons des notions et des résultats élémentaires que nous allons utiliser dans la suite de la thèse. Nous allons également fixer les notations pour les chapitres qui suivent.

1.1 Notations et conventions

Dans cette thèse, nous travaillons avec un corps local non archimédien F muni d'une valuation discrète ν, qui est normalisée de sorte que $\nu(F^\times)$ est le groupe additif des entiers, et nous noterons $\mathfrak{o}_F$ son anneau des entiers muni d'une valuation discrète, $\mathfrak{p}_F$ l'idéal maximal de $\mathfrak{o}_F$. Nous fixerons une uniformisante $\varpi_F \in F^\times$ de F telle que $\mathfrak{p}_F = \varpi_F \mathfrak{o}_F$. Nous noterons aussi $k_F = \mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F$ le corps résiduel de F qui sera supposé de caractéristique impaire p. On supposera de plus que k_F soit fini de cardinal q_F, ou en équivalence, que F soit localement compact. À partir de la fin de paragraphe 3.1.3, nous supposerons de plus que la caractéristique de F soit nulle. Si E est une extension finie de F, on gardera ces notations par rapport à E.

Nous fixerons dans cette thèse un caractère additif lisse non trivial ψ_F de F qui est trivial sur $\mathfrak{p}_F$ et qui n'est pas trivial sur $\mathfrak{o}_F$. Nous avons aussi une convention que toute représentation considérée dans cette thèse sera complexe et lisse.

1.2 Représentations supercuspidales et types

Tout d'abord, nous voulons rappeler des notions et bien sûr des résultats sur les représentations supercuspidales, et en particulier sur la méthode de construction de telles représentations par le moyen de types. Pour tous les détails, on peut trouver dans [14], et [17].

1.2.1 Représentations supercuspidales

Soient F un corps local non archimédien, G le groupe des points F-rationnels d'un groupe algébrique réductif connexe défini sur F. Soit $(\pi, \mathcal{V})$ une représentation complexe de G. Cette représentation est dite *lisse* si, pour tout vecteur v de $\mathcal{V}$, il existe un sous-groupe ouvert compact K de G tel que v soit fixé par tous les élément de K. En équivalence, on a

$$\mathcal{V} = \bigcup_K \mathcal{V}^K,$$

où $\mathcal{V}^K$ est l'espace des points fixes de K dans $\mathcal{V}$ et K varie dans l'ensemble des sous-groupes ouverts compacts de G. Si, de plus, l'espace $\mathcal{V}^K$ est de dimension finie, pour tout sous-groupe ouvert compact K de G, alors la représentation lisse $(\pi, \mathcal{V})$ est dite *admissible*.

Pour deux représentations lisses $(\pi_1, \mathcal{V}_1)$ et $(\pi_2, \mathcal{V}_2)$ de G, on définit l'ensemble $\mathrm{Hom}_G(\pi_1, \pi_2)$ des applications linéaires $f : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$ G-invariantes, c'est-à-dire :

$$f \circ \pi_1(g) = \pi_2(g) \circ f, \forall g \in G.$$

Avec cette définition, l'ensemble des représentations lisses de G forme une catégorie $\mathrm{Rep}(G)$. De plus, c'est une catégorie abélienne. On dit que deux représentations $(\pi_1, \mathcal{V}_1)$ et $(\pi_2, \mathcal{V}_2)$ de G sont *isomorphes*, ou *équivalentes*, s'il existe un isomorphisme G-invariant $f : \mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}_2$.

Soient H un sous-groupe fermé de G et $(\sigma, \mathcal{W})$ une représentation lisse de H. On désigne par $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ l'espace des fonctions $f : G \to \mathcal{W}$ telles que

(i) $f(hg) = \sigma(h) f(g)$ pour tout $h \in H, g \in G$, et

(ii) Il existe un sous-groupe ouvert compact K de G tel que $f(gk) = f(g)$, pour tout $g \in G, k \in K$.

Le groupe G agit sur cet espace par la translation à droite. Il est facile de voir que, avec cette action, $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ est une représentation lisse de G, appelée la *représentation induite* par σ, et que l'application $\sigma \mapsto \mathrm{Ind}_H^G \sigma$ donne un foncteur

$$\mathrm{Ind}_H^G : \mathrm{Rep}(H) \to \mathrm{Rep}(G),$$

appelé le foncteur *induction lisse*. Ce foncteur est additif et exact.

Rappelons qu'on a un H-morphisme surjectif, de $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ à $\mathcal{W}$, défini par $f \mapsto f(1_G)$ et que la composition avec ce morphisme induit, pour toute représentation lisse $\mathcal{V}$ de G, un isomorphisme entre $\mathrm{Hom}_G(\mathcal{V}, \mathrm{Ind}_H^G \sigma)$ et $\mathrm{Hom}_H(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ (la réciprocité de Frobenius).

Notons c-$\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ le sous-espace de $\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ formé des fonctions à support compact modulo H. Il est facile de voir que c-Ind_H^G est stable sous l'action du groupe G et qu'il donne donc une autre représentation lisse de G. On a aussi un autre foncteur additif et exact

$$c\text{-}\mathrm{Ind}_H^G : \mathrm{Rep}(H) \to \mathrm{Rep}(G).$$

Ce foncteur s'appelle *induction compacte*.

Si $H \backslash G$ est compact et la représentation $(\sigma, \mathcal{W})$ est admissible alors $\mathrm{Ind}_H^G \sigma = c$-$\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ et elles sont admissibles.

Si H est un sous-groupe ouvert de G alors c-$\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ se compose des fonctions $f : G \to \mathcal{W}$, à support compact modulo H, telles que $f(hg) = \sigma(h) f(g), h \in H, g \in G$. De plus, si H est un sous-groupe ouvert de G, il y a un H-isomorphisme de $\mathcal{W}$ dans l'espace des fonctions $f \in c$-$\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ telles que $\mathrm{supp} f \subset H$ qui, à un vecteur $w \in \mathcal{W}$, fait correspondre la fonction $f_w \in c$-$\mathrm{Ind}_H^G \sigma$ à support dans H telle que $f_w(h) = \sigma(h) w, h \in H$. L'inverse de cet isomorphisme est défini par $f \mapsto f(1_G)$.

On considère, en particulier, le cas où H est un sous-groupe parabolique de G. Soit $P = LU$ un sous-groupe parabolique de G de radical unipotent U et de facteur de Levi L. Si $(\sigma, \mathcal{W})$ est une représentation lisse de L, elle est aussi vue comme une représentation lisse de P qui est triviale sur U. La représentation $\mathrm{Ind}_P^G\sigma$ est dite l'*induction parabolique* de σ à G. Remarquons que si σ est admissible alors $\mathrm{Ind}_P^G\sigma$ l'est aussi car $P\backslash G$ est compact.

Soient $(\pi, \mathcal{V})$ une représentation lisse de G et $\mathcal{V}(U)$ le sous-espace de $\mathcal{V}$ engendré par les éléments de la forme $\pi(u)v - v$, pour $u \in U$ et $v \in \mathcal{V}$. L'espace $\mathcal{V}_U = \mathcal{V}/\mathcal{V}(U)$ est naturellement l'espace d'une représentation lisse $(\pi_U, \mathcal{V}_U)$ du quotient $L = P/U$. La représentation $(\pi_U, \mathcal{V}_U)$ s'appelle le *module de Jacquet* de $(\pi, \mathcal{V})$ associé à P. Avec cette définition, on a un foncteur exact et additif, appelé le *foncteur de Jacquet*,

$$\begin{aligned} \mathrm{Rep}(G) &\to \mathrm{Rep}(L) \\ (\pi, \mathcal{V}) &\mapsto (\pi_U, \mathcal{V}_U). \end{aligned}$$

Si $(\pi, \mathcal{V})$ est une représentation lisse de G alors la réciprocité de Frobenius donne un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_G(\mathcal{V}, \mathrm{Ind}_P^G\sigma) \cong \mathrm{Hom}_L(\mathcal{V}_U, \sigma).$$

Cela implique que s'il y a un G-morphisme non nul de $\mathcal{V}$ dans $\mathrm{Ind}_P^G\sigma$ alors $\mathcal{V}_U$ est non nul.

Définition 1.1. Une représentation lisse irréductible $(\pi, \mathcal{V})$ de G est appelée *supercuspidale* si le module de Jacquet $\mathcal{V}_U$ est nul pour tout sous-groupe parabolique propre $P = LU$ de G. Si, au contraire, $\mathcal{V}_U$ est non nul pour certain sous-groupe parabolique propre $P = LU$ de G, on dit que π est une représentation dans les *séries principales*.

Par la réciprocité de Frobenius, une représentation lisse irréductible $(\pi, \mathcal{V})$ de G est supercuspidale si et seulement si il n'existe aucun G-morphisme non trivial de $\mathcal{V}$ dans une représentation induite parabolique de G.

Choisissons une mesure de Haar sur G. Soit $P = LU$ un sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi L et radical unipotent U, soit $\delta_P : P \to L \to \mathbb{C}^\times$ le module de P (défini par la mesure de Haar choisie), et soit $(\sigma, \mathcal{W})$ une représentation lisse de L. On définit $\iota_P^G\sigma = \mathrm{Ind}_P^G(\delta_P^{\frac{1}{2}} \otimes \sigma)$ et on l'appelle *induction normalisée*. On a un fait que si $(\pi, \mathcal{V})$ est une représentation lisse irréductible de G alors il existe un sous-groupe parabolique $P = LN$ de G de facteur de Levi L et une représentation supercuspidale irréductible σ de L tels que π soit équivalente à un sous quotient de $\iota_P^G\sigma$ (voir [17, Theorem 5.1.2]).

Remarquons qu'une représentation lisse irréductible π de G est dite *cuspidale* si elle est équivalente à un quotient d'une représentation induite parabolique $\iota_P^G\sigma$ de G. Comme toute représentation considérée dans cette thèse est complexe, une représentation cuspidale est aussi supercuspidale.

Pour $i = 1, 2$, soit σ_i une représentation d'un sous-groupe H_i de G. Pour $g \in G$, l'espace $\mathrm{Hom}_{{}^gH_1 \cap H_2}({}^g\sigma_1, \sigma_2)$, où ${}^gH_1 = gH_1g^{-1}$ et ${}^g\sigma$ est la représentation $x \mapsto \sigma_1(g^{-1}xg)$ de ${}^gH_1$, est appelé l'espace d'entrelacement en g de σ_1 avec σ_2 et est noté $I_g(\sigma_1, \sigma_2)$. On dit qu'un élément g de G entrelace σ_1 avec σ_2 si $I_g(\sigma_1, \sigma_2) \neq 0$. Posons

$$I_G(\sigma_1, \sigma_2) = \{g \in G : I_g(\sigma_1, \sigma_2) \neq 0\}.$$

Si $H_1 = H_2$ et $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, on note $I_g(\sigma), I_G(\sigma)$ au lieu de $I_g(\sigma,\sigma), I_G(\sigma,\sigma)$, respectivement, et si $g \in I_G(\sigma)$ alors on dit qu'il entrelace σ.

Le critère suivant nous permet de construire une représentation irréductible supercuspidale de G à partir d'une représentation lisse irréductible d'un sous-groupe ouvert compact modulo le centre de G.

Théorème 1.2 ([16, Proposition 1.5, (1)])**.** *Soient H un sous-groupe ouvert compact modulo le centre de G et σ une représentation lisse irréductible de H. Si $I_G(\sigma) \subset H$ alors la représentation induite compacte $\pi = c\text{-}\mathrm{Ind}_H^G(\sigma)$ est admissible irréductible supercuspidale.*

1.2.2 Types dans les groupes réductifs

Considérons maintenant les couples (L, σ) qui se composent d'un sous-groupe de Levi L de G et d'une représentation irréductible supercuspidale σ de L. On définit dans l'ensemble des tels couples une relation d'équivalence : deux tels couples (L_1, σ_1) et (L_2, σ_2) sont dits équivalents s'il existe un élément $g \in G$ et un quasi-caractère non ramifié χ de L_2 tels que

$$L_2 = {}^gL_1 \qquad \text{et} \qquad {}^g\sigma_1 \cong \sigma_2 \otimes \chi.$$

Les classes de cette relation sont appelées *classes d'inertie*. On désigne par $[L, \sigma]_G$ la classe d'inertie du couple (L, σ) et par $\mathcal{B}(G)$ l'ensemble des classes d'inertie dans G.

Soit $(\pi, \mathcal{V})$ une représentation lisse irréductible de G. Soit $P = LU$ un sous-groupe parabolique de G et σ une représentation supercuspidale irréductible du sous-groupe de Levi L tels que π est équivalente à un sous-quotient de $\iota_P^G\sigma$. Alors la classe d'inertie $[L, \sigma]$ est uniquement déterminée par $(\pi, \mathcal{V})$. On l'appelle le *support d'inertie* de π et note $\mathcal{J}(\pi)$.

Définition 1.3 ([14, (4.2)])**.** Soient $\mathfrak{S}$ une partie finie de $\mathcal{B}(G)$, K un sous-groupe ouvert compact de G et σ une représentation lisse irréductible de K. Le couple (K, σ) est dit un $\mathfrak{S}$-*type* dans G si, pour toute représentation lisse irréductible $(\pi, \mathcal{V})$ de G, on a $\mathcal{J}(\pi) \in \mathfrak{S}$ si et seulement si π contient σ. Si $\mathfrak{S}$ n'a qu'une seule classe $\mathfrak{s} = [L, \sigma]_G$, on dit que le couple (K, σ) est un $\mathfrak{s}$-*type* au lieu de $\{\mathfrak{s}\}$-type.

Nous nous intéressons aux $\mathfrak{s}$-types où $\mathfrak{s}$ est une *classe supercuspidale*, c'est-à-dire $\mathfrak{s} = [G, \pi]_G$, où π est une représentation irréductible supercuspidale de G. Dans ce cas, Bushnell et Kutzko [14, Proposition 5.2] ont montré que si $\mathfrak{s}$ admet un type alors la représentation π est très proche d'une représentation induite compacte d'un sous-groupe ouvert compact modulo le centre de G. De plus, ils ont montré [14, Proposition 5.4] que si π est une représentation irréductible supercuspidale de G de la forme $\pi = c\text{-}\mathrm{Ind}_{\widetilde{J}}^G(\tilde{\sigma})$ pour une représentation $\tilde{\sigma}$ d'un certain sous-groupe ouvert compact modulo le centre $\widetilde{J}$ de G alors (J, σ)est un $[G, \pi]_G$-type dans G, où J est l'unique sous-groupe compact maximal de $\widetilde{J}$ et où σ est une compsante irréductible de $\tilde{\sigma}|_J$.

1.2.3 Algèbres de Hecke et paires couvrantes

Fixons sur G une mesure de Haar dg. Soient K un sous-groupe ouvert compact de G et $(\sigma, \mathcal{W})$ une représentation lisse irréductible de K. On note $\mathcal{H}(G, K, \sigma)$ l'espace des fonctions lisses à support compact $\Phi : G \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}\mathcal{W}$ qui vérifient

$$\Phi(k_1 g k_2) = \sigma(k_1)\Phi(g)\sigma(k_2), k_1 \in K, k_2 \in K, g \in G.$$

C'est une $\mathbb{C}$-algèbre associative unitaire de convolution standard

$$\Phi_1 * \Phi_2(x) = \int_G \Phi_1(g)\Phi_2(g^{-1}x)dg.$$

Une relation très importante entre cette algèbre et l'entrelacement de σ dans G est qu'un élément g de G entrelace σ si et seulement s'il existe une fonction $\Phi \in \mathcal{H}(G, K, \sigma)$ dont le support contient g (voir [13, Proposition 4.1.1]).

Soient L un sous-groupe de Levi propre de G et $P = LU$ un sous-groupe parabolique de G de radical unipotent U. On désigne par P^- le sous-groupe parabolique de G opposé de P par rapport à L et par U^- son radical unipotent. On fixe un sous-groupe ouvert compact J_L de L et une représentation lisse irréductible σ_L de J_L dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{W}$.

Soient J un sous-groupe ouvert compact de G et σ une représentation lisse irréductible de J. Posons $J^+ = J \cap U$ et $J^- = J \cap U^-$. La paire (J, σ) est dite une *paire décomposée au-dessus de* (J_L, σ_L) *relativement à* P si les deux conditions suivantes sont vérifiées

(i) $J \cap L = J_L$ et $J = J^- J_L J^+$;

(ii) la restriction de σ à L est égale à σ_L et σ est triviale sur J^+ et J^-.

C. Bushnell et P. Kutzko [14, Proposition 6.3] ont montré que si (J, σ) est une paire décomposée au-dessus de (J_L, σ_L) relativement à P alors

$$I_L(\sigma_L) = I_G(\sigma) \cap L,$$

c'est-à-dire qu'un élément z de L entrelace σ si et seulement s'il entrelace σ_L. De plus, il existe un homomorphisme injectif d'espaces vectoriels,

$$T : \mathcal{H}(L, J_L, \sigma_L) \to \mathcal{H}(G, J, \sigma),$$

qui à une fonction $\phi \in \mathcal{H}(L, J_L, \sigma_L)$ à support $J_L z J_L$ pour un certain $z \in L$ associe l'unique fonction $\Phi \in \mathcal{H}(G, J, \sigma)$ dont le support est contenu dans JzJ telle que $\Phi(z) = \phi(z)$.

Soit Z^{++} l'ensemble des éléments z du centre de L tels que

$$zJ^+z^{-1} \subset J^+, \quad zJ^-z^{-1} \supset J^-$$

et pour tous sous-groupes compacts H_1, H_2 de U (respectivement U^-) il existe un entier positif (respectivement négatif) tel que $z^m H_1 z^{-m} \subset H_2$. C'est un sous-ensemble non vide du centre de L (voir [14, (6.14)]). Les éléments de Z^{++} sont dits *fortement positifs relativement à* (P, J).

Une paire décomposée (J, σ) au-dessus de (J_L, σ_L) relativement à P sera dite une *paire couvrante de* (J_L, σ_L) *relativement à* (P, J) s'il existe un élément inversible de $\mathcal{H}(G, J, \sigma)$ de support $Jz^{-1}J$ pour un certain élément z de Z^{++}.

Si (J, σ) est une paire couvrante de (J_L, σ_L) relativement à $P = LU$ alors l'homomorphisme T se prolonge uniquement à un homomorphisme injectif $t : \mathcal{H}(L, J_L, \sigma_L) \to \mathcal{H}(G, J, \sigma)$ de $\mathbb{C}$-algèbres unitaires [14, Théorème 7.2]. De plus, pour toute représentation lisse $(\pi, \mathcal{V})$ de G, l'application canonique r_U de $\mathcal{V}$ dans le module de Jacquet $\mathcal{V}_U$ de $\mathcal{V}$ induit un isomorphisme $\mathcal{V}^\sigma \cong \mathcal{V}_U^{\sigma_L}$, de la composante isotypique de type σ de $\mathcal{V}$ dans celle de type σ_L de $\mathcal{V}_U$, et il y a un isomorphisme de $\mathrm{Hom}_J(\sigma, \mathcal{V})$ dans $\mathrm{Hom}_{J_L}(\sigma, \mathcal{V}_U)$ [14, Theorem 7.9]. Cela implique qu'une paire couvrante d'un type de L est un type de G [14, Theorem 8.3].

Supposons que (J, σ) est une paire décomposée comme ci-dessus et que

$$\mathcal{H}(G, J, \sigma)_L = \{f \in \mathcal{H}(G, J, \sigma) : \mathrm{supp} f \subset JLJ\},$$

où $\mathrm{supp} f$ désigne le support de f, est une sous algèbre de $\mathcal{H}(G, J, \sigma)$. Cette hypothèse est réalisée, en particulier, si $I_G(\sigma) \subset JLJ$ ou, en équivalence, si $\mathcal{H}(G, J, \sigma)_L = \mathcal{H}(G, J, \sigma)$. C. Bushnell et P. Kutzko [14, Théorème 7.2] ont également montré que toute fonction dans $\mathcal{H}(G, J, \sigma)$ ayant le support $Jz^{-1}J$, où z est un élément fortement positif relativement à P et J, est inversible et, de plus, $\mathcal{H}(G, J, \sigma)_L$ est l'image de l'homomorphisme t qui préserve le support des fonctions au sens que

$$\mathrm{supp}(tf) = J \cdot \mathrm{supp} f \cdot J.$$

1.3 Immeubles de Bruhat–Tits

Dans cette section, nous rappelons quelques éléments de la théorie des immeubles de Bruhat–Tits des groupes réductifs connexes. Nous faisons également des rappels sur les sous-groupes parahoriques qui jouent un rôle important dans la suite de la thèse. Tous les détails peuvent être trouvés dans [10], [43] et [27].

1.3.1 Appartement

Soit $\mathbf{G}$ un groupe réductif connexe défini sur un corps local non-archimédien F. On désigne par $\mathbf{T}$ un tore maximal de $\mathbf{G}$ et par $X^*(\mathbf{T})$ (resp. $X_*(\mathbf{T})$) le groupe des caractères (resp. cocaractères) de $\mathbf{T}$. Nous rappelons qu'un caractère (resp. cocaractère) de $\mathbf{T}$ est un homomorphisme de groupes algébriques de $\mathbf{T}$ dans le groupe multiplicatif $\mathbf{G}_m = \mathbf{GL}_1$ (resp. de $\mathbf{G}_m$ dans $\mathbf{T}$). Pour $\xi \in X^*(\mathbf{T})$ et $\lambda \in X_*(\mathbf{T}), \xi \circ \lambda$ est un endomorphisme de $\mathbf{G}_m$. On a un isomorphisme $\mathrm{End}(\mathbf{G}_m) \cong \mathbb{Z}$ et on désigne par $< \xi, \lambda >$ l'entier correspondant à $\xi \circ \lambda$ via cet isomorphisme. On définit ainsi une forme bilinéaire nondégénérée à valeurs entières

$$<,>: X^*(\mathbf{T}) \times X_*(\mathbf{T}) \to \mathbb{Z}.$$

Soient $X_\mathbb{R} = X_*(\mathbf{T}) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$ et $X_\mathbb{R}^* = X^*(\mathbf{T}) \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{R}$. Alors $X_\mathbb{R}^*$ est l'espace vectoriel dual de $X_\mathbb{R}$.

Soit $\Phi = \Phi(\mathbf{G}, \mathbf{T}) \subset X^*(\mathbf{T})$ l'ensemble des racines de $\mathbf{G}$ par rapport à $\mathbf{T}$, i.e., des caractères non triviaux de $\mathbf{T}$ dans la représentation adjointe de $\mathbf{G}$. C'est un système de racines (non nécessairement réduit) au sens de Bourbaki [6]. Soient $\mathbf{N}$ (resp. $\mathbf{Z}$) le normalisateur (resp. centralisateur) de $\mathbf{T}$ dans $\mathbf{G}$ et $N = \mathbf{N}(F)$ (resp. $Z = \mathbf{Z}(F)$) le groupe des points F-rationnels de $\mathbf{N}$ (resp. $\mathbf{Z}$). Alors le groupe fini ${}^vW = N/Z$ est le groupe de Weyl du système de racines Φ. On notera ${}^v\nu$ la surjection canonique de N sur ${}^vW$. Nous munissons $X_{\mathbb{R}}$ d'un produit scalaire invariant par ${}^vW$.

Pour toute racine $a \in \Phi$, on note $\mathbf{U}_a$ le sous-groupe radiciel associé. Il est caractérisé par l'existence d'un isomorphisme $f_a : \mathbf{G}_{add} \to \mathbf{U}_a$ du groupe additif $\mathbf{G}_{add}$ sur $\mathbf{U}_a$ tel que

$$tf_a(x)t^{-1} = f_a(a(t)x), \quad \forall t \in \mathbf{T}, \forall x \in \mathbf{G}_{add}.$$

Soient $\mathbf{T}_a$ la composante neutre du noyau de a ; $\mathbf{Z}_a$ son centralisateur dans $\mathbf{G}$; et $\mathbf{Z}'_a$ le groupe dérivé de $\mathbf{Z}_a$. Alors $\mathbf{Z}_a$ est un sous-groupe réductif connexe et $\mathbf{T}$ est un tore maximal de $\mathbf{Z}_a$. Le groupe $\mathbf{Z}'_a$ est semi-simple de rang 1 dont $\mathbf{T} \cap \mathbf{Z}'_a$ est un tore maximal. Il existe un unique cocaractère $a^\vee$ de $\mathbf{T}$ dont l'image est $\mathbf{T} \cap \mathbf{Z}'_a$ et tel que $< a, a^\vee >= 2$. Soit $\Phi^\vee$ l'ensemble des $a^\vee$, où a parcourt Φ. C'est le système de racines inverse de Φ.

Pour $a \in \Phi$, soit $U_a = \mathbf{U}_a(F)$ le groupe des points F-rationnels de $\mathbf{U}_a$. Alors $(Z, (U_a)_{a\in\Phi})$ est une donnée radicielle génératrice dans $G = \mathbf{G}(F)$ – le groupe des points F-rationnels de $\mathbf{G}$. On fixe une valuation discrète $\varphi = (\varphi_a)_{a\in\Phi}$ de la donnée radicielle $(Z, (U_a)_{a\in\Phi})$ (voir la définition d'une donnée radicielle et d'une valuation d'une donnée radicielle dans [10, §6]). Soit $\mathbb{A}$ l'ensemble des valuations équipollentes à φ. C'est un espace affine sous $X_{\mathbb{R}}$. On munit $\mathbb{A}$ de la distance euclidienne correspondant au produit scalaire sur $X_{\mathbb{R}}$. Le groupe N agit sur $\mathbb{A}$ de la façon suivante : soit $n \in N$ avec $w = {}^v\nu(n) \in {}^vW$; noter que, pour $a \in \Phi$ et $u \in U_a$, on a $n^{-1}un \in U_{w^{-1}(a)}$; on pose $n.\varphi = (n.\varphi_a)_{a\in\Phi}$, où $n.\varphi_a(u) = \varphi_{w^{-1}(a)}(n^{-1}un)$, et $n.(\varphi + v) = n.\varphi + {}^v\nu(n)(v)$, pour $v \in X_{\mathbb{R}}$. D'après [10, Proposition 6.2.10], l'espace $\mathbb{A}$ est stable sous l'action de N et, pour $n \in N$, l'application $\nu(n) : \psi \mapsto n.\psi$ est un automorphisme de $\mathbb{A}$ dont l'image canonique dans $\mathrm{Aut}(V)$ est égale à ${}^v\nu(n)$. L'espace affine $\mathbb{A}$ est appelé l'*appartement* de $\mathbf{T}$ (relativement à $\mathbf{G}$).

1.3.2 Murs et chambres

Pour une racine $a \in \Phi$, on pose $U_a^* = U_a - \{1\}$,

$$\Gamma_a = \varphi_a(U_a^*), \text{ et } \Gamma'_a = \{\varphi_a(u) : u \in U_a^*, \varphi_a(u) = \sup \varphi_a(uU_{2a})\}.$$

Pour tout $a \in \Phi$, on a $\Gamma_{-a} = -\Gamma_a$, $\Gamma_a = \Gamma'_a \cup \frac{1}{2}\Gamma_{2a}$ et $\Gamma_a = \Gamma'_a$ lorsque $2a \notin \Phi$. Dire que φ est une valuation discrète est équivalent à dire que Γ_a est un ensemble discret pour tout $a \in \Phi$.

On appelle *racine affine* de $\mathbf{G}$ (relativement à $\mathbf{T}$ et F) une fonction affine $\alpha_{a,k}$ sur $\mathbb{A}$ qui est définie par $\alpha_{a,k}(x) = a(x - \varphi) + k$, où sa partie vectorielle a appartient à Φ et k est un élément de Γ'_a. Soit Σ l'ensemble des racines affines de $\mathbf{G}$. On l'appelle le *système de racines affines* de $\mathbf{G}$ ([10, 6.2.6] et [43, 1.6]).

Pour toute racine affine $\alpha \in \Sigma$ avec la partie vectorielle $a \in \Phi$, on désigne par $\mathbb{A}_\alpha$ l'ensemble $\alpha^{-1}([0, \infty))$, par $\partial\mathbb{A}_\alpha$ le bord $\alpha^{-1}(0)$ de $\mathbb{A}_\alpha$, et par r_α la réflexion affine de $\mathbb{A}$ dont la partie vectorielle est la réflexion r_a et dont l'hyperplan des points fixes est $\partial\mathbb{A}_\alpha$. Les $\mathbb{A}_\alpha$ sont appellés les *demi-appartements* de $\mathbb{A}$ et les $\partial\mathbb{A}_\alpha$ s'appellent les *murs* de $\mathbb{A}$.

La relation "x et y sont contenus dans les mêmes demi-appartements" est une relation d'équivalence sur $\mathbb{A}$. Une classe de cette relation est dite une *facette* de $\mathbb{A}$. Chaque facette $\mathcal{F}$ est une partie convexe ouvert d'un sous-espace affine qu'elle engendre et que l'on appelle le *support* de $\mathcal{F}$. La dimension du support de $\mathcal{F}$ est aussi appelée *dimension* de $\mathcal{F}$. On appelle *cloison* de $\mathbb{A}$ une facette de $\mathbb{A}$ dont le support est un mur. Si $\mathbf{G}$ est semi-simple, les facettes sont des polysimplexes, i.e., des produits directs de simplexes alors que, en général, elles sont produits directs d'un polysimplexes et d'un espace affine réel. Les facettes de dimension maximale sont appelées les *chambres* de $\mathbb{A}$. Ce sont les composantes connexes du complément dans $\mathbb{A}$ de la réunion des murs.

Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ deux facettes de $\mathbb{A}$. On dit que $\mathcal{F}'$ est une facette de $\mathcal{F}$ si $\mathcal{F}'$ est contenue dans l'adhérence $\overline{\mathcal{F}}$ de $\mathcal{F}$. On dit qu'une cloison $\mathcal{F}$ est une cloison d'une chambre C si $\mathcal{F}$ est une facette de C. On appelle murs d'une chambre C les supports des cloisons de C.

Soit W le groupe de Weyl du système de racines affines Σ. Ce groupe agit simplement transitivement sur l'ensemble des chambres de $\mathbb{A}$. Fixons une fois pour toute une chambre C de $\mathbb{A}$. L'adhérence $\overline{C}$ de C est un domaine fondamental pour W opérant sur $\mathbb{A}$. De plus, W est engendré par l'ensemble des réflexions par rapport aux murs de C et le couple (W, S) est un système de Coxeter ([6, Théorème 1, p.74]).

Identifions $\mathbb{A}$ à $X_\mathbb{R}$ en choisissant pour origine un point *spécial* de $\mathbb{A}$ (rappelons qu'un point x de $\mathbb{A}$ est dit spécial si, pour tout mur L de $\mathbb{A}$, il existe un mur équipollent à L contenant x). On sait que W est le groupe de Weyl affine d'un système de racines réduit ${}^v\Sigma$ dans $X^*_\mathbb{R}$ dont les éléments sont proportionnels aux éléments de Φ ([10, p.22]). Remarquons aussi que ${}^v\Sigma$ n'est pas nécessairement proportionnel à Φ, même si Φ est réduit. De plus, l'ensemble des murs de $\mathbb{A}$ n'est autre que l'ensemble des hyperplans $L_{a,k} = \{x \in \mathbb{A} : a(x) + k = 0\}$ pour $a \in {}^v\Sigma$ et $k \in \mathbb{Z}$. Les racines affines sont donc les fonctions affines α sur $\mathbb{A}$ qui sont de la forme $\alpha = D\alpha + k$ pour $D\alpha \in {}^v\Sigma$ et $k \in \mathbb{Z}$. Comme ${}^vW$ est aussi le groupe de Weyl de ${}^v\Sigma$, on a un homomorphisme $D : W \to {}^vW$.

1.3.3 Immeubles de Bruhat–Tits

Soit $\alpha = a + k$ une racine affine dont la partie vectorielle a est un élément de Φ. On désigne par U_α le sous-groupe $U_{a,k} = \varphi_a^{-1}([k, +\infty))$. Soit Ω une partie de $\mathbb{A}$. On note U_Ω le groupe engendré par la réunion des groupes U_α tels que les demi-appartements $\mathbb{A}_\alpha$ contiennent Ω. On voit que U_Ω est normalisé par le groupe $H = \nu^{-1}(Id_\mathbb{A})$ et donc $P_\Omega = H.U_\Omega$ est un sous-groupe de G.

Soit $\widehat{N}_\Omega$ le fixateur de Ω dans N. Ce groupe normalise U_Ω et P_Ω. Posons

$$\widehat{P}_\Omega = \widehat{N}_\Omega.U_\Omega = \widehat{N}_\Omega.P_\Omega.$$

Lorsque Ω est réduit à un point $x \in \mathbb{A}$, nous écrirons U_x, P_x, etc. au lieu de $U_{\{x\}}, P_{\{x\}}$, etc. Il est clair qu'on a $\widehat{P}_\Omega = \bigcap_{x\in\Omega} \widehat{P}_x$. Comme φ est discrète, on a $\widehat{N}_x = \nu^{-1}(\widehat{W}_x)$, où

$\widehat{W}_x$ est le sous-groupe de W engendré par les réflexions par rapport aux murs de $\mathbb{A}$ passant par x. Par suite, $\widehat{N}_x = N \cap P_x$ et donc $\widehat{P}_x = P_x$.

Considérons le produit $G \times \mathbb{A}$ muni de la relation suivante : on dit que deux éléments (g, x) et (h, y) sont en relation si et seulement s'il existe $n \in N$ tel que $y = \nu(n)(x)$ et que $g^{-1}hu \in P_x$. C'est une relation d'équivalence sur $G \times \mathbb{A}$. On désigne par $\mathcal{I}(G, F)$ l'ensemble quotient du produit $G \times \mathbb{A}$ par cette relation.

Pour $x, y \in \mathbb{A}$, si $(1, x)$ et $(1, y)$ sont équivalents, alors il existe $n \in N \cap P_x = \widehat{N}_x$ tel que $y = \nu(n)(x)$ et donc $x = y$. Cela implique que l'application $j : \mathbb{A} \to \mathcal{I}$ qui, à $x \in \mathbb{A}$, fait correspondre l'image canonique du couple $(1, x)$ dans $\mathcal{I}(G, F)$ est injective. On peut donc identifier $\mathbb{A}$ et son image dans $\mathcal{I}(G, F)$ par j.

En faisant agir G sur lui-même par translation à gauche, G opère sur le produit $G \times \mathbb{A}$. Cette opération est compatible avec la relation d'équivalence. Elle définit donc par passage au quotient une action de G sur $\mathcal{I}(G, F)$ telle que l'image du couple (g, x) dans $\mathcal{I}(G, F)$ soit égale à $g.x$, pour tout $g \in G$ et pour tout $x \in \mathbb{A}$. En particulier, pour $n \in N$ et $x \in \mathbb{A}$, on a $n.x = \nu(n)(x)$.

Si Ω est une partie de $\mathbb{A}$ alors $\widehat{P}_\Omega$ est le fixateur de Ω dans G (par l'action de G sur $\mathcal{I}(G, F)$).

Définition 1.4. On appelle *immeuble* de G l'ensemble quotient $\mathcal{I}(G, F)$ précédent ; *appartement* de $\mathcal{I}(G, F)$ un transformé de $\mathbb{A}$ par un élément de G ; *facette* (respectivement *chambre*) de $\mathcal{I}(G, F)$ un transformé d'une facette (respectivement d'une chambre) de $\mathbb{A}$ par un élément de G.

Le sous-groupe N (respectivement H) est le stabilisateur (respectivement fixateur) de l'apartement $\mathbb{A}$ dans G. Il en résulte que sur tout appartement $\mathbb{A}'$ de $\mathcal{I}(G, F)$ il existe une structure d'espace affine euclidien et une seule telle que, pour tout $g \in G$ avec $\mathbb{A}' = g.\mathbb{A}$, l'application $x \mapsto g.x$ soit un isomorphisme d'espaces affines euclidiens de $\mathbb{A}$ sur $\mathbb{A}'$.

Soit $N' = \nu^{-1}(W)$ et soit G' le groupe engendré par N' et les sous-groupes radiciels U_a pour $a \in \Phi$. Alors G' est un sous-groupe distingué de G. Soit $T' = T \cap N'$. Alors $(T', (U_a)_{a\in\Phi})$ est une donnée radicielle génératrice de G' (voir [10, 6.2.11]).

Notons $B = P_C$, où C est la chambre fixée de $\mathbb{A}$. D'après [10, Théorème 6.5], on a $B \cap N' = H$, $N'/H = W$ et le quadruplet (G', B, N', S) est un système de Tits (voir la définition dans [6, Ch.IV, §2, n.1]). De plus, l'immeuble $\mathcal{I}(G, F)$ est isomorphe à l'immeuble associé à ce système de Tits ([10, §2]).

On appelle sous-groupe *parahorique* la composante connexe du fixateur dans G' d'une facette de $\mathcal{I}(G, F)$. En particulier, le sous-groupe parahorique associé à une chambre de $\mathcal{I}(G, F)$ est appelé un sous-groupe d'*Iwahori* ([27, 1.6]). Les sous-groupes d'Iwahori sont donc les sous-groupes parahoriques minimaux.

1.3.4 Paraboliques et parahoriques

Dans ce paragraphe, nous rappelons des résultats très utiles de L. Morris [26], [27] sur les sous-groupes parahoriques. Nous nous plaçons pour simplifier dans le cas semi-simple.

Nous conservons les notations précédentes. Pour $x \in \mathbb{A}$, on désigne par Σ_x l'ensemble des racines affines qui s'annulent en x, par Φ_x le sous-ensemble de Φ

associé à Σ_x, et par W_x le groupe engendré par les réflexions r_α pour $\alpha \in \Sigma_x$. Comme ces objets ne dépendent que de la facette $\mathcal{F}$ de $\mathbb{A}$ qui contient x, ils sont aussi notés $\Sigma_{\mathcal{F}}, \Phi_{\mathcal{F}}$, et $W_{\mathcal{F}}$. L'ensemble $\Phi_{\mathcal{F}}$ est un sous-système de racines de Φ et son groupe de Weyl est la partie vectorielle de $W_{\mathcal{F}}$. Nous noterons ${}^c\Phi_{\mathcal{F}}$ la clôture de $\Phi_{\mathcal{F}}$.

Soit $P = P_{\mathcal{F}}$ le sous-groupe parahorique centralisant la facette $\mathcal{F}$. Alors on a une suite exacte

$$1 \to U \to P \to M \to 1,$$

où U est un pro-p-sous-groupe ouvert compact de G et M est le groupe des points k_F-rationnels d'un groupe réductif connexe $\mathbb{M}$ défini sur k_F. De plus, d'après [11, Proposition 5.1.32], il y a une bijection entre l'ensemble des sous-groupes parahoriques contenus dans P et l'ensemble des (groupes des points k_F-rationnels des) sous-groupes paraboliques de $\mathbb{M}$. Cette bijection fait correspondre à chaque sous-groupe parahorique Q de P le groupe quotient $U\backslash Q$.

Soit $\widehat{P}$ le fixateur de $\mathcal{F}$ dans G. Il existe un $\mathfrak{o}_F$-schéma en groupes lisse $\widehat{\mathcal{P}}$ tel que $\widehat{\mathcal{P}}(\mathfrak{o}_F) = \widehat{P}$ et que P soit le groupe des points entiers de la composante connexe de $\widehat{\mathcal{P}}$. On a aussi une suite exacte

$$1 \to U \to \widehat{P} \to \widehat{M} \to 1$$

où $\widehat{M}$ est le groupe des points k_F-rationnels d'un groupe réductif $\widehat{\mathbb{M}}$ défini sur k_F dont $\mathbb{M}$ est la composante neutre.

Soit $\mathcal{M}$ le groupe engendré par $\mathbf{T}$ et par les sous-groupes radiciels $\mathbf{U}_a$ pour $a \in {}^c\Phi_{\mathcal{F}}$. C'est un sous-groupe réductif connexe défini sur F de $\mathbf{G}$. Soient $\mathbf{S}$ la composante F-déployée du centre de $\mathcal{M}$ et $\mathbf{L}$ son centralisateur. Alors $\mathbf{S}$ est un sous-tore F-déployé de $\mathbf{T}$ et donc $\mathbf{L}$ est un sous-groupe de Levi de $\mathbf{G}$ contenant $\mathcal{M}$. De plus, $\mathbf{L} = \mathbf{G}$ si et seulement si P est un sous-groupe parahorique maximal. Soit $L = \mathbf{L}(F)$, Morris a montré les propriétés suivantes :

Théorème 1.5 ([27, Théorème 2.1])**.**

(i) $L \cap \widehat{P} = \widehat{Q}$ *est le fixateur dans* L *d'un sommet de l'immeuble de* L. $Q = P \cap L$ *est un sous-groupe parahorique maximal de* L*, qui est contenu dans* $\widehat{Q}$*. Les suites*

$$1 \to U \cap L \to Q \to M \to 1 \;\; et \;\; 1 \to U \cap L \to \widehat{Q} \to \widehat{M} \to 1$$

sont exactes.

(ii) Soit $\mathbf{P}$ *un sous-groupe parabolique contenant* $\mathbf{L}$ *et avec la décomposition de Levi* $\mathbf{P}(F) = L.U^+$*. Alors on a deux homéomorphismes (avec la topologie p-adique)*

$$U \cap U^- \times \widehat{P} \cap L \times U \cap U^+ \to \widehat{P} \;\; et \;\; U \cap U^- \times P \cap L \times U \cap U^+ \to P.$$

Chapitre 2

Groupes spinoriels

Soit V un F-espace vectoriel de dimension finie N muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée h. On désigne par q la forme quadratique associée à h (i.e. $q(v) = \frac{1}{2}h(v, v)$ pour tout $v \in V$). La forme h induit sur l'algèbre $\mathrm{End}_F(V)$ une involution adjointe que l'on désignera par $\bar{}$. Notons τ l'involution sur $\mathrm{Aut}_F(V)$ définie par $g \mapsto \bar{g}^{-1}$ pour tout $g \in \mathrm{Aut}_F(V)$. Cette involution agit sur l'algèbre de Lie $\mathrm{End}_F(V)$ par $a \mapsto -\bar{a}$ pour tout $a \in \mathrm{End}_F(V)$ que l'on note parfois aussi τ.

Notons $\mathrm{O}_F(h)$ l'ensemble des points fixes de τ dans $\mathrm{Aut}_F(V)$. En équivalence, $\mathrm{O}_F(h)$ se compose de tous les éléments de $\mathrm{Aut}_F(V)$ qui conservent la forme h :

$$\mathrm{O}_F(h) = \{g \in \mathrm{Aut}_F(V) : h(gv, gw) = h(v, w) \text{ pour tout } v, w \in V\}.$$

C'est le groupe des points F-rationnels d'un groupe orthogonal en tant que groupe algébrique réductif défini sur F. On désigne par $\mathrm{SO}_F(h)$ le groupe des points F-rationnels du groupe orthogonal spécial correspondant et par $\mathfrak{so}_F(h)$ son algèbre de Lie.

Dans ce chapitre, nous rappelons d'abord dans le paragraphe 2.1.1 la définition du *groupe spinoriel* $\mathrm{Spin}_F(h)$ défini par l'espace (V, h) qui est un sous-groupe fermé du *groupe de Clifford* de q. $\mathrm{Spin}_F(h)$ est également le groupe des F-points d'un groupe algébrique réductif connexe $\mathbf{Spin}(h)$ qui est une extension centrale d'indice 2 du groupe orthogonal spécial $\mathbf{SO}(h)$ défini sur F, c'est-à-dire, il y a une isogénie centrale $\mathbf{t}$ de noyau d'ordre 2 de $\mathbf{Spin}(h)$ sur $\mathbf{SO}(h)$. Ce groupe partage avec $\mathrm{SO}_F(h)$ son algèbre de Lie. De plus, son action adjointe sur l'algèbre de Lie se factorise par celle de $\mathrm{SO}_F(h)$. Il partage de plus les points de son immeuble de Bruhat-Tits avec $\mathrm{SO}_F(h)$. Cela nous permet d'identifier les strates semi-simples pour $\mathrm{Spin}_F(h)$ et celles pour $\mathrm{SO}_F(h)$. L'isogénie $\mathbf{t}$ induit sur $\mathrm{Spin}_F(h)$ un homomorphisme de groupes t dont l'image est le noyau $\mathrm{O}'(h)$ de la *norme spinorielle* de $\mathrm{SO}_F(h)$.

Ensuite, nous présenterons des propriétés essentielles de la norme spinorielle sur le groupe $\mathrm{SO}_F(h)$, en particulier, des critères pour calculer la norme spinorielle dans certains cas. Nous donnons deux exemples sur les groupes $\mathrm{Spin}_F(1,1)$ et $\mathrm{Spin}_F(2,2)$. Afin d'étudier le centralisateur d'un élément semi-simple de l'algèbre de Lie, nous démontrons dans le paragraphe 2.3.1 une relation entre la norme spinorielle usuelle et la norme spinorielle sur un groupe unitaire définie par G. E. Wall [44].

En utilisant un résultat général de cohomologie, nous donnerons une relation importante entre les pro-p-sous-groupes de $\mathrm{Spin}_F(h)$ et ceux de $\mathrm{SO}_F(h)$ (le corollaire

2.13) : pour tout pro-p-sous-groupe H de $\mathrm{SO}_F(h)$, il existe un unique homomorphisme de groupes $s_H : H \to \mathrm{Spin}_F(h)$ tel que $t \circ s_H = \mathrm{Id_H}$. Nous donnerons également une relation analogue pour les sous-groupes unipotents (le corollaire 2.14).

Pour simplifier les notations, dans toute la suite de cette thèse, $\widetilde{G}$ désignera le groupe des F-automorphismes $\mathrm{Aut}_F(V)$ de V et $A = \mathrm{End}_F(V)$ sera son algèbre de Lie. Nous noterons G^+ le groupe des isométries de V par rapport à h, G le sous-groupe des rotations $\mathrm{SO}_F(h)$, $\widehat{G}$ le groupe spinoriel $\mathrm{Spin}_F(h)$ associé et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie $\mathfrak{so}_F(h)$. Si H est un sous-groupe de G, nous désignerons par H' l'intersection de H avec $\mathrm{O}'(h)$ et par $\widehat{H}$ l'image inverse dans $\widehat{G}$ de H' par l'homomorphisme t. Si H (respectivement U) est un pro-p-sous-groupe (respectivement sous-groupe unipotent) de G alors ${}_sH$ (respectivement ${}_sU$) désignera l'image dans $\widehat{G}$ de H (respectivement de U) par la section homomorphe unique s_H (respectivement s_U) de H (respectivement de U) définie par le corollaire 2.13 (respectivement le corollaire 2.14). Nous noterons aussi $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(h), \widehat{\mathbf{G}} = \mathbf{Spin}(h)$.

2.1 Définition et exemple

2.1.1 Définition

Nous rappelons dans cette section la définition du groupe spinoriel $\widehat{G} = \mathrm{Spin}_F(h)$ défini par (V, h). Les références principales pour ce paragraphe sont [37, §3.1] et [2, Chapitre 5, §4]. Soit $\mathfrak{T}$ l'algèbre tensorielle de V, i.e. $\mathfrak{T} = F \oplus V \oplus (V \otimes V) \oplus \cdots$, et $\mathfrak{I}$ l'idéal bilatère de $\mathfrak{T}$ engendré par les éléments de la forme $x \otimes x - q(x)$ avec $x \in V$. On appelle *algèbre de Clifford* de la forme q l'algèbre quotient $C = \mathfrak{T}/\mathfrak{I}$. La restriction à V (vu comme un sous-espace de $\mathfrak{T}$) de l'application quotient est une injection de V dans C. On peut donc identifier V avec un sous-espace de C. Avec cette identification, on voit de plus que C est une algèbre graduée de dimension 2^N engendrée par V. Soit C^+ la sous-algèbre de C engendrée par les éléments de la forme xy (le produit dans C), avec $x, y \in V$. C'est une sous-algèbre de dimension 2^{N-1}. Nous pouvons interpréter C^+ comme le quotient $\mathfrak{T}_+/\mathfrak{I}$, où $\mathfrak{T}_+ = \underset{n \text{ pair}}{\oplus} V^{\otimes n}$. Posons également $C^- = \mathfrak{T}_-/\mathfrak{I}$ avec $\mathfrak{T}_- = \underset{n \text{ impair}}{\oplus} V^{\otimes n}$. On peut voir que l'algèbre de Clifford est une algèbre $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduée : $C = C^+ \oplus C^-$.

Par définition de C, on a $x^2 = q(x)$, pour tout $x \in V$, et donc

$$xy + yx = h(x, y), \text{ pour tout } x, y \in V.$$

En particulier, si $x, y \in V$ sont orthogonaux alors $xy = -yx$. De plus, tout vecteur non isotrope v de V est un élément inversible dans C avec $v^{-1} = q(v)^{-1}v$.

Supposons que l'on ait une base orthogonale $\{x_1, ..., x_N\}$ de V. Pour chaque partie S de $\mathfrak{E} = \{1, 2, ..., N\}$, on définit un élément e_S de C comme suit

$$e_S = \begin{cases} 1, & \text{si } S = \emptyset, \\ x_{i_1} \cdots x_{i_r}, & \text{si } S = \{i_1 < \cdots < i_r\}. \end{cases}$$

Alors les élément e_S, où S parcourt l'ensemble des parties de $\mathfrak{E}$, forment une base de l'algèbre de Clifford C. La multiplication de C est déterminée par :

$$e_S e_T = \left(\prod_{s \in S t \in T} (s,t) \prod_{i \in S \cap T} q(x_i) \right) e_{S \cup T - S \cap T}, \qquad \text{pour tout } S, T \subseteq \mathfrak{E},$$

où (s,t) est un signe qui est égal à $+1$ si $s \leq t$ et à -1 si $s > t$. De plus, si on note $|S|$ le cardinal d'une partie S de $\mathfrak{E}$, alors, on a

$$e_S e_T = (-1)^{|S||T| - |S \cap T|} e_T e_S, \tag{2.1}$$

où T et S sont deux parties quelconques de $\mathfrak{E}$. Pour toute partie $S \neq \emptyset, \mathfrak{E}$ de $\mathfrak{E}$, on voit qu'il existe toujours une partie T de cardinal 2 de $\mathfrak{E}$ telle que $|S \cap T| = 1$, et donc, par (2.1), $e_S e_T = -e_T e_S$. Comme C^+ est engendrée par les éléments e_T avec $|T| = 2$, cela implique que le centralisateur $Z_C(C^+)$ de C^+ dans C est

$$C_0 := F + F e_{\mathfrak{E}}.$$

Si N est pair, l'élément $e_{\mathfrak{E}}$ appartient à C^+. Donc C_0 est le centre de C^+. Cependant, dans ce cas, $e_{\mathfrak{E}}$ ne commute pas avec les éléments e_T pour $|T| = 1$, donc le centre $Z(C)$ de C est F.

Si N est impair, alors $e_{\mathfrak{E}}$ commute avec tous les éléments de C mais il n'est pas dans C^+. Dans ce cas, $Z(C) = C_0$ alors que $Z(C^+) = F$.

Soit γ l'automorphisme de C défini par $\gamma(e_T) = (-1)^{|T|} e_T$ pour toute partie T de $\mathfrak{E}$. En particulier, $\gamma|_{C^+} = \mathrm{Id}_{\mathrm{C}^+}$, $\gamma|_{C^-} = -\mathrm{Id}_{\mathrm{C}^-}$ et $\gamma^2 = \mathrm{Id}_{\mathrm{C}}$. Considérons l'ensemble Γ des éléments inversibles u de C qui vérifient $\gamma(u) V u^{-1} = V$. Cet ensemble forme un groupe, appellé *le groupe de Clifford* de q. Posons $\Gamma^+ = \Gamma \cap C^+$. C'est un sous-groupe de Γ. Par définition, chaque élément u de Γ définit un automorphisme de V

$$t_u : V \to V,\ x \mapsto \gamma(u) x u^{-1}.$$

Il est clair que $t_{uv} = t_u t_v$ pour tout $u, v \in \Gamma$. Nous avons donc un homomorphisme de groupes

$$t_\Gamma : \Gamma \to \widetilde{G}, u \mapsto t_u.$$

Le noyau de cet homomorphisme est déterminé par

Proposition 2.1 ([32, Lemme 3.1])**.** $\ker(t_\Gamma) = F^\times$.

Démonstration. Il est évident que $F^\times \subset \ker(t)$. Supposons $u = u_+ + u_- \in \ker(t_\Gamma)$, où $u_+ \in C^+$ et $u_- \in C^+$. Alors $\gamma(u)x = xu$ pour tout $x \in V$ et ainsi $u_+ x = x u_+$ et $u_- x = -x u_-$ pour tout $x \in V$. En particulier, u_- anticommute avec tous les éléments e_T avec $|T| = 1$. Par (2.1) on voit qu'il n'existe pas un tel élément non nul de C et donc $u_- = 0$. Autrement dit, nous avons $u = u_+$, élément inversible de $Z(C) \cap C^+ = F$. D'où la proposition. $\square$

Pour déterminer l'image de l'homomorphisme t_Γ nous voyons d'abord que si u est un vecteur non isotrope de V alors

$$\gamma(u) x u^{-1} = -q(u)^{-1} u x u = -q(u)^{-1}(-x u^2 + h(x,u)u) = x - q(u)^{-1} h(x,u) u, \forall x \in V.$$

Cela implique $u \in \Gamma$ et $t_u = s_u$, où s_u est la réflexion de V définie par le vecteur u. Puisque le groupe des isométries G^+ est engendré par les réflexions de V, nous avons $G^+ \subset \mathrm{Im}\,(t_\Gamma)$. Nous allons voir plus loin que $\mathrm{Im}\,(t_\Gamma) = G^+$.

Soit ι l'involution canonique de C définie par

$$\iota(v_1 v_2 \dots v_n) = v_n \dots v_2 v_1, \text{ pour } v_i \in V, 1 \leq i \leq n.$$

Remarquons que cette involution commute avec l'automorphisme γ de C. Alors si $u \in \Gamma$, c'est-à-dire, $\gamma(u)V = Vu$, en appliquant γ et ι aux deux côtés, on obtient $\gamma(\iota(u))V = V\iota(u)$ et donc $\iota(u) \in \Gamma$. Avec l'involution ι, on définit une application $Q : C \to C$, $u \mapsto u\iota(u)$. En particulier, $Q(x) = x^2 = q(x)$ pour tout $x \in V$.

Lemme 2.2 ([32, Lemme 3.2])**.** *Pour tout $u \in \Gamma$, on a $Q(u) \in F^\times$.*

Démonstration. Soit $u \in \Gamma$. Nous avons vu que $\iota(u) \in \Gamma$. Puisque $F^\times = \ker(t)$, il suffit de montrer $Q(u) = u\iota(u) \in \ker(t_\Gamma)$, c'est-à-dire, $\gamma(u\iota(u))x = xu\iota(u)$ pour tout $x \in V$. En effet, remarquant que $x = -\gamma(\iota(x))$ pour tout $x \in V$, nous avons

$$V \ni \gamma(\iota(u))x\iota(u)^{-1} = -\gamma(u^{-1}x\gamma(u)) = \gamma(u^{-1})xu, \quad \forall x \in V.$$

Alors $\gamma(u\iota(u))x = xu\iota(u)$ pour tout $x \in V$. □

Avec le lemme précédent et la propriété de commutation entre γ et ι, nous avons la conséquence immédiate suivante.

Corollaire 2.3. *La restriction de l'application Q à Γ induit un homomorphisme de groupes $Q : \Gamma \to F^\times$ et $Q(\gamma(u)) = Q(u)$ pour tout $u \in \Gamma$.*

Maintenant nous pouvons déterminer l'image de l'homomorphisme t_Γ. Nous décrivons également les éléments du groupe Γ.

Proposition 2.4. *Pour tout $u \in \Gamma$, on a $t_u \in G^+$. Tout élément de Γ est un produit de vecteurs anisotropes de V.*

Démonstration. Soit $u \in \Gamma$. Pour tout $x \in V$, on a

$$q(t_u(x)) = Q(t_u(x)) = t_u(x)\iota(t_u(x)) = \gamma(u)xu^{-1}\iota(u^{-1})x\iota(\gamma(u)) = q(x).$$

Cela implique $t_u \in G^+$. Nous avons vu plus tôt que $G^+ \subset \mathrm{Im}\,(t_\Gamma)$. Alors $G^+ = \mathrm{Im}\,(t_\Gamma)$ et nous avons un homomorphisme surjectif de groupes

$$t_\Gamma : \Gamma \to G^+, \quad u \mapsto t_u.$$

Soit $s = s_{v_1}s_{v_2}...s_{v_r}$ une expression d'un élément $s \in G^+$ comme un produit de réflexions de V définies par des vecteurs anisotropes v_i. Posons $v = v_1v_2...v_r$. Nous avons $t_v = t_{v_1}t_{v_2}...t_{v_r} = s$ puisque $t_{v_i} = s_{v_i}$. De plus, comme $\ker(t_\Gamma) = F^\times$, deux éléments de Γ de même image dans G^+ ne diffèrent que par un scalaire. Alors tout élément de Γ est simplement un produit de vecteurs anisotropes de V. □

En conséquence de la proposition précédente, tout élément de Γ^+ est un produit d'un nombre pair de vecteurs anisotropes de V et, puisque tout élément de G est un produit d'un nombre pair de réflexions de V, la restriction de t_Γ à Γ^+ nous donne un homomorphisme surjectif de groupes

$$t_\Gamma|_{\Gamma^+} : \Gamma^+ \twoheadrightarrow G,\ u \mapsto t_u,$$

de noyau $F^\times$. Autrement dit, nous avons une suite exacte

$$1 \to F^\times \to \Gamma^+ \xrightarrow{t_\Gamma} G \to 1. \tag{2.2}$$

Pour définir le groupe spinoriel, nous regardons la restriction de l'homomorphisme Q à Γ^+. Autrement dit, nous avons un homomorphisme de groupes

$$Q|_{\Gamma^+} : \Gamma^+ \to F^\times, u \mapsto Q(u)$$

Son noyau s'appelle *le groupe spinoriel* de (V, h), noté $\mathrm{Spin}_F(h)$ (ou $\widehat{G}$ par notre convention).

En remarquant que, pour tout $u \in \Gamma^+$ et tout $\mu \in F^\times$, on a $Q(\mu u) = \mu^2 Q(u)$, la suite exacte (2.2) nous donne un homomorphisme

$$\mathrm{sn} : G \to F^\times/(F^\times)^2,\ t_u \mapsto Q(u)(F^\times)^2, \text{ avec } u \in \Gamma^+.$$

Précisément, si $s = s_{v_1}s_{v_2}\dots s_{v_{2r}} \in G$, où s_{v_i} est la réflexion définie par le vecteur non isotrope v_i de V, alors $\mathrm{sn}(s) = q(v_1)q(v_2)\dots q(v_{2r})(F^\times)^2$. La classe $\mathrm{sn}(s)$ est appelée *la norme spinorielle* de $s \in G$. On appelle *groupe orthogonal réduit* le noyau de sn, et on le note $\mathrm{O}'(h)$. Il est clairement l'image dans G du groupe spinoriel $\widehat{G}$ par l'homomorphisme t_Γ. La suite (2.2) induit donc une autre suite exacte

$$1 \to \{\pm 1\} \to \widehat{G} \xrightarrow{t} \mathrm{O}'(h) \to 1, \tag{2.3}$$

où $t = t_\Gamma|_{\widehat{G}}$ est la restriction de t_Γ à $\widehat{G}$.

Remarque 2.5. De la même manière et plus généralement, nous avons également un homomorphisme, noté aussi sn, de G^+ à $F^\times/(F^\times)^2$:

$$s = s_{a_1}s_{a_2}...s_{a_r} \mapsto \mathrm{sn}(s) = q(a_1)q(a_2)\dots q(a_r)(F^\times)^2.$$

Cependant, cet homomorphisme n'est pas une bonne norme sur G^+. En effet, si nous remplaçons la forme bilinéaire h par

$$\mu h : V \times V \to F, \quad (x, y) \mapsto \mu h(x, y),$$

où $\mu \in F^\times$ fixé, alors notre groupe G^+ ne change pas et les isométries de V sont toujours les mêmes, mais $\mathrm{sn}(s)$ est modifié par μ^r : si s est une rotation de V alors $\mathrm{sn}(s)$ ne change pas, mais si s est un retournement de V alors $\mathrm{sn}(s)$ peut changer radicalement.

Soit $\bar{F}$ une clôture algébrique de F. La forme h se prolonge à l'espace $V_{\bar{F}} = \bar{F} \otimes_F V$ en une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $h_{\bar{F}}$. Soit $C_{\bar{F}}$ l'algèbre de Clifford définie par $(V_{\bar{F}}, h_{\bar{F}})$. Par définition, on voit que $C_{\bar{F}} = \bar{F} \otimes_F C$. Notons $\mathbf{\Gamma}$ le groupe de Clifford associé à $h_{\overline{F}}$ et $\mathbf{\Gamma}^+ = \mathbf{\Gamma} \cap C^+_{\overline{F}}$.

Proposition 2.6. *$\mathbf{\Gamma}^+$ est un groupe algébrique linéaire défini sur F dont Γ^+ est le groupe des F-points rationnels.*

Démonstration. En fixant une F-base $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ de V et aussi une F-base de C, nous pouvons identifier $C_{\overline{F}}$ avec $(\overline{F})^{2^N}$, $C^+_{\overline{F}}$ avec $(\overline{F})^{2^{N-1}}$ et $V_{\overline{F}}$ avec le sous-espace $(\overline{F})^N$. Considérons l'homomorphisme :

$$\varphi : C^+_{\overline{F}} \times C^+_{\overline{F}} \to C_{\overline{F}} \times (C_{\overline{F}})^N,$$
$$(u, v) \mapsto (uv, ux_1v, ux_2v, \ldots, ux_Nv).$$

Nous voyons que

$$\varphi^{-1}(1 \times (V_{\overline{F}})^N) = \{(u, v) \in C_{\overline{F}} \times C_{\overline{F}} | uv = 1 \text{ et } ux_iv \in V_{\overline{F}}, i = 1, 2, \ldots, N\}$$

est isomorphe à $\mathbf{\Gamma}^+$. Puisque $1 \times (V_{\overline{F}})^N$ est un fermé de $(\overline{F})^{2^N + N2^N}$, $\mathbf{\Gamma}^+$ est un F-groupe affine et donc il est F-isomorphe à un sous-groupe fermé de GL_m pour un certain m [5, Proposition 1.10]. □

Par la même construction, on obtient un sous-groupe fermé $\mathbf{Spin}(h) = \mathrm{Spin}_{\bar{F}}(h_{\bar{F}})$ (noté $\widehat{\mathbf{G}}$ par notre convention) de $\mathbf{\Gamma}^+$. $\widehat{\mathbf{G}}$ est donc un groupe algébrique linéaire défini sur F dont $\widehat{G} = \mathrm{Spin}_F(h)$ est le groupe des F-pointes rationnels. Si $N = 1$, nous avons $\widehat{\mathbf{G}} = \{\pm 1\}$. Lorsque $N \geq 2$ nous allons voir que $\widehat{\mathbf{G}}$ est un groupe algébrique connexe pour la topologie de Zariski.

Proposition 2.7. *Si $\dim V \geq 2$ alors le groupe algébrique $\widehat{\mathbf{G}}$ est connexe.*

Démonstration. Notons $q_{\overline{F}}$ la forme quadratique associée à $h_{\overline{F}}$. Comme $\overline{F}$ est algébriquement clos, $q_{\overline{F}} - 1$ sur $V_{\overline{F}}$ est un polynôme irréductible et donc $S = \{x \in V : q_{\overline{F}}(x) = 1\}$ est une sous-variété algébrique irréductible de V. L'image de l'homomorphisme

$$S \times S \to \widehat{\mathbf{G}}, \quad (x, y) \mapsto xy$$

est un ensemble irréductible de générateurs du groupe $\widehat{\mathbf{G}}$ contenant l'élément neutre. Cela implique la connexité de $\widehat{\mathbf{G}}$ d'après [36, Proposition 2.2.6]. □

Poursuivons avec la clôture algébrique $\overline{F}$ de F. Remarquons que le groupe orthogonal réduit coïncide avec le groupe orthogonal spécial sur un corps algébriquement clos. La suite (2.3) devient donc

$$1 \to \{\pm 1\} \to \widehat{\mathbf{G}} \xrightarrow{\mathbf{t}} \mathbf{G} \to 1,$$

où $\mathbf{G} = \mathbf{SO}(h)$ est le groupe orthogonal spécial défini sur F dont G est le groupe des F-points rationnels. Alors $\mathbf{t}$ est une isogénie centrale de noyau d'ordre 2 et, lorsque $N \geq 2$, $\widehat{\mathbf{G}}$ est le revêtement simplement connexe de $\mathbf{G}$.

Revenons aux groupes des F-points rationnels. Nous voyons que $\widehat{G}$ partage avec G l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_F(h)$ et que l'action adjointe de $\widehat{G}$ sur $\mathfrak{g}$ factorise par celle de G.

2.1.2 Norme spinorielle

Dans ce paragraphe, nous présentons des critères pour calculer la norme spinorielle sur G. Le premier critère que nous allons voir dans la proposition suivante est que la norme spinorielle est invariante par prolongement orthogonal.

Proposition 2.8 ([2, Théorème 5.13]). *Supposons que l'on ait une décomposition orthogonale $V = U \perp W$ de V. Soient h_U la restriction de h sur $U \times U$. Identifions un élément $\sigma_U \in \mathrm{SO}_F(h_U)$ à l'élément $\sigma_U \perp \mathrm{Id_W} \in \mathrm{G}$. Alors $\mathrm{sn}(\sigma_U)$ calculé dans $\mathrm{SO}_F(h_U)$ est égal à $\mathrm{sn}(\sigma_U)$ calculé dans G. En particulier, $\mathrm{O}'(h_U) = \mathrm{O}'(h) \cap \mathrm{SO}_F(h_U)$.*

Démonstration. Soit $\sigma_U = s_{v_1} s_{v_2} \dots s_{v_r}$ une expression de σ_U comme un produit de réflexions s_{v_i} (par rapport à vecteur non-isotrope v_i) de l'espace U. L'affirmation de la proposition suit directement le fait que $s_{v_i} \perp \mathrm{Id_W}$ est la réflexion de l'espace V par rapport au vecteur v_i, pour $i = 1, 2, ..., r$, et que l'on a

$$\sigma_U \perp \mathrm{Id_W} = (\mathrm{s_{v_1}} \perp \mathrm{Id_W})(\mathrm{s_{v_2}} \perp \mathrm{Id_W}) \dots (\mathrm{s_{v_r}} \perp \mathrm{Id_W}).$$

□

Dans la situation de la proposition 2.8, nous avons évidemment une affirmation similaire pour le sous-espace W. Nous avons donc une conséquence immédiate suivante

Corollaire 2.9. *Si $\sigma = \sigma_U \perp \sigma_W$, où $\sigma_U \in \mathrm{SO}_F(h_U)$ et $\sigma_W \in \mathrm{SO}_F(h_W)$, alors*

$$\mathrm{sn}(\sigma) = \mathrm{sn}(\sigma_U)\,\mathrm{sn}(\sigma_W).$$

Le deuxième critère que nous présentons maintenant nous permet de calculer la norme spinorielle dans un espace hyperbolique.

Proposition 2.10 ([32, Exemple 3.5, p. 337]). *Si $V = V_{-1} \oplus V_1$, où V_{-1} et V_1 sont totalement isotropes en dualité par h, alors*

$$\mathrm{sn}\begin{pmatrix} \overline{g}^{-1} & \\ & g \end{pmatrix} = (\det g) \mod (F^{\times 2}), \forall g \in \mathrm{Aut}(V_1).$$

Démonstration. Supposons $\dim V_1 = n$, c'est-à-dire on peut identifier V_1 avec F^n. Si $\det g = d$, on peut écrire

$$g = \begin{pmatrix} d & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} g', \qquad \text{avec } \det g' = 1.$$

Puisque $\mathrm{SL}_n(F)$ est le sous-groupe des commutateurs de $\mathrm{GL}_n(F)$, $\begin{pmatrix} \overline{g}'^{-1} & \\ & g' \end{pmatrix}$ appartient au sous-groupe des commutateurs de G. Remarquons que le sous-groupe des commutateurs de G est contenu dans $\mathrm{O}'(h)$ car le groupe multiplicatif de F est commutatif. Alors

$$\mathrm{sn}(\begin{pmatrix} \overline{g}'^{-1} & \\ & g' \end{pmatrix}) = 1.$$

On peut donc supposer $g = \begin{pmatrix} d & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ et alors on peut aussi supposer $\dim V_1 = 1$. De plus, on a

$$\begin{pmatrix} d^{-1} & \\ & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & d^{-1} \\ d & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

C'est un produit de deux réflexions définies par deux vecteurs $(d^{-1}, -1)$ et $(1, -1)$.

$$\mathrm{sn} \begin{pmatrix} d^{-1} & \\ & d \end{pmatrix} = q(d^{-1}, -1)q(1, -1) \mod (F^\times)^2 = d \mod (F^\times)^2,$$

d'où la proposition. □

Grâce au travail de H. Zassenhaus [47], nous avons une formule plus précise pour calculer la norme spinorielle par déterminants de transformations et par discriminants de formes quadratique (remarquons ici que le discriminant d'une forme quadratique est défini comme la classe du déterminant de cette forme dans une base).

Proposition 2.11 ([47, §2]). *Pour tout $u \in G^+$, on a*

$$\mathrm{sn}(u) = \mathrm{disc}(h|_{\underset{n\geq 1}{\cup}\ker(1+u)^n})\det(\frac{1+u}{2}|_{\underset{n\geq 1}{\cap}\mathrm{im}(1+u)^n}), \tag{2.4}$$

où $\mathrm{disc}(h|_{\underset{n\geq 1}{\cup}\ker(1+u)^n})$ est le discriminant de la restriction de h au sous-espace $\underset{n\geq 1}{\cup}\ker(1+u)^n$.

2.1.3 Exemple 1 : $\mathrm{Spin}_F(1,1)$

Dans les paragraphes précédents, nous avons introduit les concepts de base des groupes spinoriels. Nous allons, dans ce paragraphe, nous familiariser avec ces concepts dans un cas particulier très simple, celui du groupe $\widehat{G} = \mathrm{Spin}_F(1,1)$. Nous allons décrire un paramétrage de ce groupe.

Nous travaillons alors avec l'espace V de dimension 2 de la forme $V = Fv \oplus Fv^-$, où v et v^- sont deux vecteur isotropes, par rapport à une forme bilinéaire symétrique non dégénérée h, tels que $h(v, v^-) = 1$. Avec cette base de V, nous pouvons identifier le groupe $G = \mathrm{SO}_F(1,1)$ avec un groupe de matrices carrées d'ordre 2 comme suit

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix} : a \in F^\times \right\}.$$

Par la proposition 2.10, la norme spinorielle est déterminée par

$$\mathrm{sn} \begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1} \end{pmatrix} = a \mod (F^\times)^2, \quad \text{pour tout } a \in F^\times.$$

Alors le groupe orthogonal réduit $\mathrm{O}'(h)$ peut être identifié avec

$$\left\{ \begin{pmatrix} a^2 & \\ & a^{-2} \end{pmatrix} : a \in F^\times \right\}.$$

Maintenant, pour travailler dans l'algèbre de Clifford, nous avons besoin d'une base orthogonale de V. Nous prenons notamment la base $\{e_1, e_2\}$ de V avec

$$e_1 = v + v^- \quad \text{et } e_2 = v - v^-.$$

Alors $1, e_1, e_2, e_1e_2$ forment une base de l'algèbre de Clifford C et $1, e_1e_2$ forment une base de la sous-algèbre C^+. Par la proposition 2.4, tout élément de Γ^+ peut s'écrire comme un produit de deux vecteurs non isotropes de V. Prenons deux vecteurs non isotropes quelconques $u_1 = x_1v + y_1v^-$ et $u_2 = x_2v + y_2v^-$ de V avec $x_1, x_2, y_1, y_2 \in F^\times$. Dans la base $\{e_1, e_2\}$ de V nous avons

$$u_1 = \frac{x_1 + y_1}{2}e_1 + \frac{x_1 - y_1}{2}e_2 \text{ et } u_2 = \frac{x_2 + y_2}{2}e_1 + \frac{x_2 - y_2}{2}e_2.$$

Pour calculer un produit générique u_1u_2, nous pouvons supposer $y_1 = 1$. Posons $\alpha = x_2y_2^{-1}$. En remarquant que $e_1^2 = q(e_1) = 1$ et $e_2^2 = q(e_2) = -1$ nous avons

$$u_1u_2 = y_2\left[\frac{\alpha + x_1}{2} + \frac{\alpha - x_1}{2}e_1e_2\right].$$

De plus nous avons $Q(u_1u_2) = Q(u_1)Q(u_2) = x_1\alpha y_2^2$. Alors pour que u_1u_2 appartienne à $\widehat{G}$, nous avons $x_1\alpha y_2^2 = 1$, autrement dit, $x_1 = \alpha c^2$, avec $c \in F^\times$ tel que $(y_2\alpha)^2 = \frac{1}{c^2}$. Avec cela, u_1u_2 appartient à $\widehat{G}$ si et seulement si

$$u_1u_2 = \frac{1}{c}\left[\frac{1 + c^2}{2} + \frac{1 - c^2}{2}e_1e_2\right], \qquad \text{avec } c \in F^\times.$$

On considère l'application

$$\begin{aligned} \varphi : F^\times &\to \widehat{G}, \\ c &\mapsto \frac{1}{c}\left[\frac{1 + c^2}{2} + \frac{1 - c^2}{2}e_1e_2\right]. \end{aligned}$$

En faisant attention que $(e_1e_2)^2 = -e_1^2e_2^2 = 1$, nous trouvons $\varphi(cc') = \varphi(c)\varphi(c')$, pour tout $c, c' \in F^\times$. Autrement dit, φ est un morphisme de groupes. On a vu au-dessus que φ est surjectif. De plus, on voit facilement qu'il est aussi injectif. Alors nous avons un isomorphisme de $F^\times$ dans $\widehat{G}$.

Pour écrire les éléments de $\widehat{G}$ comme des produits de deux vecteurs non isotropes de V, nous faisons une remarque que, pour tout $c \in F^\times$, nous avons

$$\varphi(c) = (cv + v^-)(c^{-1}v + v^-)$$

(en faisant des mêmes calculs on peut vérifier cette égalité). De plus, les réflexions de V par rapport à $cv + v^-$ et à $c^{-1}v + v^-$ sont respectivement

$$\begin{pmatrix} & -c \\ -c^{-1} & \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} & -c^{-1} \\ -c & \end{pmatrix}.$$

Alors nous avons

$$t \circ \varphi(c) = \begin{pmatrix} & -c \\ -c^{-1} & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} & -c^{-1} \\ -c & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 & \\ & c^{-2} \end{pmatrix}, \qquad \text{pour tout } c \in F^\times.$$

2.1.4 Exemple 2 : Tore déployé maximal de $\mathrm{Spin}_F(2,2)$

Soit maintenant $\widehat{G} = \mathrm{Spin}_F(2,2)$ et donc $G = \mathrm{SO}_F(2,2)$. Supposons $V = Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fv_2^- \oplus Fv_1^-$, où v_1, v_2, v_2^-, v_1^- est une base de Witt de V composée de vecteurs isotropes tels que

$$h(v_i, v_i^-) = 1, \text{ pour } i = 1, 2.$$

Suivant les calculs de l'exemple précédent, nous allons construire dans cet exemple un paramétrage d'un tore déployé maximal de $\widehat{G}$ qui sert à la suite de la thèse.

Soit T un tore déployé maximal de G (c'est le stabilisateur dans G de la décomposition). Avec la base donnée, nous pouvons écrire

$$T \cap \mathrm{O}'(h) = \left\{ \begin{pmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & b^{-1} & \\ & & & a^{-1} \end{pmatrix} : a = b \mod (F^\times)^2 \right\}.$$

Alors tout élément de $T \cap \mathrm{O}'(h)$ peut s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & a^{-1} & \\ & & & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & b^2 & & \\ & & b^{-2} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & a^{-1} & \\ & & & a^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^2 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & b^{-2} \end{pmatrix},$$

avec $a, b \in F^\times$. Posons

$$D' = \left\{ \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & a^{-1} & \\ & & & a^{-1} \end{pmatrix} : a \in F^\times \right\}$$

et

$$\mathrm{O}'_1 = \left\{ \begin{pmatrix} b^2 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & b^{-2} \end{pmatrix} : b \in F^\times \right\}; \quad \mathrm{O}'_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & b^2 & & \\ & & b^{-2} & \\ & & & 1 \end{pmatrix} : b \in F^\times \right\}.$$

Ce sont des sous-groupes de $T \cap \mathrm{O}'(h)$. Posons

$$\widehat{T} = t^{-1}(T \cap \mathrm{O}'(h)) \text{ et } \widehat{G}_i = t^{-1}(\mathrm{O}'_i) \text{ pour } i = 1, 2.$$

Pour $i = 1, 2$, grâce à l'exemple précédent, nous avons un paramétrage homomorphe de $\widehat{G}_i$:

$$\varphi_i : F^\times \to \widehat{G}_i, b \mapsto \varphi_i(b) = (bv_i + v_i^-)(b^{-1}v_i + v_i^-).$$

De plus, pour tout $a \in F^\times$, si l'on pose

$$\psi_i(a) = (av_i - v_i^-)(v_i - v_i^-) \in \Gamma^+, \text{ pour } i = 1, 2,$$

alors, pour $i = 1, 2$, on a

$$\psi_i(a)\psi_i(b) = -\psi_i(ab), \forall a, b \in F^\times,$$

et on a aussi

$$\varphi_i(a) = \frac{-1}{a}\psi_i(a^2), \forall a \in F^\times.$$

On peut écrire aussi, pour $i = 1, 2$,

$$\psi_i(a) = -\frac{a+1}{2} + \frac{a-1}{2}(v_i + v_i^-)(v_i - v_i^-).$$

Noter que, pour tout $a, b \in F^\times$, $\psi_1(a)$ et $\psi_2(b)$ commutent et que, pour $i = 1, 2$, $Q(\psi_i(a)) = a$ pour tout $a \in F^\times$. Nous pouvons donc facilement vérifier que

$$\psi : F^\times \to \widehat{G}, a \mapsto \psi(a) = \frac{1}{a}\psi_1(a)\psi_2(a),$$

est un homomorphisme injectif et que

$$t(\psi(a)) = \begin{pmatrix} a & & & \\ & a & & \\ & & a^{-1} & \\ & & & a^{-1} \end{pmatrix} \in D' \text{ pour tout } a \in F^\times.$$

Autrement dit, ψ induit une section homomorphe de D'. Par des calculs simples, on peut voir que, pour tout $a, b \in F^\times$, $\psi(a)$ et $\varphi_2(b)$ commutent. En particulier, nous avons un paramétrage de $\widehat{T}$:

$$F^\times \times F^\times \ni (a, b) \mapsto \psi(a)\varphi_2(b) \in \widehat{T}.$$

2.2 Les pro-p-sous-groupes

Ce paragraphe étudie les pro-p-sous-groupes de $\widehat{G}$ qui jouent un rôle important dans notre construction de types, en particulier, dans la construction de caractères semi-simples pour $\widehat{G}$. Le résultat de ce paragraphe reste vrai en général pour une extension centrale d'un groupe profini. Nous commençons par le rappel d'un résultat général.

Théorème 2.12 ([45, Théorème 9.7.3, (iii)]). *Soient H un groupe profini et A un H-module discret. Notons $H^n(H, A), n \geq 0$, les groupes de cohomologies de H à coefficients dans A. Pour tout $n \geq 1$, les éléments de $H^n(H, A)$ sont d'ordre fini. De plus, si H est un pro-p groupe alors l'ordre de tout élément de $H^n(H, A), n \geq 1$, est une puissance de p.*

Soient Y un groupe profini, X une extension centrale de Y par un sous-groupe abélien fini A, c'est-à-dire qu'on a une suite exacte

$$1 \to A \to X \xrightarrow{t} Y \to 1,$$

où A est fini et contenu dans le centre de X et Y agit sur A par automorphismes intérieurs. Soit H un sous-groupe de Y. Pour chaque $h \in H$, on prend un élément $s_H(h) \in t^{-1}(h)$. Alors, on obtient une application s_H de H dans X telle que

$$t \circ s_H(h) = h \text{ pour tout } h \in H.$$

Une telle application est appelée une *section* de H dans X. Si elle est de plus un homomorphisme de H dans X, on l'appelle une *section homomorphe* de H dans X.

Soit s_H une section de H dans X. Alors pour tous $h_1, h_2 \in H$, nous avons

$$s_H(h_1)s_H(h_2) = \varphi(h_1, h_2)s_H(h_1h_2), \text{ pour un certain } \varphi(h_1, h_2) \in A.$$

Par des calculs simples, on peut vérifier que φ est un 2-cocycle de H à valeurs dans A. De plus, si s'_H est une autre section de H dans X avec 2-cocycle associé φ', alors on peut voir que φ et φ' ne diffèrent que par un 2-cobord, c'est-à-dire, si on pose

$$\psi(h_1, h_2) = \varphi'(h_1, h_2)\varphi(h_1, h_2)^{-1}, \forall h_1, h_2 \in H,$$

alors ψ est un 2-cobord. Cela implique qu'il existe une section homomorphe de H si et seulement si φ est un 2-cobord.

Supposons maintenant que H est un pro-p-sous-groupe de Y où p est un nombre premier qui ne divise pas le cardinal $|A|$ de A. On a toujours que $|A|H^n(H, A) = 0$ pour tout n. D'ailleurs, par le théorème 2.12, nous avons de plus que les éléments de $H^n(H, A), n \geq 1$, sont d'ordre une puissance de p. Comme $|A|$ et p sont premiers entre eux, cela implique $H^n(H, A) = 0$ pour tout $n \geq 1$. En particulier $H^2(H, A) = 0$, c'est-à-dire, tout 2-cocycle de H à valeurs dans A est un 2-cobord, il existe donc une section homomorphe de H, i.e., un homomorphisme de groupes $s_H : H \to X$ tel que $t \circ s_H = \mathrm{Id_H}$, où $\mathrm{Id_H}$ est l'homomorphisme d'identité de H. Nous allons voir de plus que cette section homomorphe est unique. Remarquons que deux sections homomorphes de H ne diffèrent que par un homomorphisme de H dans A qui est un 1-cocycle. Puisque $H^1(H, A) = 0$ et tous les 1-cobords sont triviaux, on obtient l'unicité de s_H.

Revenons à notre cas avec $X = \widehat{G}, Y = \mathrm{O}'(h), A = \{\pm 1\}$ et p est la caractéristique résiduelle de F qui est supposée différente de 2. Remarquons de plus que tout pro-p-sous-groupe de G est contenu dans $\mathrm{O}'(h)$. En appliquant l'argument précédent, on obtient le corollaire suivant

Corollaire 2.13. *Si H est un pro-p-sous-groupe de G alors il existe un unique homomorphisme $s_H : H \to \widehat{G}$ tel que $t \circ s_H = \mathrm{Id_H}$.*

Le corollaire 2.13 et le fait que tout radical unipotent de sous-groupe parabolique de G est une réunion de pro-p-sous-groupes nous donnent le corollaire suivant

Corollaire 2.14. *Si U est un radical unipotent d'un sous-groupe parabolique de G alors il existe une unique section homomorphe $s_U : U \to \widehat{G}$ de U.*

Remarquons ici que le corollaire 2.14 reste encore vrai sans l'hypothèse $p \neq 2$ par une propriété d'une isogénie centrale : la restriction de l'isogénie $\mathbf{t}$ à un radical unipotent $\widehat{\mathbf{U}}$ de $\widehat{\mathbf{G}}$ induit toujours un isomorphisme de $\widehat{\mathbf{U}}$ sur $\mathbf{t}(\widehat{\mathbf{U}})$.

2.3 Centralisateur d'un élément de l'algèbre de Lie

2.3.1 Norme spinorielle dans un groupe unitaire

Considérons un élément non nul b de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ tel que $E := F[b]$ est une extension finie de F. Comme $\bar{b} = -b$, E est stable par l'action de l'involution $^-$. On désigne aussi par $^-$ la restriction de $^-$ à E. Notons E_0 le sous-corps des points fixes de E par cette involution. Fixons une forme F-linéaire non nulle μ_0 de E_0 dans F et posons $\mu = \mu_0 \circ \mathrm{tr}_{E/E_0}$. Voyant V comme un E-espace vectoriel, il existe une unique forme hermitienne non dégénérée $h_E : V \times V \to E$ telle que $h(x,y) = \mu(h_E(x,y))$, pour tous $x, y \in V$ (voir [9, Lemme 5.2]).

Soit δ un élément de E tel que $\bar{\delta} = -\delta$. Posons $h'_E(x,y) := \delta h_E(x,y)$ pour tous $x, y \in V$. Alors h'_E est une forme anti-hermitienne sur V telle que $U_E(h'_E) = U_E(h_E)$, où $U_E(h_E)$ (respectivement $U_E(h'_E)$) est le groupe des isométries de V par rapport à h_E (respectivement à h'_E).

En fixant un vecteur de V, G. E. Wall a défini dans [44] un homomorphisme $\mathrm{sn}_E : U_E(h'_E) \to E^\times/E_0^\times$ qui a des propriétés similaires à la norme spinorielle sur les groupes orthogonaux, qu'il a donc aussi appelé "*norme spinorielle*" du groupe unitaire $U_E(h'_E)$. Remarquons que cette norme ne dépend pas du choix du vecteur fixé dans notre cas car le corps E est commutatif. Nous rappelons ici sa définition. Pour éviter toute confusion, nous allons appeler "*norme de Wall*" cette norme.

Soit $u \in U_E(h'_E)$ un élément non trivial. Notons V_u l'image de la transformation $1-u$. Si V_u est de dimension r on dit que u est un *élément de dimension* r. Tout élément de dimension 1, noté $s_{(v;\varphi)}$, est donc défini par

$$s_{(v;\varphi)}(x) = x - \varphi h'_E(v,x)v, \forall x \in V,$$

où v est un vecteur non nul (il forme donc une base) de l'espace $V_{s_{(v;\varphi)}}$ et φ est un élément de $E^\times$ vérifiant $\varphi^{-1} - \bar{\varphi}^{-1} = h'_E(v,v)$. L'élément φ est en fait défini par $\varphi = f_u(v,v)^{-1}$, où f_u est une forme sesquilinéaire sur V_u (relativement à notre involution $^-$) définie par

$$\begin{aligned} f_u : V_u \times V_u &\to E \\ (x-u(x), y-u(y)) &\mapsto h'_E(x-u(x), y), \quad \forall x, y \in V. \end{aligned}$$

Par [44, Lemme 3], tout élément $u \in U_E(h'_E)$ de dimension r (avec $r > 0$) peut toujours s'écrire

$$u = s_{(v_1;\varphi_1)} s_{(v_2;\varphi_2)} \dots s_{(v_r;\varphi_r)},$$

comme un produit d'éléments de dimension 1 où les vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_r$ forment une base orthogonale de V_u par rapport à la forme f_u et v_1 peut être choisi comme un vecteur non isotrope quelconque de V_u. Wall appelle une telle décomposition *décomposition de Cayley.*

Fixons un vecteur a de V et supposons que $u \in U_E(h'_E)$ est un élément de dimension r avec une décomposition de Cayley :

$$u = s_{(v_1;\varphi_1)} s_{(v_2;\varphi_2)} \dots s_{(v_r;\varphi_r)},$$

où les vecteurs v_i sont choisis tels que $h'_E(a, v_i)$ est égal à soit 0, soit 1. Alors la classe $\varphi_1\varphi_2 \dots \varphi_r E_0^\times$ dans $E^\times/E_0^\times$ ne dépend que de u, pas du choix de v_i [44, Lemme 5].

Remarquons que notre cas est le cas commutatif de *loc. cit.*, donc l'ensemble Γ_a dans *loc. cit.* est égal à E_0 et ne dépend pas de a. De plus, la classe $\varphi_1\varphi_2\dots\varphi_r E_0^\times$ est exactement le discriminant de la forme f_u et donc ne dépend pas non plus du choix de a. Cela entraîne que l'on peut également supprimer les conditions du choix des vecteurs v_i.

La norme de Wall d'un élément de dimension $r, u = s_{(v_1;\varphi_1)}s_{(v_2;\varphi_2)}\dots s_{(v_r;\varphi_r)}$, de $U_E(h'_E)$ est définie par

$$\mathrm{sn}_E(u) = \varphi_1\varphi_2\dots\varphi_r E_0^\times.$$

Si on définit la norme de Wall de l'identité de V comme la classe triviale de $E^\times/E_0^\times$, par [44, Lemma 7], $\mathrm{sn}_E : U_E(h'_E) \to E^\times/E_0^\times$ est un homomorphisme.

Le groupe unitaire $U_E(h_E)$ est en fait le centralisateur de b dans G. Nous voulons comprendre le centralisateur de b dans $\widehat{G}$. Il nous faut donc déterminer l'intersection de $U_E(h_E)$ et du noyau $\mathrm{O}'(h)$ de la norme spinorielle. Cela demande de calculer la norme spinorielle des éléments de G qui commutent b. Nous espérons donc trouver une relation entre la norme de Wall sur $U_E(h'_E) = U_E(h_E)$ et la norme spinorielle sur G. Une idée qui nous vient naturellement est de montrer une formule similaire à la formule (2.4) pour la norme de Wall. Nous allons voir dans la proposition suivante qu'une telle formule est vérifiée pour les éléments de dimension 1 de $U_E(h'_E)$.

Proposition 2.15. *Soit $s_{(v;\varphi)}$ un élément de dimension 1 de $U_E(h'_E)$. Alors*

$$\mathrm{disc}_E(h'_E|_{\underset{n\geq 1}{\cup}\ker(1+s_{(v;\varphi)})^n})\det{}_E(\frac{1+s_{(v;\varphi)}}{2}|_{\underset{n\geq 1}{\cap}\mathrm{im}(1+s_{(v;\varphi)})^n}) = \varphi \mod (E_0^\times). \tag{2.5}$$

Démonstration. On distingue deux cas : soit v est un vecteur isotrope, i.e. $h'_E(v,v) = 0$, soit v ne l'est pas.

Premier cas : v est isotrope. Dans ce cas, l'élément $s_{(v;\varphi)}$ est appelé une *transvection* de V. On a $\varphi^{-1} - \bar{\varphi}^{-1} = 0$, donc $\varphi \in E_0^\times$. Alors la norme de Wall sn_E est triviale en $s_{(v;\varphi)}$.

Soit $x \in \ker(1 + s_{(v;\varphi)})$. Il est donc dans la droite engendrée par v, i.e. $x = kv$ pour un certain $k \in E$. Puisque $h'_E(v,v) = 0$ on a $2kv = 0$ et donc $k = 0$ car la caractéristique p est différente de 2. Cela implique que $\underset{n\geq 1}{\cup}\ker(1 + s_{(v;\varphi)})^n$ est nul.

Comme v est isotrope, il existe une base $\{v, v', w_1, ..., w_{n-2}\}$ de V telle que v' est un vecteur isotrope vérifiant $h'_E(v,v') = 1$ et que $h'_E(v,w_i) = 0, i = 1, ..., n-2$. Dans cette base on a

$$\det{}_E(\frac{1+s_{(v;\varphi)}}{2}) = \det{}_E\begin{pmatrix}1 & -\frac{\varphi}{2}\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Donc la formule (2.5) est bien vraie dans ce cas.

Deuxième cas : v n'est pas isotrope. Dans ce cas, on a une décomposition orthogonale $V = (Ev) \perp (Ev)^\perp$, où $(Ev)^\perp$ est le complément orthogonal de la droite Ev dans V par rapport à la forme h'_E.

Soit $x \in \ker(1 + s_{(v;\varphi)})$. Comme dans le premier cas, nous avons $x = kv$ pour $k \in E$. Nous avons donc $2kv - \varphi h'_E(v,kv)v = 0$. Cela nous donne

$$k[1 + \varphi\bar{\varphi}^{-1}]v = 0$$

puisque $\varphi^{-1} - \bar{\varphi}^{-1} = h'_E(v,v)$. Alors le sous-espace $\bigcup_{n\geq 1} \ker(1+s_{(v;\varphi)})^n$ est soit nul, soit la droite Ev (quand $\varphi\bar{\varphi}^{-1} = -1$). Dans la première situation, le terme à gauche de (2.5) devient

$$\det{}_E(\frac{1+s_{(v;\varphi)}}{2}) = \frac{1+\varphi\bar{\varphi}^{-1}}{2} \mod (E_0^\times),$$

alors que dans l'autre situation il devient

$$\mathrm{disc}_E(h'_E|_{vE}) = (\varphi^{-1} - \bar{\varphi}^{-1}) \mod (E_0^\times).$$

Il est donc facile de voir que la formule (2.5) est bien vérifiée dans les deux situations. □

Remarquons que dans le cas où $\varphi\bar{\varphi}^{-1} = -1$, l'élément $s_{(v;\varphi)}$ est une “réflexion” définie par le vecteur v par rapport à h'_E, c'est-à-dire, c'est une transformation de V telle que $s_{(v;\varphi)}(v) = -v$ et que $s_{(v;\varphi)}(x) = x$ pour tout $x \in V$ tel que $h'_E(v,x) = 0$.

Notons $\mathrm{Norm}_{E/F}$ la norme de l'extension E sur F. Cette norme induit un homomorphisme, qu'on note aussi $\mathrm{Norm}_{E/F}$, de $E^\times/E_0^\times$ dans $F^\times/(F^\times)^2$. De la proposition précédente, nous obtenons une relation entre la norme de Wall dans $U_E(h'_E)$ et la norme spinorielle dans G.

Corollaire 2.16. *Soit $s_{(v;\varphi)}$ un élément de dimension 1 de $U_E(h'_E)$ qui n'est pas une réflexion, i. e., tel que $\varphi\bar{\varphi}^{-1} \neq -1$. Alors*

$$\mathrm{sn}(s_{(v;\varphi)}) = \mathrm{Norm}_{E/F}(\mathrm{sn}_E(s_{(v;\varphi)})). \tag{2.6}$$

Démonstration. Avec les hypothèses données, nous avons vu que le sous-espace $\bigcup_{n\geq 1} \ker(1+s_{(v;\varphi)})^n$ est nul. On a donc

$$\mathrm{sn}(s_{(v;\varphi)}) = \det(\frac{1+s_{(v;\varphi)}}{2}) \mod (F^\times)^2$$

et

$$\mathrm{sn}_E(s_{(v;\varphi)}) = \det{}_E(\frac{1+s_{(v;\varphi)}}{2}) \mod (E_0^\times).$$

D'où le corollaire. □

Avec le corollaire précédent on voit que le sous-groupe de $U_E(h'_E)$ engendré par les transvections est toujours contenu dans $\mathrm{O}'(h)$. Dans la suite, on va voir que la relation (2.6) est vraie pour tous les éléments de $U_E(h_E)$. D'abord nous le montrons dans le cas quadratique, c'est-à-dire, $E_0 = F$.

Corollaire 2.17. *Si $E_0 = F$, on a*

$$\mathrm{sn}(u) = \mathrm{Norm}_{E/F}(\mathrm{sn}_E(u)), \text{ pour tout } u \in U_E(h'_E).$$

Démonstration. Les deux applications sn et $\mathrm{Norm}_{E/F} \circ \mathrm{sn}_E$ sont des homomorphismes de $U_E(h'_E)$ dans $F^\times/(F^\times)^2$, il suffit de vérifier l'égalité pour les éléments de dimension 1 qui sont des générateurs de $U_E(h'_E)$. Avec le corollaire 2.16, il nous reste à la vérifier pour une réflexion, i.e., $u = s_{(v;\varphi)}$, où $\varphi\bar{\varphi}^{-1} = -1$. Dans ce cas, il s'agit de vérifier que

$$\operatorname{disc}(h|_{vE}) = \operatorname{Norm}_{E/F}(\operatorname{disc}_E(h'_E|_{vE})) \mod (F^\times)^2.$$

En identifiant l'espace Ev avec E, la restriction de la forme h_E à cet espace est une forme hermitienne sur E. Elle est donc de la forme $h_E(x, y) = ax\bar{y}, \forall x, y \in E$, avec $a \in E_0$ fixé. On a donc $\operatorname{disc}_E(h'_E|_E) = a\delta \mod (E_0^\times)$. Par ailleurs, $\{1, \delta\}$ forme une F-base orthogonale de E par rapport à h. On a donc

$$\operatorname{disc}(h|_E) = \det \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -2a\delta^2 \end{pmatrix} \mod (F^\times)^2 = \operatorname{Norm}_{E/F}(a\delta) \mod (F^\times)^2.$$

D'où le corollaire. □

Remarque 2.18. Pour définir la norme de Wall de $u \in U_E(h'_E) = U_E(h_E)$, il faut montrer que l'expression donnée plus haut est indépendante de la décomposition de Cayley de u choisie, fait dont la démonstration n'est pas si simple (voir [44, Lemme 5]). Cependant, on a aussi un autre point de vue qui est plus délicat. Supposons $\det{}_E(u) = \alpha$. Alors $\operatorname{Norm}_{E/E_0}(\alpha) = 1$. D'après le théorème 90 de Hilbert, il existe un élément $\beta \in E^\times$ tel que $\alpha = \beta\overline{\beta}^{-1}$. Cet élément, à un scalaire dans E_0 près, est uniquement déterminé par α. En effet, si β_1 et β_2 sont deux tels éléments alors $\beta_1\overline{\beta_1}^{-1} = \beta_2\overline{\beta_2}^{-1}$ et donc $\beta_1\beta_2^{-1} = \overline{\beta_1\beta_2^{-1}}$. Nous avons donc un homomorphisme

$$\mathrm{Hil} : \mathrm{Norm}_{\mathrm{E/E_0}}^{-1}(1) \to \mathrm{E}^\times/\mathrm{E}_0^\times, \alpha \mapsto \beta\mathrm{E}_0^\times, \text{ où } \alpha = \beta\overline{\beta}^{-1}.$$

La norme de Wall est en fait la composition de cet homomorphisme avec le déterminant, c'est-à-dire, nous avons

$$\operatorname{sn}_E(u) = \mathrm{Hil}(\det{}_{\mathrm{E}}(\mathrm{u})), \forall \mathrm{u} \in \mathrm{U_E}(\mathrm{h'_E}). \tag{2.7}$$

En effet, les deux applications considérées sont des homomorphismes sur le groupe $U_E(h'_E)$, il suffit donc d'établir cette égalité sur les éléments de dimension 1 de $U_E(h'_E)$ qui sont des générateurs de $U_E(h'_E)$. Soit $s_{(v,\varphi)}$ un élément de dimension 1 de $U_E(h'_E)$. Alors

$$s_{(v,\varphi)}(x) = x - \varphi h'_E(x, v)v, \text{ pour tout } x \in V,$$

et $\varphi^{-1} - \overline{\varphi}^{-1} = h'_E(v, v)$. Si v est isotrope alors, par définition, la norme de Wall de $s_{(v,\varphi)}$ est triviale et, par ailleurs, il est facile de voir que $\det{}_E(s_{(v,\varphi)}) = 1$. Si v est non isotrope alors

$$\det{}_E(s_{(v,\varphi)}) = 1 - \varphi h'_E(v, v) = 1 - \varphi(\varphi^{-1} - \overline{\varphi}^{-1}) = \varphi\overline{\varphi}^{-1},$$

et donc $\mathrm{Hil}(\det{}_{\mathrm{E}}(\mathrm{s}_{(\mathrm{v},\varphi)})) = \varphi\mathrm{E}_0^\times = \mathrm{sn_E}(\mathrm{s}_{(\mathrm{v},\varphi)})$. Alors l'égalité (2.7) est vérifiée pour tous les éléments de dimension 1 de $U_E(h'_E)$. Elle est donc vraie pour tous les éléments de $U_E(h'_E)$. Avec ce point de vue sur la norme de Wall, nous pouvons voir que le corollaire 2.17 est identique à [32, Chapitre 10, Théorème 1.5]. Cependant, la démonstration de [32, Chapitre 10, Théorème 1.5] est fausse puisque, avec ses notations, $\widetilde{\sigma} \neq \alpha_\beta$.

Traitons maintenant le cas général. Pour tous $x, y \in V$, posons

$$h_{E_0}(x, y) := \mathrm{tr}_{E/E_0}(h_E(x, y)).$$

Alors nous obtenons une forme bilinéaire symétrique non dégénérée h_{E_0} sur V (vu comme un E_0-espace vectoriel). Notons $\mathrm{SO}_{E_0}(h_{E_0})$ le groupe des rotations de V par rapport à la forme h_{E_0} et soit sn_{E_0} la norme spinorielle de $\mathrm{SO}_{E_0}(h_{E_0})$. Remarquons que

$$U_E(h_E) \subset \mathrm{SO}_{E_0}(h_{E_0}) \subset G.$$

De plus, le corollaire 2.17 nous donne

$$\mathrm{sn}_{E_0}(u) = \mathrm{Norm}_{E/E_0}(\mathrm{sn}_E(u)), \forall u \in U_E(h_E).$$

Pour le passage de E_0 à F, nous utilisons des "*propriétés de transfert*" d'anneaux de Witt des espaces quadratiques (voir [32, Chapitre 9, §5]). Considérons E_0 comme un E_0-espace de dimension 1. Notons ϕ_0 la forme bilinéaire symétrique sur E_0 définie par :

$$\phi_0(x, y) = xy, \ \forall x, y \in E_0.$$

Alors $\mu_0 \circ \phi_0$ est une forme bilinéaire symétrique sur E_0 (vu comme un F-espace vectoriel). Notons $\varsigma = \mathrm{disc}_F(\mu_0 \circ \phi_0)$. Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique sur un E_0-espace vectoriel $\mathcal{W}$ de dimension n. De même manière, $\mu_0 \circ \phi$ est une forme bilinéaire symétrique sur le F-espace vectoriel $\mathcal{W}$. Dans cette situation, on peut utiliser les mêmes notations $\mathrm{sn}, \mathrm{sn}_{E_0}$ sans confusion. Avec ces notations, nous avons

Lemme 2.19 ([32, Theorème 5.12])**.** $\mathrm{disc}_F(\mu_0 \circ \phi) = (\varsigma)^n \mathrm{Norm}_{E_0/F}(\mathrm{disc}_{E_0}(\phi))$.

Démonstration. Quitte à diagonaliser ϕ, on se ramène au cas où $\mathcal{W}$ est de dimension 1 sur E_0. Identifiant $\mathcal{W}$ à E_0, il existe $\alpha \in E_0$ tel que

$$\phi(x, y) = \alpha xy, \ \forall x, y \in E_0.$$

Fixons une F-base $\{e_i\}$ de E_0. Alors $Q = (\mu_0(e_i e_j))$ est la matrice de $\mu_0 \circ \phi_0$. Supposons que $\alpha e_j = \sum_i \alpha_{ij} e_i, \alpha_{ij} \in F$, et notons R la matrice (α_{ij}). Alors la matrice de la forme $\mu_0 \circ \phi$ est

$$(s(\alpha e_i e_j)) = (\mu_0((\sum_k \alpha_{ki} e_k) e_j)) = (\sum_k \alpha_{ki} \mu_0(e_k e_j)) = R^t Q.$$

Puisque $\det_F(R) = \mathrm{Norm}_{E_0/F}(\alpha)$, nous obtenons l'égalité du lemme. □

Poursuivons dans la même situation générale. Soit s une réflexion du E_0-espace $\mathcal{W}$. Alors appliquant la formule de Zassenhaus, le lemme précédent nous donne

Corollaire 2.20. $\mathrm{sn}(s) = \varsigma \mathrm{Norm}_{E_0/F}(\mathrm{sn}_{E_0}(s))$.

Comme chaque élément de $\mathrm{SO}_{E_0}(\phi)$ est un produit d'un nombre pair de réflexions du E_0-espace $\mathcal{W}$ et sn est un homomorphisme sur $\mathrm{SO}_{E_0}(\phi)$, nous obtenons

Corollaire 2.21. $\mathrm{sn}(u) = \mathrm{Norm}_{E_0/F}(\mathrm{sn}_{E_0}(u))$ *pour tout* $u \in \mathrm{SO}_{E_0}(\phi)$.

Revenons maintenant dans notre cas. Nous pouvons terminer la démonstration de la relation entre la norme de Wall et la norme spinorielle.

Proposition 2.22. *Pour tout $u \in U_E(h_E)$, nous avons*

$$\mathrm{sn}(u) = \mathrm{Norm}_{E/F}(\mathrm{sn}_E(u)).$$

Démonstration. Utilisant les corollaires 2.21 et 2.17, nous avons

$$\mathrm{sn}(u) = \mathrm{Norm}_{E_0/F}(\mathrm{sn}_{E_0}(u)) = \mathrm{Norm}_{E_0/F}(\mathrm{Norm}_{E/E_0}(\mathrm{sn}_E(u))) = \mathrm{Norm}_{E/F}(\mathrm{sn}_E(u)).$$

□

2.3.2 Centralisateur

Dans ce paragraphe, en suivant le paragraphe 5 de [9], nous étudions le centralisateur dans $\widehat{G}$ d'un élément semi-simple de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.

Soit β un élément semi-simple de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Notons $\widehat{G}_\beta$ le fixateur de β dans $\widehat{G}$ par l'action adjointe. Par l'hypothèse, la caractéristique résiduelle p de F est différente de 2. Il n'est donc pas un *mauvais premier* pour $\widehat{G}$, i.e. il n'est pas un premier de torsion au sens de [38]. D'ailleurs, $\widehat{\mathbf{G}}$ est un groupe réductif simplement connexe, le centralisateur $\widehat{\mathbf{G}}_\beta$ de β dans $\widehat{\mathbf{G}}$ est donc un groupe réductif connexe défini sur une certaine extension finie de F dont le groupe des F-points est $\widehat{G}_\beta$: comme β est semi-simple, son fixateur $\widehat{\mathbf{G}}_\beta$ contient un tore maximal $\mathbf{T}$ du groupe spinoriel $\widehat{\mathbf{G}}$. Soit Φ un système de racines de $\widehat{\mathbf{G}}$ relativement à $\mathbf{T}$. Le groupe $\widehat{\mathbf{G}}_\beta$ est engendré par $\mathbf{T}$ et par les sous-groupes radiciels $\mathbf{U}_\alpha$ associés aux racines $\alpha \in \Phi$ qui s'annulent en β (voir [38, Lemma 3.7 et Theorem 3.14]).

Soit G_β le fixateur de β dans G par l'action adjointe de G sur $\mathfrak{g}$. On a $\widehat{G}_\beta = t^{-1}(G_\beta \cap \mathrm{O}'(h))$. Puisque β est semi-simple, la F-algèbre $E = F[\beta]$ est une somme directe d'extensions finies séparables de F. Paul Broussous et Shaun Stevens [9] ont précisément décrit G_β comme étant le groupe de F-points d'un produit des restrictions des scalaires sur F de groupes généraux et de groupes classiques (unitaires ou orthogonaux spéciaux) définis sur des extensions finies de F. Nous rappelons ici un peu de détail de leur description de G_β. Ensuite, nous donnons aussi une petite remarque sur $\widehat{G}_\beta$.

Puisque E est invariante sous l'action de l'involution τ, elle peut s'écrire

$$E = \bigoplus_{i \in D_+} (E_i \oplus E_{-i}) \oplus \bigoplus_{j \in D_0} E_j,$$

où D_+ et D_0 sont deux ensembles finis d'indices, les $E_i, i \in D_+ \cup D_0 \cup D_-$ avec $D_- = \{-i : i \in D_+\}$, sont des extensions finies de F telles que

$$\tau(E_i) = E_{-i}, \forall i \in D_+ \text{ et } \tau(E_j) = E_j, \forall j \in D_0.$$

De plus, l'espace V peut s'écrire

$$V = \perp_{i \in D_+} (V_i \oplus V_{-i}) \perp (\perp_{j \in D_0} V_j),$$

où V_i est un E_i-espace vectoriel pour tout $i \in D_+ \cup D_0 \cup D_-$ et, de plus, pour tout $i \in D_+$, V_i et V_{-i} sont deux espaces totalement isotropes en dualité par rapport à h.

Pour chaque $i \in D_0$, on désigne par τ_i la restriction de τ sur E_i. C'est donc une involution sur E_i. Notons $E_{i,0}$ l'ensemble des points fixes de τ_i. Fixons une forme F-linéaire τ-invariante non nulle $\mu_{i,0} : E_{i,0} \to F$ et posons $\mu_i = \mu_{i,0} \circ \mathrm{tr}_{E_i/E_{i,0}}$. Il existe uniquement une forme hermitienne non dégénérée $h_i : V_i \times V_i \to E_i$ relativement à l'involution τ_i telle que $h(x, y) = \mu_i(h_i(x, y)), \forall x, y \in V$ [9, Lemme 5.2].

Notons $G_{\beta_i}, i \in D_0$, le groupe des isométries de l'espace (V_i, h_i). Paul Broussous et Shaun Stevens [9] ont montré que

$$G_\beta \cong \prod_{i \in D_+} \mathrm{Aut}_{E_i}(V_i) \times \prod_{j \in D_0} G_j,$$

où le groupe $\mathrm{Aut}_{E_i}(V_i)$ se prolonge dans G_β par l'isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathrm{Aut}_{E_i}(V_i) &\to \{g \in \mathrm{Aut}_{E_i}(V_i) \times \mathrm{Aut}_{E_{-i}}(V_{-i}) : g\overline{g} = 1\} \\ x &\mapsto (x, \overline{x}^{-1}). \end{aligned}$$

Si $u \in G_\beta$ correspond à $\prod\limits_{i \in D_+} g_i \prod\limits_{j \in D_0} u_j$ de $\prod\limits_{i \in D_+} \mathrm{Aut}_{E_i}(V_i) \times \prod\limits_{j \in D_0} G_j$ alors on a

$$\mathrm{sn}(u) = \prod_{i \in D_+} \det g_i \prod_{j \in D_0} \mathrm{sn}(u_j).$$

C'est la seule information que nous avons sur l'intersection entre G_β et $\mathrm{O}'(h)$ et ainsi sur $\widehat{G}_\beta$. En particulier, nous n'avons pas d'expression de $\widehat{G}_\beta$ sous forme d'un produit direct. Cela entraîne beaucoup de difficultés quand nous travaillons avec le centralisateur $\widehat{G}_\beta$.

Chapitre 3

Construction de représentations supercuspidales

Nous présentons dans ce chapitre notre construction d'une famille de représentations irréductibles supercuspidales de $\widehat{G}$. Nous rappelons d'abord la notion de *strates semi-simples autoduales*. Attachés à une strate semi-simple autoduale, nous définissons les *caractères semi-simples autoduaux* pour $\widehat{G}$ en relevant ceux pour G. De même, en relevant les β-extensions pour G définies dans [42], nous définissons celles pour $\widehat{G}$. Ce sont des bons prolongements d'un caractère semi-simple autodual à un sous-groupe ouvert compact de $\widehat{G}$. Noter que nos β-extensions sont triviales sur le centre.

Dans un cas particulier, appelé *cas semi-simple gauche*, en choisissant une β-extension et ajoutant une partie cuspidale de niveau zéro, nous obtenons un type cuspidal, c'est-à-dire, une paire (J, λ) composée d'un sous-groupe ouvert compact J de $\widehat{G}$ et d'une représentation irréductible λ de J telle que l'induite compact $\pi = c\text{-}\mathrm{Ind}_J^{\widehat{G}}\lambda$ est une représentation irréductible supercuspidale de $\widehat{G}$.

Par l'exemple 2.1.3, on voit que, si $\widehat{G} = \mathrm{Spin}_F(1,1)$, on a $\widehat{G} \simeq \mathrm{GL}_1(F)$. Ce groupe est bien connu. Nous excluons donc ce cas dans toute la suite de la thèse.

3.1 Strates semi-simples autoduales

3.1.1 Filtrations de Moy-Prasad

On désigne par $\mathcal{I}(G, F)$ l'immeuble de Bruhat- Tits de G. D'après [28], à chaque point x de $\mathcal{I}(G, F)$, on peut attacher un sous-groupe ouvert compact $P_x = P_{x,0}$ de G - le fixateur de x dans G, une filtration décroissante $\{P_{x,r}\}_{r\geq 0}$ de sous-groupes ouverts compacts de G et une filtration décroissante $\{\mathfrak{g}_{x,r}\}_{r\in\mathbb{R}}$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Ces filtrations sont appelées *les filtrations de Moy-Prasad* attachées à x.

Pour tout $r \in \mathbb{R}$ notons $P_{x,r+} = \bigcup_{s>r} P_{x,s}$ et $\mathfrak{g}_{x,r+} = \bigcup_{s>r} \mathfrak{g}_{x,s}$. Alors $P_{x,0+}$ est le radical pro-unipotent de P_x et le quotient $P_x/P_{x,0+}$ est le groupe des points rationnels d'un groupe réductif $\mathcal{G}$ défini sur k_F ([28, §3.2]). On désigne par P_x^o l'image inverse dans P_x par l'application du quotient du groupe des points rationnels de la composante connexe de $\mathcal{G}$. C'est un sous-groupe parahorique de G.

Remarquons que l'image inverse par l'isogénie $\mathbf{t}$ d'un tore maximal de $\mathbf{G}$ est un tore maximal de $\widehat{\mathbf{G}}$ et que la restriction de $\mathbf{t}$ sur un sous-groupe unipotent fermé connexe $\widehat{\mathbf{U}}$ de $\widehat{\mathbf{G}}$ induit un isomorphisme de $\widehat{\mathbf{U}}$ sur $\mathbf{t}(\widehat{\mathbf{U}})$. Cela implique que $\widehat{G}$ partage avec G les points de l'immeuble $\mathcal{I}(G,F)$ et, de plus, que l'action de $\widehat{G}$ sur $\mathcal{I}(G,F)$ se factorise par l'action de G sur $\mathcal{I}(G,F)$.

Pour chaque $r>0, P_{x,r}$ est un pro-p-sous-groupe de G, on note ${}_sP_{x,r}$ le pro-p-sous-groupe de $\widehat{G}$ correspondant par l'homomorphisme donné par le corollaire 2.13. Or l'action sur $\mathcal{I}(G,F)$ de $\widehat{G}$ se factorise par celle de G, $\widehat{P}_x = t^{-1}(P_x \cap \mathrm{O}'(h))$ est le fixateur du point x dans $\widehat{G}$. Alors $\widehat{P}_x$ et les sous-groupes ${}_sP_{x,r}$ forment la filtration de Moy-Prasad de $\widehat{G}$ attachée au point x. On a donc les propriétés suivantes ([28, §2.6]) :

(i) Pour tout $g \in \widehat{G}$, on a $g^{-1}{}_sP_{x,r}g = {}_sP_{gx,r}$ et $g^{-1}\widehat{P}_x g = \widehat{P}_{gx}$, où gx est l'image de x par l'action de g sur $\mathcal{I}$.

(ii) $[\widehat{P}_x, {}_sP_{x,r}] \subset {}_sP_{x,r}$, $[{}_sP_{x,r}, {}_sP_{x,r'}] \subset {}_sP_{x,r+r'}$ et $[\mathfrak{g}_{x,r}, \mathfrak{g}_{x,r'}] \subset \mathfrak{g}_{x,r+r'}$.

${}_sP_{x,0+} = \bigcup_{r>0} {}_sP_{x,r}$ est le radical pro-unipotent de $\widehat{P}_x$. D'après L. Morris [27], il existe une suite exacte

$$1 \to {}_sP_{x,0+} \to \widehat{P}_x \to \widehat{M} \to 1,$$

où $\widehat{M}$ est le groupe des points rationnels d'un groupe réductif (non nécessairement connexe) $\widehat{\mathbb{M}}$ défini sur le corps résiduel k_F. Soit $\mathbb{M}$ la composante connexe de $\widehat{\mathbb{M}}$ et M son groupe des points rationnels. Notons $\widehat{P}_x^o$ l'image inverse de M dans $\widehat{P}_x$. Alors $\widehat{P}_x^o$ est un sous-groupe parahorique de $\widehat{G}$. Il est bien entendu que le chapeau ˆ dans $\widehat{P}_x^o$ ne désigne pas l'image inverse de P_x^o par t.

Allen Moy et Gopal Prasad [28, Théorème 5.2] ont montré que, pour toute représentation lisse irréductible admissible $(\pi, \mathcal{V})$ de $\widehat{G}$, il existe un unique nombre rationnel $n(\pi) \geq 0$ tel que l'espace $\mathcal{V}^{{}_sP_{x,n(\pi)+}}$ des vecteurs fixés par ${}_sP_{x,n(\pi)+}$ est non nul pour certain point x dans l'immeuble $\mathcal{I}(G,F)$ et que $n(\pi)$ est le plus petit nombre rationnel vérifiant cette propriété. On appelle *niveau* de $(\pi,\mathcal{V})$ le nombre $n(\pi)$.

3.1.2 Langage de réseaux

Nous rappelons dans cette section le dictionnaire de [9] de l'immeuble de G au langage de réseaux. Nous rappelons donc d'abord qu'un *réseau* dans V est un sous-groupe ouvert compact de V et qu'un tel réseau est appelé $\mathfrak{o}_F$-*réseau* dans V s'il est aussi un $\mathfrak{o}_F$-module. Si $\mathcal{R}$ est un $\mathfrak{o}_F$-réseau de V, on définit son $\mathfrak{o}_F$-réseau dual par rapport à h par

$$\mathcal{R}^\sharp = \{v \in V : h(v,v') \in \mathfrak{p}_F, \forall v' \in \mathcal{R}\}.$$

Cette notion de dualité de réseaux dans V est généralisée pour une forme ϵ-hermitienne quelconque sur V.

Une *fonction de réseaux* dans V est une fonction $\widetilde{\Lambda}$ de $\mathbb{R}$ dans l'ensemble des $\mathfrak{o}_F$-réseaux dans V telle que

(i) $\widetilde{\Lambda}(r) \subseteq \widetilde{\Lambda}(s)$ si $r,s \in \mathbb{R}$ et $r \geq s$;

(ii) $\varpi_F\widetilde{\Lambda}(r) = \widetilde{\Lambda}(r+\nu(\varpi_F))$, pour tout $r \in \mathbb{R}$;

(iii) $\widetilde{\Lambda}$ est continue à gauche.
Pour une fonction de réseaux $\widetilde{\Lambda}$ dans V, on pose

$$\widetilde{\Lambda}(r+) = \bigcup_{s>r} \widetilde{\Lambda}(s), \text{ pour } r \in \mathbb{R},$$

et on définit sa duale $\widetilde{\Lambda}^\sharp$ par

$$\widetilde{\Lambda}^\sharp(r) = [\widetilde{\Lambda}((-r)+)]^\sharp, \forall r \in \mathbb{R}.$$

Une fonction de réseaux $\widetilde{\Lambda}$ dans V est dite *autoduale* si $\widetilde{\Lambda}^\sharp = \widetilde{\Lambda}$. Comme dans [9], l'ensemble des fonctions de réseaux autoduale dans V est noté $\mathrm{Latt}_h^1(V)$. Il est évident que cet ensemble est muni d'une action de G. D'après [9, §4], nous avons une bijection G-équivariante entre $\mathcal{I}(G, F)$ et $\mathrm{Latt}_h^1(V)$.

Une fonction de réseaux $\widetilde{\Lambda}$ dans V détermine une fonction de réseaux $\mathfrak{a}(\widetilde{\Lambda})$ dans $A = \mathrm{End}_F(V)$ définie par

$$\mathfrak{a}_r(\widetilde{\Lambda}) = \{a \in A : a\widetilde{\Lambda}(s) \subset \widetilde{\Lambda}(s + r), \forall s \in \mathbb{R}\}, \text{ pour } r \in \mathbb{R}.$$

Notons $\mathfrak{a}_{r+}(\widetilde{\Lambda}) = \cup_{s>r}\mathfrak{a}_s(\widetilde{\Lambda})$. Alors $\mathfrak{a}_0(\widetilde{\Lambda})$ est un $\mathfrak{o}_F$*-ordre héréditaire* (où juste un $\mathfrak{o}_F$*-ordre*) dans A et $\mathfrak{a}_{0+}(\widetilde{\Lambda})$ est son radical de Jacobson (voir [13, (1.1)]). Posons $\widetilde{P}(\widetilde{\Lambda}) = \widetilde{P}_0(\widetilde{\Lambda}) := \mathfrak{a}_0(\widetilde{\Lambda})^\times$, c'est un sous-groupe ouvert compact de $\widetilde{G}$ dont la famille $\widetilde{P}_r(\widetilde{\Lambda}) = 1 + \mathfrak{a}_r(\widetilde{\Lambda})$, pour $r > 0$, est une filtration par des pro-p-sous-groupes ouverts normaux.

Si $\widetilde{\Lambda}$ est une fonction de réseaux autoduale dans V alors $\mathfrak{a}_r(\widetilde{\Lambda}), r \in \mathbb{R}$, et $\widetilde{P}_r(\widetilde{\Lambda}), r \geq 0$, sont stable par l'involution τ. Posons

$$\mathfrak{a}_r^-(\widetilde{\Lambda}) = \mathfrak{a}_r(\widetilde{\Lambda}) \cap \mathfrak{g}, \forall r \in \mathbb{R}, \text{ et } P_r(\widetilde{\Lambda}) = \widetilde{P}_r(\widetilde{\Lambda}) \cap G, \forall r \geq 0.$$

Alors si $x \in \mathcal{I}(G, F)$ est le point correspondant à $\widetilde{\Lambda}$, on a $P_{x,r} = P_r(\widetilde{\Lambda})$ pour tout $r \geq 0$, où $\{P_{x,r}\}_{r\geq 0}$ est la filtration de Moy-Prasad attachée à x.

La filtration de Moy-Prasad de sous-groupes ouverts compacts de $\widehat{G}$ attachée à une fonction de réseaux autoduale $\widetilde{\Lambda}$ est notée $\widehat{P}(\widetilde{\Lambda}) = \widehat{P}_0(\widetilde{\Lambda})$ et ${}_sP_r(\widetilde{\Lambda})$, pour $r > 0$.

On appelle *suite de* $\mathfrak{o}_F$*-réseaux* dans V une fonction Λ de $\mathbb{Z}$ dans l'ensemble des $\mathfrak{o}_F$-réseaux dans V telle que

(i) si $k \geq j$ alors $\Lambda(k) \subseteq \Lambda(j)$;

(ii) il existe un entier positif $e = e(\Lambda|\mathfrak{o}_F)$, appelé la $\mathfrak{o}_F$*-période* de Λ, tel que $\Lambda(k)\varpi_F = \Lambda(k + e)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Si la suite Λ est de plus stricte, elle est aussi appelée une *chaine de* $\mathfrak{o}_F$*-réseaux* dans V.

Une suite de $\mathfrak{o}_F$-réseaux Λ dans V est dite *autoduale* s'il existe un entier d tel que $\Lambda(k)^\sharp = \Lambda(d - k)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Sans modifier les objets attachés à une suite autoduale de $\mathfrak{o}_F$-réseaux Λ, on peut toujours normaliser Λ pour que $d = 1$ et que la période e soit pair. **À partir de maintenant on suppose toujours $d = 1$ et e pair pour toute suite autoduale Λ de $\mathfrak{o}_F$-réseaux de V.**

Pour $i = 1, 2$, soient V^i un F-espace vectoriel de dimension finie et Λ^i une suite de $\mathfrak{o}_F$-réseaux dans V^i de période $e(\Lambda^i)$. La somme directe, $\Lambda = \Lambda^1 \oplus \Lambda^2$, est une suite de $\mathfrak{o}_F$-réseaux dans $V^1 \oplus V^2$ de période $e(\Lambda) = \mathrm{ppcm}\,(e(\Lambda^1), e(\Lambda^2))$ (voir la définition dans [15, §2.8]). De plus, avec l'hypothèse $d = 1$, la somme directe orthogonale de suites autoduales de $\mathfrak{o}_F$-réseaux est une suite autoduale de $\mathfrak{o}_F$-réseaux.

On peut voir que une suite autoduale de $\mathfrak{o}_F$-réseaux Λ dans V détermine une unique fonction de réseaux autoduale $\widetilde{\Lambda}$ dans V. D'après [8, I, 7], la fonction de réseaux $\widetilde{\Lambda}$ est attachée à un point rationnel $x \in \mathcal{I}(G, F)$, i.e., un point qui est barycentre d'un simplexe à coefficients rationnels. De plus, si l'on pose

$$\mathfrak{a}_n(\Lambda) = \{a \in \mathrm{End}_F(V) : a\Lambda(k) \subset \Lambda(k+n)\}, \text{ pour } n \in \mathbb{Z},$$

$\widetilde{P}(\Lambda) = \mathfrak{a}_0(\Lambda)^\times, \widetilde{P}_n(\Lambda) = 1 + \mathfrak{a}_n(\Lambda)$, pour $n \in \mathbb{Z}_+^*$, $P^+(\Lambda) = \widetilde{P}(\Lambda) \cap G^+$, $P(\Lambda) = \widetilde{P}(\Lambda) \cap G$ et $P_n(\Lambda) = \widetilde{P}_n(\Lambda) \cap G$, pour $n \in \mathbb{Z}_+^*$, alors $P(\Lambda) = P_x, P_1(\Lambda) = P_{x,0+}$ et $\{P_n(\Lambda)\}_{n \in \mathbb{Z}_+^*}$ est une filtration de $P(\Lambda)$ par des pro-p-sous-groupes de G. Nous avons aussi des sous-groupes correspondants de $\widehat{G}$ attachés à la suite Λ, notés $\widehat{P}(\Lambda)$ et ${}_sP_n(\Lambda)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}_+^*$. Dans ce cas, nous notons aussi $P^o(\Lambda), \widehat{P}^o(\Lambda)$ les sous-groupes parahoriques P_x^o et $\widehat{P}_x^o$ respectivement. $\{\mathfrak{a}_n(\Lambda)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une filtration de A et la famille $\mathfrak{a}_n^-(\Lambda) := \mathfrak{a}_n(\Lambda) \cap \mathfrak{g}$, pour $n \in \mathbb{Z}$, forme une filtration de $\mathfrak{g}$. Remarquons que, en posant $\mathfrak{a}_r(\Lambda) = \mathfrak{a}_{\lceil r \rceil}(\Lambda)$, pour tout $r \in \mathbb{R}$, où $\lceil r \rceil$ est la plus petite majorée entière de r, on obtient les filtrations associées à Λ d'indices réels. La filtration $\{\mathfrak{a}_r(\Lambda)\}_{r \in \mathbb{R}}$ induit une valuation ν_Λ sur A par

$$\nu_\Lambda(b) = \begin{cases} \sup\{k \in \mathbb{R} : b \in \mathfrak{a}_k(\Lambda)\} & \text{si } b \neq 0, \\ +\infty & \text{si } b = 0. \end{cases}$$

Réciproquement, si $\widetilde{\Lambda}$ est une fonction de réseaux autoduale dans V attachée à un point rationnel de $\mathcal{I}(G, F)$ alors il existe un entier positif e tel que la fonction $\Lambda : n \mapsto \widetilde{\Lambda}(en/\nu(\varpi_F))$ soit une suite autoduale de $\mathfrak{o}_F$-réseaux dans V.

Soit Λ une suite autoduale de $\mathfrak{o}_F$-réseaux dans V. Pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$ tels que $2n \geq m > n \geq 0$, il existe un isomorphisme $P(\Lambda)$-équivariant de groupes abéliens de $\mathfrak{a}_{-m}^-(\Lambda)/\mathfrak{a}_{-n}^-(\Lambda)$ dans $(P_{n+1}(\Lambda)/P_{m+1}(\Lambda))^\wedge$, où le chapeau $^\wedge$ désigne le dual de Pontrjagin, qui, à chaque classe $b + \mathfrak{a}_{-n}^-(\Lambda)$, fait correspondre un caractère ψ_b de $P_{n+1}(\Lambda)$ défini par $\psi_b(g) = \psi_F(\mathrm{tr}(b(g-1))), \forall g \in P_{n+1}(\Lambda)$, où tr désigne la trace de $\mathrm{End}_F(V)$ dans F (voir [39, Lemme 1.2, (ii)]). Cet isomorphisme induit via t un isomorphisme

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}_{-m}^-(\Lambda)/\mathfrak{a}_{-n}^-(\Lambda) &\cong ({}_sP_{n+1}(\Lambda)/{}_sP_{m+1}(\Lambda))^\wedge \\ b + \mathfrak{a}_{-n}^-(\Lambda) &\mapsto {}_s\psi_b, \end{aligned} \tag{3.1}$$

où ${}_s\psi_b(x) = \psi_F(\mathrm{tr}(b(t(x)-1)))$ pour tout $x \in {}_sP_{n+1}(\Lambda)$.

3.1.3 Strates

Dans ce paragraphe, nous rappelons les notions sur les strates de [13], [15] et de [41]. Alors une *strate* (dans A) est un quadruplet $[\Lambda, n, r, b]$ consistant en une suite de $\mathfrak{o}_F$-réseaux Λ dans V, deux entiers $n, r \in \mathbb{Z}$ tels que $n \geq r \geq 0$ et un élément $b \in \mathfrak{a}_{-n}(\Lambda)$.

Une strate $[\Lambda, n, r, b]$ est dite *nulle* si $n = r$ et $b = 0$. On dit que deux strates $[\Lambda, n, r, b_1]$ et $[\Lambda, n, r, b_2]$ sont *équivalentes* si $b_1 - b_2 \in \mathfrak{a}_{-r}(\Lambda)$.

Soit β un élément de A tel que l'algèbre $E = F[\beta]$ est un corps. Soit Λ une suite de $\mathfrak{o}_E$-réseaux dans le E-espace vectoriel V. Alors Λ est aussi une suite de $\mathfrak{o}_F$-réseaux dans V. Notons $B = A_\beta$ le centralisateur de β dans A et posons $\mathfrak{b}_n(\Lambda) = \mathfrak{a}_n(\Lambda) \cap B$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Alors $\{\mathfrak{b}_n(\Lambda)\}$ est une filtration de B par des $\mathfrak{o}_E$-réseaux dont $\mathfrak{b}_0(\Lambda)$ est un $\mathfrak{o}_E$-ordre de B. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, nous posons aussi $\mathfrak{n}_k = \mathfrak{n}_k(\beta, \Lambda) = \{x \in \mathfrak{a}_0(\Lambda) : \beta x - x\beta \in \mathfrak{a}_k\}$. Comme dans [41], nous notons $k_0(\beta, \Lambda)$ le nombre entier défini par

$$k_0(\beta, \Lambda) = \begin{cases} \max\{k \in \mathbb{R} : \mathfrak{n}_k \not\subset \mathfrak{b}_0(\Lambda) + \mathfrak{a}_1(\Lambda)\} & \text{si } \beta \neq 0, \\ -\infty & \text{si } \beta = 0. \end{cases}$$

Si e est la $\mathfrak{o}_F$-période de Λ alors $k_0(\beta, \Lambda)/e$ est un entier qui ne dépend pas de Λ (voir plus dans [15, §5] où cet entier est noté $k_F(\beta)$).

Définition 3.1 ([13, Définition 1.5.5])**.** Une strate $[\Lambda, n, r, \beta]$ dans A est dite *simple* si elle est nulle ou elle vérifie les conditions suivantes :

(i) l'algèbre $E = F[\beta]$ est un corps ;
(ii) Λ est aussi une suite de $\mathfrak{o}_E$-réseaux de V ;
(iii) $\nu_\Lambda(\beta) = -n$;
(iv) $k_0(\beta, \Lambda) < -r$.

Soient $[\Lambda, n, r, \beta]$ une strate et $V = \oplus_{i \in I} V^i$ une décomposition finie de V par des F-sous-espaces vectoriels. Pour chaque $i \in I$, on définit une suite de réseaux Λ^i dans V^i par $\Lambda^i(k) = \Lambda(k) \cap V^i, \forall k \in \mathbb{Z}$ et on pose $\beta_i = \mathbf{1}^i \beta \mathbf{1}^i$, où $\mathbf{1}^i$ est la projection de V sur V^i de noyau $\oplus_{j \neq i} V^j$.

On dit que la décomposition $V = \oplus_{i \in I} V^i$ scinde la suite Λ si $\Lambda(k) = \oplus_{i=1}^l \Lambda^i(k)$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et qu'elle scinde la strate $[\Lambda, n, r, \beta]$ si elle scinde Λ et si $\beta = \sum_{i \in I} \beta_i$. En particulier, on dit qu'une F-base $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_N\}$ de V scinde la strate $[\Lambda, n, r, \beta]$ si $V = \oplus_{i=1}^N F v_i$ scinde $[\Lambda, n, r, \beta]$ ([42, Définition 2.3]).

Définition 3.2 ([41, Définitions 3.2])**.** Une strate $[\Lambda, n, r, \beta]$ est dite *semi-simple* si elle est nulle ou $\nu_\Lambda(\beta) = -n$ et il existe une décomposition finie $V = \oplus_{i \in I} V^i$ scindant la strate telle que

(i) pour tout $i \in I$, $[\Lambda^i, m_i, r, \beta_i]$ est une strate simple, où $m_i = r$ si $\beta_i = 0$, $m_i = \nu_{\Lambda^i}(\beta_i)$ sinon ;
(ii) pour $i, j \in I$ tels que $i \neq j$, la strate $[\Lambda^i \oplus \Lambda^j, m, r, \beta_i + \beta_j]$, où $m = \max\{m_i, m_j\}$, n'est pas équivalente à une strate simple.

Si $[\Lambda, n, r, \beta]$ est une strate semi-simple alors la décomposition $V = \oplus_{i \in I} V^i$ associée de V est uniquement déterminée (à l'ordre près) par β : le polynôme minimal de β est un produit $\prod_{i \in I} \Psi_i(X)$ de polynômes irréductibles sur F deux à deux premiers entre eux et on a $V^i = \ker \Psi_i(\beta)$.

Définition 3.3 ([19, 8.2], [3, 1.2])**.** On dit qu'une strate $[\Lambda, n, r, \beta]$ est une strate de $\mathfrak{g}$, ou *strate autoduale*, si Λ est une suite autoduale de $\mathfrak{o}_F$-réseaux dans V et si β est un élément de $\mathfrak{g}$.

Soit $[\Lambda, n, r, \beta]$ une strate semi-simple dans $\mathfrak{g}$. Alors le polynôme minimal de β est un polynôme pair. Quitte à rénuméroter, on peut donc arranger la décomposition de V associée à β sous la forme

$$V = [\perp_{i\in I_0} V^i] \perp [\perp_{j\in I_+} (V^j \oplus V^{-j})],$$

où I_0 et I_+ sont deux sous-ensembles de I tels que
- pour chaque $i \in I_0$, le sous-espace V^i est non dégénéré et orthogonal à tous les autres ;
- pour chaque $j \in I_+$, les sous-espaces V^j et V^{-j} sont totalement isotropes en dualité et orthogonaux aux autres ;
- posons $I_- = \{-j : j \in I_+\}$, alors $I = I_- \cup I_0 \cup I_+$.

Cet arrangement provient de l'arrangement des facteurs irréductibles $\Psi_i(X)$ du polynôme minimal de β tel que

$$\Psi_i(-X) = \begin{cases} \Psi_i(X), & \text{si } i \in I_0; \\ \Psi_{-i}(X), & \text{si } i \in I_+. \end{cases}$$

Une telle décomposition de V est dite aussi *autoduale*.

En suivant les notations de [42], nous noterons $E = F[\beta]$ et $E_i = F[\beta_i], i \in I$. Alors $E = \oplus_{i\in I_0\cup I_+} E_i$. Soit $B = A_\beta$ le centralisateur de β dans A. On a donc $B = \oplus_{i\in I} B_i$, où B_i est le centralisateur de β_i dans $\widetilde{G}_i = \mathrm{End}_F(V^i)$. Par définition, nous avons $\Lambda = \oplus_{i\in I}\Lambda^i$ et, pour chaque $i \in I_0$, Λ^i est une suite autoduale de $\mathfrak{o}_{E_i}$-réseaux dans V^i (d'après [9, §5], pour chaque $i \in I_0$, il existe une forme hermitienne h_i non dégénérée sur V^i telle que les notions de dualité pour $\mathfrak{o}_{E_i}$-réseaux dans V^i données par $h|_{V^i\times V^i}$ et par h_i coïncident). Dans ce cas, on dit aussi que la suite Λ est une *suite autoduale de $\mathfrak{o}_E$-réseaux*. La famille $\mathfrak{b}_n(\Lambda) = \mathfrak{a}_n(\Lambda) \cap B$ est une filtration de B dont $\mathfrak{b}_0(\Lambda)$ est dit un *$\mathfrak{o}_E$-ordre autodual* de B.

Nous désignerons par G_β (respectivement $G_\beta^+, \widehat{G}_\beta$) le centralisateur de β dans G (respectivement dans $G^+, \widehat{G}$). Grâce au travail de Paul Broussous et Shaun Stevens [9], on sait que

$$G_\beta = \prod_{j\in I_+} \widetilde{G}_{\beta_j} \times \prod_{i\in I_0} G_{\beta_i},$$

où $\widetilde{G}_{\beta_j} = \mathrm{Aut}_{E_j}(V^j)$ et G_{β_i} est le groupe des isométries de l'espace hermitien (V^i, h_i). En particulier, G_β est encore (le groupe des F-points d')un groupe réductif. Nous ne sommes pas capable de voir si $\widehat{G}_\beta$ l'est aussi dans ce cas (avec l'hypothèse que $E = F[\beta]$ est une somme d'extensions finies pas nécessairement séparables de F). À cause de cette difficulté, **nous devrons supposer, dans toute la suite, de plus que notre corps F est de caractéristique nulle**. Avec cette convention, $\widehat{G}_\beta$ est (le groupe des F-points d')un groupe réductif. De plus, par l'isogénie $\mathbf{t}$, ces deux centralisateurs partagent les points de l'immeuble $\mathcal{I}(G_\beta, F)$. Cet immeuble est décrit dans *loc. cit.* D'après cette description, nous avons une injection G_β-équivariante de $\mathcal{I}(G_\beta, F)$ dans $\mathcal{I}(G, F)$ (voir théorème 6.3 dans *loc. cit.*). Par cette injection, la suite autoduale de réseaux Λ de la strate correspond à un point rationnel de $\mathcal{I}(G_\beta, F)$.

Posons $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) = P(\Lambda)\cap G_\beta^+, P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) = P(\Lambda)\cap G_\beta$ et $P_n(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) = P_n(\Lambda)\cap G_\beta$ pour $n \geq 1$. Notons $\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ et ${}_sP_n(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}), n \geq 1$, pour les sous-groupes correspondants dans

$\widehat{G}$. Alors $\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) = \widehat{P}(\Lambda) \cap \widehat{G}_\beta$ et ${}_sP_n(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) = {}_sP_n(\Lambda) \cap \widehat{G}_\beta$ pour $n > 0$. De plus, $\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ est le fixateur d'un point rationnel de l'immeuble de $\widehat{G}_\beta$ avec son radical pro-unipotent ${}_sP_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$. Il existe donc une suite exacte $1 \to {}_sP_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \to \widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \to \widehat{M} \to 1$, où $\widehat{M}$ est (le groupe des points rationnels d')un groupe réductif défini sur un corps fini. Notons $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ l'image inverse dans $\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ de la composante connexe M de $\widehat{M} \simeq \widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) / {}_sP_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$. Le chapeau "$\widehat{\ }$" dans $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ ne désigne pas l'image inverse par t. Alors $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ est un sous-groupe parahorique de $\widehat{G}_\beta$.

L'isomorphisme (3.1) implique que, si $n \geq r \geq [\frac{n}{2}] \geq 0$, chaque classe d'équivalence de strates dans $\mathfrak{g}$ correspond à un caractère de ${}_sP_r(\Lambda)$ qui est trivial sur ${}_sP_{n+1}(\Lambda)$:

$$\text{la classe de } [\Lambda, n, r, b] \mapsto {}_s\psi_b.$$

Définition 3.4 ([42, Définition 2.5])**.** Une strate semi-simple autoduale $[\Lambda, n, r, \beta]$ est dite *gauche* ("*skew*" en anglais) si $I = I_0$ ou, en équivalence, si β est elliptique.

3.2 Caractères semi-simples

Le but de cette section est de définir les caractères semi-simples pour $\widehat{G} = \mathrm{Spin}_F(h)$ en relevant les caractères semi-simples autoduaux pour G et de vérifier qu'ils conservent les propriétés d'un caractère semi-simple.

3.2.1 Définition

Soit $[\Lambda, n, r, \beta]$ une strate semi-simple dans $\mathfrak{g}$ avec la décomposition autoduale de V associée

$$V = [\perp_{i \in I_0} V^i] \perp [\perp_{j \in I_+} (V^j \oplus V^{-j})].$$

Remarquons que, pour chaque $j \in I_+$, il y a une injection canonique, notée ι_j, de $\widetilde{G}_j = \mathrm{Aut}_F(V^j)$ dans G qui, à chaque $g \in \widetilde{G}_j$, fait correspondre l'unique élément prolongeant g et agissant trivialement sur V^i, pour tout $i \neq \pm j$. Attachés à la strate, Shaun Stevens [41, §3.2] a défini deux sous groupes ouverts compacts $\widetilde{H}(\beta, \Lambda) \subseteq \widetilde{J}(\beta, \Lambda)$ de $\widetilde{G} = \mathrm{Aut}_F(V)$, respectivement filtrés par des pro-p-sous-groupes $\widetilde{H}^m(\beta, \Lambda)$ et $\widetilde{J}^m(\beta, \Lambda)$, pour $m \geq 1$. Ces sous-groupes sont stables par l'involution τ (voir [41, §3.6], [19, §8.2]). Notons $H^m(\beta, \Lambda)$ (respectivement $J^m(\beta, \Lambda)$) le sous-groupe des points fixes de τ dans $\widetilde{H}^m(\beta, \Lambda)$ (respectivement $\widetilde{J}^m(\beta, \Lambda)$), pour $m \geq 1$. Ces sont des sous-groupes de $\mathrm{O}'(h)$. Nous notons aussi $J(\beta, \Lambda) = \widetilde{J}(\beta, \Lambda) \cap G$.

Pour $0 \leq m < r$, Stevens [41, Définition 3.13] a également défini un ensemble $\widetilde{\mathcal{C}}(\Lambda, m, \beta)$ de caractères abéliens de $\widetilde{H}^{m+1}(\beta, \Lambda)$, appelés l'ensemble des *caractères semi-simples* de $\widetilde{H}^{m+1}(\beta, \Lambda)$. D'après [19, §8.2], $\widetilde{\mathcal{C}}(\Lambda, m, \beta)$ est stable par l'involution τ. De manière semblable que [41, §3.6], en utilisant la correspondance de Glauberman, Laure Blasco et Corinne Blondel [3, §2.4] ont défini un ensemble $\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$ de caractères abéliens de $H^{m+1}(\beta, \Lambda)$, appelé l'ensemble des *caractères semi-simples autoduaux* de $H^{m+1}(\beta, \Lambda)$. C'est aussi l'ensemble des restrictions à $H^{m+1}(\beta, \Lambda)$ des caractères semi-simples de $\widetilde{H}^{m+1}(\beta, \Lambda)$.

Dans le cas où la strate semi-simple autoduale $[\Lambda, n, r, \beta]$ est gauche, suivant Shaun Stevens [41], les caractères semi-simples autoduaux associés sont appelés les *caractères semi-simples gauches* ("*skew semisimple characters*" en anglais). La différence entre les caractères semi-simples autoduaux et gauches est explicitée dans [3, Lemme 2.13, (i)(b)].

Posons $\widehat{J}(\beta,\Lambda) := t^{-1}(J(\beta,\Lambda)\cap \mathrm{O}'(h))$. Nous notons aussi ${}_sH^m(\beta,\Lambda), {}_sJ^m(\beta,\Lambda)$, pour $m \geq 1$, les pro-p-sous-groupes de $\widehat{G}$ respectivement correspondants aux pro-p-sous-groupes $H^m(\beta,\Lambda)$ et $J^m(\beta,\Lambda)$ de G par le corollaire 2.13. Remarquons que les restrictions de l'homomorphisme t à ces pro-p-sous-groupes induisent les isomorphisme de groupes

$${}_sH^m(\beta,\Lambda) \simeq H^m(\beta,\Lambda), {}_sJ^m(\beta,\Lambda) \simeq J^m(\beta,\Lambda), \text{ pour tout } m > 0.$$

Alors pour $0 \leq m < r$ et pour chaque caractère semi-simple autodual $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$ de $H^{m+1}(\beta,\Lambda)$, nous définissons naturellement un caractère abélien ${}_s\theta$ de ${}_sH^{m+1}(\beta,\Lambda)$, appelé *caractère semi-simple autodual relevé* (ou *caractère semi-simple autodual* pour $\widehat{G} = \mathrm{Spin}_F(h)$), par

$${}_s\theta = \theta \circ t|_{{}_sH^{m+1}(\beta,\Lambda)}.$$

L'ensemble des caractères semi-simples autoduaux relevés est noté ${}_s\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$. Par définition, nous avons des remarques qui sont similaires à [3, Lemme 2.13].

Remarques 3.5. Soit ${}_s\theta \in {}_s\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$ un caractère semi-simple autodual relevé de ${}_sH^{m+1}(\beta,\Lambda)$. Alors

(i) Pour chaque $i \in I_0$, la restriction de ${}_s\theta$ à

$${}_sH^{m+1}(\beta,\Lambda) \cap \mathrm{Spin}_F(h|_{V^i}) = {}_sH^{m+1}(\beta_i,\Lambda^i)$$

est un caractère semi-simple autodual relevé de ${}_sH^{m+1}(\beta_i,\Lambda^i)$.

(ii) Pour chaque $j \in I_+$, notons $\widetilde{G}_j^2 = \{g \in \widetilde{G}_j : \det(g) \in (F^\times)^2\}$. Alors, par la proposition 2.10, l'image de $\widetilde{G}_j^2$ sous l'injection canonique ι_j est contenue dans $\mathrm{O}'(h)$. Soit $\widehat{G}_j^2$ l'image inverse dans $\widehat{G}$ par t de $\iota_j(\widetilde{G}_j^2)$. L'intersection ${}_sH^{m+1}(\beta,\Lambda) \cap \widehat{G}_j^2$ est le pro-p-sous-groupe de $\widehat{G}$ qui est isomorphe, par la restriction de t, à

$$H^{m+1}(\beta,\Lambda) \cap \iota_j(\widetilde{G}_j^2) = \iota_j(\widetilde{H}^{m+1}(\beta_j,\Lambda^j)).$$

La restriction de ${}_s\theta$ à ${}_sH^{m+1}(\beta,\Lambda) \cap \widehat{G}_j^2$ est donc le relevé par l'injection ι_j et puis par t d'un caractère semi-simple dans $\widetilde{\mathcal{C}}(\Lambda^j, m, 2\beta_j)$.

Les caractères semi-simples autoduaux relevés sont dits *gauche* si la strate semi-simple autoduale associée est gauche.

3.2.2 Entrelacement

Poursuivons avec une strate semi-simple autodual $[\Lambda, n, 0, \beta]$. Soit $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ un caractère semi-simple autodual de $H^1(\beta,\Lambda)$. D'après [41, Proposition 3.27] (ou plutôt un résultat analogue pour les caractères semi-simples autoduaux), on a

$$I_G(\theta) = J^1(\beta,\Lambda) \cdot G_\beta \cdot J^1(\beta,\Lambda).$$

Avant de calculer l'entrelacement du caractère autodual relevé ${}_s\theta$ de θ, nous montrons le critère suivant

Lemme 3.6. *Soient K un pro-p-sous-groupe de G et ${}_sK$ l'image de K dans $\widehat{G}$ sous l'homomorphisme s_K donné par le corollaire 2.13. Pour $i = 1, 2$, soient $(\sigma_i, \mathcal{W}_i)$ une représentation de K et $({}_s\sigma_i, \mathcal{W}_i)$ la représentation de ${}_sK$ définie par : ${}_s\sigma_i = \sigma_i \circ t|_{{}_sK}$. Alors*

$$I_{\widehat{G}}({}_s\sigma_1, {}_s\sigma_2) = t^{-1}(I_G(\sigma_1, \sigma_2) \cap \mathrm{O}'(h)).$$

De plus, on a

$$I_{\overline{g}}({}_s\sigma_1, {}_s\sigma_2) = I_{t(\overline{g})}(\sigma_1, \sigma_2), \text{ pour tout } \overline{g} \in I_{\widehat{G}}({}_s\sigma_1, {}_s\sigma_2).$$

Démonstration. Puisque K est un pro-p-sous-groupe de G, il est contenu dans $\mathrm{O}'(h)$ et, de plus, la restriction de t à ${}_sK$ donne un isomorphisme de ${}_sK$ dans K dont l'inverse est s_K. Par l'hypothèse, ${}_s\sigma_i$ se factorise par σ_i et par t, il est donc facile de vérifier que

$$I_{\widehat{G}}({}_s\sigma_1, {}_s\sigma_2) \supseteq t^{-1}(I_G(\sigma_1, \sigma_2) \cap \mathrm{O}'(h)).$$

Il nous reste à vérifier que :

$$I_{\widehat{G}}({}_s\sigma_1, {}_s\sigma_2) \subseteq t^{-1}(I_G(\sigma_1, \sigma_2) \cap \mathrm{O}'(h)).$$

Soit $\overline{g} \in I_{\widehat{G}}({}_s\sigma_1, {}_s\sigma_2)$. On va montrer $g := t(\overline{g}) \in I_G(\sigma_1, \sigma_2) \cap O'(h)$. Comme $\overline{g} \in I_{\widehat{G}}({}_s\sigma_1, {}_s\sigma_2)$, il existe une transformation linéaire non nulle $f : \mathcal{W}_1 \to \mathcal{W}_2$ telle que

$$f \circ \overline{\sigma}_1(\overline{g}^{-1}\overline{k}\overline{g}) = \overline{\sigma}_2(\overline{k}) \circ f, \text{ pour tout } \overline{k} \in \overline{g}_sK\overline{g}^{-1} \cap {}_sK.$$

Il est clair que la restriction de s_K à $gKg^{-1} \cap K$ est l'unique homomorphisme de $gKg^{-1} \cap K$ dans $\widehat{G}$ donné par le corollaire 2.13. D'ailleurs, il n'est pas difficile de voir que l'application

$$\begin{aligned} s : gKg^{-1} \cap K &\to \widehat{G} \\ k = gk'g^{-1} &\mapsto \overline{g}s_K(k')\overline{g}^{-1} \end{aligned}$$

est un homomorphisme de $gKg^{-1} \cap K$ dans $\widehat{G}$ vérifiant $t \circ s = Id_{gKg^{-1}\cap K}$. Cela implique que $s_K|_{gKg^{-1}\cap K} = s$. En particulier, nous avons $s_K(k) \in \overline{g}_sK\overline{g}^{-1} \cap {}_sK$ pour tout $k \in gKg^{-1} \cap K$.

Maintenant, pour tout $k \in gKg^{-1} \cap K$, posons $\overline{k} = s_K(k)$, nous avons $t(\overline{k}) = k$ et $f \circ \overline{\sigma}_1(\overline{g}^{-1}\overline{k}\overline{g}) = \overline{\sigma}_2(\overline{k}) \circ f$. Comme ${}_s\sigma_i$ se factorise par σ_i et par t, on a

$$f \circ \sigma_1(g^{-1}kg) = \sigma_2(k) \circ f, \text{ pour tout } k \in gKg^{-1} \cap K.$$

Autrement dit, $f \in \mathrm{Hom}_{{}^gK\cap K}({}^g\sigma_1, \sigma_2)$ et donc $g \in I_G(\sigma_1, \sigma_2) \cap \mathrm{O}'(h)$. De plus, on voit que

$$\mathrm{Hom}_{{}^gK\cap K}({}^g\sigma_1, \sigma_2) = \mathrm{Hom}_{{}^{\overline{g}}({}_sK)\cap {}_sK}({}^{\overline{g}}({}_s\sigma_1), {}_s\sigma_2).$$

□

Nous calculons maintenant l'entrelacement du caractère autodual relevé ${}_s\theta$ de θ.

Proposition 3.7 (cf. [42, Proposition 3.1]). *Soit $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate semi-simple autoduale et soit ${}_s\theta \in {}_s\mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ un caractère semi-simple autodual relevé de ${}_sH^1(\beta, \Lambda)$. Alors on a*

$$I_{\widehat{G}}({}_s\theta) = {}_sJ^1(\beta, \Lambda) \cdot \widehat{G}_\beta \cdot {}_sJ^1(\beta, \Lambda).$$

Démonstration. Soit $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ le caractère semi-simple autodual tel que ${}_s\theta = \theta \circ t|_{{}_sH^1(\beta,\Lambda)}$. On a
$$I_G(\theta) = J^1(\beta, \Lambda) \cdot G_\beta \cdot J^1(\beta, \Lambda).$$
D'ailleurs, par le lemme 3.6, $I_{\widehat{G}}({}_s\theta) = t^{-1}(I_{\mathrm{O}'(h)}(\theta)) = t^{-1}(I_G(\theta) \cap \mathrm{O}'(h))$. Comme $J^1(\beta, \Lambda)$ est un pro-p sous groupe de G, on a
$$I_G(\theta) \cap \mathrm{O}'(h) = J^1(\beta, \Lambda) \cdot G_\beta \cap \mathrm{O}'(h) \cdot J^1(\beta, \Lambda).$$
L'assertion de la proposition est donc équivalente à l'égalité
$${}_sJ^1(\beta, \Lambda) \cdot \widehat{G}_\beta \cdot {}_sJ^1(\beta, \Lambda) = t^{-1}(J^1(\beta, \Lambda) \cdot G_\beta \cap \mathrm{O}'(h) \cdot J^1(\beta, \Lambda)).$$
Le sens "$\subseteq$" est évident. Il suffit de vérifier l'autre sens. Soit $x \in \widehat{G}$ tel que $t(x) = j_1 g j_2$, avec $j_1, j_2 \in J^1(\beta, \Lambda)$ et $g \in G_\beta \cap \mathrm{O}'(h)$. Soient ${}_sj_1, {}_sj_2 \in {}_sJ^1(\beta, \Lambda)$ tels que $t({}_sj_1) = j_1, t({}_sj_2) = j_2$. On écrit $x = {}_sj_1({}_sj_1^{-1} x {}_sj_2^{-1}){}_sj_2$. Il est clair que $t({}_sj_1^{-1} x {}_sj_2^{-1}) = g$, d'où la proposition. □

3.2.3 Propriété de transfert

Supposons $[\Lambda, n, 0, \beta]$ et $[\Lambda', n', 0, \beta]$ deux strates semi-simples dans $\mathfrak{g}$. D'après [41, Proposition 3.26], il y a une bijection canonique
$$\tau_{\Lambda,\Lambda',\beta} : \widetilde{\mathcal{C}}(\Lambda, 0, \beta) \to \widetilde{\mathcal{C}}(\Lambda', 0, \beta)$$
telle que, pour $\widetilde{\theta} \in \widetilde{\mathcal{C}}(\Lambda, 0, \beta)$, $\widetilde{\theta}' = \tau_{\Lambda,\Lambda',\beta}(\widetilde{\theta})$ est l'unique caractère semi-simple dans $\widetilde{\mathcal{C}}(\Lambda', 0, \beta)$ tel que $B^\times \cap I_{\widetilde{G}}(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta}') \neq \emptyset$. On a, de plus, $B^\times \subseteq I_{\widetilde{G}}(\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta}')$. Cette bijection commute avec l'involution τ. Elle induit donc une bijection canonique, notée aussi $\tau_{\Lambda,\Lambda',\beta} : \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta) \to \mathcal{C}(\Lambda', 0, \beta)$, et, par [39, Corllaire 2.4], pour $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta), \theta' = \tau_{\Lambda,\Lambda',\beta}(\theta)$ est l'unique caractère semi-simple autodual dans $\mathcal{C}(\Lambda', 0, \beta)$ tel que $G_\beta \cap I_G(\theta, \theta') \neq \emptyset$. Bien sûr on a, de plus, que $G_\beta \subseteq I_G(\theta, \theta')$. Cette bijection induit à la fois une bijection canonique, notée encore $\tau_{\Lambda,\Lambda',\beta}$, entre ${}_s\mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ et ${}_s\mathcal{C}(\Lambda', 0, \beta)$, qui, à chaque caractère semi-simple autodual relevé ${}_s\theta \in {}_s\mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ associé à un caractère semi-simple autodual $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$, fait correspondre le caractère semi-simple autodual relevé ${}_s\theta' \in {}_s\mathcal{C}(\Lambda', 0, \beta)$ associé au caractère semi-simple autodual $\theta' = \tau_{\Lambda,\Lambda',\beta}(\theta)$. De plus, nous avons la propriété suivante :

Proposition 3.8 (cf. [42, Proposition 3.2]). *Soient $[\Lambda, n, 0, \beta]$ et $[\Lambda', n', 0, \beta]$ deux strates semi-simples dans $\mathfrak{g}$. Pour chaque caractère semi-simple autodual relevé ${}_s\theta \in {}_s\mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$, le caractère ${}_s\theta' = \tau_{\Lambda,\Lambda',\beta}({}_s\theta)$ est l'unique caractère semi-simple autodual relevé dans ${}_s\mathcal{C}(\Lambda', 0, \beta)$ tel que $\widehat{G}_\beta \cap I_{\widehat{G}}({}_s\theta, {}_s\theta') \neq \emptyset$. De plus, $\widehat{G}_\beta \subseteq I_{\widehat{G}}({}_s\theta, {}_s\theta')$.*

Démonstration. Puisque $\widehat{G}_\beta = t^{-1}(G_\beta)$, cette proposition est une conséquence immédiate du lemme 3.6. □

3.3 Extension de Heisenberg

Rappelons que la restriction de t sur les pro-p sous-groupes ${}_sH^1(\beta,\Lambda)$ et ${}_sJ^1(\beta,\Lambda)$ donne des isomorphismes canoniques

$$ {}_sH^1(\beta,\Lambda) \simeq H^1(\beta,\Lambda) \text{ et } {}_sJ^1(\beta,\Lambda) \simeq J^1(\beta,\Lambda). $$

Cela nous permet de voir l'existence et l'unicité de l'extension de Heisenberg. Dans cette section nous allons montrer de plus ses propriétés d'entrelacement.

Soit $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda,0,\beta)$ un caractère semi-simple autodual de $H^1(\beta,\Lambda)$ et ${}_s\theta$ le caractère semi-simple autodual relevé correspondant de ${}_sH^1(\beta,\Lambda)$. Soit η l'unique représentation irréductible de $J^1(\beta,\Lambda)$ contenant θ (l'existence et l'unicité de cette représentation sont confirmées par [25, §2.7] et par [41, Corollaire 3.29] pour un caractère semi-simple gauche). Alors ${}_s\eta = \eta \circ t|_{{}_sJ^1(\beta,\Lambda)}$ est une représentation irréductible de ${}_sJ^1(\beta,\Lambda)$ contenant ${}_s\theta$ et c'est l'unique représentation irréductible ${}_s\eta$ de ${}_sJ^1(\beta,\Lambda)$ contenant ${}_s\theta$. De plus, $\dim {}_s\eta = ({}_sJ^1(\beta,\Lambda) : {}_sH^1(\beta,\Lambda))^{1/2}$.

La proposition suivante détermine l'ensemble des entrelacements de ${}_s\eta$ dans $\widehat{G}$.

Proposition 3.9 (cf.[41, Proposition 3.31]). *Pour $g \in \widehat{G}$, on a*

$$ \dim I_g({}_s\eta, {}_s\eta) = \begin{cases} 1 & si \quad g \in {}_sJ^1(\beta,\Lambda) \cdot \widehat{G}_\beta \cdot {}_sJ^1(\beta,\Lambda), \\ 0 & sinon. \end{cases} $$

Démonstration. Avec la remarque précédente que ${}_s\eta = \eta \circ t|_{{}_sJ^1(\beta,\Lambda)}$ et le lemme 3.6, cette proposition est une conséquence immédiate de [41, Proposition 3.31] (ou plutôt un résultat analogue pour l'extension de Heisenberg d'un caractère semi-simple autodual, voir [25, Proposition 2.6]). □

Soient $[\Lambda^m, n_m, 0, \beta]$ et $[\Lambda^M, n_M, 0, \beta]$ deux strates semi-simples dans $\mathfrak{g}$ associées à la même décomposition autoduale de V

$$ V = [\perp_{i\in I_0} V^i] \perp [\perp_{j\in I_+} (V^j \oplus V^{-j})]. \tag{3.2} $$

Supposons de plus que $\mathfrak{a}_0(\Lambda^m) \subseteq \mathfrak{a}_0(\Lambda^M)$. Soit $\theta_m \in \mathcal{C}(\Lambda^m,0,\beta)$ un caractère semi-simple autodual de $H^1(\beta,\Lambda^m)$ et soit $\theta_M \in \mathcal{C}(\Lambda^M,0,\beta)$ le caractère semi-simple autodual correspondant à θ_m par le transfert $\tau_{\Lambda^m,\Lambda^M,\beta}$. On désigne par η_m (respectivement η_M) l'unique représentation irréductible de $J^1_m = J^1(\beta,\Lambda^m)$ (respectivement $J^1_M = J^1(\beta,\Lambda^M)$) contenant θ_m (respectivement θ_M).

Posons $J^1_{m,M} = P_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1_M$. D'après [25, Proposition 2.6], il existe une unique représentation irréductible $\eta_{m,M}$ de $J^1_{m,M}$ telle que

(i) $\eta_{m,\Lambda}|_{J^1_M} = \eta_M$;

(ii) $\mathrm{Ind}_{J^1_{m,M}}^{P_1(\Lambda^m)}\eta_{m,M}$ et $\mathrm{Ind}_{J^1_m}^{P_1(\Lambda^m)}\eta_m$ sont irréductibles et équivalentes.

De plus, on a aussi

$$ \dim I_g(\eta_{m,M}) = \begin{cases} 1 \text{ si } g \in J^1_{m,M} G_\beta J^1_{m,M}, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} $$

Poursuivons dans la même situation. Posons ${}_sJ^1_m = {}_sJ^1(\beta,\Lambda^m)$ et ${}_sJ^1_M = {}_sJ^1(\beta,\Lambda^M)$. Soit ${}_s\theta_m$ (respectivement ${}_s\theta_M$) le caractère semi-simple autodual relevé de θ_m (respectivement θ_M). Soient ${}_s\eta_m = \eta_m \circ t|_{{}_sJ^1_m}$ et ${}_s\eta_M = \eta_M \circ t|_{{}_sJ^1_M}$. Posons ${}_sJ^1_{m,M} = {}_sP_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E}){}_sJ^1_M$. Alors [25, Proposition 2.6] et le lemme 3.6 impliquent

Proposition 3.10. *${}_s\eta_{m,M} = \eta_{m,M} \circ t|_{{}_sJ^1_{m,M}}$ est l'unique représentation irréductible de ${}_sJ^1_{m,M}$ telle que*

(i) ${}_s\eta_{m,M})|_{{}_sJ^1_M} = {}_s\eta_M$;

(ii) $\mathrm{Ind}_{{}_sJ^1_{m,M}}^{{}_sP_1(\Lambda^m)} {}_s\eta_{m,M}$ et $\mathrm{Ind}_{{}_sJ^1_m}^{{}_sP_1(\Lambda^m)} {}_s\eta_m$ sont irréductibles et équivalentes.

De plus, on a

$$\dim I_g({}_s\eta_{m,M}) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in {}_sJ^1_{m,M} \cdot \widehat{G}_\beta \cdot {}_sJ^1_{m,M}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans cette situation, si de plus $\mathfrak{b}_0(\Lambda^m)$ est un $\mathfrak{o}_E$-ordre autodual minimal dans B alors la représentation $\eta_{m,M}$ est aussi caractérisée comme l'unique représentation irréductible de $J^1_{m,M}$ qui contient η_M et qui est entrelacé par tous les éléments de G_β [42, Corollaire 3.11] (ou plutôt encore [25, Proposition 2.6]). En appliquant le lemme 3.6, on voit bien que la représentation ${}_s\eta_{m,M}$ possède une caractéristique similaire : c'est l'unique prolongement de ${}_s\eta_M$ dont tous les éléments de $\widehat{G}_\beta$ appartiennent à l'ensemble d'entrelacements.

Soit maintenant $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une autre strate semi-simple dans $\mathfrak{g}$ de la même décomposition autoduale (3.2) de V telle que $\mathfrak{b}_0(\Lambda^m) \subseteq \mathfrak{b}_0(\Lambda) \subseteq \mathfrak{b}_0(\Lambda^M)$. Soit ${}_s\theta = \tau_{\Lambda^m,\Lambda,\beta}({}_s\theta_m)$ et soit ${}_s\eta$ l'unique représentation irréductible de ${}_sJ^1(\beta, \Lambda)$ qui contient ${}_s\theta$. Notons ${}_s\eta_{\Lambda,M}$ la représentation de ${}_sJ^1_{\Lambda,M} = {}_sP_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})_sJ^1_M$ donnée par la proposition précédente en remplaçant Λ^m par Λ. La propriété suivante de compatibilité est un corollaire direct de [42, proposition 3.8] (ou le résultat analogue pour les caractères semi-simples autoduaux).

Corollaire 3.11 (cf. [42, proposition 3.8])**.** *Avec les hypothèses précédentes, on a*

$${}_s\eta_{m,M}|_{{}_sJ^1_{\Lambda,M}} = {}_s\eta_{\Lambda,M}.$$

3.4 Beta extensions

Soit $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate semi-simple dans $\mathfrak{g}$. Soit ${}_s\theta \in {}_s\mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ un caractère semi-simple autodual relevé de ${}_sH^1(\beta, \Lambda)$ d'extension de Heisenberg ${}_s\eta$. Nous allons définir, dans cette section, les *β-extensions* pour $\widehat{G}$. Elles sont des prolongements appropriés de ${}_s\eta$ à $\widehat{J}(\beta, \Lambda) = t^{-1}(J(\beta, \Lambda) \cap \mathrm{O}'(V))$. L'idée est de simplement relever toutes les β-extensions de η qui sont définies de manière analogue à [42, §4] (voir [25, §2, β-extensions standards]). Autrement dit, nous ne considérons que des prolongements de ${}_s\eta$ à $\widehat{J}(\beta, \Lambda)$ qui sont triviaux sur le centre de $\widehat{G}$. Cette définition de β-extensions nous permet de profiter des propriétés appropriées des β-extensions de η. En suivant [42, §4], nous étudions tout d'abord les cas où $\mathfrak{b}_0(\Lambda)$ est un $\mathfrak{o}_E$-ordre autodual maximal de B. Ensuite, nous travaillons dans le cas général. Nous montrons aussi que la propriété de compatibilité est encore respectée.

3.4.1 Cas maximal

Soit $[\Lambda^M, n, 0, \beta]$ une strate semi-simple dans $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{b}_0(\Lambda^M)$ soit un $\mathfrak{o}_E$-ordre autodual maximal de B. Soient $\theta_M \in \mathcal{C}(\Lambda^M, 0, \beta)$ un caractère semi-simple autodual et η_M l'unique représentation irréductible de $J^1_M = J^1(\beta, \Lambda^M)$ qui contient θ_M. D'abord, nous rappelons la définition de β-extensions de η_M.

Soit Λ^m une suite autoduale de $\mathfrak{o}_E$-réseaux de V telle que $\mathfrak{b}_0(\Lambda^m)$ soit un $\mathfrak{o}_E$-ordre autodual minimal de B et que $\mathfrak{a}_0(\Lambda^m) \subseteq \mathfrak{a}_0(\Lambda^M)$ (une telle suite de $\mathfrak{o}_E$-réseaux existe toujours, voir [42, Corollaire 2.9]). Soit $\eta_{m,M}$ l'unique représentation de $J^1_{m,M} = P_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1_M$ définie dans [25, Proposition 2.6] (rappelé dans la section précédente). D'après [42, Théorème 4.1] (ou plutôt le résultat analogue pour les caractères autoduaux), il existe un prolongement κ_M de $\eta_{m,M}$ à $J^+_M = J^+(\beta, \Lambda^M)$. On appelle *$\beta$-extension de η_M* un tel prolongement ([25, Définition 2.8]). De plus, si κ_M et κ'_M sont deux β-extensions de η_M alors $\kappa'_M = \kappa_M \otimes \chi$, pour un certain caractère χ du quotient $P^+(\Lambda^M_{\mathfrak{o}_E})/P_1(\Lambda^M_{\mathfrak{o}_E})$ qui est trivial sur tous ses sous-groupes unipotents.

Soit ${}_s\theta_M \in {}_s\mathcal{C}(\Lambda^M, 0, \beta)$ le caractère semi-simple autodual relevé correspondant à θ_M. Soit ${}_s\eta_M$ l'unique représentation irréductible de ${}_sJ^1_M = {}_sJ^1(\beta, \Lambda^M)$ contenant ${}_s\theta_M$. Rappelons que ${}_s\eta_M = \eta_M \circ t|_{{}_sJ^1_M}$.

Définition 3.12. Soit κ_M une β-extension de η_M. Nous appelons *β-extension de* ${}_s\eta_M$ la représentation $\widehat{\kappa}_M$ de $\widehat{J}_M = \widehat{J}(\beta, \Lambda^M)$ définie par

$$\widehat{\kappa}_M = \kappa_M \circ t|_{\widehat{J}_M}.$$

Posons ${}_sJ^1_{m,M} = {}_sP(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E}){}_sJ^1_M$ et ${}_s\eta_{m,M} = \eta_{m,M} \circ t|_{{}_sJ^1_{m,M}}$. Il est clair qu'une β-extension de ${}_s\eta_M$ est un prolongement de ${}_s\eta_{m,M}$ à $\widehat{J}_M$. Comme $\mathfrak{b}_0(\Lambda^m)$ est minimal dans B, le groupe ${}_sJ^1_{m,M}$ est un pro-p-sous-groupe de Sylow de $\widehat{J}_M$. Cela nous donne le corollaire suivant qui est une conséquence immédiate de [42, Théorème 4.1].

Corollaire 3.13. *Si $\widehat{\kappa}_M$ et $\widehat{\kappa}'_M$ sont deux β-extensions de ${}_s\eta_M$ alors $\widehat{\kappa}'_M = \widehat{\kappa}_M \otimes \chi$, où χ est un caractère du quotient $\widehat{P}(\Lambda^M_{\mathfrak{o}_E})/{}_sP_1(\Lambda^M_{\mathfrak{o}_E})$ qui est trivial sur le sous-groupe engendré par tous ses sous-groupes unipotents.*

3.4.2 Cas général

Nous nous plaçons maintenant dans le cas où $[\Lambda, n, 0, \beta]$ est une strate semi-simple quelconque dans $\mathfrak{g}$, c'est-à-dire, $\mathfrak{b}_0(\Lambda)$ est un $\mathfrak{o}_E$-ordre autodual mais pas nécessairement maximal de B. On va définir les β-extensions de ${}_s\eta$ à $\widehat{J}(\beta, \Lambda)$ relatives à une suite autoduale de $\mathfrak{o}_F$-réseaux Λ^M dont $\mathfrak{b}_0(\Lambda^M)$ est un $\mathfrak{o}_E$-ordre autodual maximal de B contenant $\mathfrak{b}_0(\Lambda)$, et compatible avec une β-extension associée. Mais d'abord, comme dans le cas des groupes classiques (voir [42, §4.2]), on a besoin d'une condition de compatibilité.

Soient $[\Lambda, n, 0, \beta]$ et $[\Lambda', n', 0, \beta]$ deux strates semi-simples dans $\mathfrak{g}$ telles que $\mathfrak{b}_0(\Lambda) \subseteq \mathfrak{b}_0(\Lambda')$. Soient $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ un caractère semi-simple autodual de $H^1(\beta, \Lambda)$ et $\theta' = \tau_{\Lambda,\Lambda',\beta}(\theta)$. Comme d'habitude, on désigne par η (respectivement η') l'unique représentation irréductible de $J^1(\beta, \Lambda)$ (respectivement de $J^1(\beta, \Lambda')$) contenant η (respectivement η').

Nous notons à nouveau ${}_s\theta$ (respectivement ${}_s\theta'$) le caractère semi-simple autodual relevé correspondant à θ (respectivement à θ'). Notons aussi

$${}_s\eta = \eta \circ t|_{{}_sJ^1(\beta,\Lambda)} \text{ et } {}_s\eta' = \eta' \circ t|_{{}_sJ^1(\beta,\Lambda')}.$$

Ces représentations sont l'unique représentation irréductible de ${}_sJ^1(\beta,\Lambda)$ et de ${}_sJ^1(\beta,\Lambda')$ contenant ${}_s\theta$ et ${}_s\theta'$, respectivement. Soit ${}_s\eta_{\Lambda,\Lambda'}$ l'unique représentation irréductible de ${}_sJ^1_{\Lambda,\Lambda'} = {}_sP_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})_sJ^1(\beta,\Lambda')$ qui est déterminée par la proposition 3.10 en remplaçant Λ^m par Λ et Λ^M par Λ'. Le lemme suivant est similaire à [13, Proposition 5.2.5], [33, Lemme 2.23, Proposition 2.9], [42, Lemme 4.3] et [25, Lemme 2.7].

Lemme 3.14. *Avec les notations au-dessus, il y a une bijection canonique entre l'ensemble des prolongements $\widehat{\kappa}$ de ${}_s\eta$ à $\widehat{J} = \widehat{J}(\beta,\Lambda)$ et l'ensemble des prolongements $\widehat{\kappa}'$ de ${}_s\eta'$ à $\widehat{J}_{\Lambda,\Lambda'} = \widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})_sJ^1(\beta,\Lambda')$. En particulier, si de plus $\mathfrak{a}_0(\Lambda) \subseteq \mathfrak{a}_0(\Lambda')$ alors à chaque $\widehat{\kappa}$ (respectivement $\widehat{\kappa}'$) donnée la bijection fait correspondre une unique $\widehat{\kappa}'$ (respectivement une unique $\widehat{\kappa}$) telle que*

$$\mathrm{Ind}_{\widehat{J}}^{\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})_sP_1(\Lambda)}\widehat{\kappa} \simeq \mathrm{Ind}_{\widehat{J}_{\Lambda,\Lambda'}}^{\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})_sP_1(\Lambda)}\widehat{\kappa}'|_{\widehat{J}_{\Lambda,\Lambda'}}.$$

De plus, si $\widehat{\kappa}$ et $\widehat{\kappa}'$ se correspondent par cette bijection alors les ensembles d'entrelacements dans $\widehat{G}_\beta$ de $\widehat{\kappa}$ et de $\widehat{\kappa}'|_{\widehat{J}_{\Lambda,\Lambda'}}$ sont égaux.

Démonstration. La démonstration de ce lemme est totalement identique à la démonstration de [42, Lemme 4.3]. □

Continuons avec les hypothèses précédentes et supposons de plus que $\widehat{\kappa}'$ est de la forme $\widehat{\kappa}' = \kappa' \circ t|_{\widehat{J}_{\Lambda,\Lambda}}$ où κ' est un prolongement de η' à $J^+_{\Lambda,\Lambda'} = P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})J^1(\beta,\Lambda')$. Soit κ le prolongement de η à $J^+(\beta,\Lambda)$ qui correspond à κ' sous la bijection canonique du lemme 4.3 dans [42]. La relation entre κ et l'image de $\widehat{\kappa}'$ par la bijection canonique de la proposition précédente est posée comme une question naturelle. Nous trouverons la réponse dans la proposition suivante.

Proposition 3.15. *Soit $\widehat{\kappa}'$ une représentation de $\widehat{J}_{\Lambda,\Lambda'}$ qui est de la forme $\widehat{\kappa}' = \kappa' \circ t|_{\widehat{J}_{\Lambda,\Lambda}}$ où κ' est un prolongement de η' à $J^+_{\Lambda,\Lambda'} = P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})J^1(\beta,\Lambda')$. Alors la représentation $\widehat{\kappa} = \kappa \circ t|_{\widehat{J}(\beta,\Lambda)}$ de $\widehat{J}(\beta,\Lambda)$ est l'image de $\widehat{\kappa}'$ par la bijection canonique de la proposition 3.14.*

Démonstration. Il suffit de montrer l'assertion dans le cas où on a $\mathfrak{a}_0(\Lambda) \subseteq \mathfrak{a}_0(\Lambda')$. Il est clair que $\widehat{\kappa}$ est un prolongement de ${}_s\eta$ à $\widehat{J}(\beta,\Lambda)$ car κ est un prolongement de η à $J(\beta,\Lambda)$. Par l'unicité, il nous reste à montrer que $\widehat{\kappa}$ et $\widehat{\kappa}'$ induisent à $\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})_sP_1(\Lambda)$ deux représentations irréductibles équivalentes.

Nous désignons par $J'(\beta,\Lambda)$, $J'_{\Lambda,\Lambda'}$, $P'(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ l'intersection de $J^+(\beta,\Lambda)$, $J^+_{\Lambda,\Lambda'}$, $P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ avec $\mathrm{O}'(h)$, respectivement. Appliquant la formule de restriction de Mackey nous obtenons

$$\mathrm{Res}^{P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda)}_{P'(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda)}\mathrm{Ind}^{P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda)}_{J^+(\beta,\Lambda)}\kappa \cong \mathrm{Ind}^{P'(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda)}_{J'(\beta,\Lambda)}\mathrm{Res}^{J^+(\beta,\Lambda)}_{J'(\beta,\Lambda)}\kappa$$
$$\text{et } \mathrm{Res}^{P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda)}_{P'(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda)}\mathrm{Ind}^{P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda)}_{J^+_{\Lambda,\Lambda'}}\kappa' \cong \mathrm{Ind}^{P'(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda)}_{J'_{\Lambda,\Lambda'}}\mathrm{Res}^{J^+_{\Lambda,\Lambda'}}_{J'_{\Lambda,\Lambda'}}\kappa'.$$

D'ailleurs, $\mathrm{Ind}^{P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda)}_{J^+(\beta,\Lambda)}\kappa \cong \mathrm{Ind}^{P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda)}_{J^+_{\Lambda,\Lambda'}}\kappa'$ d'après le lemme 4.3 dans [42]. Alors

$$\mathrm{Ind}^{P'(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda)}_{J'(\beta,\Lambda)}\mathrm{Res}^{J^+(\beta,\Lambda)}_{J'(\beta,\Lambda)}\kappa \cong \mathrm{Ind}^{P'(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda)}_{J'_{\Lambda,\Lambda'}}\mathrm{Res}^{J^+_{\Lambda,\Lambda}}_{J'_{\Lambda,\Lambda'}}\kappa'.$$

De plus, par définition de l'induction, on voit bien que

$$\mathrm{Ind}_{J'(\beta,\Lambda)}^{P'(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda)}\mathrm{Res}_{J'(\beta,\Lambda)}^{J^+(\beta,\Lambda)}\kappa \cong \mathrm{Ind}_{\widehat{J}(\beta,\Lambda)}^{\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})_sP_1(\Lambda)}\widehat{\kappa}$$
$$\text{et } \mathrm{Ind}_{J'_{\Lambda,\Lambda'}}^{P'(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})P_1(\Lambda)}\mathrm{Res}_{J'_{\Lambda,\Lambda}}^{J^+_{\Lambda,\Lambda'}}\kappa' \cong \mathrm{Ind}_{\widehat{J}_{\Lambda,\Lambda'}}^{\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})_sP_1(\Lambda)}\widehat{\kappa}'.$$

D'où la proposition.

□

Nous revenons maintenant définir les β-extensions dans le cas général. Soit $[\Lambda, n, 0, \beta]$ une strate semi-simple dans $\mathfrak{g}$ et soit ${}_s\theta \in {}_s\mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ un caractère semi-simple autodual relevé de ${}_sH^1(\beta, \Lambda)$. Soit $[\Lambda^M, n_M, 0, \beta]$ une autre strate semi-simple dans $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{b}_0(\Lambda^M)$ est un $\mathfrak{o}_E$-ordre autodual maximal de B contenant $\mathfrak{b}_0(\Lambda)$. Soient ${}_s\theta_M = \tau_{\Lambda,\Lambda^M,\beta}({}_s\theta)$, ${}_s\eta_M$ l'unique représentation irréductible de ${}_sJ^1_M = {}_sJ^1(\beta, \Lambda^M)$ contenant ${}_s\eta$, et $\widehat{\kappa}_M$ une β-extension de ${}_s\eta_M$ à $\widehat{J}_M = \widehat{J}(\beta, \Lambda^M)$ définie par la définition 3.12.

Définition 3.16 (cf. [42, Définition 4.5], [25, Définition 2.8])**.** On appelle *β-extension de ${}_s\eta$ à $\widehat{J}(\beta, \Lambda)$ relative à Λ^M, compatible avec $\widehat{\kappa}_M$* le prolongement $\widehat{\kappa}$ de ${}_s\eta$ à $\widehat{J}(\beta, \Lambda)$ correspondant à $\widehat{\kappa}_M|_{\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})_sJ^1_M}$ sous la bijection canonique déterminée par la proposition 3.14.

Par définition, $\widehat{\kappa}_M$ se factorise par une β-extension κ_M de η_M à J_M. D'après la proposition 3.15, on a $\widehat{\kappa} = \kappa \circ t|_{\widehat{J}(\beta,\Lambda)}$, où κ est la β-extension de η à $J(\beta, \Lambda)$ relative à Λ^M et compatible avec κ_M au sens de [42, Définition 4.5] (ou la définition analogue dans le cas autodual, voir [25, Définition 2.8]).

La définition de β-extensions au-dessus est naturelle. Nous vérifions maintenant des "bonnes propriétés" de ces prolongements. Tout d'abord, on obtient directement un résultat sur leurs entrelacements qui est similaire à la propriété dans [42, corollaire 4.6].

Corollaire 3.17 (cf. [42, Corollaire 4.6])**.** *Soit $\widehat{\kappa}$ une β-extension de ${}_s\eta$ relative à Λ^M. Alors $\widehat{P}(\Lambda^M_{\mathfrak{o}_E})$ entrelace $\widehat{\kappa}$.*

Démonstration. Par l'argument précédent, $\widehat{\kappa}$ se factorise par une β-extension κ de η. D'après [42, Corollaire 4.6], $P(\Lambda^M_{\mathfrak{o}_E})$ entrelace κ. Alors l'affirmation suit immédiatement car $\widehat{P}(\Lambda^M_{\mathfrak{o}_E})$ est l'image inverse dans $\widehat{G}$ de $P(\Lambda^M_{\mathfrak{o}_E})$. □

Supposons $[\Lambda^m, n_m, 0, \beta]$ est une strate semi-simple dans $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{b}_0(\Lambda^m)$ soit un $\mathfrak{o}_E$-ordre autodual minimal dans B et que $\mathfrak{a}_0(\Lambda^m) \subseteq \mathfrak{a}_0(\Lambda)$. Posons ${}_s\theta_m = \tau_{\Lambda,\Lambda^m,\beta}({}_s\theta)$ et soit ${}_s\eta_m$ l'unique représentation irréductible ${}_sJ^1(\beta, \Lambda^m)$ qui contient ${}_s\theta_m$. Soit ${}_s\eta_{m,\Lambda}$ la représentation irréductible de ${}_sJ^1_{m,\Lambda} = {}_sP_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})_sJ^1(\beta, \Lambda)$ définie par la proposition 3.10. Comme $\mathfrak{b}_0(\Lambda^m)$ est minimal dans B, ${}_sJ^1_{m,\Lambda}$ est un p-sous-groupe de Sylow de $\widehat{J}(\beta, \Lambda)$. Étant similaire à [13, Proposition 5.2.6] et à [42, Proposition 4.7], la proposition suivante décrit la restriction à ${}_sJ^1_{m,\Lambda}$ d'une β-extension de ${}_s\eta$.

Proposition 3.18. *Avec les notations au-dessus, on a $\widehat{\kappa}|_{{}_sJ^1_{m,\Lambda}} = {}_s\eta_{m,\Lambda}$ pour toute β-extension $\widehat{\kappa}$ de ${}_s\eta$ à $\widehat{J}(\beta, \Lambda)$.*

Démonstration. Soit $\widehat{\kappa}$ une β-extension de ${}_s\eta$ à $\widehat{J}(\beta,\Lambda)$. Par définition, $\widehat{\kappa}$ se factorise par une β-extension κ de η à $J(\beta,\Lambda)$. D'après [42, Proposition 4.7] (ou plutôt un analogue pour le cas autodual), on a

$$\kappa|_{J^1_{m,\Lambda}} = \eta_{m,\Lambda},$$

où $J^1_{m,\Lambda} = P_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\beta,\Lambda)$ et $\eta_{m,\Lambda}$ est la représentation irréductible de $J^1_{m,\Lambda}$ définie par [25, Proposition 2.6]. De plus, ${}_s\eta_{m,\Lambda}$ se factorise par $\eta_{m,\Lambda}$. D'où la proposition. □

Soit $\widehat{J}^o = \widehat{J}^o(\beta,\Lambda)$ l'image inverse dans $\widehat{J} = \widehat{J}(\beta,\Lambda)$ de la composante connexe du quotient $\widehat{J}/{}_sJ^1(\beta,\Lambda)$. Alors $\widehat{J}^o = \widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})_sJ^1(\beta,\Lambda)$, où $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ est l'image inverse dans $\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ de la composante connexe du quotient $\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/{}_sP_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cong \widehat{J}/{}_sJ^1(\beta,\Lambda)$ (en fait, $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ est un sous-groupe parahorique de $\widehat{G}_\beta$). Nous considérons la restriction à $\widehat{J}^o$ des β-extensions.

Nous appelons aussi *β-extension de ${}_s\eta$ à $\widehat{J}^o$* la restriction d'une β-extension de ${}_s\eta$ à $\widehat{J}$. Nous vérifions la propriété de compatibilité pour les β-extensions à $\widehat{J}^o$ dans la proposition suivante qui est analogue à [42, Proposition 4.8] et [13, 5.2.14].

Proposition 3.19. *Soient $[\Lambda,n,0,\beta]$ et $[\Lambda',n',0,\beta]$ deux strates semi-simples dans $\mathfrak{g}$. Supposons qu'il existe une strate semi-simple dans $\mathfrak{g}$, notée $[\Lambda^M,n_M,0,\beta]$, telle que $\mathfrak{b}_0(\Lambda^M)$ est un $\mathfrak{o}_E$-ordre autodual maximal de B contenant $\mathfrak{b}_0(\Lambda)$ et $\mathfrak{b}_0(\Lambda')$. Soit ${}_s\theta \in {}_s\mathcal{C}(\Lambda,0,\beta)$ un caractère semi-simple autodual relevé de ${}_sH^1(\beta,\Lambda)$ et posons ${}_s\theta' = \tau_{\Lambda,\Lambda',\beta}({}_s\theta)$. On désigne par ${}_s\eta$ (respectivement ${}_s\eta'$) l'unique représentation irréductible de ${}_sJ^1(\beta,\Lambda)$ (respectivement de ${}_sJ^1(\beta,\Lambda')$) qui contient ${}_s\theta$ (respectivement ${}_s\theta'$). Il y a une bijection canonique entre l'ensemble des β-extensions $\widehat{\kappa}'$ de ${}_s\eta'$ à $\widehat{J}^o(\beta,\Lambda')$ relative à Λ^M et l'ensemble des β-extensions $\widehat{\kappa}$ de ${}_s\eta$ à $\widehat{J}^o(\beta,\Lambda)$ relative à Λ^M. En particulier, si $\mathfrak{a}_0(\Lambda) \subseteq \mathfrak{a}_0(\Lambda')$ alors cette bijection est définie de manière suivante : à une $\widehat{\kappa}$ (respectivement $\widehat{\kappa}'$) donnée, elle fait correspondre l'unique $\widehat{\kappa}'$ (respectivement $\widehat{\kappa}$) vérifiant la condition que $\widehat{\kappa}$ et $\widehat{\kappa}'|_{\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})_sJ^1(\beta,\Lambda')}$ induisent à $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})_sP^1(\Lambda)$ deux représentations irréductibles équivalentes.*

Démonstration. La démonstration de cette proposition est totalement identique à celle de [42, Proposition 4.8]. □

Si κ et κ' sont deux β-extensions se correspondant sous la bijection de la proposition 3.19 alors on dit qu'elles sont *compatibles*.

Soit $[\Lambda,n,0,\beta]$ une strate semi-simple dans $\mathfrak{g}$ avec la décomposition autoduale associée de V

$$V = [\perp_{i\in I_0} V^i] \perp [\perp_{j\in I_+} (V^j \oplus V^{-j})].$$

La suite autoduale de réseaux L s'écrit donc $\Lambda = \oplus_{i\in I}\Lambda^i$, où Λ^i est une suite de $\mathfrak{o}_{E_i}$-réseaux dans V^i. Pour chaque $i \in I = I_- \cup I_0 \cup I_+$, on définit une suite de $\mathfrak{o}_{E_i}$-réseaux $\mathfrak{M}^i_\Lambda$ dans V^i par

$$\mathfrak{M}^i_\Lambda(2r+s) = \begin{cases} \varpi^r_{E_i}\Lambda^i(0), & \text{si } i \in I_-, \\ \varpi^r_{E_i}\Lambda^i(s), & \text{si } i \in I_0, \\ \varpi^r_{E_i}\Lambda^i(1), & \text{si } i \in I_+, \end{cases},$$

pour $r \in \mathbb{Z}$ et $s = 0, 1$. Posant $\mathfrak{M}_\Lambda = \oplus_{i=1}^{l} \mathfrak{M}_\Lambda^i$, on obtient une suite de $\mathfrak{o}_E$-réseaux autoduale avec $\mathfrak{b}_0(\mathfrak{M}_\Lambda)$ un $\mathfrak{o}_E$-ordre autodual maximal dans B contenant $\mathfrak{b}_0(\Lambda)$ et $[\mathfrak{M}_\Lambda, n_{\mathfrak{M}}, 0, \beta]$ est une strate semi-simple gauche pour un certain entier $n_{\mathfrak{M}}$.

Soient ${}_s\theta \in {}_s\mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ un caractère semi-simple autodual relevé de ${}_sH^1(\beta, \Lambda)$ et ${}_s\eta$ l'unique représentation irréductible de ${}_sJ^1(\beta, \Lambda)$ contenant ${}_s\theta$. On appelle une *β-extension standard* de ${}_s\eta$ une β-extension de ${}_s\eta$ relative à $\mathfrak{M}_\Lambda$.

3.5 Types cuspidaux

Le but de ce paragraphe est de définir des *types cuspidaux* pour le groupe $\widehat{G}$, i.e., des paires $(\widehat{J}, \lambda)$ consistant en un sous-groupe ouvert compact $\widehat{J}$ de $\widehat{G}$ et une représentation irréductible λ de $\widehat{J}$ telle que $\pi = c\text{-Ind}_{\widehat{J}}^{G} \lambda$ est une représentation irréductible supercuspidale de $\widehat{G}$.

Utilisant les notations dans les chapitres précédents, nous partons d'une strate semi-simple $[\Lambda, n, 0, \beta]$ dans $\mathfrak{g}$ et d'un caractère semi-simple autodual relevé ${}_s\theta \in {}_s\mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ du sous-groupe ${}_sH^1(\beta, \Lambda)$. Soit ${}_s\eta$ la représentation irréductible de ${}_sJ^1(\beta, \Lambda)$ qui contient ${}_s\theta$. Notons $\widehat{\kappa}$ une β-extension standard de ${}_s\eta$ à $\widehat{J}(\beta, \Lambda) = \widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})_sJ^1(\beta, \Lambda)$, définie dans le chapitre précédent.

Nous rappelons que l'on a une suite exacte

$$1 \to {}_sP_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \to \widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \to \widehat{M} \to 1,$$

où $\widehat{M}$ est le groupe des points rationnels d'un groupe réductif défini sur un corps fini. Cette suite induit une suite exacte

$$1 \to {}_sJ^1(\beta, \Lambda) \to \widehat{J}(\beta, \Lambda) \to \widehat{M} \to 1.$$

Rappelons aussi que le groupe $\widehat{M}$ n'est pas connexe en général et que l'on note $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ l'image inverse dans $\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ de la composante connexe M de $\widehat{M}$. Alors $\widehat{J}^o(\beta, \Lambda) = \widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})_sJ^1(\beta, \Lambda)$ est l'image inverse de M dans $\widehat{J}(\beta, \Lambda)$.

Soit $\overline{\rho}$ une représentation irréductible de $\widehat{M}$ dont la restriction à la composante connexe M contient une représentation irréductible cuspidale $\overline{\rho}^o$. Notons ρ (respectivement ρ^o) l'inflation de $\overline{\rho}$ (respectivement $\overline{\rho}^o$) à $\widehat{J}(\beta, \Lambda)$ (respectivement $\widehat{J}^o(\beta, \Lambda)$). Les représentations $\overline{\rho}, \rho, \rho^o$ sont aussi dites *cuspidales*. Posons $\lambda = \widehat{\kappa} \otimes \rho$.

Définition 3.20. La paire $(\widehat{J}(\beta, \Lambda), \lambda)$ obtenue est appelée un *type cuspidal* pour $\widehat{G}$ si la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ associée est une strate semi-simple autoduale gauche et si $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ est un sous-groupe parahorique maximal de $\widehat{G}_\beta$ dont le normalisateur dans $\widehat{G}_\beta$ est compact.

Comme [42, Corollaire 6.19], nous avons

Théorème 3.21. *Soit $(\widehat{J}(\beta, \Lambda), \lambda)$ un type cuspidal pour $\widehat{G}$. Alors la représentation $\pi = c\text{-Ind}_{\widehat{J}(\beta,\Lambda)}^{\widehat{G}} \lambda$ est une représentation irréductible supercuspidale de $\widehat{G}$ et $(\widehat{J}(\beta, \Lambda), \lambda)$ est un $[\widehat{G}, \pi]_{\widehat{G}}$-type.*

Démonstration. Il suffit de calculer l'entrelacement de λ dans $\widehat{G}$. C'est un calcul analogue à la démonstration de [42, Proposition 6.18].

Supposons $g \in \widehat{G}$ entrelace $\lambda = \widehat{\kappa} \otimes \rho$. Alors g entrelace la restriction de λ à ${}_sJ^1(\beta,\Lambda)$. Comme ρ est triviale sur ${}_sJ^1(\beta,\Lambda)$, g entrelace ${}_s\eta$. D'ailleurs, on a

$$I_{\widehat{G}}({}_s\eta) = {}_sJ^1(\beta,\Lambda) \cdot \widehat{G}_\beta \cdot {}_sJ^1(\beta,\Lambda).$$

Alors on peut supposer (et on suppose) que g appartienne à $\widehat{G}_\beta$.

Comme $\widehat{\kappa}|_{\widehat{J}^o(\beta,\Lambda)}$ est irréductible et normalisée par $\widehat{J}(\beta,\Lambda)$, en utilisant la théorie de réducibilité de Clifford [18, Théorème 1], on a

$$\lambda|_{\widehat{J}^o(\beta,\Lambda)} = m\sum_{p\in S} \widehat{\kappa} \otimes (\rho^o)^p \simeq m\sum_{p\in S}(\widehat{\kappa}\otimes\rho^o)^p,$$

où $m \in \mathbb{N}$ est une multiplicité et S est un ensemble de représentants pour le quotient $\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/N_{\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})}(\rho^o)$. Puisque g entrelace $\lambda|_{\widehat{J}^o(\beta,\Lambda)}$, il existe $p, p' \in \widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ tels que pgp' entrelace $\lambda^o = \widehat{\kappa} \otimes \rho^o$. Cela implique que l'on peut supposer (et on suppose) que g entrelace λ^o.

Soit Λ^m une suite autoduale de $\mathfrak{o}_E$-réseaux de V telle que $\mathfrak{b}_0(\Lambda^m)$ soit un $\mathfrak{o}_E$-ordre autodual de B qui est contenu dans $\mathfrak{b}_0(\Lambda)$. On voit que $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ est un sous-groupe parahorique de $\widehat{G}_\beta$ et qu'il contient le sous-groupe d'Iwahori $\widehat{P}^o(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})$. Nous pouvons supposer (et nous supposons) de plus que g soit un *représentant distingué de double classe* pour $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \setminus \widehat{G}_\beta/\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ au sens de [26, §3.10]. Posons ${}_sJ^1_{m,\Lambda} = {}_sP_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E}){}_sJ^1(\beta,\Lambda)$ et $\widehat{J}^o_{m,\Lambda} = \widehat{P}^o(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E}){}_sJ^1(\beta,\Lambda)$.

Puisque g entrelace λ^o, il existe un homomorphisme non nul

$$\phi \in I_g(\lambda^o) = \mathrm{Hom}_{\,\widehat{J}^o(\beta,\Lambda)\cap {}^g\widehat{J}^o(\beta,\Lambda)}(\lambda^o, {}^g\lambda^o).$$

Nous pouvons écrire $\phi = \sum_j S_j \otimes T_j$, où $S_j \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\widehat{\kappa}), T_j \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\rho^o)$ tels que $\{T_j\}_j$ soient linéairement indépendants. Pour tout $h \in {}_sJ^1(\beta,\Lambda) \cap {}^g{}_sJ^1(\beta,\Lambda)$ on a

$$\lambda^o(h)\circ\phi = \phi\circ {}^g\lambda^o(h).$$

On a donc

$$\sum_j (\widehat{\kappa}(h)\circ S_j - S_j \circ {}^g\widehat{\kappa}(h))\otimes T_j,$$

car ρ^o est triviale sur ${}_sJ^1(\beta,\Lambda)$. Comme $\{T_j\}_j$ sont linéairement indépendants, pour tout j, S_j entrelace ${}_s\eta$. Puisque $\dim I_g({}_s\eta) = 1$, ces calculs implique que ϕ est de la forme $\phi = S \otimes T$, où $S \in I_g({}_s\eta)$ et $T \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\rho^o)$.

En utilisant les propositions 3.10 et 3.18, on voit que $S \in I_g(\widehat{\kappa}|_{{}_sJ^1_{m,\Lambda}})$. Maintenant, pour tout $h \in {}_sJ^1_{m,\Lambda} \cap {}^g{}_sJ^1_{m,\Lambda}$, la relation d'entrelacement nous donne

$$\rho^o(h)\circ T = T \circ {}^g\rho^o(h).$$

Autrement dit, g entrelace la restriction de ρ^o à ${}_sJ^1_{m,\Lambda}$ et donc à ${}_sP_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})$. Remarquons que ${}_sP_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})$ est le radical unipotent d'un sous-groupe d'Iwahori de $\widehat{G}_\beta$. Alors, par

[42, Proposition 1.1] avec l'hypothèse que $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ est un sous-groupe parahorique maximal de $\widehat{G}_\beta$, g appartient au normalisateur de $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ dans $\widehat{G}_\beta$.

Puisque le normalisateur de $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ dans $\widehat{G}_\beta$ est compact, on a $g \in \widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$. Cela implique que $I_{\widehat{G}}(\lambda) = \widehat{J}(\beta, \Lambda)$. D'après [16, Proposition 1.5], $\pi = c\text{-Ind}_{\widehat{J}(\beta,\Lambda)}^{\widehat{G}} \lambda$ est une représentation irréductible supercuspidale de $\widehat{G}$. Et donc $(\widehat{J}(\beta, \Lambda), \lambda)$ est un $[\widehat{G}, \pi]_{\widehat{G}}$-type d'après [14, Proposition 5.4]. □

Avec le théorème 3.21, nous complétons notre construction, au moyen de types, d'une famille de représentations irréductibles supercuspidales de $\widehat{G}$. Dans la suite, nous espérons montrer que, avec cette construction, nous obtenons toutes les représentations irréductibles supercuspidales de $\widehat{G}$.

Chapitre 4

Problème d'exhaustivité

Nous avons maintenant une construction de représentations complexes irréductibles supercuspidales de $\widehat{G} = \mathrm{Spin}_F(h)$. Dans ce chapitre, nous espérons montrer que l'on peut obtenir toutes les représentations irréductibles complexes supercuspidales de $\widehat{G}$ par cette construction. Rappelons que toutes les représentations lisses de niveau zéro (du groupe des points rationnels) d'un groupe réductif connexe défini sur un corps local non archimédien sont classifiées par Lawrence Morris [27] et par Allen Moy et Gopal Prasad [29]. Nous ne considérons donc ici que des représentations de niveau positif. Suivant les travaux de Shaun Stevens pour les groupes classiques, nous essayons de montrer l'exhaustivité en trois étapes : nous montrons d'abord dans le paragraphe 4.1 que toute représentation lisse irréductible supercuspidale π de $\widehat{G}$ contient une strate semi-simple gauche $[\Lambda, n, n-1, \beta]$ dans $\mathfrak{g}$; la deuxième étape est de démontrer que π contient un caractère semi-simple gauche relevé ${}_s\theta \in {}_s\mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ associé à une strate semi-simple gauche $[\Lambda, n, 0, \beta]$ dans $\mathfrak{g}$. Cette étape est réalisée dans le paragraphe 4.2 ; la dernière étape est de montrer que π contient un type cuspidal. Cette étape n'est pas encore complètement démontrée. Nous étudions cette étape à la fin du chapitre.

4.1 Strates semi-simples

Nous rappelons d'abord la notion de *strate fondamentale* dans A. Soit $[\Lambda, n, n-1, b]$ une strate dans A. Posons $y_b = \varpi_F^{n/g} b^{e/g} \in \mathfrak{a}_0(\Lambda)$, où $e = e(\Lambda)$ est la $\mathfrak{o}_F$-période de Λ et $g = \mathrm{pgcd}\,(n, e)$. Soit $\varphi_b(X) \in k_F[X]$ la réduction modulo $\mathfrak{p}_F$ du polynôme caractéristique de y_b. Le polynôme $\varphi_b(X)$ ne dépend que de la classe d'équivalence de $[\Lambda, n, n-1, b]$ et on l'appelle le *polynôme caractéristique* de la strate $[\Lambda, n, n-1, b]$. La strate $[\Lambda, n, n-1, b]$ est dite *scindée* si $\varphi_b(X)$ admet deux facteurs premiers entre eux, et *fondamentale* si $\varphi_b(X) \neq X^N$ ([13, §2.3], [40, Définition 2.7]).

Supposons maintenant $[\Lambda, n, n-1, b]$ est une strate autoduale. Rappelons que sa classe d'équivalence correspond au caractère ${}_s\psi_b$ de ${}_sP_n(\Lambda)$. Soit π une représentation lisse de $\widehat{G}$. On dit que π contient la strate $[\Lambda, n, n-1, b]$ si sa restriction à ${}_sP_n(\Lambda)$ contient le caractère ${}_s\psi_b$.

Dans cette première section du chapitre, nous allons démontrer que toute représentation irréductible supercuspidale de niveau positif de $\widehat{G}$ contient une strate semi-simple gauche $[\Lambda, n, n-1, b]$ dans $\mathfrak{g}$. Cette étape est totalement identique à [40].

Nous allons adapter tous les résultats de *loc. cit.* pour notre groupe $\widehat{G}$.

4.1.1 Strate G-scindée

Avant de démontrer le résultat principal de la section, nous rappelons la notion de *strates autoduale G-scindée* de [40] et, en suivant le paragraphe 3 de *loc. cit.*, nous montrons un résultat analogue pour $\widehat{G}$: toute représentation lisse de $\widehat{G}$ contenant une strate autoduale G-scindée n'est pas supercuspidale.

Soit $[\Lambda, n, n-1, b]$ une strate autoduale de polynôme caractéristique $\varphi_b(X)$. Comme b est un élément de $\mathfrak{g}$, on a $\varphi_b(X) = \varphi_b(\varepsilon X)$, où $\varepsilon = (-1)^{e/g}$ et donc si $\psi(X)$ est un facteur de $\varphi_b(X)$, $\psi(\varepsilon X)$ l'est aussi. La strate $[\Lambda, n, n-1, b]$ est dite *G-scindée* si $\varphi_b(X)$ a un facteur unitaire indécomposable $\psi(X)$ tel que $\psi(X) \neq \pm\psi(\varepsilon X)$. Dans ce cas, le polynôme $\varphi_b(X)$ est de la forme $\varphi_b(X) = \psi(X)^m \psi(\varepsilon X)^m \theta(X)$, où $\theta(X)$ est premier à $\psi(X)$ et à $\psi(\varepsilon X)$, et $\theta(X) = \pm\theta(\varepsilon X)$. Par le lemme de Hensel (voir [31]), il y a donc deux polynômes premiers entre eux, $\Psi(X), \Theta(X) \in \mathfrak{o}_F[X]$, dont les réductions modulo $\mathfrak{p}_F$ sont respectivement $\psi(X)^m$ et $\theta(X)$, tels que $\Psi(X)\Psi(\varepsilon X)\Theta(X)$ soit le polynôme caractéristique de y_b.

Supposons maintenant que la strate $[\Lambda, n, n-1, b]$ est G-scindée. Posons

$$V_1 = \ker \Psi(y_b), V_{-1} = \ker \Psi(\varepsilon y_b) \text{ et } V_0 = \ker \Theta(y_b).$$

Alors V_1 et V_{-1} sont deux sous-espaces totalement isotropes en dualité, par rapport à h, et orthogonaux à V_0 :

$$V = V_0 \perp (V_1 \oplus V_{-1}).$$

De plus, ce sont trois sous-espaces stables par b.

Pour $i = 0, \pm 1$, on définit des suites de réseaux Λ^i dans V_i par $\Lambda^i(k) = \Lambda(k) \cap V_i$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Alors on a

$$\Lambda(k) = \Lambda^1(k) \oplus \Lambda^0(k) \oplus \Lambda^{-1}(k), \forall k \in \mathbb{Z},$$

et, pour $i = \pm 1$, $b_i = b|_{V_i} \in \mathrm{Aut}_F(V_i)$ est Λ^i-inversible (on rappelle qu'un élément x de $\mathrm{Aut}_F(V_i)$ est *Λ^i-inversible* si $\nu_{\Lambda^i}(x^{-1}) = -\nu_{\Lambda^i}(x)$ ou, en équivalence, si $x\Lambda^i(k) = \Lambda^i(k + \nu_{\Lambda^i}(x))$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ [15, 3.4]) et $\nu_{\Lambda^i}(b_i) = -n$ (voir [15, 24, 3.5, 3.6]). De plus, si on note $A^{ij} = \mathrm{Hom}\,(V_i, V_j)$, pour $i, j \in \{-1, 0, 1\}$, alors d'après [13, 2.9], on a

$$\mathfrak{a}_k(\Lambda) = \bigoplus_{i,j \in \{-1,0,1\}} \mathfrak{a}_k(\Lambda) \cap A^{ij}, \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

Notons $L = (A^{-1,-1})^\times \times (A^{0,0})^\times \times (A^{1,1})^\times, A_{sup} = A^{-1,0} \oplus A^{-1,1} \oplus A^{0,1}, A_{inf} = A^{0,-1} \oplus A^{1,-1} \oplus A^{1,0}$ et $U_{sup} = 1 + A_{sup}, U_{inf} = 1 + A_{inf}$. Posons encore $L^- = L \cap G, U^-_{sup} = U_{sup} \cap G$ et $U^-_{inf} = U_{inf} \cap G$. Alors $P^-_{sup} = L^- U^-_{sup}$ est un sous-groupe parabolique maximal de G, avec facteur de Levi L^- et son radical unipotent U^-_{sup} et son parabolique opposé $P^-_{inf} = L^- U^-_{inf}$.

Pour chaque $q \in \{0, 1, ..., n\}$, Shaun Stevens [40, p. 429] a défini deux pro-p-sous-groupes $H^-_{1,q}$ et $H^-_{2,q}$ de G tels que

$$H^-_{1,q} \cap L^- = P_n(\Lambda) \cap L^-, \quad H^-_{1,q} \cap U^-_{inf} = P_n(\Lambda) \cap U^-_{inf}, \quad H^-_{1,q} \cap U^-_{sup} = P_{q+1}(\Lambda) \cap U^-_{sup}$$

et

$$H_{2,q}^{-}\cap L^{-} = P_{n+1}(\Lambda)\cap L^{-}, \quad H_{2,q}^{-}\cap U_{inf}^{-} = P_{n}(\Lambda)\cap U_{inf}^{-}, \quad H_{2,q}^{-}\cap U_{sup}^{-} = P_{q+1}(\Lambda)\cap U_{sup}^{-}.$$

Il a également défini un caractère ψ_b^- de $H_{1,q}^-$, qui est trivial sur $H_{2,q}^-$, tel que

$$I_G(\psi_b^-|_{H_{1,0}^-}) \subset H_{1,0}^- \cdot L^- \cdot H_{1,0}^-.$$

Soient ${}_sH_{j,q}^-$, pour $j = 1, 2, q = 0, ..., n$, ${}_sU_{sup}^-$, et ${}_sU_{inf}^-$ les sous-groupes de $\widehat{G}$ déterminés par les sections homomorphes uniques de $H_{j,q}^-$, U_{sup}^- et de U_{inf}^-, respectivement, données par le corollaire 2.13. Notons aussi $\widehat{L}^-$, $\widehat{P}_{sup}^-$ et $\widehat{P}_{inf}^-$ l'image inverse dans $\widehat{G}$ de $L^- \cap \mathrm{O}'(h)$, de $P_{sup}^- \cap \mathrm{O}'(h)$ et de $P_{inf}^- \cap \mathrm{O}'(h)$, respectivement, par l'homomorphisme t. Alors $\widehat{P}_{sup}^- = \widehat{L}^- {}_sU_{sup}^-$ est un sous-groupe parabolique maximal de $\widehat{G}$ de facteur de Levi $\widehat{L}^-$ et d'opposé $\widehat{P}_{inf}^- = \widehat{L}^- {}_sU_{inf}^-$. Posons ${}_s\psi_b^- = \psi_b^- \circ t|_{{}_sH_{1,0}^-}$. La proposition 4.1 suivante est une conséquence directe du lemme 3.6.

Proposition 4.1. *Avec les notations précédentes, on a*

$$I_{\widehat{G}}({}_s\psi_b^-|_{{}_sH_{1,0}^-}) \subset {}_sH_{1,0}^- \cdot \widehat{L}^- \cdot {}_sH_{1,0}^-.$$

Nous avons maintenant besoin du lemme suivant pour transporter des résultats de G à $\widehat{G}$.

Lemme 4.2. *Soit Y un pro-p-sous-groupe de G et on note $s_Y : Y \to \widehat{G}$ l'homomorphisme défini par le corollaire 2.13. Soit $\overline{X}$ un sous-groupe de $\widehat{G}$ tel que $X := t(\overline{X})$ normalise Y et agit transitivement sur une famille $\mathcal{C}_Y$ de caractères de Y. Posons*

$${}_s\mathcal{C}_Y = \{{}_s\theta = \theta \circ t|_{s_Y(Y)} : \theta \in \mathcal{C}_Y\}.$$

Alors $\overline{X}$ normalise $s_Y(Y)$ et agit transitivement sur la famille ${}_s\mathcal{C}_Y$.

Démonstration. Soit $\overline{x} \in \overline{X}$ et posons $x = t(\overline{x}) \in X$. Considérons l'application

$$s : Y = x^{-1}Yx \to \widehat{G}, x^{-1}yx \mapsto \overline{x}^{-1}s_Y(y)\overline{x}.$$

Il est clair que s est un morphisme et que $t \circ s = Id_Y$. L'unicité de s_Y implique que $s = s_Y$. En particulier, nous avons

$$\overline{x}^{-1}s_Y(Y)\overline{x} = s(x^{-1}Yx) = s_Y(x^{-1}Yx) = s_Y(Y).$$

La deuxième assertion suit immédiatement car, pour tout ${}_s\theta \in {}_s\mathcal{C}_Y$ et tout $\overline{x} \in \overline{X}$, on a

$$\overline{x} \cdot {}_s\theta = (x \cdot \theta) \circ t, \text{ où } x = t(\overline{x}).$$

□

Maintenant nous montrons le théorème principal du paragraphe.

Théorème 4.3 ([40, Théorème 3.6])**.** *Soit $(\pi, \mathcal{V})$ une représentation lisse de $\widehat{G}$. Si π contient une strate autoduale G-scindée $[\Lambda, n, n-1, b]$ alors elle n'est pas supercuspidale.*

Démonstration. En suivant la démonstration de [40, Théorème 3.6], nous allons construire une paire couvrante, et alors un module de Jacquet non-trivial, pour π.

Notons $\widetilde{G}_i = (A^{ii})^\times$, pour $i = -1, 0, 1$, et $\widetilde{G}_1^2 = \{g \in \widetilde{G}_1 : \det g \in (F^\times)^2\}$. Soient :

(i) K_1 un pro-p-sous-groupe de $\widetilde{P}_1(\Lambda^1)$ contenant $H_{1,0}^- \cap \widetilde{G}_1^2$, ρ_1 une représentation irréductible de K_1 dont la restriction sur $H_{1,0}^- \cap \widetilde{G}_1^2$ est un multiple de $\psi_{b_1}^-$;

(ii) K_0^- un pro-p-sous-groupe de $P_1(\Lambda^0)$ contenant $H_{1,0}^- \cap \widetilde{G}_0$; ρ_0^- une représentation irréductible de K_0^- dont la restriction sur $H_{1,0}^- \cap \widetilde{G}_0$ est un multiple de $\psi_{b_0}^-$.

Remarquons que $H_{1,0}^- \cap \widetilde{G}_1^2 = H_{1,0}^- \cap \widetilde{G}_1$ puisque $H_{1,0}^-$ est un pro-p-sous-groupe et que l'on peut identifier $K_1 \subset \widetilde{G}_1^2$ à un sous-groupe de $\mathrm{O}'(h)$ par l'injection canonique :

$$K_1 \ni k \hookrightarrow \begin{pmatrix} k & & \\ & 1 & \\ & & \overline{k}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Comme d'habitude, nous notons ${}_sK_1, {}_sK_0^-$ les deux pro-p-sous-groupes de $\widehat{G}$ respectivement correspondants à K_1 et K_0^- par les sections homomorphes uniques déterminées par le corollaire 2.13 (Ce sont, en fait, les restrictions à K_1 et à K_0^- de la section homomorphe unique de $P_1(\Lambda)$). Posons aussi ${}_s\rho_1 = \rho_1 \circ t|_{{}_sK_1}$ et ${}_s\rho_0^- = \rho_0^- \circ t|_{{}_sK_0^-}$. Alors, nous avons le lemme suivant qui est similaire à [40, Proposition 3.3] et [15, §3.9, Corollaire].

Lemme 4.4.

(i) L'ensemble ${}_sK = ({}_sK_1 \times {}_sK_0^-) \cdot {}_sH_{1,0}^-$ *est un groupe.*

(ii) Il existe une unique représentation irréductible ${}_s\rho$ *de* ${}_sK$ *qui est triviale sur* ${}_sK \cap {}_sU_{sup}^-$ *et sur* ${}_sK \cap {}_sU_{inf}^-$*, et dont la restriction sur* ${}_sK_1 \times {}_sK_0^-$ *est* ${}_s\rho_1 \otimes {}_s\rho_0^-$.

(iii) $({}_sK, {}_s\rho)$ *est une paire couvrante de* $({}_sK_1 \times {}_sK_0^-, {}_s\rho_1 \otimes {}_s\rho_0^-)$.

Démonstration. Il s'agit de la même démonstration de [15, §3.9, Corollaire]. Par l'hypothèse, $K_1 \times K_0^-$ est un sous-groupe de $P_1(\Lambda) \cap L^-$ et donc il normalise $H_{1,0}^-$. Du même argument du lemme 4.2 où on utilise l'unicité de la section homomorphe de $H_{1,0}^-$ déterminée par le corollaire 2.13, ${}_sK_1 \times {}_sK_0^-$ normalise ${}_sH_{1,0}^-$. Cela implique immédiatement l'assertion (i) et puis l'assertion (ii). On voit de plus que la restriction de t à ${}_sK$ est un isomorphisme de ${}_sK$ dans $K = (K_1 \times K_0^-) \cdot H_{1,0}^-$.

Par la définition de K, il y a une décomposition d'Iwahori :

$$K = K \cap U_{inf}^- \cdot K \cap L^- \cdot K \cap U_{sup}^-.$$

Cette décomposition se transporte par la section homomorphe de K à une décomposition d'Iwahori de ${}_sK$:

$${}_sK = {}_sK \cap {}_sU_{inf}^- \cdot {}_sK \cap \widehat{L}^- \cdot {}_sK \cap {}_sU_{sup}^-.$$

De plus, ${}_sK \cap \widehat{L}^- = {}_sK_1 \times {}_sK_0^-$ et, par (ii), $({}_sK, {}_s\rho)$ est une paire décomposée au-dessus de $({}_sK_1 \times {}_sK_0^-, {}_s\rho_1 \otimes {}_s\rho_0^-)$ relativement à $\widehat{P}_{sup}^-$.

Il nous reste à chercher un élément $\widehat{\zeta}$ du centre de $\widehat{L}^-$ qui est fortement positif relativement à $\widehat{P}^-_{sup}$ et ${}_sK$ tel qu'il existe un élément inversible de l'algèbre de convolution $\mathcal{H}(\widehat{G}, {}_sK, {}_s\rho)$ dont le support est la double classe ${}_sK\widehat{\zeta}^{-1}{}_sK$.

Prenons une image inverse $\widehat{\zeta}$ par t de l'élément

$$\zeta = \begin{pmatrix} \varpi_F^2 I & & \\ & I & \\ & & \varpi_F^{-2} I \end{pmatrix} \in L^- \cap \mathrm{O}'(h).$$

Lemme 4.5. *L'élément $\widehat{\zeta}$ est contenu dans le centre de $\widehat{L}^-$ et fortement positif relativement à $(\widehat{P}^-_{sup}, {}_sK)$.*

Démonstration. Pour montrer que $\widehat{\zeta}$ appartient au centre de $\widehat{L}^-$, on se ramène d'abord au cas où V_1 est de dimension 1. En effet, soit $l \in \widehat{L}^-$. Alors $t(l)$ est de la forme

$$t(l) = \begin{pmatrix} g & & \\ & m & \\ & & \overline{g}^{-1} \end{pmatrix} \in L^-,$$

où $g \in \widetilde{G}_1$ et $m \in \mathrm{SO}_F(h|_{V_0 \times V_0})$. Écrivons

$$g = \begin{pmatrix} d & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} g',$$

où $d = \det_F(g)$ et $g' \in \mathrm{SL}(V_1)$. Nous allons montrer que $\widehat{\zeta}$ commute avec les images inverses dans $\widehat{L}^-$ de

$$\begin{pmatrix} g' & & \\ & 1 & \\ & & \overline{g}'^{-1} \end{pmatrix} \in L^- \cap \mathrm{O}'(h), \text{ pour } g' \in \mathrm{SL}(V_1).$$

Soit $U \subset \mathrm{SL}(V_1)$ un sous-groupe unipotent de $\mathrm{SL}(V_1)$. On peut identifier U avec un sous-groupe unipotent de L^- par l'injection canonique

$$U \ni u \hookrightarrow \begin{pmatrix} u & & \\ & 1 & \\ & & \overline{u}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Par le corollaire 2.13, il y a une unique section homomorphe s_U de U dans $\widehat{L}^-$. Considérons l'application

$$U \to \widehat{L}^-, u \mapsto \widehat{\zeta} s_U(u) \widehat{\zeta}^{-1}.$$

C'est clairement un homomorphisme de U dans $\widehat{L}^-$. Par l'unicité de s_U, nous avons $s_U(u) = \widehat{\zeta} s_U(u) \widehat{\zeta}^{-1}$ pour tout $u \in U$. Cela implique que $\widehat{\zeta}$ centralise $s_U(U)$. Comme

$\mathrm{SL}(V_1)$ est engendré par ses sous-groupes unipotents, $\widehat{\zeta}$ commute avec les images inverses dans $\widehat{L}^-$ de

$$\begin{pmatrix} g' & & \\ & 1 & \\ & & \overline{g}'^{-1} \end{pmatrix} \in L^-, \text{ pour } g' \in \mathrm{SL}(V_1).$$

Maintenant, on peut supposer (et on suppose) $\dim_F(V_1) = 1$ (on fixe aussi deux bases en dualité $\{e_1\}$ et $\{e_{-1}\}$ de V_1 et V_{-1}, respectivement) et donc $t(l)$ est de la forme

$$t(l) = \begin{pmatrix} d & & \\ & m & \\ & & d^{-1} \end{pmatrix} \in L^-, \text{ avec } d \in F^\times, m \in \mathrm{SO}_F(h|_{V_0 \times V_0}).$$

Nous avons

$$t(l) = \begin{pmatrix} d & & \\ & m & \\ & & d^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & & \\ & 1 & \\ & & d^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & m & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Le dernier facteur est un produit d'un nombre pair de réflexions s_{w_i} avec $w_i \in V_0$ alors que

$$\begin{pmatrix} d & & \\ & 1 & \\ & & d^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & d \\ & 1 & \\ d^{-1} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix} = s_{v_1} s_{v_2},$$

où $v_1 = de_1 - e_{-1}$ et $v_2 = e_1 - e_{-1}$. Alors, nous avons

$$l = av_1 v_2 \prod_i w_i, \quad a \in F^\times \quad \text{(le produit dans l'algèbre de Clifford } C).$$

De la même manière, écrivons

$$\zeta = \begin{pmatrix} \varpi_F^2 & & \\ & I & \\ & & \varpi_F^{-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \varpi_F^2 \\ & I & \\ \varpi_F^{-2} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & 1 \\ & I & \\ 1 & & \end{pmatrix} = s_v s_{v_2},$$

où $v = \varpi_F^2 e_1 - e_{-1}$. À un élément du centre près, on a $\widehat{\zeta} = vv_2$. Comme les vecteurs w_i sont orthogonaux à v et à v_2, nous avons

$$v_2 w_i = -w_i v_2 \text{ et } vw_i = -w_i v, \forall i.$$

$\widehat{\zeta}$ commute donc avec tous les w_i. D'ailleurs, si on prend une base orthogonale $\{x_1, x_2, ..., x_N\}$ de V avec $x_1 = e_1 + e_{-1}$ et $x_2 = e_1 - e_{-1}$ et si on prend la base e_T de l'algèbre de Clifford C comme dans le paragraphe 2.1.1, alors on voit que $\widehat{\zeta}$ et le produit $v_1 v_2$ appartiennent à $F + Fe_{\{1,2\}}$. Par la formule (2.1), ils commutent. Cela implique que $\widehat{\zeta}$ commute avec l.

Nous avons montré que $\widehat{\zeta}$ est un élément du centre de $\widehat{L}^-$. Remarquons que ζ est un élément fortement positif relativement à P_{sup}^- et K [40, Corollaire 3.3]. Utilisant l'unicité des sections homomorphes déterminées par le corollaire 2.13 de $H_{1,0}^-$, U_{inf}^- et U_{sup}^-, on peut voir que $\widehat{\zeta}$ est fortement positif relativement à $(\widehat{P}_{sup}^-, {}_sK)$. □

Revenons à la démonstration du lemme 4.4. Nous trouverons un élément inversible de $\mathcal{H}(\widehat{G}, {}_sK, {}_s\rho)$ dont le support est ${}_sK\widehat{\zeta}^{-1}{}_sK$. De l'argument de [15, §3.9, Lemme, Démonstration], il existe une unique fonction $f \in \mathcal{H}(\widehat{G}, {}_sK, {}_s\rho)$ (respectivement $f' \in \mathcal{H}(\widehat{G}, {}_sK, {}_s\rho)$) de support ${}_sK\widehat{\zeta}^{-1}{}_sK$ (respectivement ${}_sK\widehat{\zeta}{}_sK$) telle que $f(\widehat{\zeta}^{-1}) = \mathbf{1}$ (respectivement $f'(\widehat{\zeta}) = \mathbf{1}$), où $\mathbf{1}$ est l'application d'identité de l'espace sous-jacent de ${}_s\rho$.

Considérons la convolution $f * f'$. Son support est contenu dans

$$
{}_sK\widehat{\zeta}^{-1}{}_sK\widehat{\zeta}{}_sK = {}_sK \cdot \widehat{\zeta}^{-1}({}_sK \cap {}_sU^-_{sup})\widehat{\zeta} \cdot {}_sK.
$$

D'ailleurs, si $x \in {}_sU^-_{sup}$ entrelace ${}_s\rho$, en particulier, il entrelace ${}_s\psi^-_b|_{{}_sH^-_{1,0}}$. D'après la proposition 4.1, on a

$$
x \in {}_sH^-_{1,0} \cdot \widehat{L}^- \cdot {}_sH^-_{1,0}.
$$

Utilisant la décomposition d'Iwahori pour ${}_sK$ (donc pour ${}_sH^-_{1,0}$), on voit qu'il existe deux éléments $k_1, k_2 \in {}_sH^-_{1,0} \cap {}_sU^-_{sup}$ tels que $k_1xk_2 \in \widehat{P}^-_{inf}$. En particulier,

$$
x = k_1^{-1}k_2^{-1} \in {}_sH^-_{1,0} \cap {}_sU^-_{sup} = {}_sK \cap {}_sU^-_{sup}.
$$

Autrement dit, on a

$$
I_{{}_sU^-_{sup}}({}_s\rho) \subset {}_sK \cap {}_sU^-_{sup}.
$$

Le support de $f * f'$ est donc contenu dans ${}_sK$. D'ailleurs, par définition de f et de f', on peut voir que $f * f'(1_{\widehat{G}}) = c\mathbf{1}$ pour un certain nombre positif c. Alors f est inversible à droite. Maintenant, utilisant l'argument de [14, (7.14), Démonstration] où on utilise la structure de $\mathcal{H}(\widehat{G}, {}_sK, {}_s\rho)$-module simple à gauche sur le dual d'un $\mathcal{H}(\widehat{G}, {}_sK, {}_s\rho)$-module simple à droite, on voit que f est aussi inversible à gauche. □

Revenons à la démonstration du théorème 4.3. Le lemme 4.4 implique, en particulier, que $({}_sH^-_{1,0}, {}_s\psi^-_b)$ est une paire couvrante de $({}_sH^-_{1,0} \cap \widehat{L}^-, {}_s\psi^-_b|_{{}_sH^-_{1,0}\cap\widehat{L}^-})$. Il nous reste donc à montrer que π contient le caractère ${}_s\psi^-_b|_{{}_sH^-_{1,0}}$. Comme dans la démonstration de [40, Proposition 3.5], en utilisant l'argument de [7, Proposition 2.4.4], il suffit de montrer que, pour tout $q = 1, ..., n-1$, ${}_sU^-_{inf,q} := {}_sU^-_{inf} \cap {}_sP_{n-q}(\Lambda)$ normalise ${}_sH^-_{1,q}$ et agit transitivement sur l'ensemble des caractères de ${}_sH^-_{1,q-1}$ prolongeant ${}_s\psi^-_b|_{{}_sH^-_{1,q}}$. Avec le lemme 4.2, cela est une conséquence immédiate de [40, Lemme 3.4]. □

4.1.2 Exhaustivité des strates semi-simples autoduales gauches

Ce paragraphe termine la première partie du chapitre : montrer que toute représentation irréductible supercuspidale de niveau positif de $\widehat{G}$ contient une strate semi-simple gauche dans $\mathfrak{g}$. Mais d'abord, nous voulons rappeler un résultat de Shaun Stevens (analogue à celui énoncé dans [40, Proposition 4.2]) avec une démonstration plus précise. Nous profitons de cette occasion pour remercier Monsieur Shaun Stevens pour son explication de cette démonstration.

Nous suivons donc les notations de [40, §4] dans ce paragraphe. Rappelons la définition de raffinement d'une suite autoduale de $\mathfrak{o}_F$-réseaux dans V.

Définition 4.6 ([40, Définition 4.1])**.** Soit Λ une suite autoduale de $\mathfrak{o}_F$-réseaux dans V. On appelle un *raffinement* de Λ une suite autoduale de $\mathfrak{o}_F$-réseaux dans V telle qu'il existe un entier impair $m \in \mathbb{Z}$ vérifiant $\Lambda(k) = \Lambda'(mk)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Soit Λ une suite autoduale de $\mathfrak{o}_F$-réseaux dans V de la $\mathfrak{o}_F$-période $e = e(\Lambda)$. Posons

$$\widetilde{\Lambda}(k) = \Lambda(k)/\Lambda(k+1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Alors, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\widetilde{\Lambda}(k)$ s'identifie à $\widetilde{\Lambda}(k+e)$ via multiplication par ϖ_F. Écrivons $\widetilde{k}$ pour la classe dans $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ de $k \in \mathbb{Z}$. Considérons le k_F-espace vectoriel :

$$\widetilde{\Lambda} = \sum_{\widetilde{k} \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \widetilde{\Lambda}(\widetilde{k}).$$

Pour chaque $\widetilde{j} \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$, notons

$$\mathrm{End}(\widetilde{\Lambda})_{\widetilde{j}} = \sum_{\widetilde{k} \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{k_F}(\widetilde{\Lambda}(\widetilde{k}), \widetilde{\Lambda}(\widetilde{k} + \widetilde{j})).$$

Alors, nous avons $\mathrm{End}(\widetilde{\Lambda})_{\widetilde{i}}\mathrm{End}(\widetilde{\Lambda})_{\widetilde{j}} \subset \mathrm{End}(\widetilde{\Lambda})_{\widetilde{i}+\widetilde{j}}$, pour $\widetilde{i}, \widetilde{j} \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$, et donc

$$\mathrm{End}_{k_F}(\widetilde{\Lambda}) = \sum_{\widetilde{j} \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \mathrm{End}(\widetilde{\Lambda})_{\widetilde{j}}$$

est une k_F-algèbre $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$-graduée.

Soit b un élément de $A = \mathrm{End}_F(V)$. Si $b \in \mathfrak{a}_{-n}(\Lambda)$ alors, par réduction, nous avons, pour chaque $\widetilde{i} \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$, une transformation $\widetilde{b}_{\widetilde{i}} : \widetilde{\Lambda}(\widetilde{i}) \to \widetilde{\Lambda}(\widetilde{i} - \widetilde{n})$ et ainsi un élément de $\mathrm{End}(\widetilde{\Lambda})_{\widetilde{-n}}$:

$$\widetilde{b} = \sum_{\widetilde{i} \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \widetilde{b}_{\widetilde{i}}.$$

La forme h induit une forme bilinéaire symétrique non dégénérée $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$-graduée :

$$\widetilde{h} : \widetilde{\Lambda} \times \widetilde{\Lambda} \to k_F.$$

De plus, si on note $^-$ l'involution adjointe induite par $\widetilde{h}$ sur $\mathrm{End}_{k_F}(\widetilde{\Lambda})$, alors $\overline{\widetilde{b}} = \widetilde{\overline{b}}$ pour tout $b \in A$ ([40, p. 432]) .

Par définition, pour $k \in \mathbb{Z}$, chaque k_F-sous-espace $\mathcal{V}$ de $\widetilde{\Lambda}(\widetilde{k})$ correspond à un unique $\mathfrak{o}_F$-réseau $\mathcal{R}$ de V tel que $\Lambda(k) \supset \mathcal{R} \supset \Lambda(k+1)$. De plus, $\mathcal{V}^{\perp} = \{\widetilde{v} \in \widetilde{\Lambda}(\widetilde{-k}) : \widetilde{h}(\mathcal{V}, \widetilde{v}) = 0\}$ correspond à $\mathcal{R}^{\sharp}$. Ainsi, un raffinement Λ' de Λ correspond à un ensemble de drapeaux de k_F-sous-espaces :

$$\widetilde{\Lambda}(\widetilde{k}) = \mathcal{W}^0_{\widetilde{k}} \supset \mathcal{W}^1_{\widetilde{k}} \supset \cdots \supset \mathcal{W}^m_{\widetilde{k}} = 0, \quad \widetilde{k} \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z},$$

tel que $(\mathcal{W}^i_{\widetilde{k}})^{\perp} = \mathcal{W}^{m-i}_{\widetilde{-k}}$, pour $\widetilde{k} \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}, 0 \leq i \leq m$ (*loc. cit.*).

Supposons maintenant $b \in \mathfrak{a}^-_{-n}(\Lambda) \setminus \mathfrak{a}^-_{-n+1}(\Lambda)$. Écrivons maintenant la réduction modulo $\mathfrak{p}_F$ du polynôme caractéristique $\Phi_b(X) \in \mathfrak{o}_F[X]$ de $y_b = \varpi_F^{n/g} b^{e/g}$ sous la forme $\varphi_b(X) = \varphi_0(X)\varphi_1(X)$, avec $\varphi_0(X)$ puissance de X et premier à $\varphi_1(X)$. D'après le lemme de Hensel [31], nous avons une factorisation de $\Phi_b(X)$:

$$\Phi_b(X) = \Phi_0(X)\Phi_1(X), \text{ avec } \Phi_i(\varepsilon X) = \pm\Phi_i(X), i = 0, 1,$$

où $\Phi_0(X)$ et $\Phi_1(X)$ sont premiers entre eux et, pour $i = 0, 1$, la réduction modulo $\mathfrak{p}_F$ de $\Phi_i(X)$ est $\varphi_i(X)$.

Pour $i = 0, 1$, posons $Y_i = \ker \Phi_i(y_b)$. Alors $V = Y_0 \perp Y_1$ et l'action de b préserve cette décomposition car b commute avec y_b. De plus, nous avons $\Lambda(k) = \Lambda^0(k) \oplus \Lambda^1(k)$, où $\Lambda^i(k) = \Lambda(k) \cap Y_i$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Pour $i = 0, 1$, posons aussi $\mathcal{Y}_i = \ker \varphi_i(\widetilde{y}_b)$. Alors, nous avons une décomposition orthogonale de $\widetilde{\Lambda}$ par rapport à la forme $\widetilde{h}$:

$$\widetilde{\Lambda} = \mathcal{Y}_0 \perp \mathcal{Y}_1.$$

Cette décomposition est stable par l'action de $\widetilde{b}$ puisque $\widetilde{b}$ commute avec $\widetilde{y}_b$. Remarquons que $\widetilde{y}_b|_{\mathcal{Y}_0}$ est nilpotente et que $\widetilde{y}_b|_{\mathcal{Y}_1}$ est inversible. De plus, la restriction de $\widetilde{b}$ à $\mathcal{Y}_0$ est aussi nilpotente puisque $\widetilde{y}_b = \widetilde{b}^{e/g}$. On peut voir aussi que, pour $i = 0, 1$, par définition, $\mathcal{Y}_i$ est l'image dans $\widetilde{\Lambda}$ de l'espace Y_i. Autrement dit, on a

$$\mathcal{Y}_i = \widetilde{\Lambda}^i = \sum_{\widetilde{k} \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}} \Lambda^i(k)/\Lambda^i(k+1), \text{ pour } i = 0, 1.$$

Proposition 4.7 (cf. [40, Proposition 4.2])**.** *Dans la situation au-dessus, il existe un raffinement Λ' de Λ et $n' \in \mathbb{Z}$ tels que*

(i) $n'/e(\Lambda') = n/e(\Lambda)$;

(ii) $\mathfrak{a}_{-n+1}(\Lambda) \subset \mathfrak{a}_{-n'+1}(\Lambda')$, $b \in \mathfrak{a}^-_{-n'}(\Lambda')$ et $b|_{Y_0} \in \mathfrak{a}^-_{-n'+1}(\Lambda')$;

(iii) La réduction $\widetilde{y}'_b$ dans $\mathrm{End}_{k_F}(\widetilde{\Lambda}')$ de y_b est semi-simple.

Démonstration. Respectons les notations au-dessus. La démonstration est analogue à celle de [40, Proposition 4.2]. Soit $\widetilde{y}_b|_{\mathcal{Y}_1} = \widetilde{y}_{ss} + \widetilde{y}_n$ la décomposition de Jordan de $\widetilde{y}_b|_{\mathcal{Y}_1}$. Par l'unicité de la décomposition de Jordan, $\widetilde{y}_{ss}$ et $\widetilde{y}_n$ sont gradués homogènes de degré 0 puisque $\widetilde{y}_b$ est graduée homogène de degré 0. De plus, or, $\widetilde{b}$ commute avec $\widetilde{y}_b$, il commute aussi avec $\widetilde{y}_{ss}$ et $\widetilde{y}_n$ qui sont des polynômes en $\widetilde{y}_b|_{\mathcal{Y}_1}$ (donc en $\widetilde{y}_b$).

Prenons un entier impair $m = 2s - 1$ tel que $\widetilde{y}_n^m = 0$ et $\widetilde{b}^m|_{\mathcal{Y}_0} = 0$. Suivant [30, §5.5], on définit des k_F-sous-espaces vectoriels de $\widetilde{\Lambda}(\widetilde{k})$ comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}^i_{\widetilde{k}} &= \widetilde{b}^i\left(\widetilde{\Lambda}(\widetilde{k} + \widetilde{i n}) \cap \mathcal{Y}_0\right) \perp \widetilde{y}^i_n\left(\widetilde{\Lambda}(\widetilde{k}) \cap \mathcal{Y}_1\right), && \text{pour } \widetilde{k} \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}, 0 \le i \le m;\\
\mathcal{W}^i_{\widetilde{k}} &= \bigcap_{q-p=2(s-1-i)} \left(\mathcal{V}^p_{\widetilde{k}} + (\mathcal{V}^q_{\widetilde{-k}})^\perp\right), && \text{pour } \widetilde{k} \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}, 0 \le i \le s-1;\\
\mathcal{W}^i_{\widetilde{k}} &= \left(\mathcal{W}^{m-i}_{\widetilde{-k}}\right)^\perp, && \text{pour } \widetilde{k} \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}, s \le i \le m.
\end{aligned}$$

Nous obtenons donc des drapeaux de k_F-sous-espaces vectoriels :

$$\widetilde{\Lambda}(\widetilde{k}) = \mathcal{W}^0_{\widetilde{k}} \supset \mathcal{W}^1_{\widetilde{k}} \supset \cdots \supset \mathcal{W}^m_{\widetilde{k}} = 0, \quad \widetilde{k} \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z},$$

tel que $(\mathcal{W}^i_{\widetilde{k}})^\perp = \mathcal{W}^{m-i}_{\widetilde{-k}}$ pour $\widetilde{k} \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}, 0 \leq i \leq m$. Comme au-dessus, cet ensemble de drapeaux nous donne un raffinement Λ' de Λ tel que

$$\Lambda'(km+i)/\Lambda(k+1) = \mathcal{W}^i_{\widetilde{k}}, \qquad \text{pour } k \in \mathbb{Z}, 0 \leq i \leq m-1.$$

Posons $n' = nm$. Alors nous avons une paire (Λ', n') vérifiant les conditions de la proposition 4.7. En effet, par définition, nous avons $e(\Lambda') = me(\Lambda)$, d'où (i). Si $a \in \mathfrak{a}_{-n+1}(\Lambda)$, on a, pour $0 \leq i \leq m-1$,

$$a\Lambda'(km+i) \subset a\Lambda(k) \subset \Lambda(k-n+1) = \Lambda'(km+(-nm+m)).$$

D'ailleurs $\Lambda'(km+(-nm+m)) \subset \Lambda'(km+i-n'+1)$ car $-nm+m \geq i-n'+1$. Alors nous avons $a \in \mathfrak{a}_{-n'+1}(\Lambda')$. Autrement dit, nous avons $\mathfrak{a}_{-n+1}(\Lambda) \subset \mathfrak{a}_{-n'+1}(\Lambda')$. Remarquons que, pour $\widetilde{k} \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ et $0 \leq i \leq m-1$, on a

$$\widetilde{b}\mathcal{W}^i_{\widetilde{k}} \subset \mathcal{W}^i_{\widetilde{k}-\widetilde{n}} \text{ et, de plus, } \widetilde{b}\left(\mathcal{W}^i_{\widetilde{k}} \cap \mathcal{Y}_0\right) \subset \left(\mathcal{W}^{i+1}_{\widetilde{k}-\widetilde{n}} \cap \mathcal{Y}_0\right).$$

Cela implique que, pour $k \in \mathbb{Z}, 0 \leq i \leq m-1$, nous avons

$$b\Lambda'(km+i) \subset \Lambda'((k-n)m+i) \text{ et } b\left(\Lambda'(km+i) \cap Y_0\right) \subset \left(\Lambda'((k-n)m+i+1) \cap Y_0\right).$$

D'où $b \in \mathfrak{a}_{-n'}(\Lambda')$ et $b|_{Y_0} \in \mathfrak{a}_{-n'+1}(\Lambda')$. Il nous reste à vérifier (iii).

Notons $\widetilde{k}'$ pour l'image de k dans $\mathbb{Z}/em\mathbb{Z}$. Nous avons alors

$$\widetilde{\Lambda}'(\widetilde{k}'\widetilde{m}' + \widetilde{i}') \simeq \mathcal{W}^i_{\widetilde{k}}/\mathcal{W}^{i+1}_{\widetilde{k}}.$$

Puisque $b|_{Y_0} \in \mathfrak{a}_{-n'+1}(\Lambda')$, $y_b|_{Y_0}$ a pour image zéro dans $\mathrm{End}_{k_F}(\widetilde{\Lambda}')$. De plus, $\widetilde{y}_n|_{\mathcal{Y}_1}$ a aussi pour image zéro car

$$\widetilde{y}_n\left(\mathcal{W}^i_{\widetilde{k}} \cap \mathcal{Y}_1\right) \subset \left(\mathcal{W}^{i+1}_{\widetilde{k}} \cap \mathcal{Y}_1\right).$$

Alors $y|_{Y_1}$ a pour image un élément semi-simple dans $\mathrm{End}_{k_F}(\widetilde{\Lambda}')$. D'où (iii). □

Remarque 4.8. Dans [40, Proposition 4.2, Démonstration], l'espace $\mathcal{V}^i_{\widetilde{k}}$ est construit comme l'image de $\widetilde{\Lambda}(\widetilde{k}+\widetilde{i}\widetilde{n})$ par $\widetilde{b}^i_n$, où $\widetilde{b}_n$ est la partie nilpotente de la décomposition de Jordan $\widetilde{b}$. Or, $\widetilde{b}$ est un élément gradué homogène de degré $\widetilde{-n}$, donc $\widetilde{b}_n$ n'est pas toujours homogène de degré $\widetilde{-n}$ si $\widetilde{-n} \neq 0$. Cela entraîne que $\mathcal{V}^i_{\widetilde{k}}$ n'est pas toujours contenu dans $\widetilde{\Lambda}(\widetilde{k})$ et donc que l'on n'a pas toujours des drapeaux convenables. Dans la correction (de Shaun Stevens) au-dessus, l'espace $\mathcal{V}^i_{\widetilde{k}}$ est construit en remarquant que la restriction de $\widetilde{b}$ à $\mathcal{Y}_0$ est nilpotente et que $\widetilde{y}_b$ (donc $\widetilde{y}_b|_{\mathcal{Y}_1}$) est homogène de degré zéro.

Nous montrons maintenant le résultat principal du paragraphe. Soit π une représentation complexe lisse irréductible de niveau positif de $\widehat{G}$. D'après [28, Théorème 5.2], π contient un "*K-type non raffiné*" ("*unrefined minimal K-type*" en anglais) qui, en fait, est une strate fondamentale $[\Lambda, n, n-1, b]$ dans $\mathfrak{g}$ (voir [30] pour un dictionnaire). Nous gardons toujours les notations $e = e(\Lambda)$ pour la $\mathfrak{o}_F$-période de

Λ et $g = (n, e)$. Alors, par l'argument de [40, Théorème 2.11], nous avons de plus $e/g \leq N$. Précisément, considérons l'ensemble non vide :

$$S = \{(\Lambda', n') : \Lambda' \text{ est stricte et } (b + \mathfrak{a}_{1-n}(\Lambda)) \cap \mathfrak{a}_{-n'}(\Lambda') \neq \emptyset\}.$$

Par [22, Théorème 4.3] (ou [28, (6.4)]), nous avons $n'/e(\Lambda') \geq n/e(\Lambda)$ pour tout $(\Lambda', n') \in S$. Choisissons $(\Lambda', n') \in S$ telle que $n'/e(\Lambda')$ est minimal. Soit $b' \in (b + \mathfrak{a}_{1-n}(\Lambda)) \cap \mathfrak{a}_{-n'}(\Lambda')$. Utilisant [12, §2, Théorème 1], la minimalité de $n'/e(\Lambda')$ implique que $[\Lambda', n', n'-1, b']$ est une strate fondamentale. Nous avons donc $n'/e(\Lambda') = n/e(\Lambda)$, par [22, Corollaire 4.2]. Puisque Λ' est stricte, $e(\Lambda') \leq N$, d'où $e/g \leq N$.

Théorème 4.9. *Soit π une représentation irréductible supercuspidale de niveau positif de $\widehat{G}$. Alors π contient une strate semi-simple gauche dans $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. On a vu au-dessus que π contient une strate fondamentale $[\Lambda, n, n-1, b]$ dans $\mathfrak{g}$ telle que $e/g \leq N$. D'après le théorème 4.3, cette strate n'est pas G-scindée. Il s'agit maintenant de la démonstration de [40, Théorème 4.4]. Comme au-dessus, on note $\varphi_b(X) \in k_F[X]$ le polynôme caractéristique de la strate $[\Lambda, n, n-1, b]$, c'est donc la réduction modulo $\mathfrak{p}_F$ du polynôme caractéristique $\Phi_b(X) \in \mathfrak{o}_F[X]$ de $y_b = \varpi_F^{n/g} b^{e/g}$. Puisque la strate est non-G-scindée, $\varphi_b(X)$ peut s'écrire sous la forme :

$$\varphi_b(X) = \prod_{i=0}^{r} \psi_i(X)^{s_i},$$

où les facteurs $\psi_i(X), 0 \leq i \leq r$, sont unitaires, irréductibles, deux à deux premiers entre eux et vérifient $\psi_i(\varepsilon X) = \pm\psi_i(X)$ avec $\varepsilon = (-1)^{e/g}$, en particulier, $\psi_0(X)$ est une puissance de X (ce facteur est noté $\varphi_0(X)$ au-dessus et il peut être égal à 1). Par le lemme de Hensel [31], nous avons une factorisation de $\Phi_b(X)$:

$$\Phi_b(X) = \prod_{i=0}^{r} \Psi_i(X),$$

où les facteurs $\Psi_i(X), 0 \leq i \leq r$, sont unitaires, deux à deux premiers entre eux, vérifient $\Psi_i(\varepsilon X) = \pm\Psi_i(X)$ et se réduisent modulo $\mathfrak{p}_F$ en $\psi_i(X)^{s_i}$. Posons

$$V_i = \ker \Psi_i(y_b), \quad i = 0, ..., r.$$

Alors, nous avons une décomposition orthogonale b-stable de V : $V = V_0 \perp ... \perp V_r$.

La proposition 4.7 implique que π contient une strate autoduale $[\Lambda', n', n'-1, b]$ de polynôme caractéristique $\varphi_b(X)$ telle que la réduction $\widetilde{y}'_b$ de y_b dans $\mathrm{End}_{k_F}(\widetilde{\Lambda}')$ est semi-simple. Pour $0 \leq i \leq r$, posons $\Lambda'_i(k) = \Lambda'(k) \cap V_i$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Alors nous avons

$$\Lambda'(k) = \bigoplus_{i=0}^{r} \Lambda'_i(k), \qquad \text{pour } k \in \mathbb{Z}.$$

Posons aussi $b_i = b|_{V_i}$ pour $i = 0, ..., r$. Comme on a vu dans la démonstration de la proposition 4.7 où V_0 est noté Y_0, b_0 appartient à $\mathfrak{a}_{-n'+1}(\Lambda'_0)$. Cela implique que la strate autoduale non-fondamentale $[\Lambda'_0, n', n'-1, b_0]$ est équivalente à la strate nulle $[\Lambda'_0, n', n'-1, 0]$.

Pour $1 \leq i \leq r$, la strate autoduale $[\Lambda'_i, n', n'-1, b_i]$ est fondamentale, non scindée et la réduction de y_{b_i} dans $\mathrm{End}_{k_F}(\widetilde{\Lambda}'_i)$ est semi-simple. Une telle strate est équivalente à une strate simple $[\Lambda'_i, n', n'-1, \alpha_i]$: en effet, de l'argument de [7, Lemme 2.1.9], en remplaçant Λ'_i par sa chaîne de $\mathfrak{o}_F$-réseaux sous-jacent, on peut supposer Λ'_i est stricte ; utilisant [13, (2.5.11)], on peut supposer de plus que $[\Lambda'_i, n', n'-1, b_i]$ est une strate à forme γ-standard (au sens de la définition [13, (2.5.7), (ii)]) ; maintenant l'affirmation est justifiée par [13, (2.5.8)]. En remarquant que $\alpha_i + \overline{\alpha}_i \in \mathfrak{a}_{-n'+1}(\Lambda'_i)$, la strate est équivalente à une strate simple autoduale $[\Lambda'_i, n', n'-1, \beta_i]$ dans $\mathrm{End}_F(V_i)$ d'après [39, (1.10)].

Posons $\beta_0 = 0$ et $\beta = \sum_{i=0}^{r} \beta_i$. Alors nous avons une strate semi-simple gauche $[\Lambda', n', n'-1, \beta]$ dans $\mathfrak{g}$ qui est équivalente à $[\Lambda', n', n'-1, b]$. D'où le théorème 4.9. $\square$

4.2 Caractères semi-simples gauches relevés

Dans cette section, en suivant [41], nous montrons que toute représentation irréductible supercuspidale de niveau positif de $\widehat{G}$ contient un caractère semi-simple gauche relevé ${}_s\theta \in {}_s\mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ associé à une strate semi-simple gauche $[\Lambda, n, 0, \beta]$ dans $\mathfrak{g}$.

4.2.1 Cas relativement G-scindé

Avant de démontrer le résultat principal de la section, nous nous plaçons d'abord dans un cas particulier, nommé *cas relativement G-scindé* [41, §4].

Nous respectons dans ce paragraphe les notations de *loc. cit.* Soit alors $[\Lambda, n, m, \beta]$ une strate semi-simple dans $\mathfrak{g}$ avec la décomposition autoduale $V = \oplus_{i=1}^{l} V^i$. On écrit

$$A = \mathrm{End}_F(V) = \bigoplus_{1 \leq i,j \leq l} A^{ij}$$

pour la décomposition correspondante de A. Notons B le centralisateur de β dans A. Donc $B = \oplus_{i=1}^{l} B_i$, où B_i est le centralisateur de $\beta_i = \beta|_{V^i}$ dans A^{ii}. Comme d'habitude, on note $E_i = F[\beta_i]$. Soit s_i un "*tame corestriction*" sur A^{ii} relative à E_i/F, c'est-à-dire, un homomorphisme de (B_i, B_i)-bimodules, $s_i : A^{ii} \to B_i$, tel que $s_i(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \cap B_i$ pour tout $\mathfrak{o}_F$-ordre héréditaire $\mathfrak{A}$ de A^{ii} qui est normalisé par $E_i^{\times}$ ([13, (1.3.3)]). On suppose que l'on a une décomposition de E_1-espaces vectoriels

$$V^1 = V_0^1 \perp (V_1^1 \oplus V_{-1}^1),$$

où V_1^1 et V_{-1}^1 sont totalement isotropes en dualité par rapport à h, telle que

$$\Lambda^1(k) = \bigoplus_{-1 \leq j \leq 1} (\Lambda^1(k) \cap V_j^1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

On écrit aussi

$$A^{11} = \bigoplus_{-1 \leq j,k \leq 1} A_{jk}^{11}$$

pour la décomposition correspondante de A^{11}.

Soient $b_i \in A^{ii} \cap \mathfrak{a}_{-m}$ pour $i = 1, ..., l$, où $b_1 = \sum_{j=-1}^{1} b_{1,j}$, avec $b_{1,j} \in A^{11}_{jj}$. Dans cette situation, on suppose que la strate $[\Lambda^1_{\mathfrak{o}_{E_1}}, m, m-1, s_1(b_1)]$ dans B_1 est G-scindée pour la décomposition $V^1 = V^1_0 \perp (V^1_1 \oplus V^1_2)$.

On considère la décomposition suivante de V :

$$V = V_{-1} \oplus V_0 \oplus V_1, \text{ où } V_{-1} = V^1_{-1}, V_0 = V^1_0 \oplus \oplus_{i=2}^{l} V^i, \text{ et } V_1 = V^1_1.$$

Pour $-1 \leq i, j \leq 1$, posons $A_{ij} = \mathrm{End}_F(V_i, V_j)$. On note

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{-1\leq j\leq 1} A_{jj}, \quad M = \mathcal{M}^\times,$$
$$N_u = 1 + \bigoplus_{-1\leq j<k\leq 1} A_{jk}, \quad N_l = 1 + \bigoplus_{-1\leq k<j\leq 1} A_{jk},$$
$$P_u = MN_u, \quad P_l = MN_l,$$

et on écrit $b_0 = b_{1,0} + \sum_{i=2}^{l} b_i$. Posons $M^- = M \cap G$, $N_u^- = N_u \cap G$, $N_l^- = N_l \cap G$, $P_u^- = P_u \cap G$ et $P_l^- = P_l \cap G$. Notons $\widehat{M^-}, \widehat{P_u^-}, \widehat{P_l^-}$ l'image inverse dans $\widehat{G}$ par t de $M^- \cap \mathrm{O}'(h), P_u^- \cap \mathrm{O}'(h), P_l^- \cap \mathrm{O}'(h)$, respectivement, et ${}_sN_u^-, {}_sN_l^-$ les deux sous-groupes unipotents de $\widehat{G}$ respectivement correspondants à N_u^- et à N_l^- par les sections homomorphes données par le corollaire 2.13. Alors $\widehat{P_u^-} = \widehat{M^-}{}_sN_u^-$ est un sous-groupe parabolique maximal de $\widehat{G}$ avec un facteur de Levi $\widehat{M^-}$, le radical unipotent ${}_sN_u^-$ et le sous-groupe parabolique opposé $\widehat{P_l^-} = \widehat{M^-}{}_sN_l^-$ par rapport à $\widehat{M^-}$.

Soit $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, m-1, \beta)$ un caractère semi-simple autodual. Shaun Stevens a défini dans [41, §4.1] un pro-p-sous-groupe K_- de G contenant et normalisant $H^m(\beta, \Lambda)$ et

$$K_- \cap M^- = H^m(\beta, \Lambda) \cap M^-, \quad K_- \cap N_l^- = H^m(\beta, \Lambda) \cap N_l^-.$$

Il a également déterminé un caractère ξ_- de K_- tels que

$$I_{N_u^-}(\xi_-) = K_- \cap N_u^-.$$

De plus, ξ_- est un prolongement de $\theta\psi_b|_{H^m(\beta,\Lambda)}$ à K_- qui est trivial sur $K_- \cap N_u^-$, où $b = b_{1,-1} + b_0 + b_{1,1}$.

Soit ${}_sK_-$ l'image de K_- dans $\widehat{G}$ par l'isomorphisme de K_- donné par le corollaire 2.13 et posons ${}_s\xi_- = \xi_- \circ t|_{{}_sK_-}$. Soit ${}_s\theta \in {}_s\mathcal{C}(\Lambda, m-1, \beta)$ le caractère semi-simple autodual relevé de θ. Alors, par l'unicité des sections homomorphes déterminées par le corollaire 2.13, nous voyons aussi que ${}_sK_-$ contient et normalise ${}_sH^m(\beta, \Lambda)$, que

$${}_sK_- \cap \widehat{M^-} = {}_sH^m(\beta, \Lambda) \cap \widehat{M^-}, \quad {}_sK_- \cap {}_sN_l^- = {}_sH^m(\beta, \Lambda) \cap {}_sN_l^-$$

et que ${}_s\xi_-$ est un prolongement de ${}_s\theta_s\psi_b|_{{}_sH^m(\beta,\Lambda)}$ qui est trivial sur ${}_sK_- \cap {}_sN_u^-$. De plus, par le lemme 3.6, nous avons aussi

$$I_{{}_sN_u^-}({}_s\xi_-) = {}_sK_- \cap {}_sN_u^-.$$

Proposition 4.10 (cf. [41, Proposition 4.6]). *Soit π une représentation lisse de $\widehat{G}$. Si la restriction de π à ${}_sH^m(\beta, \Lambda)$ contient ${}_s\theta_s\psi_b|_{{}_sH^m(\beta,\Lambda)}$ alors sa restriction à ${}_sK_-$ contient ${}_s\xi_-$.*

Démonstration. Avec le lemme 4.2, la démonstration de cette proposition est identique à la démonstration de [41, Proposition 4.6] en remplaçant les pro-p-sous-groupes K_q^- et Ξ_q^- de G dans *loc. cit.* par les pro-p-sous-groupes de $\widehat{G}$ correspondants par les isomorphismes donnés par le corollaire 2.13.

Précisément, pour $m \geq 2$, dans *loc. cit.*, Shaun Stevens a défini des pro-p-sous-groupes de G :

$$K_q^-, \text{ pour } q = -1, 0, ..., \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1, \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor, ..., m-1$$

tels que $K_{-1}^- = K_-$, $K_{m-1}^- = H^m(\beta, \Lambda)$, K_{q-1}^- contient et normalise K_q^-, pour $0 \leq q \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1$ ou $\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor < q \leq m-1$ et $K_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1}^-$ contient et normalise $K_{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor}^-$. Il a également défini des sous-groupes de N_l^- contenant $H^m(\beta, \Lambda) \cap N_l^-$:

$$\Xi_q^-, \text{ pour } q = 0, ..., \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1, \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor, ..., m-1$$

tels que, pour $0 \leq q \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1$ ou $\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor < q \leq m-1$, Ξ_q^- normalise K_{q-1}^- et agit transitivement sur l'ensemble des caractères de K_{q-1}^- dont la restriction à K_q^- est ξ_- [41, Lemme 4.7] et que $\Xi_{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor}^-$ normalise $K_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1}^-$ et agit transitivement sur l'ensemble des caractères de $K_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1}^-$ dont la restriction à $K_{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor}^-$ est ξ_- [41, Lemme 4.8].

Passons maintenant au groupe $\widehat{G}$. Nous avons des pro-p-sous-groupes

$${}_sK_q^-, \text{ pour } q = -1, 0, ..., \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1, \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor, ..., m-1$$

et prenons

$$\overline{\Xi}_q^-, \text{ pour } q = 0, ..., \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1, \lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor, ..., m-1,$$

l'image inverse dans ${}_sN_l^-$ de Ξ_q^-. Par l'unicité des sections homomorphes déterminées par le corollaire 2.13, ${}_sK_{-1}^- = {}_sK_-$, ${}_sK_{m-1}^- = {}_sH^m(\beta, \Lambda)$, ${}_sK_{q-1}^-$ contient et normalise ${}_sK_q^-$, pour $0 \leq q \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1$ ou $\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor < q \leq m-1$ et ${}_sK_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1}^-$ contient et normalise ${}_sK_{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor}^-$. Également, $\overline{\Xi}_q^-$ sont des sous-groupes de ${}_sN_l^-$ contenant ${}_sH^m(\beta, \Lambda) \cap {}_sN_l^-$. De plus, avec le lemme 4.2, $\overline{\Xi}_q^-$ normalise ${}_sK_{q-1}^-$ et agit transitivement sur l'ensemble des caractères de ${}_sK_{q-1}^-$ dont la restriction à ${}_sK_q^-$ est ${}_s\xi_-$, pour $0 \leq q \leq \lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1$ ou $\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor < q \leq m-1$, et $\overline{\Xi}_{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor}^-$ normalise ${}_sK_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1}^-$ et agit transitivement sur l'ensemble des caractères de ${}_sK_{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor - 1}^-$ dont la restriction à ${}_sK_{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor}^-$ est ${}_s\xi_-$. Cela entraîne la proposition 4.10 pour $m \geq 2$.

Dans le cas $m = 1$, par le même argument, on voit que $\overline{\Xi}_0^-$ normalise ${}_sK_-$ et agit transitivement sur l'ensemble des caractères de ${}_sK_-$ prolongeant ${}_s\theta_s\psi_b|_{{}_sH^m(\beta,\Lambda)}$. D'où la proposition 4.10. □

Poursuivons dans la même situation, nous allons voir dans le lemme suivant que, avec ${}_sK_-$ et ${}_s\xi_-$, nous avons une paire couvrante.

Lemme 4.11 (cf. [15, §6.6, Corollaire], [41, Proposition 4.5]). *Avec les notations au-dessus, la paire* $({}_sK_-, {}_s\xi_-)$ *est une paire couvrante de* $({}_sK_- \cap \widehat{M}^-, {}_s\xi_-|_{{}_sK_- \cap \widehat{M}^-})$.

Démonstration. Cette démonstration est identique à la démonstration de [15, §6.6, Corollaire]. Remarquons d'abord que la décomposition d'Iwahori [41, Proposition 4.5]

$$K_- = K_- \cap N_l^- \cdot K_- \cap M^- \cdot K_- \cap N_u^-$$

se transporte par la section unique de K_- déterminée par le corollaire 2.13 à une décomposition d'Iwahori

$${}_sK_- = {}_sK_- \cap {}_sN_l^- \cdot {}_sK_- \cap \widehat{M}^- \cdot {}_sK_- \cap {}_sN_u^-.$$

De plus, le caractère ${}_s\xi_-$ est trivial sur ${}_sK_- \cap {}_sN_l^-$ et sur ${}_sK_- \cap {}_sN_u^-$. La paire $({}_sK_-, {}_s\xi_-)$ est donc une paire décomposée au-dessus de $({}_sK_- \cap \widehat{M}^-, {}_s\xi_-|_{{}_sK_-\cap\widehat{M}^-})$ relativement à $\widehat{P}_u^-$.

Prenons une image inverse $\widehat{\zeta}$ dans $\widehat{M}^-$ de

$$\zeta = \begin{pmatrix} \varpi_F^2 I & & \\ & I & \\ & & \varpi_F^{-2} I \end{pmatrix} \in M^- \cap \mathrm{O}'(h).$$

D'après le lemme 4.5, on voit que $\widehat{\zeta}$ est contenu dans le centre de $\widehat{M}^-$ et il est fortement positif relativement à $(\widehat{P}_u^-, {}_sK_-)$.

La double classe ${}_sK_-\widehat{\zeta}^{-1}{}_sK_-$ supporte un unique élément f de l'algèbre de convolution $\mathcal{H}(\widehat{G}, {}_sK, {}_s\xi_-)$ tel que $f(\widehat{\zeta}^{-1}) = 1$. De même, soit $f' \in \mathcal{H}(\widehat{G}, {}_sK, {}_s\xi_-)$ l'élément de support ${}_sK_-\widehat{\zeta}{}_sK_-$ vérifiant $f'(\widehat{\zeta}) = 1$. Le support de la convolution $f * f'$ est donc contenu dans

$${}_sK_-\widehat{\zeta}^{-1}{}_sK_-\widehat{\zeta}{}_sK_- = {}_sK_- \cdot \widehat{\zeta}^{-1}({}_sK_- \cap {}_sN_u^-)\widehat{\zeta} \cdot {}_sK_-.$$

Il est donc contenu dans ${}_sK_-$ puisque $I_{{}_sN_u^-}({}_s\xi_-) = {}_sK_- \cap {}_sN_u^-$. D'ailleurs, le calcul de cette convolution en l'élément neutre de $\widehat{G}$ nous donne une valeur réelle positive. Cela implique que f est un élément inversible à droite. Il est donc inversible par l'argument de [14, (7.14)]. La démonstration du lemme 4.11 est complète. □

Avec la proposition 4.10 et le lemme 4.11, nous arrivons à montrer le théorème suivant qui est similaire à [41, Théorème 4.9].

Théorème 4.12. *Soit $(\pi, \mathcal{V})$ une représentation lisse de $\widehat{G}$. Si π contient ${}_s\theta_s\psi_b|_{{}_sH^m(\beta,\Lambda)}$ alors π n'est pas supercuspidale.*

Démonstration. Supposons que π est une représentation lisse de $\widehat{G}$ contenant ${}_s\theta_s\psi_b|_{{}_sH^m(\beta,\Lambda)}$. D'après la proposition 4.10, la restriction de π à ${}_sK_-$ contient le caractère ${}_s\xi_-$. Or, par le lemme 4.11, $({}_sK_-, {}_s\xi_-)$ est une paire couvrante de $({}_sK_- \cap \widehat{M}^-, {}_s\xi_-|_{{}_sK_-\cap\widehat{M}^-})$, alors, d'après [14, Théorème 7.9], la composante ${}_s\xi_-|_{{}_sK_-\cap\widehat{M}^-}$-isotypique $\mathcal{V}_u^{{}_s\xi_-|_{{}_sK_-\cap\widehat{M}^-}}$ du module de Jacquet $\mathcal{V}_u$ de $\mathcal{V}$ relativement au radical unipotent ${}_sN_u^-$ est isomorphe à $\mathcal{V}^{{}_s\xi_-}$ qui est non nulle. En particulier, $\mathcal{V}_u$ est non nul. D'où le théorème 4.12. □

4.2.2 Exhaustivité des caractères semi-simples gauches relevés

Maintenant, nous montrons le théorème suivant qui complète la deuxième étape de la démonstration de l'exhaustivité de nos types cuspidaux.

Théorème 4.13 (cf. [41, Théorème 5.1])**.** *Soit π une représentation irréductible supercuspidale de niveau positif de $\widehat{G}$. Alors π contient un caractère semi-simple gauche relevé ${}_s\theta \in {}_s\mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ pour une certaine strate semi-simple gauche $[\Lambda, n, 0, \beta]$ dans $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. Cette démonstration est similaire à la démonstration de [41, Théorème 5.1]. Par le théorème 4.9 au-dessus, on voit que π contient une strate semi-simple gauche $[\Lambda, n, n-1, \beta]$ dans $\mathfrak{g}$.

Considérons l'ensemble des paires $([\Lambda, n, m, \beta], {}_s\theta)$, où $[\Lambda, n, m, \beta]$ est une strate semi-simple gauche dans $\mathfrak{g}$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et où ${}_s\theta \in {}_s\mathcal{C}(\Lambda, m, \beta)$ est un caractère semi-simple gauche relevé de ${}_sH^{m+1}(\beta, \Lambda)$ tel que la restriction de π à ${}_sH^{m+1}(\beta, \Lambda)$ contient ${}_s\theta$. Nous montrons le théorème par l'absurde : en supposant $m \geq 1$ pour toutes les telles paires, nous montrons que π n'est pas supercuspidale. L'idée est de se ramener au cas relativement G-scindé que l'on a traité dans le théorème 4.12.

Comme $\pi|_{{}_sH^{m+1}(\beta,\Lambda)}$ contient ${}_s\theta$, la restriction de π à ${}_sH^m(\beta, \Lambda)$ contient une représentation irréductible ϑ de ${}_sH^m(\beta, \Lambda)$ dont la restriction à ${}_sH^{m+1}(\beta, \Lambda)$ contient ${}_s\theta$. Puisque ${}_s\theta$ se prolonge à ${}_sH^m(\beta, \Lambda)$ en un caractère ${}_s\theta' \in {}_s\mathcal{C}(\Lambda, m-1, \beta)$ et que le quotient ${}_sH^m(\beta, \Lambda)/{}_sH^{m+1}(\beta, \Lambda)$ est abélien, ϑ est de la forme

$$\vartheta = {}_s\theta' {}_s\psi_c|_{{}_sH^m(\beta,\Lambda)}, \qquad \text{pour un certain } c \in \mathfrak{a}_{-m}^-.$$

Soit $V = \perp_{i=1}^l V^i$ la décomposition orthogonale associée à la strate $[\Lambda, n, m, \beta]$. On écrit

$$A = \mathrm{End}_F(V) = \bigoplus_{1\leq i,j\leq l} A^{ij}$$

pour la décomposition correspondante de A et on note

$$\mathcal{M} = \bigoplus_{i=1}^{l} A^{ii}.$$

Rappelons que ${}_s\theta'$ se factorise par un caractère semi-simple gauche $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, m-1, \beta)$ et ${}_s\psi_c$ se factorise par ψ_c donné dans [41, Théorème 5.1]. En remarquant que [41, Lemme 5.2] se transporte par la section homomorphe unique de $H^m(\beta, \Lambda)$ donnée par le corollaire 2.13, on peut supposer que

$$c = \bigoplus_{i=1}^{l} c_i \in \mathcal{M}.$$

Pour $1 \leq i \leq l$, soit s_i une "tame corestriction" sur A^{ii} relative à E_i/F. Posons $s = \oplus_{i=1}^l s_i$ et considérons la strate dérivée

$$[\Lambda_{\mathfrak{o}_E}, m, m-1, s(c)] = \bigoplus_{i=1}^{l} [\Lambda^i_{\mathfrak{o}_{E_i}}, m, m-1, s_i(c_i)].$$

Cette strate dérivée est dite *fondamentale* s'il existe un indice $i \in \{1, ..., l\}$ tel que la strate $[\Lambda^i_{\mathfrak{o}_{E_i}}, m, m-1, s_i(c_i)]$ est fondamentale. Par [41, Proposition 5.5], on peut supposer que $[\Lambda_{\mathfrak{o}_E}, m, m-1, s(c)]$ est fondamentale.

Il y a alors des paires $([\Lambda, n, m, \beta], {}_s\theta)$ avec $m \geq 1$ telles que π contienne ${}_s\theta$ et $\vartheta = {}_s\theta' {}_s\psi_c$ pour un certain $c \in \mathfrak{a}^-_{-m} \cap \mathcal{M}$ où $[\Lambda_{\mathfrak{o}_E}, m, m-1, s(c)]$ est une strate fondamentale. De plus, puisque $e(\Lambda)/(m, e(\Lambda))$ est borné, il existe une telle paire $([\Lambda, n, m, \beta], {}_s\theta)$ avec $m/e(\Lambda)$ minimal.

De l'argument de [41, Théorème 5.1] où l'on utilise la minimalité de $m/e(\Lambda)$ on trouve qu'il existe un indice i tel que $[\Lambda^i_{\mathfrak{o}_{E_i}}, m, m-1, s_i(c_i)]$ est une strate G-scindée. Quitte à renuméroter, on peut supposer que $i = 1$, c'est-à-dire, la strate $[\Lambda^1_{\mathfrak{o}_{E_1}}, m, m-1, s_1(c_1)]$ est G-scindée. Cela nous donne une décomposition de E_1-espaces vectoriels

$$V^1 = V^1_0 \perp (V^1_{-1} \oplus V^1_1),$$

où V^1_{-1} et V^1_1 sont totalement isotropes en dualité par rapport à h, telle que

$$\Lambda(k) = \bigoplus_{j=-1}^{1} \Lambda(k) \cap V^1_j, \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z},$$

et que $s_1(c_1)V^1_j \subset V^1_j$, pour $j = -1, 0, 1$.

Par l'argument de [41, Théorème 5.1] où on utilise encore [41, Lemme 5.2], on peut supposer que $c_1 V^1_j \subset V^1_j$, pour $j = -1, 0, 1$. On est donc dans la situation d'un cas relativement G-scindé (§4.2.1). D'après le théorème 4.12, π n'est pas supercuspidale. D'où le théorème 4.13. □

4.3 Entrelacement et algèbre de Hecke

Dans cette dernière section, en suivant [42, §7], nous voulons montrer que toute représentation irréductible supercuspidale de niveau positif de $\widehat{G}$ admet un type cuspidal défini dans le chapitre 3.5.

4.3.1 Décomposition d'Iwahori

Suivant [42, §5], nous étudions des décompositions d'Iwahori dans $\widehat{G}$. Fixons alors une strate semi-simple gauche $[\Lambda, n, 0, \beta]$ dans $\mathfrak{g}$ avec la décomposition orthogonale associée $V = \perp_{i=1}^{l} V^i$. Considérons les décompositions $V = \oplus_{j=1}^{m} W^{(j)}$ de V telle que

(i) $W^{(j)} = \perp_{i=1}^{l} (W^{(j)} \cap V^i)$ pour $1 \leq j \leq m$;

(ii) $W^{(j)} \cap V^i$ est un E_i-sous-espace vectoriel de V^i pour $1 \leq j \leq m$ et $1 \leq i \leq l$.

Définition 4.14 ([42, Définition 5.1])**.** Une décomposition $V = \oplus_{j=1}^{m} W^{(j)}$ comme au-dessus est dite

(i) *subordonnée à la strate* $[\Lambda, n, 0, \beta]$ si $\Lambda(k) = \oplus_{j=1}^{m} (\Lambda(k) \cap W^{(j)})$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$;

(ii) *proprement subordonnée à* $[\Lambda, n, 0, \beta]$ si elle est subordonnée à $[\Lambda, n, 0, \beta]$ et, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour $1 \leq i \leq l$, il y a au plus un indice j, $1 \leq j \leq m$, tel que

$$(\Lambda(k+1) \cap W^{(j)} \cap V^i) \subsetneq (\Lambda(k) \cap W^{(j)} \cap V^i).$$

Si $V = \oplus_{j=1}^m W^{(j)}$ est une décomposition subordonnée à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$, pour $1 \leq j \leq m$, on note $\Lambda^{(j)}$ la suite de réseaux dans $W^{(j)}$ définie par

$$\Lambda^{(j)}(k) = \Lambda(k) \cap W^{(j)}$$

et pose $\beta^{(j)} = \mathbf{1}^{(j)}\beta\mathbf{1}^{(j)}$, où $\mathbf{1}^{(j)}$ désigne la projection de V sur $W^{(j)}$ de noyau $\oplus_{k\neq j} W^{(k)}$. Alors il existe un entier $n^{(j)}$ tel que $[\Lambda^{(j)}, n^{(j)}, 0, \beta^{(j)}]$ est une strate semi-simple dans $A^{(j)} = \mathrm{End}_F(W^{(j)})$ avec la décomposition associée

$$W^{(j)} = \bigoplus_{i=1}^{l} (W^{(j)} \cap V^i).$$

On note aussi $B^{(j)}$ le centralisateur de $\beta^{(j)}$ dans $A^{(j)}$.

Soit $V = \oplus_{j=-m}^m W^{(j)}$ une décomposition autoduale de V par rapport à la forme h, c'est-à-dire, pour $-m \leq j \leq m$, le complément orthogonal de $W^{(j)}$ par rapport à h est $\oplus_{k\neq -j} W^{(k)}$. Notons L le sous-groupe de Levi de G qui stabilise cette décomposition autoduale de V. Soit $P = LU$ un sous-groupe parabolique quelconque de G de facteur de Levi L et de radical unipotent U. D'après [42, Corollaire 5.10], si la décomposition est subordonnée à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ alors les sous-groupes $H^1(\beta, \Lambda)$ et $J^1(\beta, \Lambda)$ admettent des décompositions d'Iwahori relativement à (L, P) et si la décomposition est proprement subordonnée à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ alors le sous-groupe $J(\beta, \Lambda)$ admet aussi une décomposition d'Iwahori relativement à (L, P).

Soit $\widehat{L} = t^{-1}(L \cap \mathrm{O}'(h))$ l'image inverse dans $\widehat{G}$ de L par l'homomorphisme t, soit ${}_sU$ l'image de la section homomorphe de U donnée par le corollaire 2.14. Alors $\widehat{L}$ est le sous-groupe de Levi de $\widehat{G}$ qui stabilise la décomposition autoduale $V = \oplus_{j=-m}^m W^{(j)}$ et $\widehat{P} = \widehat{L}_s U$ est un sous-groupe parabolique de $\widehat{G}$. De plus, tout sous-groupe parabolique de $\widehat{G}$ de facteur de Levi $\widehat{L}$ peut être obtenu par cette manière. Le [42, Corollaire 5.10] se transporte immédiatement grâce aux sections homomorphes uniques des pro-p-sous-groupes données par le corollaire 2.13. Nous avons donc

Proposition 4.15. *Avec les hypothèses au-dessus,*

(i) si la décomposition autoduale $V = \oplus_{j=-m}^m W^{(j)}$ est subordonnée à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$, alors les groupes ${}_sH^1(\beta, \Lambda)$ et ${}_sJ^1(\beta, \Lambda)$ admettent des décompositions d'Iwahori relativement à $(\widehat{L}, \widehat{P})$;

(ii) si la décomposition autoduale $V = \oplus_{j=-m}^m W^{(j)}$ est proprement subordonnée à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$, alors les groupes $\widehat{J}(\beta, \Lambda)$ et $\widehat{J}^o(\beta, \Lambda)$ admettent des décompositions d'Iwahori relativement à $(\widehat{L}, \widehat{P})$.

Quand la décomposition $V = \oplus_{j=-m}^m W^{(j)}$ est subordonnée à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$, nous définissons les groupes

$${}_sH^1_{\widehat{P}} = {}_sH^1(\beta, \Lambda)({}_sJ^1(\beta, \Lambda) \cap {}_sU) \text{ et } {}_sJ^1_{\widehat{P}} = {}_sH^1(\beta, \Lambda)({}_sJ^1(\beta, \Lambda) \cap \widehat{P}).$$

Ces groupes sont en fait les images des sections homomorphes des pro-p-sous-groupes H^1_P et J^1_P définis dans [42, §5.3]. Également, quand la décomposition $V = \oplus_{j=-m}^m W^{(j)}$ est proprement subordonnée à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$, nous définissons les groupes

$$\widehat{J}_{\widehat{P}} = {}_sH^1(\beta, \Lambda)(\widehat{J}(\beta, \Lambda) \cap \widehat{P}) \text{ et } \widehat{J}^o_{\widehat{P}} = {}_sH^1(\beta, \Lambda)(\widehat{J}^o(\beta, \Lambda) \cap \widehat{P}).$$

Alors le groupe $\widehat{J}_{\widehat{P}}$ est l'image inverse dans $\widehat{G}$ du groupe $J_P \cap \mathrm{O}'(h)$, où J_P est le groupe défini dans *loc. cit.*

Soit ${}_s\theta \in {}_s\mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ un caractère semi-simple gauche relevé de ${}_sH^1(\beta, \Lambda)$, c'est-à-dire, ${}_s\theta = \theta \circ t|_{{}_sH^1(\beta,\Lambda)}$ avec $\theta \in \mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ un caractère semi-simple gauche de $H^1(\beta, \Lambda)$. Supposons que $V = \oplus_{j=-m}^m W^{(j)}$ est une décomposition autoduale de V et subordonnée à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$. Nous définissons un caractère ${}_s\theta_{\widehat{P}}$ de ${}_sH^1_{\widehat{P}}$ par

$${}_s\theta_{\widehat{P}}(hj) = {}_s\theta(h), \quad \forall h \in {}_sH^1(\beta, \Lambda), \forall j \in {}_sJ^1(\beta, \Lambda) \cap {}_sU.$$

Alors ${}_s\theta_{\widehat{P}} = \theta_P \circ t|_{{}_sH^1_{\widehat{P}}}$, où θ_P est le caractère de H^1_P défini dans *loc. cit.*

D'après [42, Lemme 5.12], il existe une unique représentation irréductible η_P de J^1_P contenant θ_P. De plus, si η est l'unique représentation irréductible de $J^1(\beta, \Lambda)$ qui contient θ alors η_P peut être interprété comme la représentation naturelle de J^1_P dans l'espace des vecteurs de η qui sont fixés par $J^1(\beta, \Lambda) \cap U$ et $\eta = \mathrm{Ind}_{J^1_P}^{J^1(\beta,\Lambda)} \eta_P$. Posons ${}_s\eta = \eta \circ t|_{{}_sJ^1(\beta,\Lambda)}$ et ${}_s\eta_{\widehat{P}} = \eta_P \circ t|_{{}_sJ^1_{\widehat{P}}}$. Alors ${}_s\eta_{\widehat{P}}$ peut être interprété comme la représentation naturelle de ${}_sJ^1_{\widehat{P}}$ dans le sous-espace de ${}_s\eta$ formé des vecteurs fixés par ${}_sJ^1(\beta, \Lambda) \cap {}_sU$ et [42, Lemme 5.12] se transporte immédiatement grâce au lemme 3.6 à

Proposition 4.16. *La représentation ${}_s\eta_{\widehat{P}}$ est l'unique représentation irréductible de ${}_sJ^1_{\widehat{P}}$ dont la restriction à ${}_sH^1_{\widehat{P}}$ contient ${}_s\theta_{\widehat{P}}$. Nous avons ${}_s\eta = \mathrm{Ind}_{{}_sJ^1_{\widehat{P}}}^{{}_sJ^1(\beta,\Lambda)} {}_s\eta_{\widehat{P}}$ et, pour tout $g \in \widehat{G}_\beta$, la double classe ${}_sJ^1_{\widehat{P}} g {}_sJ^1_{\widehat{P}}$ est l'unique $({}_sJ^1_{\widehat{P}}, {}_sJ^1_{\widehat{P}})$-double classe dans ${}_sJ^1(\beta, \Lambda) g {}_sJ^1(\beta, \Lambda)$ entrelaçant ${}_s\eta_{\widehat{P}}$ et*

$$\dim I_g({}_s\eta_{\widehat{P}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in {}_sJ^1_{\widehat{P}} \widehat{G}_\beta {}_sJ^1_{\widehat{P}}; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Maintenant nous supposons de plus que la décomposition autoduale $V = \oplus_{j=-m}^m W^{(j)}$ est proprement subordonnée à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$. Soit $\widehat{\kappa}$ une β-extension de ${}_s\eta$ à $\widehat{J}(\beta, \Lambda)$, i.e., $\widehat{\kappa} = \kappa \circ t|_{\widehat{J}(\beta,\Lambda)}$ pour une β-extension κ de η à $J(\beta, \Lambda)$. Notons $\widehat{\kappa}_{\widehat{P}}$ la représentation naturelle de $\widehat{J}_{\widehat{P}}$ dans le sous-espace de $\widehat{\kappa}$ consistant en les vecteurs fixés par $\widehat{J}(\beta, \Lambda) \cap {}_sU = {}_sJ^1(\beta, \Lambda) \cap {}_sU$. Alors $\widehat{\kappa}_{\widehat{P}} = \kappa_P \circ t|_{\widehat{J}_{\widehat{P}}}$, où κ_P est la représentation naturelle de J_P dans l'espace des vecteurs fixés par $J^1(\beta, \Lambda) \cap U$ dans κ. En particulier, $\widehat{\kappa}_{\widehat{P}}|_{{}_sJ^1_{\widehat{P}}} = {}_s\eta_{\widehat{P}}$ et donc $\widehat{\kappa}_{\widehat{P}}$ est irréductible. De plus, utilisant la formule de restriction de Mackey, on voit que la restriction à ${}_sJ^1(\beta, \Lambda)$ de l'induction $\mathrm{Ind}_{\widehat{J}_{\widehat{P}}}^{\widehat{J}(\beta,\Lambda)} \widehat{\kappa}_{\widehat{P}}$ est ${}_s\eta$ qui est irréductible. $\mathrm{Ind}_{\widehat{J}_{\widehat{P}}}^{\widehat{J}(\beta,\Lambda)} \widehat{\kappa}_{\widehat{P}}$ est donc irréductible. Comme cette induction contient $\widehat{\kappa}$, cela implique

$$\mathrm{Ind}_{\widehat{J}_{\widehat{P}}}^{\widehat{J}(\beta,\Lambda)} \widehat{\kappa}_{\widehat{P}} \simeq \widehat{\kappa}.$$

De même manière, si on regarde la restriction de $\widehat{\kappa}$ à $\widehat{J}^o(\beta, \Lambda)$, on va obtenir la restriction $\widehat{\kappa}_{\widehat{P}}|_{\widehat{J}^o_{\widehat{P}}}$ et nous avons aussi

$$\mathrm{Ind}_{\widehat{J}^o_{\widehat{P}}}^{\widehat{J}^o(\beta,\Lambda)} (\widehat{\kappa}_{\widehat{P}}|_{\widehat{J}^o_{\widehat{P}}}) \simeq \widehat{\kappa}|_{\widehat{J}^o(\beta,\Lambda)}.$$

4.3.2 Morphismes d'algèbres de Hecke

Poursuivons dans la même situation qu'au paragraphe précédent, c'est-à-dire, nous avons une strate semi-simple gauche $[\Lambda, n, 0, \beta]$ dans $\mathfrak{g}$ avec la décomposition orthogonale $V = \perp_{i=1}^{l} V^i$ et nous avons aussi une décomposition autoduale $V = \oplus_{j=-m}^{m} W^{(j)}$ qui est proprement subordonnée à la strate. Utilisons les notations du paragraphe précédent et rappelons que $\widehat{J}(\beta,\Lambda) \cap {}_sU = {}_sJ^1(\beta,\Lambda) \cap {}_sU$. Nous avons besoin d'un résultat similaire à [42, Lemme 6.1].

Lemme 4.17. *Soit K un sous-groupe ouvert compact de $\widehat{G}$ tel que ${}_sJ^1(\beta,\Lambda) \subseteq K \subseteq \widehat{J}(\beta,\Lambda)$ et admettant une décomposition d'Iwahori relativement à $(\widehat{L}, \widehat{P})$. Soit ρ (l'inflation à K d')une représentation irréductible de $K/{}_sJ^1(\beta,\Lambda)$. Posons $\vartheta = \widehat{\kappa}|_K \otimes \rho$ et soit $\vartheta_{\widehat{P}}$ la représentation naturelle de $K_{\widehat{P}} = {}_sH^1(\beta,\Lambda)(K \cap \widehat{P})$ dans le sous-espace de ϑ formé des vecteurs fixés par ${}_sJ^1(\beta,\Lambda) \cap {}_sU$. Alors*

(i) La représentation $\vartheta_{\widehat{P}}$ est irréductible et nous avons $\mathrm{Ind}_{K_{\widehat{P}}}^{K} \vartheta_{\widehat{P}} = \vartheta$;

(ii) Si on considère ρ comme une représentation irréductible de $K_{\widehat{P}}/{}_sJ^1_{\widehat{P}}$ qui est isomorphe à $K/{}_sJ^1(\beta,\Lambda)$, on a $\vartheta_{\widehat{P}} \simeq \widehat{\kappa}_{\widehat{P}}|_{K_{\widehat{P}}} \otimes \rho$;

(iii) Il y a un isomorphisme d'algèbres de convolution

$$\mathcal{H}(\widehat{G}, K_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}}) \simeq \mathcal{H}(\widehat{G}, K, \vartheta)$$

tel que si KgK, avec $g \in \widehat{G}_\beta$, est le support de $\phi \in \mathcal{H}(\widehat{G}, K, \vartheta)$ alors $K_{\widehat{P}} g K_{\widehat{P}}$ est le support de la fonction correspondante $\phi_{\widehat{P}} \in \mathcal{H}(\widehat{G}, K_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$.

Démonstration. C'est identique à la démonstration de [42, Lemme 6.1] en utilisant la proposition 4.16 à la place de [42, Lemme 5.12].

□

Avec le lemme précédent et le corollaire 3.17, le corollaire 6.2 de [42] se transporte automatiquement à

Corollaire 4.18. *Soit $\widehat{\kappa}$ une β-extension de ${}_s\eta$ à $\widehat{J}(\beta,\Lambda)$ relativement à Λ^M. Alors $\widehat{P}(\Lambda^M_{\mathfrak{o}_E}) \subseteq I_{\widehat{G}}(\widehat{\kappa}_{\widehat{P}})$.*

Soit $[\Lambda^m, n_m, 0, \beta]$ une strate semi-simple gauche dans $\mathfrak{g}$ avec la même décomposition orthogonale $V = \perp_{i=1}^{l} V^i$, la même décomposition autoduale proprement subordonnée $V = \oplus_{j=-m}^{m} W^{(j)}$ et telle que $\mathfrak{b}_0(\Lambda^m)$ est un $\mathfrak{o}_E$-ordre autodual minimal contenu dans $\mathfrak{b}_0(\Lambda)$. Posons ${}_sJ^1_{m,\Lambda} = {}_sP_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E}) {}_sJ^1(\beta,\Lambda)$ et notons ${}_s\eta_{m,\Lambda}$ l'unique prolongement de ${}_s\eta$ à ${}_sJ^1_{m,\Lambda}$ que tous les éléments de $\widehat{G}_\beta$ entrelacent (voir la proposition 3.10). Rappelons que $\widehat{\kappa}|_{{}_sJ^1_{m,\Lambda}} = {}_s\eta_{m,\Lambda}$ (proposition 3.18).

Remarquant que ${}_sJ^1_{m,\Lambda}$ admet une décomposition d'Iwahori relativement à $(\widehat{L}, \widehat{P})$ et que ${}_sJ^1_{m,\Lambda} \cap {}_sU = {}_sJ^1(\beta,\Lambda) \cap {}_sU$, nous avons la représentation naturelle ${}_s\eta_{m,\Lambda,\widehat{P}}$ de ${}_sJ^1_{m,\Lambda,\widehat{P}} = {}_sH^1(\beta,\Lambda)({}_sJ^1_{m,\Lambda} \cap \widehat{P})$ dans l'espace des vecteurs de ${}_s\eta_{m,\Lambda}$ fixés par ${}_sJ^1(\beta,\Lambda) \cap {}_sU$. En appliquant le lemme 4.17, nous avons

$${}_s\eta_{m,\Lambda} \simeq \mathrm{Ind}_{{}_sJ^1_{m,\Lambda,\widehat{P}}}^{{}_sJ^1_{m,\Lambda}} {}_s\eta_{m,\Lambda,\widehat{P}}.$$

La restriction de l'homomorphisme t à ${}_sJ^1_{m,\Lambda,\widehat{P}}$ induit en fait un isomorphisme de ${}_sJ^1_{m,\Lambda,\widehat{P}}$ à $J^1_{m,\Lambda,P} = H^1(\beta,\Lambda)(J^1_{m,\Lambda} \cap P)$, où $J^1_{m,\Lambda} = P_1(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})J^1(\beta,\Lambda)$. De plus, ${}_s\eta_{m,\Lambda,\widehat{P}}$ factorise par la représentation naturelle $\eta_{m,\Lambda,P}$ de $J^1_{m,\Lambda,P}$ dans l'espace des vecteurs de $\eta_{m,\Lambda}$ fixés par $J^1(\beta,\Lambda) \cap U$, où $\eta_{m,\Lambda}$ est l'unique représentation irréductible de $J^1_{m,\Lambda}$ contenant η et entrelacée par tous les éléments de G_β (voir [42, Corollaire 3.11]). Le corollaire 6.4 de [42] se transporte donc automatiquement par le corollaire 3.6.

Proposition 4.19. *Avec les notations au-dessus, nous avons*

$$\dim I_g({}_s\eta_{m,\Lambda,\widehat{P}}) = \begin{cases} 1 & \text{si } g \in {}_sJ^1_{m,\Lambda,\widehat{P}}\widehat{G}_\beta {}_sJ^1_{m,\Lambda,\widehat{P}}; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $[\Lambda^M, n_M, 0, \beta]$ une autre strate semi-simple gauche dans $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{b}_0(\Lambda) \subseteq \mathfrak{b}_0(\Lambda^M)$. Posons ${}_s\theta_M = \tau_{\Lambda,\Lambda^M,\beta}({}_s\theta)$ et soit ${}_s\eta_M$ l'unique représentation irréductible de ${}_sJ^1(\beta,\Lambda^M)$ contenant ${}_s\theta_M$. Considérons $\widehat{\kappa}$ une β-extension de ${}_s\eta$ à $\widehat{J}^o(\beta,\Lambda)$ et soit $\widehat{\kappa}_M$ une β-extension de ${}_s\eta_M$ à $\widehat{J}^o(\beta,\Lambda^M)$ compatible avec $\widehat{\kappa}$. Soit ρ l'inflation à $\widehat{J}^o(\beta,\Lambda)$ d'une représentation irréductible de $\widehat{J}^o(\beta,\Lambda)/{}_sJ^1(\beta,\Lambda)$ et posons $\vartheta = \widehat{\kappa} \otimes \rho$. Posons $\widehat{J}^o_{\Lambda,\Lambda^M} = \widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}){}_sJ^1(\beta,\Lambda^M)$. Alors on peut considérer ρ comme une représentation de $\widehat{J}^o_{\Lambda,\Lambda^M}$ puisque $\widehat{J}^o_{\Lambda,\Lambda^M}/{}_sJ^1(\beta,\Lambda^M)$ est isomorphe à $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/{}_sP_1(\Lambda^M_{\mathfrak{o}_E})$ dont $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/{}_sP_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ est un quotient. Posons $\vartheta_M = \widehat{\kappa}_M|_{\widehat{J}^o_{\Lambda,\Lambda^M}} \otimes \rho$. La proposition suivante est similaire à [42, Proposition 7.1].

Proposition 4.20. *Nous avons un isomorphisme canonique d'algèbres*

$$\mathcal{H}(\widehat{G}, \widehat{J}^o(\beta,\Lambda), \vartheta) \simeq \mathcal{H}(\widehat{G}, \widehat{J}^o_{\Lambda,\Lambda^M}, \vartheta_M)$$

tel que si le support de $\phi \in \mathcal{H}(\widehat{G}, \widehat{J}^o(\beta,\Lambda), \vartheta)$ est $\widehat{J}^o(\beta,\Lambda)\widehat{x}\widehat{J}^o(\beta,\Lambda)$, pour $\widehat{x} \in \widehat{G}_\beta$, alors le support de la fonction correspondante $\phi_M \in \mathcal{H}(\widehat{G}, \widehat{J}^o_{\Lambda,\Lambda^M}, \vartheta_M)$ est $\widehat{J}^o_{\Lambda,\Lambda^M}\widehat{x}\widehat{J}^o_{\Lambda,\Lambda^M}$.

Démonstration. La démonstration de [42, Proposition 7.1] s'applique car elle s'appuie sur les deux propriétés suivantes :

- la proposition 3.15 ;
- et la propriété d'intersection simple [42, Lemme 2.6], soit ici :

$$t^{-1}(P_1(\Lambda))\widehat{x}t^{-1}(P_1(\Lambda)) \cap \widehat{G}_\beta = t^{-1}(P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}))\widehat{x}t^{-1}(P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})), \text{ pour } \widehat{x} \in \widehat{G}_\beta.$$

□

Considérons ρ comme une représentation irréductible de $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$. Alors l'argument de la démonstration de [42, Proposition 7.2] dans lequel on utilise l'irréductibilité de la restriction de $\widehat{\kappa}_M$ à $\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}){}_sJ^1(\beta,\Lambda^M)$ reste encore valide. Nous avons donc un énoncé analogue.

Proposition 4.21. *Il y a un isomorphisme d'algèbres*

$$\mathcal{H}(\widehat{J}(\beta,\Lambda^M), \widehat{J}^o_{\Lambda,\Lambda^M}, \vartheta_M) \simeq \mathcal{H}(\widehat{P}(\Lambda^M_{\mathfrak{o}_E}), \widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}), \rho)$$

tel que si le support de $\phi \in \mathcal{H}(\widehat{J}(\beta, \Lambda^M), \widehat{J}^o_{\Lambda,\Lambda^M}, \vartheta_M)$ est $\widehat{J}^o_{\Lambda,\Lambda^M}\widehat{x}\widehat{J}^o_{\Lambda,\Lambda^M}$, pour $\widehat{x} \in \widehat{P}(\Lambda^M_{\mathfrak{o}_E})$, alors le support de la fonction correspondante $\phi_\beta \in \mathcal{H}(\widehat{P}(\Lambda^M_{\mathfrak{o}_E}), \widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}), \rho)$ est $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\widehat{x}\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$.

Remarquer que l'argument de [42, Proposition 7.2] (après [13, Lemme 5.6.3]) fonctionne de manière générale. Nous avons donc un énoncé plus général qui est utile pour la suite.

Lemme 4.22. *Soit G un groupe profini. Soient H un sous-groupe fermé de G et K un sous-groupe ouvert de G tels que $G = HK$ et H normalise K. Soit H' un sous-groupe normal d'indice fini de H et soit $G' = H'K$. Soit ρ l'inflation d'une représentation irréductible du quotient $H/H' \simeq G/G'$ et soit κ une représentation irréductible de G telle que $\kappa|_K$ est irréductible. Alors nous avons un isomorphisme d'algèbres*

$$\mathcal{H}(G, G', \kappa|_{G'} \otimes \rho) \simeq \mathcal{H}(H, H', \rho)$$

qui préserve support de fonctions : si $\phi_H \in \mathcal{H}(H, H', \rho)$ a pour support $H'yH'$, pour $y \in H$, alors la fonction correspondante $\phi_G \in \mathcal{H}(G, G', \kappa|_{G'} \otimes \rho)$ a pour support $G'yG'$.

Comme dans le cas des groupes classiques, appliquant le lemme 4.17 pour $K = \widehat{J}^o(\beta, \Lambda)$, nous avons un isomorphisme d'algèbres qui préserve le support des fonctions

$$\mathcal{H}(\widehat{G}, \widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}}) \simeq \mathcal{H}(\widehat{G}, \widehat{J}^o(\beta, \Lambda), \vartheta).$$

Alors nous avons une injection d'algèbres analogue à l'injection [42, (7.3)].

Corollaire 4.23. *Nous avons une injection d'algèbres*

$$\mathcal{H}(\widehat{P}(\Lambda^M_{\mathfrak{o}_E}), \widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}), \rho) \hookrightarrow \mathcal{H}(\widehat{G}, \widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$$

telle que si le support de $\phi_\beta \in \mathcal{H}(\widehat{P}(\Lambda^M_{\mathfrak{o}_E}), \widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}), \rho)$ est $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\widehat{x}\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$, pour $\widehat{x} \in \widehat{P}(\Lambda^M_{\mathfrak{o}_E})$, alors le support de la fonction correspondante $\phi_{\widehat{P}} \in \mathcal{H}(\widehat{G}, \widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ est $\widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{x}\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$.

4.3.3 Des éléments de groupe de Weyl

Suivant [42, §6.2], nous cherchons les éléments correspondant à $s_{j,k}, s_j$ et s_j^{ϖ} pour $\widehat{G}$. Nous respectons donc les hypothèses et les notations de *loc. cit.* Alors nous avons une strate semi-simple autoduale gauche $[\Lambda, n, 0, \beta]$ avec la décomposition orthogonale associée $V = \perp_{i=1}^l V^i$ et une décomposition autoduale $V = \oplus_{j=-m}^m W^{(j)}$ subordonnée à la strate et telle que, pour tout $j \neq 0$, il existe un unique entier $i = i_j$ tel que $W^{(j)} \subseteq V^i$ et que $\mathfrak{a}_0(\Lambda^{(j)}) \cap B^{(j)}$ est un $\mathfrak{o}_{E_i}$-ordre maximal dans $B^{(j)}$. La dernière condition entraîne que, pour $j \neq 0$, il existe un unique entier $q_j = q_j(\Lambda)$ tel que

(i) $\Lambda(q_j) \cap W^{(j)} \supsetneq \Lambda(q_j + 1) \cap W^{(j)}$;

(ii) $-e_i/2 \leq q_j \leq e_i/2$, où $e_i = e(\Lambda^i|\mathfrak{o}_{E_i})$ est la $\mathfrak{o}_{E_i}$-période de la suite de réseaux Λ^i ;

(iii) $q_j > -e_i/2$ si $j > 0$ et $q_j < e_i/2$ si $j < 0$.

Quitte à renuméroter, nous pouvons supposer que $q_j \geq 0$ pour $j > 0$ et que, pour $0 < j < k \leq m$, soit $i_j < i_k$ soit $i_j = i_k$ et $q_j \leq q_k$ (voir *loc. cit.*). Remarquons de plus que $i_{-j} = i_j$ et $q_{-j} = -q_j$ pour tout $j \neq 0$.

Soit $\mathcal{B}^{(j)}$, pour $j \neq 0$, une $\mathfrak{o}_{E_i}$-base ordonnée de $W^{(j)}$ choisie comme dans *loc. cit.*, où $i = i_j$. C'est-à-dire, pour $j > 0$, $\mathcal{B}^{(j)} = \{v_{j,1}, \ldots, v_{j,d_j}\}$ est une $\mathfrak{o}_{E_i}$-base ordonnée pour le réseaux $\Lambda^{(j)}(0)$ et $\mathcal{B}^{(-j)} = \{v_{-j,1}, \ldots, v_{-j,d_j}\}$ est une $\mathfrak{o}_{E_i}$-base ordonnée pour le réseau $\Lambda^{(-j)}(1)$ vérifiant

$$h_i(v_{j,p}, v_{-j,q}) = \begin{cases} \varpi_i & \text{si } p = q, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où ϖ_i est une uniformisante fixée de E_i telle que $\overline{\varpi_i} = (-1)^{e(E_i/E_{i,0})-1}\varpi_i$. Pour $j, k \neq 0$ tels que $i_j = i_k = i$ et $\dim_{E_i} W^{(j)} = \dim_{E_i} W^{(k)}$, on note $I_{j,k}$ l'élément de B_i qui envoie la base ordonnée $\mathcal{B}^{(k)}$ sur la base ordonnée $\mathcal{B}^{(j)}$ et $\oplus_{k' \neq k} W^{(k')}$ sur 0.

Avec les éléments $I_{j,k}$, Shaun Stevens a défini dans *loc. cit.* des éléments $s_{j,k}$, s_j et s_j^{ϖ} de groupe de Weyl dans G_β^+. Précisément, pour $j, k > 0$ tels que $i_j = i_k = i$ et $\dim_{E_i} W^{(j)} = \dim_{E_i} W^{(k)}$, il pose

$$s_{j,k} = I_{j,k} + I_{k,j} + I_{-k,-j} + I_{-j,-k} + \sum_{t \neq \pm j, \pm k} I_{t,t}$$

et, pour tout $j > 0$, il pose

$$s_j = I_{-j,j} + (-1)^{e(E_i/E_{i,0})-1} I_{j,-j} + \sum_{t \neq \pm j} I_{t,t},$$
$$s_j^{\varpi} = \varpi_i^{-1} I_{-j,j} + \varpi_i I_{j,-j} + \sum_{t \neq \pm j} I_{t,t}.$$

Remarquons que $s_{j,k} \in G_\beta$ et que $s_j, s_j^{\varpi} \in G_\beta$ si et seulement si $\dim_F(W^{(j)})$ est paire. De plus, d'après [42, Lemme 6.7], pour $j, k > 0$ distincts tels que $i_j = i_k = i$ et $\dim_{E_i} W^{(j)} = \dim_{E_i} W^{(k)}$, on a

(i) $s_{j,k} \in P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ si et seulement si $q_j(\Lambda) = q_k(\Lambda)$;

(ii) $s_j \in P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ si et seulement si $q_j(\Lambda) = e_i/2$; $s_j^{\varpi} \in P^+(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ si et seulement si $q_j(\Lambda) = 0$.

Remarquons aussi que si $[\Lambda^M, n_M, 0, \beta]$ est une strate semi-simple autoduale gauche de même décomposition associée $V = \perp_{i=1}^l V^i$ telle que $\mathfrak{b}_0(\Lambda^M)$ contient $\mathfrak{b}_0(\Lambda)$ alors la décomposition autoduale $V = \oplus_{j=-m}^m W^{(j)}$ est aussi subordonnée à $[\Lambda^M, n_M, 0, \beta]$ et les éléments $s_{j,k}, s_j$ et s_j^{ϖ} sont les mêmes (voir [42, fin de la page 333]).

Pour relever les éléments $s_{j,k}, s_j$ et s_j^{ϖ}, nous devrons déterminer d'abord leur norme spinorielle (ces éléments ne sont pas toujours dans G donc on calcule ici des valeurs de l'homomorphisme sn sur G^+ comme dans le remarque 2.5).

Proposition 4.24. *Dans la situation au-dessus, pour tout $j > 0$, posons $i = i_j$ et $d_j = \dim_{E_i} W^{(j)}$. Alors*

(i) pour $k > 0$ tel que $i_k = i$ et $\dim_{E_i} W^{(k)} = d_j$,

$$\mathrm{sn}(s_{j,k}) = \begin{cases} (-1)^{d_j} \mod (F^\times)^2 & \textit{si } E_i = E_{i,0} = F, \\ 1 \mod (F^\times)^2 & \textit{sinon;} \end{cases}$$

(ii) si d_j est paire, $\mathrm{sn}(s_j) = \mathrm{sn}(s_j^{\varpi}) = 1 \mod (F^\times)^2$ *;*

(iii) si d_j impaire et $E_i/E_{i,0}$ ramifiée,

$$\mathrm{sn}(s_j) = 1 \mod (F^\times)^2 \text{ et } \mathrm{sn}(s_j^{\varpi}) = \mathrm{Norm}_{E_i/F}(\varpi_i) \mod (F^\times)^2;$$

(iv) si d_j impaire et $E_i/E_{i,0}$ non ramifiée,

$$\mathrm{sn}(s_j) = \mathrm{sn}(s_j^{\varpi}) = \mathrm{Norm}_{E_i/F}(\delta) \mod (F^\times)^2, \text{ où } \delta \in E_i^\times \text{ tel que } \overline{\delta} = -\delta;$$

(v) si d_j impaire et $E_i = E_{i,0} = F$,

$$\mathrm{sn}(s_j) = -2\varpi_F \mod (F^\times)^2 \text{ et } \mathrm{sn}(s_j^{\varpi}) = -2 \mod (F^\times)^2.$$

Corollaire 4.25. *Dans le cas (iv) ci-dessus, on modifie la définition de s_j et s_j^{ϖ} en les remplaçant respectivement par $\delta_j s_j$ et $\delta_j^{-1} s_j^{\varpi}$ où*

$$\delta_j = \delta I_{j,j} - \delta^{-1} I_{-j,-j} + \sum_{t \neq \pm j} I_{t,t}$$

avec $\delta \in E_i^\times$ tel que $\overline{\delta} = -\delta$ et $\nu_\Lambda(\delta) = 0$. Les nouveaux éléments s_j et s_j^{ϖ} ainsi définis sont de norme spinorielle 1.

Démonstration. Avec les hypothèses données, nous avons

$$\det{}_{E_i} s_{j,k} = 1, \ \det{}_{E_i} s_j = (-1)^{d_j} (-1)^{d_j(e(E_i/E_{i,0})-1)} \text{ et } \det{}_{E_i} s_j^{\varpi} = (-1)^{d_j}.$$

Alors toutes les affirmations avec $E_i/E_{i,0}$ quadratique sont obtenues en appliquant l'égalité 2.7 et la proposition 2.22.

Dans le cas $E_i = E_{i,0} = F$, appliquant la proposition 2.10, on obtient d'abord

$$\mathrm{sn}(s_{j,k}) = (-1)^{d_j} \mod (F^\times)^2.$$

Remarquons que, dans ce cas,

$$s_j = \prod_{k=1}^{d_j} s_{v_{j,k} - v_{-j,k}},$$

où $s_{v_{j,k} - v_{-j,k}}$ est la réflexion de V définie par le vecteur $v_{j,k} - v_{-j,k}$. Par définition de la norme spinoriellle, nous avons

$$\mathrm{sn}(s_j) = \prod_{k=1}^{d_j} q(v_{j,k} - v_{-j,k}) = (-2\varpi_F)^{d_j} \mod (F^\times)^2.$$

De plus, appliquant encore la proposition 2.10, nous avons $\mathrm{sn}(s_j s_j^{\varpi}) = \varpi_F^{d_j} \mod (F^\times)^2$ et donc $\mathrm{sn}(s_j^{\varpi}) = (-2)^{d_j} \mod (F^\times)^2$. La démonstration est complète. □

Nous pouvons maintenant relever les éléments $s_{j,k}, s_j$ et s_j^{ϖ}. Puisque leur norme spinorielle n'est pas toujours triviale, nous devrons les relever dans le groupe de Clifford Γ. Nous prenons une image inverse $\widehat{s_{j,k}}$ (respectivement $\widehat{s_j}, \widehat{s_j^{\varpi}}$) dans Γ par l'homomorphisme t_Γ de $s_{j,k}$ (respectivement s_j, s_j^{ϖ}) de manière que si $s_{j,k}$ (respectivement s_j, s_j^{ϖ}) appartient à $\mathrm{O}'(h)$ alors $\widehat{s_{j,k}}$ (respectivement $\widehat{s_j}, \widehat{s_j^{\varpi}}$) appartient à $\widehat{G}$.

4.3.4 Entrelacement

Poursuivons avec la situation de la section précédente et supposons de plus que $V = \oplus_{j=-m}^{m} W^{(j)}$ est *exactement subordonnée à* la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$ au sens de [42, Définition 6.5], c'est-à-dire, elle est proprement subordonnée à la strate et $\mathfrak{a}_0(\Lambda^{(0)}) \cap B^{(0)}$ est un $\mathfrak{o}_E$-ordre autodual maximal dans $B^{(0)}$ et, pour chaque $j \neq 0$, il existe un unique entier i tel que V^i contient $W^{(j)}$ et $\mathfrak{a}_0(\Lambda^{(j)}) \cap B^{(j)}$ est un $\mathfrak{o}_{E_i}$-ordre maximal dans $B^{(j)}$. Comme dans les sections précédentes, notons L le sous-groupe de Levi de G qui stabilise la décomposition et soit $P = LU$ un sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi L et de radical unipotent U. Notons aussi $\widehat{L} = t^{-1}(L \cap \mathrm{O}'(h)), \widehat{P} = \widehat{L}_s U$ les sous-groupes correspondants dans $\widehat{G}$.

Pour chaque $j, 0 < j \leq m$, la conjugaison par l'élément $\widehat{s_j}$ joue le rôle de l'involution σ_j sur L définie par s_j dans [42, §6.3]. Soit $\widehat{\kappa} = \kappa \circ t|_{\widehat{J}(\beta,\Lambda)}$ une β-extension standard i.e. relativement à $\mathfrak{M}_\Lambda$. Nous avons les objets $\widehat{J}_{\widehat{P}}, \widehat{\kappa}_{\widehat{P}}, \ldots$ comme dans les sections précédentes. Noter que κ est aussi une β-extension standard et que, si $i_j = i_k = i$ pour $j, k \neq 0$ et si $\dim_{E_i} W^{(j)} = \dim_{E_i} W^{(k)}$ alors $W^{(j)}$ et $W^{(k)}$ sont *compagnons* par rapport à $\mathfrak{M}_\Lambda$ au sens de [42, Définition 6.8].

Bien que l'intersection $\widehat{J}_{\widehat{P}} \cap \widehat{L}$ (ou $\widehat{J}^o_{\widehat{P}} \cap \widehat{L}$) n'ait pas de décomposition en produit direct, nous pouvons obtenir un résultat analogue à [42, Corollaire 6.10] car $\widehat{\kappa}_{\widehat{P}}$ factorise par κ_P.

Proposition 4.26. *Pour $0 < j, k \leq m$, les éléments $\widehat{s_j}$ et $\widehat{s_{j,k}}$ normalisent $\widehat{\kappa}_{\widehat{P}}|_{\widehat{J}^o_{\widehat{P}} \cap \widehat{L}}$.*

Démonstration. D'après [42], on a

$$J_P \cap L = J(\beta, \Lambda) \cap L \simeq J(\beta^{(0)}, \Lambda^{(0)}) \times \prod_{j=1}^{m} \widetilde{J}(\beta^{(j)}, \Lambda^{(j)})$$

et

$$\kappa_P|_{J_P \cap L} = \kappa^{(0)} \otimes \bigotimes_{j=1}^{m} \widetilde{\kappa}^{(j)},$$

où $\kappa^{(0)}$ est une représentation irréductible de $J(\beta^{(0)}, \Lambda^{(0)})$ et $\widetilde{\kappa}^{(j)}$ est une représentation irréductible de $\widetilde{J}(\beta^{(j)}, \Lambda^{(j)})$. De plus, d'après [42, Corollaire 6.10], pour $1 \leq j, k \leq m$, on a $\widetilde{\kappa}^{(j)} \circ \sigma_j \simeq \widetilde{\kappa}^{(j)}$ et le conjugué de $s_{j,k}$ induit un isomorphisme $\widetilde{\kappa}^{(j)} \simeq \widetilde{\kappa}^{(k)}$. Cela implique que les éléments $s_j, s_{j,k}$ normalisent $\kappa_P|_{J_P \cap L}$. De plus, ils normalisent aussi $\mathrm{O}'(h)$. Puisque $\widehat{\kappa}_{\widehat{P}}$ factorise par κ_P, les éléments $\widehat{s_j}, \widehat{s_{j,k}}$ normalisent $\widehat{\kappa}_{\widehat{P}}|_{\widehat{J}_{\widehat{P}} \cap \widehat{L}}$.

Rappelons que $\widehat{J}_{\widehat{P}} = (\widehat{J}(\beta, \Lambda) \cap \widehat{L})_s J^1_{\widehat{P}}$ et que $\widehat{J}(\beta, \Lambda) = (\widehat{J}(\beta, \Lambda) \cap \widehat{L})_s J^1(\beta, \Lambda)$. Par ailleurs, d'après [42, Lemme 6.9], les conjugaisons par s_j et par $s_{j,k}$ laissent stable $J_P \cap L$. En particulier, elles laissent stable son radical unipotent $J^1_P \cap L$. Cela implique que les éléments $\widehat{s_j}, \widehat{s_{j,k}}$ normalisent ${}_sJ^1_P \cap \widehat{L}$. L'isomorphisme induit sur le quotient $\widehat{J}_{\widehat{P}} \cap \widehat{L} / {}_sJ^1_P \cap \widehat{L}$ préserve la composante connexe et donc ils normalisent $\widehat{J}^o_{\widehat{P}} \cap \widehat{L}$. D'où la proposition. □

Suivons toujours les notations de [42]. Pour $1 \leq i \leq l$, soit $\mathcal{B}^{(i,0)}$ une E_i-base autoduale de $W^{(i,0)} = V^i \cap W^{(0)}$ scindant $\Lambda^{(i,0)} = \mathbf{1}^{(0)}\Lambda^i$ et posons $\mathcal{B}^i = \mathcal{B}^{(i,0)} \cup \bigcup_{j:i_j=i} \mathcal{B}^{(j)}$. Alors $\mathcal{B}^i$ est une E_i-base de V^i scindant Λ^i. Soit $\widetilde{T}_{E_i}$ le stabilisateur dans

$\widetilde{G}_{\beta_i} = \mathrm{Aut}_{E_i}(V^i)$ de la décomposition $V^i = \oplus_{v \in \mathcal{B}^i} E_i v$. Notons $T_E = \widetilde{T}_E \cap G_\beta$ avec $\widetilde{T}_E = \prod_{i=1}^{l} \widetilde{T}_{E_i}$. Soit N le normalisateur de T_E dans G_β. Alors $\widehat{N} = t^{-1}(N \cap \mathrm{O}'(h))$ est le normalisateur de $\widehat{T}_E = t^{-1}(T_E \cap \mathrm{O}'(h))$ dans $\widehat{G}_\beta$.

Proposition 4.27 (cf. [42, Proposition 6.14]). *Soit $\widehat{w}$ un élément de $t_\Gamma^{-1}(N)$. Si $\widehat{w}$ normalise $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap \widehat{L}$ alors il normalise $\widehat{\kappa}_{\widehat{P}}|_{\widehat{J}^o(\beta,\Lambda)\cap\widehat{L}}$ et entrelace $\widehat{\kappa}_{\widehat{P}}|_{\widehat{J}^o_{\widehat{P}}}$.*

Démonstration. Supposons que $\widehat{w}$ normalise $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap \widehat{L}$. Alors il normalise aussi le radical pro-p-unipotent ${}_sP_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap \widehat{L}$. Cela implique que $w = t_\Gamma(\widehat{w})$ normalise $P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap L$. En particulier, w permute les blocs de la décomposition $V = \oplus_{j=-m}^{m} W^{(j)}$. En multipliant w par des éléments s_j et des éléments $s_{j,k}$, on obtient w' qui est dans L et qui normalise $P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap L$. Alors, on trouve que w est un élément décrit dans la démonstration de [42, Proposition 6.14] à un élément de $P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap L \cap N$ près. Un élément de $P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap L \cap N$ normalise toujours κ_P car κ est une β-extension et ses images inverses dans Γ ont les propriétés voulues.

D'après *loc. cit.*, w a une composante zéro $w^{(0)} = \mathbf{1}^{(0)} w \mathbf{1}^{(0)}$ et une composante qui est un produit d'un élément diagonal en blocs z avec $z^{(j)} = \mathbf{1}^{(j)} z \mathbf{1}^{(j)}$, pour $1 \leq j \leq m$, un scalaire non nul dans E_{i_j} et d'un produit d'éléments s_j et d'éléments $s_{j,k}$. D'après la proposition 4.26, les éléments $\widehat{s_j}$ et les éléments $\widehat{s_{j,k}}$ normalisent $\widehat{\kappa}_{\widehat{P}}|_{\widehat{J}^o(\beta,\Lambda)\cap\widehat{L}}$. On va voir dans le lemme 4.30 que les relèvements dans Γ de l'élément diagonal en blocs z centralisent le groupe et donc normalisent la représentation.

La composante zéro $w^{(0)}$ normalise $P^o(\Lambda^{(0)}_{\mathfrak{o}_E})$. Cela implique qu'elle appartient à $P(\Lambda^{(0)}_{\mathfrak{o}_E})$ (à moins que le groupe considéré dans $W^{(0)}$ soit isomorphe à $\mathrm{SO}_F(1,1)$, c'est-à-dire, à $F^\times$, la propriété voulue étant alors immédiate). Alors les relèvements dans Γ de $w^{(0)}$ normalisent $\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap \widehat{L}$. Par l'argument de la proposition 4.26, ces relèvements normalisent $\widehat{\kappa}_{\widehat{P}}|_{\widehat{J}^o(\beta,\Lambda)\cap\widehat{L}}$. Finalement, on voit que $\widehat{w}$ normalise $\widehat{\kappa}_{\widehat{P}}|_{\widehat{J}^o(\beta,\Lambda)\cap\widehat{L}}$.

Avec l'unicité des sections homomorphes des pro-p-sous-groupes, l'argument de *loc. cit.* dans lequel on utilise la décomposition d'Iwahori de $\widehat{J}^o(\beta,\Lambda)$ montre que $\widehat{w}$ entrelace $\widehat{\kappa}_{\widehat{P}}|_{\widehat{J}^o_{\widehat{P}}}$. □

Posons $\widehat{N}_\Lambda = \{\widehat{w} \in \widehat{N} : \widehat{w} \text{ normalise } \widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap \widehat{L}\}$ et notons D_Λ le sous-groupe de G_β engendré par les éléments diagonaux par blocs z où $z^{(j)} = \mathbf{1}^{(j)} z \mathbf{1}^{(j)}$, pour $1 \leq j \leq m$, est un scalaire non nul dans E_{i_j}. Remarquons que $t(\widehat{w})|_{\oplus_{j\neq 0} W^{(j)}}$, avec $\widehat{w} \in \widehat{N}_\Lambda$, peut s'écrire comme un produit d'un élément $z \in D_\Lambda$ et d'une matrice de permutation par blocs.

Supposons toujours que $\widehat{\kappa}$ est une β-extension standard à $\widehat{J}^o(\beta,\Lambda)$. Posons $\vartheta_{\widehat{P}} = \widehat{\kappa}_{\widehat{P}} \otimes \rho$, où $\widehat{\kappa}_{\widehat{P}}$ est la représentation de $\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$ définie comme précédemment et ρ est l'inflation à $\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$ d'une représentation irréductible cuspidale du quotient $\widehat{J}^o_{\widehat{P}} / {}_sJ^1_{\widehat{P}}$. Comme [42, Proposition 6.15], nous avons

Proposition 4.28. $I_{\widehat{G}}(\vartheta_{\widehat{P}}) \subseteq \widehat{J}^o_{\widehat{P}} \widehat{N}_\Lambda \widehat{J}^o_{\widehat{P}}$.

Démonstration. C'est identique à la démonstration de [42, Proposition 6.15] (similaire à celle du théorème 3.21). Supposons $g \in \widehat{G}$ entrelace $\vartheta_{\widehat{P}}$. Nous pouvons supposer $g \in \widehat{G}_\beta$ puisque ρ est triviale sur ${}_sJ^1_{\widehat{P}}$ et donc $g \in I_{\widehat{G}}({}_s\eta_{\widehat{P}}) = {}_sJ^1_{\widehat{P}} \widehat{G}_\beta {}_sJ^1_{\widehat{P}}$.

On peut supposer de plus que g est un représentant distingué de double classe pour $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \setminus \widehat{G}_\beta / \widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ au sens de [26, §3.10] puisque $\widehat{G}_\beta \cap \widehat{J}^o_{\widehat{P}} = \widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ contient un sous-groupe d'Iwahori $\widehat{P}^o(\Lambda^m_{\mathfrak{o}_E})$ de $\widehat{G}_\beta$, où Λ^m est une suite autoduale de $\mathfrak{o}_E$-réseaux telle que $\mathfrak{b}_0(\Lambda^m)$ soit un $\mathfrak{o}_E$-ordre autodual minimal contenu dans $\mathfrak{b}_0(\Lambda)$.

L'argument de [13, Proposition 5.3.2] dans lequel on utilise les propositions 4.16 et 4.19 montre que g entrelace la restriction de ρ à ${}_sP^1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ qui est le radical pro-p-unipotent du sous-groupe d'Iwahori $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ de $\widehat{G}_\beta$. Cela implique $g \in \widehat{N}_\Lambda$, d'après [42, Proposition 1.1]. □

Posons $\widehat{N}_\Lambda(\rho) = \{g \in \widehat{N}_\Lambda : {}^g\rho \simeq \rho\}$. Alors par le même argument que [42, Corollaire 6.16], nous avons

Corollaire 4.29. $I_{\widehat{G}}(\vartheta_{\widehat{P}}) \subseteq \widehat{J}^o_{\widehat{P}} \widehat{N}_\Lambda(\rho) \widehat{J}^o_{\widehat{P}}$.

Le groupe D_Λ est central dans $L \cap G_\beta$. Nous allons voir que notre situation est analogue.

Lemme 4.30. *Le groupe $t_\Gamma^{-1}(D_\Lambda) \subset \Gamma$ est central dans $\widehat{G}_\beta \cap \widehat{L}$. En particulier, il normalise la représentation ρ.*

Démonstration. Pour tout $\widehat{d} \in t_\Gamma^{-1}(D_\Lambda)$ et pour tout $g \in \widehat{G}_\beta \cap \widehat{L}$, nous avons

$$[\widehat{d}, g] \in \widehat{G} \cap \ker(t_\Gamma) = \{\pm 1\}.$$

Par ailleurs, d'après [38, Théorème 3.14 (d)], le groupe $\widehat{G}_\beta \cap \widehat{L}$ est connexe en tant que groupe algébrique. De plus, comme $\widehat{G}_\beta \cap \widehat{L}$ et $t_\Gamma^{-1}(D_\Lambda)$ sont deux sous-groupes fermés de Γ^+, le groupe engendré par leurs commutateurs est connexe, d'après [36, Corollaire 2.2.8 (i)], et donc il est trivial. Cela implique que tout élément de $t_\Gamma^{-1}(D_\Lambda)$ centralise $\widehat{G}_\beta \cap \widehat{L}$. En particulier, $t_\Gamma^{-1}(D_\Lambda)$ normalise ρ. □

4.4 Types cuspidaux

4.4.1 Partie de niveau zéro

Par le théorème 4.13, nous avons montré que toute représentation irréductible supercuspidale de niveau positif de $\widehat{G}$ contient un caractère semi-simple gauche relevé ${}_s\theta \in {}_s\mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ pour une certaine strate semi-simple gauche $[\Lambda, n, 0, \beta]$ dans $\mathfrak{g}$.

Soit π une représentation lisse irréductible de $\widehat{G}$ et supposons qu'il existe une paire $([\Lambda, n, 0, \beta], {}_s\theta)$ comportant une strate semi-simple gauche $[\Lambda, n, 0, \beta]$ dans $\mathfrak{g}$ et un caractère semi-simple gauche relevé ${}_s\theta \in {}_s\mathcal{C}(\Lambda, 0, \beta)$ telle que la restriction de π à ${}_sH^1(\beta, \Lambda)$ contient ${}_s\theta$. Supposons de plus que, pour β fixé, nous avons choisi une paire pour laquelle le sous-groupe parahorique $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ est minimal parmi les telles paires.

Rappelons que le pro-p-sous-groupe ${}_sP_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ est le radical pro-p-unipotent de $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ et que l'on a une suite exacte

$$1 \to {}_sP_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \to \widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \to M \to 1,$$

où M est le groupe des points rationnels d'un groupe réductif connexe défini sur un corps fini (§1.3.4). Cette suite exacte induit la suite exacte suivante

$$1 \to {}_sJ^1(\beta,\Lambda) \to \widehat{J}^o(\beta,\Lambda) \to M \to 1.$$

Puisqu'il n'y a qu'une unique représentation irréductible ${}_s\eta$ de ${}_sJ^1 = {}_sJ^1(\beta,\Lambda)$ qui contient ${}_s\theta$, la restriction de π à ${}_sJ^1$ contient ${}_s\eta$ et donc π contient une représentation irréductible ϑ de $\widehat{J}^o = \widehat{J}^o(\beta,\Lambda)$ dont la restriction à ${}_sJ^1$ contient ${}_s\eta$. Comme ${}_s\eta$ se prolonge à $\widehat{J}^o$, la représentation ϑ est de la forme $\vartheta = \widehat{\kappa}\otimes\rho$, où $\widehat{\kappa}$ est une certaine β-extension standard de ${}_s\eta$ et ρ est l'inflation d'une certaine représentation irréductible $\overline{\rho}$ de M.

Lemme 4.31 (cf. [42, Lemme 7.4])**.** *Dans la situation au-dessus, la représentation $\overline{\rho}$ est cuspidale.*

Démonstration. Comme dans [42, Lemme 7.4], on va montrer ce lemme par l'absurde. Supposons, au contraire, que $\overline{\rho}$ n'est pas cuspidale. Alors il existe un sous-groupe parabolique propre $\mathcal{P}$ de M de radical unipotent $\mathcal{U}$ tel que la restriction de $\overline{\rho}$ à $\mathcal{U}$ contient le caractère trivial. Rappelons qu'il y a une bijection canonique entre l'ensemble des sous-groupes paraboliques de M et l'ensemble des sous-groupes parahoriques de $\widehat{G}_\beta$ qui sont contenus dans $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ (§1.3.4). Par cette bijection, il existe une suite autoduale de $\mathfrak{o}_E$-réseaux Λ' telle que $\widehat{P}^o(\Lambda'_{\mathfrak{o}_E})$ est un sous-groupe propre de $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ et son image sous l'homomorphisme $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \to M$ est $\mathcal{P}$. De plus, l'image de ${}_sP_1(\Lambda'_{\mathfrak{o}_E})$ sous cet homomorphisme est $\mathcal{U}$.

Par l'argument de [42, Lemme 2.8], on peut trouver une suite autoduale de $\mathfrak{o}_E$-réseaux Λ'' telle que $\widehat{P}^o(\Lambda''_{\mathfrak{o}_E}) = \widehat{P}^o(\Lambda'_{\mathfrak{o}_E})$ et $\mathfrak{a}_0(\Lambda'') \subseteq \mathfrak{a}_0(\Lambda)$. Il existe donc un entier n'' tel que $[\Lambda'', n'', 0, \beta]$ est une strate semi-simple gauche dans $\mathfrak{g}$. Posons ${}_s\theta'' = \tau_{\Lambda,\Lambda'',\beta}({}_s\theta)$ et soit ${}_s\eta''$ la représentation irréductible de ${}_sJ^1(\beta,\Lambda'')$ contenant ${}_s\theta''$. Puisque $\rho|_{{}_sP_1(\Lambda''_{\mathfrak{o}_E}){}_sJ^1}$ contient le caractère trivial, π contient $\widehat{\kappa}|_{{}_sP_1(\Lambda''_{\mathfrak{o}_E}){}_sJ^1}$. Par [42, Lemme 7.5], avec le fait que ${}_s\eta''$ et $\widehat{\kappa}$ se factorisent par t et que, par restriction, t induit des isomorphismes sur les pro-p sous-groupes, ${}_s\eta''$ et $\widehat{\kappa}|_{{}_sP_1(\Lambda''_{\mathfrak{o}_E}){}_sJ^1}$ induisent à ${}_sP_1(\Lambda''_{\mathfrak{o}_E})$ les représentations irréductibles équivalentes. Cela implique que π contient ${}_s\eta''$ et donc elle contient aussi ${}_s\theta''$. C'est contraire à la minimalité de $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$. □

4.4.2 Stratégie de la démonstration

Nous voulons montrer que, avec la paire $(\widehat{J}^o, \vartheta)$ au-dessus, nous pouvons obtenir des types cuspidaux contenus dans π. Nous utilisons la démonstration par l'absurde comme [42] : **Supposons dans toute la suite soit que le sous-groupe parahorique $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ n'est pas maximal dans $\widehat{G}_\beta$ soit que le centre de $\widehat{G}_\beta$ n'est pas compact**. Nous devons donc montrer que π n'est pas supercuspidale.

Soit $[\Lambda', n', 0, \beta]$ une autre strate semi-simple gauche dans $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{M}_{\Lambda'} = \mathfrak{M}_\Lambda$, $\widehat{P}^o(\Lambda'_{\mathfrak{o}_E}) = \widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ et $\mathfrak{b}_0(\Lambda') \subseteq \mathfrak{b}_0(\Lambda)$. Posons ${}_s\theta' = \tau_{\Lambda,\Lambda',\beta}({}_s\theta)$ et soit ${}_s\eta'$ l'unique représentation irréductible de ${}_sJ^1(\beta,\Lambda')$ contenant ${}_s\theta'$. Soit $\widehat{\kappa}'$ la β-extension standard de ${}_s\eta'$ compatible avec $\widehat{\kappa}$ et soit ρ' l'inflation à $\widehat{J}^o(\beta,\Lambda')$ d'une composante irréductible de la restriction de $\overline{\rho}$ à $\widehat{J}^o(\beta,\Lambda')/{}_sJ^1(\beta,\Lambda)$. Posons $\vartheta' = \widehat{\kappa}'\otimes\rho'$. Alors l'argument de [42, Lemme 7.7] montre que π contient ϑ'.

Nous pouvons donc supposer que pour la paire que nous avons choisie $\mathfrak{b}_0(\Lambda)$ est minimal parmi toutes les paires $([\Lambda', n', 0, \beta], {}_s\theta')$ telles que $\widehat{P}^o(\Lambda'_{\mathfrak{o}_E}) = \widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ et que π contienne ${}_s\theta'$. En particulier, $\mathfrak{b}_0(\Lambda)$ n'est pas un $\mathfrak{o}_E$-ordre autodual maximal dans B. Alors il existe une décomposition autoduale $V = \oplus_{j=-m}^{m} W^{(j)}$, avec $m \geq 1$, qui est exactement subordonnée à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$. Nous allons utiliser la numérotation et les notations comme précédemment, en particulier, π contient les représentations $\vartheta_{\widehat{P}}$ de $\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$, où $\widehat{P}$ est un sous-groupe parabolique de $\widehat{G}$ de facteur de Levi $\widehat{L}$ qui est le stabilisateur dans $\widehat{G}$ de la décomposition.

Pour montrer que π n'est pas supercuspidale, on utilise la méthode de "*paire couvrante*" de Bushnell-Kutzko, c'est-à-dire, on fabrique une paire couvrante et puis un module de Jacquet non nul. Suivant [42, §7.2], nous voulons montrer que $(\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$, pour un certain sous-groupe parabolique de $\widehat{G}$ de facteur de Levi $\widehat{L}$, est une paire couvrante voulue. Par définition de $\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$ et de $\vartheta_{\widehat{P}}$, notre paire $(\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ est une paire décomposée. Il nous reste donc à trouver un sous-groupe de Levi $\widehat{L}^M$ de $\widehat{G}$ contenant $\widehat{L}$ et un sous-groupe parabolique $\widehat{P}^M$ de facteur de Levi $\widehat{L}^M$ tels qu'il existe un élément du centre de $\widehat{L}^M$ qui est portement positif relativement à $(\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \widehat{P}^M)$ et qui supporte un élément inversible de l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(\widehat{G}, \widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$. Nous avons donc besoin de déterminer l'entrelacement de $\vartheta_{\widehat{P}}$ dans $\widehat{G}$. Avec le corollaire 4.29 et le lemme 4.30, il nous reste à étudier l'entrelacement de ρ dans le sous-groupe engendré par les éléments $\widehat{s_j}$ et $\widehat{s_{j,k}}$.

Contrairement au cas des groupes classiques, le quotient $\widehat{P}^o(\lambda_{\mathfrak{o}_E})/{}_sP_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \simeq \widehat{J}^o(\beta, \Lambda)/{}_sJ^1(\beta, \Lambda)$ n'a pas de décomposition en produit direct et donc la représentation $\overline{\rho}$ n'a pas de décomposition en produit tensoriel. Cela entraîne une difficulté suplémentaire : il peut arriver qu'il existe des éléments $\widehat{s_j}$ qui ne normalisent pas ρ mais leur produit normalise ρ. Nous allons voir cette situation dans l'exemple de la sous section qui suit.

Nous voulions suivre la stratégie de [42, §7.2]. Cependant, à cause de la difficulté présentée au-dessus, nous avons des situations plus compliquées et dans certains cas, nous n'arrivons pas à résoudre le problème. Nous présentons dans la suite plusieurs cas. D'abord, nous allons considérer dans cette sous-section le cas dont l'hypothèse est la même que dans [42, §7.2.1] pour préciser un des problèmes qui se pose.

Supposons donc qu'il existe un indice $k > 0$ tel que $\rho^{\widehat{s_k}} \not\simeq \rho$. Posons

$$J = \{k\} \cup \{0 < j \leq m : \rho^{\widehat{s_{j,k}}} \simeq \rho\} \cup \{-j : 0 < j \leq m \text{ et } \rho^{\widehat{s_j}\widehat{s_{j,k}}(\widehat{s_j})^{-1}} \simeq \rho\}.$$

Cet ensemble est semblable à l'ensemble J de *loc. cit.* Pour $1 \leq j \leq m$, si $j \in J$ ou $-j \in J$, alors $\rho^{\widehat{s_j}} \not\simeq \rho$. Cependant, contrairement au cas des groupes classiques, il peut arriver qu'il existe une indice j telle que $\pm j \in J$. En effet, nous allons voir, dans l'exemple de la sous section qui suit, qu'il peut arriver que $\rho^{\widehat{s_k}} \not\simeq \rho, \rho^{\widehat{s_{j,k}}} \simeq \rho, \rho^{\widehat{s_k}\widehat{s_j}} \simeq \rho$. Noter que $s_j s_{j,k} = s_{j,k} s_k$ et donc $\widehat{s_j}\widehat{s_{j,k}}$ et $\widehat{s_{j,k}}\widehat{s_k}$ ne diffèrent que d'un scalaire. De plus, s_j et s_j^{-1} ne diffèrent que d'un élément de D_Λ, donc $\widehat{s_j}$ et $\widehat{s_j}^{-1}$ ne diffèrent que d'un élément de $t_\Gamma(D_\Lambda)$ qui normalise ρ. Dans une telle situation :

$$\rho^{\widehat{s_j}\widehat{s_{j,k}}(\widehat{s_j})^{-1}} \simeq \rho^{\widehat{s_j}\widehat{s_{j,k}}\widehat{s_j}} = \rho^{\widehat{s_{j,k}}\widehat{s_k}\widehat{s_j}} \simeq \rho^{\widehat{s_k}\widehat{s_j}} \simeq \rho.$$

On distingue deux cas :

Cas 1 : on a $-j \notin J$ pour tout $j \in J$. Dans ce cas, nous n'avons pas réussi à trouver un sous-groupe de Levi voulu. Nous avions espéré suivre *loc. cit.* Cependant, cet argument ne fonctionne pas. En effet, posons $-J = \{-j : j \in J\}$, $J_0 = \{-m \leq j \leq m : \pm j \notin J\}$ et

$$Y_1 = \bigoplus_{j \in J} W^{(j)}, \quad Y_0 = \bigoplus_{j \in J_0} W^{(j)}, \quad Y_{-1} = \bigoplus_{j \in -J} W^{(j)}.$$

Alors $V = Y_1 \oplus Y_0 \oplus Y_{-1}$ est une décomposition proprement subordonnée à la strate. Soit $\widehat{L}^M$ le sous-groupe de Levi de $\widehat{G}$ qui stabilise cette décomposition. Il pourrait arriver qu'il existe un produit d'éléments $\widehat{s_j}, \widehat{s_j^\varpi}, \ldots$ qui normalise ρ mais n'appartient pas à $\widehat{L}^M$. Nous ne savons pas si $I_{\widehat{G}}(\vartheta_{\widehat{P}})$ est contenu dans $\widehat{J}^o_{\widehat{P}} \widehat{L}^M \widehat{J}^o_{\widehat{P}}$.

Cas 2 : il existe un indice $j > 0$ tel que $\pm j \in J$. Avec les calculs au-dessus, on voit que cette condition implique que le produit $\widehat{s_k}\widehat{s_j}$ normalise la représentation ρ. Remarquons que la norme spinorielle de $s_k s_j$ (et de $s_k^\varpi s_j^\varpi$) est triviale. Prenons $\widehat{s_k s_j}$ (respectivement $\widehat{s_k^\varpi s_j^\varpi}$) une image inverse dans $\widehat{G}$ de $s_k s_j$ (respectivement $s_k^\varpi s_j^\varpi$). Alors $\widehat{s_k s_j}$ et $\widehat{s_k^\varpi s_j^\varpi}$ normalisent aussi ρ. Suivant [42, cas (ii), page 350], nous pouvons fabriquer une paire couvrante voulue.

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer $j < k$ (donc $q_j < q_k$ par notre numérotation). Pour simplifier, quitte à renuméroter, nous pouvons supposer que $k = m$ et $j = m - 1$. Il faut faire attention que la convention antérieure de numérotation peut n'être plus respectée, cependant, nous avons toujours $q_{m-1} < q_m$.

Notons $i = i_m$ et, pour $q = 0, 1$, $\mathfrak{M}^i_q$ la suite autoduale de $\mathfrak{o}_{E_i}$-réseaux dans V^i définie par

$$\mathfrak{M}^i_0(2k + r) = \begin{cases} \varpi_i^k \Lambda^i(1 - e_i/2) \text{ pour } r = 0, \\ \varpi_i^k \Lambda^i(e_i/2) \text{ pour } r = 1 \end{cases}$$

et

$$\mathfrak{M}^i_1(2k + r) = \begin{cases} \varpi_F^k \Lambda^1(1 - q_{m-1}) \text{ pour } r = 0, \\ \varpi_F^k \Lambda^1(q_{m-1}) \text{ pour } r = 1, \end{cases}$$

Alors $\mathfrak{b}_0(\mathfrak{M}^i_q)$, pour $q = 0, 1$, sont deux $\mathfrak{o}_{E_i}$-ordre autoduaux maximaux contenant $\mathfrak{b}_0(\Lambda^i)$ et, si on pose $\mathfrak{M}_q = \mathfrak{M}^i_q \oplus \bigoplus_{k \neq i} \Lambda^k$, alors $q_{m-1}(\mathfrak{M}^i_0) = q_m(\mathfrak{M}^i_0) = 0$ et $q_{m-1}(\mathfrak{M}^i_1) = q_m(\mathfrak{M}^i_1) = e(\mathfrak{M}^i_1|\mathfrak{o}_{E_i})/2$ puisque $q_{m-1}(\Lambda^i) < q_m(\Lambda^i) < e(\Lambda^i|\mathfrak{o}_{E_i})/2$ et, d'après [42, fin de §6.2], $q_{m-1}(\mathfrak{M}^i_1)$ et $q_m(\mathfrak{M}^i_1)$ appartiennent à $\{0, e(\mathfrak{M}^i_1|\mathfrak{o}_{E_i})/2\}$. D'après [42, Lemme 6.7], cela entraîne $s_m, s_{m-1} \in P^+(\mathfrak{M}_1)$ et $s^\varpi_m, s^\varpi_{m-1} \in P^+(\mathfrak{M}_0)$. Ainsi nous avons $s_m s_{m-1} \in P(\mathfrak{M}_1)$ et $s^\varpi_m s^\varpi_{m-1} \in P(\mathfrak{M}_0)$.

Soit $\widehat{P}$ le stabilisateur dans $\widehat{G}$ du drapeau

$$\{0\} \subseteq W^{(-m)} \subseteq \cdots \subseteq \bigoplus_{j=-m}^{k} W^{(j)} \subseteq \cdots \subseteq \bigoplus_{j=-m}^{m} = V.$$

C'est un sous-groupe parabolique de $\widehat{G}$ de facteur de Levi $\widehat{L}$. Notons ${}_sU$ le radical unipotent de $\widehat{P}$ et ${}_sU^-$ le radical unipotent de l'opposé de $\widehat{P}$ relativement à $\widehat{L}$. Remarquons que $U = t({}_sU)$ et $U^- = t({}_sU^-)$ sont respectivement le radical unipotent du stabilisateur P dans G du drapeau et de son opposé relativement à L.

Comme [42, cas (ii), page 350], les analogues de [42, Lemme 7.11] et [42, Corollaire 7.12] restent vrais si on remplace s_m et s_m^ϖ par $s_m s_{m-1}$ et $s_m^\varpi s_{m-1}^\varpi$. Cela se transporte par t et par les sections homomorphes uniques de U et de U^-. Nous avons donc

Lemme 4.32. *$\widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{s_m s_{m-1}}\widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{s_m^\varpi s_{m-1}^\varpi}\widehat{J}^o_{\widehat{P}} = \widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{\zeta}\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$, avec $\widehat{\zeta} = \widehat{s_m s_{m-1}}\widehat{s_m^\varpi s_{m-1}^\varpi}$, et, pour $k \geq 0$, nous avons*

(i) $\widehat{\zeta}^k(\widehat{J}^o_{\widehat{P}} \cap {}_sU)\widehat{\zeta}^{-k} \subseteq \widehat{J}^o_{\widehat{P}} \cap {}_sU$;

(i) $\widehat{\zeta}^k(\widehat{J}^o_{\widehat{P}} \cap {}_sU^-)\widehat{\zeta}^{-k} \subseteq \widehat{J}^o_{\widehat{P}} \cap {}_sU^-$;

(i) $\widehat{\zeta}^k(\widehat{J}^o_{\widehat{P}} \cap \widehat{L})\widehat{\zeta}^{-k} \subseteq \widehat{J}^o_{\widehat{P}} \cap \widehat{L}$.

En particulier, pour $k_1, k_2 \geq 0$, $\widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{\zeta}^{k_1}\widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{\zeta}^{k_2}\widehat{J}^o_{\widehat{P}} = \widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{\zeta}^{k_1+k_2}\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$.

Nous pouvons maintenant suivre la construction de [42, §7.2.2, page 349]. Pour $q = 0, 1$, nous prenons une β-extension $\widehat{\kappa}_q$ de ${}_s\eta$ à $\widehat{J}^o(\beta, \Lambda)$ compatible avec une certaine β-extension standard de $\widehat{J}^o(\beta, \mathfrak{M}_q)$. Analogue à [42, Corollaire 6.13], nous avons $\widehat{\kappa}_q \simeq \widehat{\kappa}\otimes\chi_q$, où χ_q est un caractère normalisé par tous les éléments $\widehat{s_j}$, $1 \leq j \leq m$. En posant $\rho_q = \rho \otimes \chi_q^{-1}$, nous avons $\vartheta = \widehat{\kappa}_q \otimes \rho_q$. L'argument de [42, §7.2.2, page 349] dans lequel on utilise [26, Théorème 7.12] et l'injection d'algèbres du corollaire 4.23 nous donne deux éléments inversibles $T_{\widehat{s_m s_{m-1}}}$ et $T_{\widehat{s_m^\varpi s_{m-1}^\varpi}}$ de $\mathcal{H}(\widehat{G}, \widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ qui sont de support $\widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{s_m s_{m-1}}\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$ et $\widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{s_m^\varpi s_{m-1}^\varpi}\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$, respectivement. Avec le lemme 4.32, $S = (T_{\widehat{s_m s_{m-1}}} * T_{\widehat{s_m^\varpi s_{m-1}^\varpi}})^{e(E_i/F)}$, où $e(E_i/F)$ est l'indice de ramification de E_i sur F, est un élément inversible de $\mathcal{H}(\widehat{G}, \widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ de support $\widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{\zeta}'\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$, avec $\widehat{\zeta}' = \widehat{\zeta}^{e(E_i/F)}$.

Posons maintenant

$$Y_1 = W^{(m)} \oplus W^{(m-1)}, Y_0 = \bigoplus_{j \neq \pm m, \pm(m-1)} W^{(j)} \text{ et } Y_{-1} = W^{(-m)} \oplus W^{(1-m)}.$$

Alors la décomposition autoduale $V = Y_1 \oplus Y_0 \oplus Y_{-1}$ est proprement subordonnée à la strate $[\Lambda, n, 0, \beta]$. Notons $\widehat{L}^M$ le stabilisateur dans $\widehat{G}$ de cette décomposition. Soit $\widehat{P}^M$ un sous-groupe parabolique de $\widehat{G}$ de facteur de Levi $\widehat{L}^M$ et contenant $\widehat{P}$. Alors nous avons un énoncé similaire à [42, Proposition 7.13] :

Proposition 4.33. *$(\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ est une paire couvrante de $(\widehat{J}^o_{\widehat{P}} \cap \widehat{L}^M, \vartheta_{\widehat{P}}|_{\widehat{J}^o_{\widehat{P}} \cap \widehat{L}^M})$ relativement à $(\widehat{P}^M, \widehat{J}^o_{\widehat{P}})$. En particulier, la représentation π n'est pas supercuspidale.*

Démonstration. Avec le lemme 4.5 et le lemme 4.32, cette démonstration est totalement identique à celle de [42, Proposition 7.13]. □

4.4.3 Un exemple

Considérons le cas où $\widehat{G} = \widehat{G}_\beta = \mathrm{Spin}_F(2, 2)$ et donc $G = G_\beta = \mathrm{SO}_F(2, 2)$. Revenons utiliser les calculs et les notations de l'exemple 2.1.4. En particulier, nous avons un tore déployé maximal $\widehat{T}$ avec un paramétrage :

$$F^\times \times F^\times \ni (a, b) \mapsto \psi(a)\varphi_2(b) \in \widehat{T}.$$

Supposons de plus que $V = Fv_1 \oplus Fv_2 \oplus Fv_2^- \oplus Fv_1^-$ est la décomposition exactement subordonnée à la strate. Noter que $\widehat{T}$ est le stabilisateur dans $\widehat{G}$ de cette décomposition.

Soient $\widehat{s_1}$ et $\widehat{s_2}$ respectivement une image inverse dans Γ de

$$s_1 = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \text{ et } s_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons, par exemple, prendre $\widehat{s_1} = (v_1 - v_1^-)$ et $\widehat{s_2} = (v_2 - v_2^-)$. Remarquons que $\widehat{s_1}$ et $\widehat{s_2}$ ne sont pas dans $\widehat{G}$ mais la conjugaison par ces éléments ne dépend pas des relèvements choisis. Par des calculs simples, nous vérifions que, pour tout $a, b \in F^\times$, nous avons

(e.1) $\widehat{s_1}\psi(a)\widehat{s_1}^{-1} = \psi_1(a^{-1})\psi_2(a)$; $\psi_2(a) = a\psi_2(a^{-1})\varphi_2(a)$ et donc

$$\widehat{s_1}\psi(a)\widehat{s_1}^{-1} = \psi(a^{-1})\varphi_2(a);$$

(e.2) $\widehat{s_2}\psi(a)\widehat{s_2}^{-1} = \psi_1(a)\psi_2(a^{-1})$; $\psi_1(a) = a\varphi_1(a)\psi_1(a^{-1})$ et donc

$$\widehat{s_2}\psi(a)\widehat{s_2}^{-1} = \varphi_1(a)\psi(a^{-1});$$

(e.3) $\psi(a)\varphi_2(b) = \psi(ab^2)\varphi_1(b^{-1})$.

Soit $\widehat{s_{1,2}}$ une image inverse dans Γ^+ de

$$s_{1,2} = \begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}.$$

Par exemple, nous pouvons prendre

$$\widehat{s_{1,2}} = \left[(v_1 + v_1^-) - (v_2 + v_2^-)\right]\left[(v_1 - v_1^-) - (v_2 - v_2^-)\right].$$

Nous pouvons vérifier que, pour tout $a, b \in F^\times$,

(e.4) $\widehat{s_{1,2}}\varphi_2(b)\widehat{s_{1,2}}^{-1} = \varphi_1(b)$;

(e.5) $\widehat{s_{1,2}}\psi_1(a)\widehat{s_{1,2}}^{-1} = \psi_2(a); \widehat{s_{1,2}}\psi_2(a)\widehat{s_{1,2}}^{-1} = \psi_1(a)$ et donc

$$\widehat{s_{1,2}}\psi(a)\widehat{s_{1,2}}^{-1} = \psi(a).$$

Soit ρ un caractère de $\widehat{T}$. Alors ρ peut s'écrire

$$\rho(\psi(a)\varphi_2(b)) = \xi(a)\chi(b), \text{ pour } a, b \in F^\times.$$

Avec les calculs au-dessus, nous pouvons voir que

(e.6) $\rho^{\widehat{s_1}}(\psi(a)\varphi_2(b)) = (\xi^{-1}\chi)(a)\chi(b)$, pour tout $a, b \in F^\times$, et donc

$$\rho^{\widehat{s_1}} = \rho \Leftrightarrow \chi = \xi^2;$$

(e.7) $\rho^{\widehat{s_2}}(\psi(a)\varphi_2(b)) = (\xi\chi^{-1})(a)\chi^{-1}(b)$, pour tout $a, b \in F^\times$, et donc

$$\rho^{\widehat{s_2}} = \rho \Leftrightarrow \chi = 1;$$

(e.8) $\rho^{\widehat{s_{1,2}}}(\psi(a)\varphi_2(b)) = \xi(ab^2)\chi^{-1}(b)$, pour tout $a, b \in F^\times$, et donc

$$\rho^{\widehat{s_{1,2}}} = \rho \Leftrightarrow \xi^2 = \chi^2;$$

(e.9) $\rho^{\widehat{s_1}\widehat{s_2}}(\psi(a)\varphi_2(b)) = \xi^{-1}(a)\chi^{-1}(b)$, pour tout $a, b \in F^\times$, et donc

$$\rho^{\widehat{s_1}\widehat{s_2}} = \rho \Leftrightarrow \xi^2 = \chi^2 = 1.$$

On voit très bien dans cet exemple que même si $\widehat{s_1}$ et $\widehat{s_2}$ ne normalisent pas ρ, leur produit $\widehat{s_1}\widehat{s_2}$ peut normaliser ρ.

4.4.4 Les cas semblables aux cas des groupes classiques

Dans cette sous section, nous étudions des cas qui sont semblables à des cas pour les groupes classiques.

Cas 1 : Supposons que le centre de $\widehat{G}_\beta$ n'est pas compact. Alors, nous avons $G_{\beta_1} = \mathrm{SO}_F(1,1)$ et donc $G_\beta \subseteq L$ (voir [25, §3.3]). Cela implique $\widehat{G}_\beta \subseteq \widehat{L}$. Alors le corollaire 4.29 implique $I_{\widehat{G}}(\vartheta_{\widehat{P}}) \subseteq \widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{L}\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$. Appliquant [14, Théorème 7.2], nous voyons que $(\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ est une paire couvrante de $(\widehat{J}^o_{\widehat{P}} \cap \widehat{L}, \vartheta_{\widehat{P}})|_{\widehat{J}^o_{\widehat{P}}\cap\widehat{L}})$ relativement à $(\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \widehat{P})$. En particulier, la représentation π n'est pas supercuspidale, d'après [14, Théorème 7.9].

Cas 2 : Supposons qu'il existe un indice $1 \leq j \leq m$ tel que $\widehat{s_j}$ normalise ρ et que les éléments $\widehat{s_j}$ et $\widehat{s_j^\varpi}$ appartiennent à $\widehat{G}$. Pour cette situation, nous pouvons appliquer la construction de [42, page 349]. Nous renvoyons au cas 2.1 de la sous section 4.4.5 ci-dessous pour les détails tout à fait similaires. En particulier, nous pouvons montrer que π n'est pas supercuspidale.

Cas 3 : Supposons que, pour tout $1 \leq j \leq m$, $E_{i_j} = F$, la dimension $d_j = \dim_F(W^{(j)})$ est impaire et $\widehat{s_j}$ normalise ρ.

Si de plus on a $m \geq 2$ alors en remarquant que $s_m s_{m-1}$ et $s_m^\varpi s_{m-1}^\varpi$ sont de norme spinorielle 1, on peut utiliser la construction du cas 2 de la sous section 4.4.2. En particulier, on peut montrer que π n'est pas supercuspidale.

Si $m = 1$, nous n'avons pas réussi à montrer que $(\widehat{P}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ est une paire couvrante.

4.4.5 Cas ramifié

Supposons qu'il existe un indice $1 \leq k \leq m$ tel que $E_i/E_{i,0}$, où $i = i_k$, est une extension quadratique ramifiée.

Proposition 4.34. *Avec cette hypothèse, $(\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ est une paire couvrante et, en particulier, la représentation π n'est pas supercuspidale.*

D'après [42], on a

$$P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap L \simeq P(\Lambda^{(0)}_{\mathfrak{o}_E}) \times \prod_{j=1}^{m} \widetilde{P}(\Lambda^{(j)}_{\mathfrak{o}_E}).$$

Posons

$$\widehat{P}(\bigoplus_{j\neq\pm k} \Lambda^{(j)}_{\mathfrak{o}_E}) = t^{-1}(P(\Lambda^{(0)}_{\mathfrak{o}_E}) \times \prod_{j\neq k} \widetilde{P}(\Lambda^{(j)}_{\mathfrak{o}_E})).$$

Proposition 4.35. $\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap \widehat{L} \simeq \widetilde{P}(\Lambda^{(k)}_{\mathfrak{o}_E}) \times \widehat{P}(\bigoplus_{j\neq\pm k} \Lambda^{(j)}_{\mathfrak{o}_E})$.

Démonstration. Notons $d = d_k = \dim_{E_i} W^{(k)}$. Remarquons que, comme la décomposition est exactement subordonnée à la strate, $\widetilde{P}(\Lambda^{(k)}_{\mathfrak{o}_E})$ est un sous-groupe ouvert compact maximal de $\mathrm{Aut}_{E_i}(W^{(k)}) \simeq \mathrm{GL}_d(E_i)$ et donc $\widetilde{P}(\Lambda^{(k)}_{\mathfrak{o}_E}) \simeq \mathrm{GL}_d(\mathfrak{o}_{E_i})$. De plus,

$\mathrm{GL}_d(\mathfrak{o}_{E_i})$ se plonge dans $P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap L$ par l'injection

$$\iota : g \mapsto \iota(g) = \begin{pmatrix} g & & \\ & I & \\ & & \overline{g}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Nous avons $\mathrm{sn}(\iota(g)) = \mathrm{Norm}_{E_i/F}(\det_{E_i}(g)) \mod (F^\times)^2$. Par ailleurs, puisque $E_i/E_{i,0}$ est ramifiée, nous avons $\det_{E_i}(g) \in \mathfrak{o}_{E_i}^\times = \mathfrak{o}_{E_{i,0}}^\times(1+\mathfrak{p}_{E_i})$ pour tout $g \in \mathrm{GL}_d(\mathfrak{o}_{E_i})$. Alors $\mathrm{sn}(\iota(g)) = 1 \mod (F^\times)^2$ pour tout $g \in \mathrm{GL}_d(\mathfrak{o}_{E_i})$. Autrement dit,

$$\iota(\mathrm{GL}_d(\mathfrak{o}_{E_i})) \subset \mathrm{O}'(h).$$

Maintenant il suffit de montrer qu'il existe une section homomorphe de $\iota(\mathrm{GL}_d(\mathfrak{o}_{E_i}))$ dans $\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap \widehat{L}$. Nous avons

$$\mathrm{GL}_d(\mathfrak{o}_{E_i}) = T_{E_i} \ltimes \mathrm{SL}_d(\mathfrak{o}_{E_i}),$$

où T_{E_i} est le sous-groupe de $\mathrm{GL}_d(\mathfrak{o}_{E_i})$ défini par

$$T_{E_i} = \left\{ \begin{pmatrix} x & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix} : x \in \mathfrak{o}_{E_i}^\times \right\}.$$

D'abord, nous allons voir qu'il existe une unique section homomorphe s au-dessus de $\iota(\mathrm{SL}_d(\mathfrak{o}_{E_i}))$. En effet, sur une clôture algébrique $\overline{F}$ de F, nous avons des groupes algébriques $\widehat{\mathbf{G}}$, $\mathbf{G}$ et une suite exacte (voir la section 2.1.1) :

$$1 \to \{\pm 1\} \to \widehat{\mathbf{G}} \xrightarrow{\mathbf{t}} \mathbf{G} \to 1.$$

Le groupe de Levi L est le groupe des F-points du groupe

$$\mathbf{L} = \mathbf{SO}_{\overline{F}}(W^{(0)} \otimes_F \overline{F}) \times \prod_{j=1}^{m} \mathrm{GL}_{\overline{F}}(W^{(j)} \otimes_F \overline{F}).$$

En tant que groupe algébrique, $\mathrm{SL}_{\overline{F}}(W^{(k)} \otimes_F \overline{F})$ est simplement connexe. Il existe donc une unique section homomorphe de $\iota(\mathrm{SL}_{\overline{F}}(W^{(k)} \otimes_F \overline{F}))$ dans $\widehat{\mathbf{L}} = \mathbf{t}^{-1}(\mathbf{L}) \subset \widehat{\mathbf{G}}$. Revenons aux groupes des F-points, il existe une section homomorphe de $\iota(\mathrm{SL}_F(W^{(k)}))$ dans $\widehat{L}$. De plus, $\mathrm{SL}_F(W^{(k)})$ est engendré par ses sous-groupes pro-p unipotent, donc cette section est unique. Cela implique l'existence d'une section homomorphe s de $\iota(\mathrm{SL}_d(\mathfrak{o}_{E_i}))$ dans $\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap \widehat{L}$. Pour montrer l'unicité de s, on suppose que s et s' sont deux sections homomorphes de $\iota(\mathrm{SL}_d(\mathfrak{o}_{E_i}))$. On considère l'application

$$\tau : \mathrm{SL}_d(\mathfrak{o}_{E_i}) \to \widehat{G}, x \mapsto s(\iota(x))s'(\iota(x))^{-1}.$$

Il est facile de voir que τ est un homomorphisme d'image $\{\pm 1\}$. Noter que s et s' coïncident (donc τ est trivial) sur le pro-p radical unipotent de $\iota(\mathrm{SL}_d(\mathfrak{o}_{E_i}))$. Passer au quotient, nous avons un homomorphisme

$$\overline{\tau} : \mathrm{SL}_d(k_{E_i}) \to \{\pm 1\}$$

qui est trivial sur les transvections et donc trivial. Alors τ est trivial et donc s et s' coïncident.

Lemme 4.36. *Il existe une section homomorphe ψ au-dessus de $\iota(T_{E_i})$.*

Démonstration. Sans perte de généralité, nous allons écrire comme $d = 1$ pour simplifier les notations. On peut aussi oublier les blocs $j \neq \pm k$. Alors

$$T_{E_i} = \mathfrak{o}_{E_i}^{\times} = \mu_{q_{E_i}-1}(E_i)(1 + \mathfrak{p}_{E_i}),$$

où $q_{E_i} = |k_{E_i}|$ est le cardinal de k_{E_i} et $\mu_{q_{E_i}-1}(E_i)$ est le groupe des racines $(q_{E_i}-1)^{\text{ième}}$ de l'unité de E_i. Comme $1 + \mathfrak{p}_{E_i}$ est un pro-p-groupe, il existe une unique section homomorphe au-dessus de $\iota(1+\mathfrak{p}_{E_i})$. Alors il suffit de montrer qu'il existe une section homomorphe sur $\iota(\mu_{q_{E_i}-1}(E_i))$. Puisque $E_i/E_{i,0}$ est ramifiée, nous pouvons écrire

$$W^{(k)} = E_i v = E_{i,0} v \oplus E_{i,0}\varpi_{E_i} v \ \text{ et } \ W^{(-k)} = E_i v^- = E_{i,0} v^- \oplus E_{i,0}\varpi_{E_i} v^-,$$

où v, v^- sont deux vecteurs des bases choisis pour définir les éléments de groupe de Weyl $s_k, s_k^{\varpi}, \dots$. Posons

$$v_1 = v;\ v_2 = \varpi_{E_i} v;\ v_{-2} = \frac{-1}{2}\varpi_{E_i}^{-2} v^-;\ v_{-1} = \frac{1}{2}\varpi_{E_i}^{-1} v^-.$$

Ces quatre vecteurs forment une $E_{i,0}$-base de Witt de l'espace $W^{(k)} \oplus W^{(-k)}$ relativement à la forme bilinéaire symétrique $h_{i,0}$ définie par

$$h_{i,0}(x,y) = \mathrm{tr}_{E_i/E_{i,0}}(h_i(x,y)), \forall x, y \in W^{(k)} \oplus W^{(-k)}.$$

Posons aussi

$$V_1 = E_{i,0} v_1 \oplus E_{i,0} v_{-1} \text{ et } V_2 = E_{i,0} v_2 \oplus E_{i,0} v_{-2}.$$

Alors $W^{(k)} \oplus W^{(-k)} = V_1 \perp V_2$ comme $E_{i,0}$-espace vectoriel. Pour $i = 1, 2$, notons $\Gamma^+(V_i)$ le sous-groupe de Γ^+ engendré par les vecteurs non-isotropes de V_i.

Noter que $\mu_{q_{E_i}-1}(E_i) = \mu_{q-1}(E_{i,0})$ est un groupe cyclique d'ordre $q-1$, où $q = q_{E_{i,0}}$. Avec la $E_{i,0}$-base de Witt au-dessus, pour tout $x \in \mu_{q-1}(E_{i,0})$, on a

$$\iota(x) = \begin{pmatrix} x & & & \\ & x & & \\ & & x^{-1} & \\ & & & x^{-1} \end{pmatrix}.$$

Soit a un générateur du groupe cyclique $\mu_{q-1}(E_{i,0})$ et soit $\varphi_1(a)$ un élément quelconque de $\Gamma^+(V_1)$ tel que

$$t_\Gamma(\varphi_1(a)) = \begin{pmatrix} a & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & a^{-1} \end{pmatrix}.$$

Pour $i = 1, 2 \dots, q-1$, posons $\varphi_1(a^i) = \varphi_1(a)^i$. Alors, pour $0 \le i, j \le q-2$, nous avons

$$\varphi_1(a)^{i+j} = \begin{cases} \varphi_1(a^{i+j}), \text{ si } i+j \le q-2; \\ \varphi_1(a)^{q-1}\varphi_1(a^{i+j}), \text{ si } i+j > q-2. \end{cases}$$

Noter que $t_\Gamma(\varphi_1(a)^{q-1}) = 1$ donc $c = \varphi_1(a)^{q-1} \in F^\times$.

Par ailleurs, on voit que $s_k(v_1) \in E_{i,0}v_{-2}$ et $s_k(v_{-1}) = v_2$. Alors s_k induit un isomorphisme

$$\begin{aligned} \Gamma^+(V_1) &\xrightarrow{\sim} \Gamma^+(V_2) \\ x &\mapsto \widehat{s_k}x(\widehat{s_k})^{-1}. \end{aligned}$$

Posons $\varphi_2(a) = \widehat{s_k}\varphi_1(a)^{-1}(\widehat{s_k})^{-1} \in \Gamma^+(V_2)$. Alors, on a

$$t_\Gamma(\varphi_2(a)) = s_k \begin{pmatrix} a^{-1} & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & a \end{pmatrix} s_k^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & a & & \\ & & a^{-1} & \\ & & & 1 \end{pmatrix}.$$

De même, on pose $\varphi_2(a^i) = \varphi_2(a)^i$ pour $i = 1, 2, \ldots, q-1$. Alors on a aussi

$$\varphi_2(a)^{i+j} = \begin{cases} \varphi_1(a^{i+j}), \text{ si } i+j \leq q-2; \\ \varphi_2(a)^{q-1}\varphi_1(a^{i+j}), \text{ si } i+j > q-2, \end{cases}$$

et $\varphi_2(a)^{q-1} = c^{-1}$. Posons

$$\varphi(a) = \varphi_1(a)\varphi_2(a) \in \widehat{G}.$$

et

$$\varphi(a^i) = \varphi(a)^i, \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, q-1.$$

Alors on voit facilement que φ est un homomorphisme sur $\mu_{q_{E_i}-1}(E_i) = \mu_{q-1}(E_{i,0})$. En particulier, nous avons une section homomorphe voulue sur $\iota(\mu_{q_{E_i}-1}(E_i))$. □

Revenons à la démonstration de la proposition 4.35, pour chaque $t \in T_{E_i}$ et pour chaque $g \in \mathrm{SL}_d(\mathfrak{o}_{E_i})$, posons

$$\Psi(\iota(tg)) = \psi(\iota(t))s(\iota(g)),$$

où s est l'unique section homomorphe de $\iota(\mathrm{SL}_d(\mathfrak{o}_{E_i}))$ et où ψ est la section homomorphe de $\iota(T_{E_i})$ définie dans le lemme précédent. Puisque T_{E_i} normalise $\mathrm{SL}_d(\mathfrak{o}_{E_i})$ et s est unique, il est facile de voir que Ψ est un homomorphisme de $\iota(\mathrm{GL}_d(\mathfrak{o}_{E_i}))$ dans $\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap \widehat{L}$. La démonstration est complète. □

Notons ${}_sP_1(\bigoplus_{j\neq\pm k}\Lambda^{(j)}_{\mathfrak{o}_E})$ le radical pro-p unipotent de $\widehat{P}(\bigoplus_{j\neq\pm k}\Lambda^{(j)}_{\mathfrak{o}_E})$. Alors nous avons une conséquence directe du lemme précédent.

Corollaire 4.37. $\widehat{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/{}_sP_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \simeq \mathrm{GL}_d(k_{E_i}) \times \widehat{P}(\bigoplus_{j\neq\pm k}\Lambda^{(j)}_{\mathfrak{o}_E})/{}_sP_1(\bigoplus_{j\neq\pm k}\Lambda^{(j)}_{\mathfrak{o}_E})$. *En particulier, nous avons*

$$\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap \widehat{L} \simeq \widetilde{P}(\Lambda^{(k)}_{\mathfrak{o}_E}) \times \widehat{P}^o(\bigoplus_{j\neq\pm k}\Lambda^{(j)}_{\mathfrak{o}_E}).$$

Remarque 4.38. La section homomorphe Ψ de $\iota(\mathrm{GL}_d(\mathfrak{o}_{E_i}))$ dans la démonstration de la proposition 4.35 n'est pas unique. Cependant, elle ne dépend que du choix de la section homomorphe φ de $\iota(\mu_{q_{E_i}-1}(E_i))$ dans la démonstration du lemme 4.36. Avec la section φ choisie, on peut voir que $\widehat{s_k}\psi(a)(\widehat{s_k})^{-1} = \psi(a^{-1})$. Cela implique que

$$\widehat{s_k}\Psi(\iota(g))(\widehat{s_k})^{-1} = \Psi(s_k\iota(g)s_k^{-1}), \text{ pour tout } g \in \mathrm{GL}_d(\mathfrak{o}_{E_i}). \tag{4.1}$$

Généralement, si on pose J_{rm} l'ensemble des indices $1 \leq j \leq m$ tels que $E_{i_j}/E_{i_j,0}$ est une extension quadratique ramifiée alors on a

$$\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/_sP_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \simeq \prod_{k\in J_{rm}} \mathrm{GL}_{d_k}(k_{E_{i_k}}) \times \widehat{P}^o(\bigoplus_{j\notin J_{rm}} \Lambda_{\mathfrak{o}_E}^{(j)})/_sP_1(\bigoplus_{j\notin J_{rm}} \Lambda_{\mathfrak{o}_E}^{(j)})$$

et

$$\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cap \widehat{L} \simeq \prod_{k\in J_{rm}} \widetilde{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}^{(k)}) \times \widehat{P}^o(\bigoplus_{j\notin J_{rm}} \Lambda_{\mathfrak{o}_E}^{(j)}).$$

Également, nous pouvons écrire

$$\overline{\rho} = \left(\bigotimes_{k\in J_{rm}} \overline{\overline{\rho}}^{(k)}\right) \otimes \overline{\rho}_0,$$

où $\overline{\overline{\rho}}^{(k)}$ est une représentation cuspidale de $\mathrm{GL}_{d_k}(k_{E_{i_k}})$, pour $k \in J_{rm}$, et $\overline{\rho}_0$ est une représentation cuspidale de

$$\widehat{P}^o(\bigoplus_{j\notin J_{rm}} \Lambda_{\mathfrak{o}_E}^{(j)})/_sP_1(\bigoplus_{j\notin J_{rm}} \Lambda_{\mathfrak{o}_E}^{(j)}).$$

La notation $\widetilde{\rho}^{(k)}$, pour $k \in J_{rm}$, désigne une représentation irréductible de $\widetilde{P}(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}^{(k)})$ ou de $\widetilde{J}(\beta^{(k)}, \Lambda^{(k)})$.

Comme dans le cas des groupes classiques, la conjugaison par s_j induit une involution σ_j sur $\widetilde{G}^{(j)} = \mathrm{Aut}_F(W^{(j)})$. Noter que, pour $k \in J_{rm}$, l'élément $\widehat{s_k}$ normalise ρ si et seulement si σ_k fixe $\widetilde{\rho}^{(k)}$. Dans cette situation, nous pouvons suivre la stratégie de [42, §7.2] mais il y a encore des détails plus compliqués. On distingue deux cas.

Cas 1 : Supposons qu'il existe un indice $k \in J_{rm}$ tel que $\widetilde{\rho}^{(k)} \circ \sigma_k \not\simeq \widetilde{\rho}^{(k)}$. Dans ce cas, on peut utiliser la construction de [42, §7.2.1] en remplaçant l'ensemble J par

$$J = \{j \in J_{rm} : \widetilde{\rho}^{(j)} \simeq \widetilde{\rho}^{(k)}\} \cup \{-j : j \in J_{rm} \text{ et } \widetilde{\rho}^{(j)} \circ \sigma_j \simeq \widetilde{\rho}^{(k)}\}.$$

Par cette construction, nous trouverons un sous-groupe de Levi $\widehat{L}^M$ de $\widehat{G}$ contenant $\widehat{L}$ et tel que $\widehat{N}_\Lambda(\rho) \subseteq \widehat{L}^M$. D'après le corollaire 4.29, cela entraîne $I_{\widehat{G}}(\vartheta_{\widehat{P}}) \subseteq J^o_{\widehat{P}}\widehat{L}^M J^o_{\widehat{P}}$. Alors, d'après [14, Théorème 7.2], $(J^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ est une paire couvrante de $(J^o_{\widehat{P}} \cap \widehat{L}^M, \vartheta_{\widehat{P}}|_{J^o_{\widehat{P}}\cap\widehat{L}^M})$ relativement à $(\widehat{P}^M, J^o_{\widehat{P}})$. Comme la représentation π contient $\vartheta_{\widehat{P}}$, elle n'est donc pas supercuspidale, d'après [14, Théorème 7.9].

Cas 2 : Nous supposons maintenant que $\widetilde{\rho}^{(j)} \circ \sigma_j \simeq \widetilde{\rho}^{(j)}$, pour tout $j \in J_{rm}$. Dans ce cas, on distingue deux situations.

Cas 2.1 : il existe $k \in J_{rm}$ tel que $\widehat{s_k}$ et $\widehat{s_k^{\varpi}}$ appartiennent à $\widehat{G}$. Quitte à renuméroter, on peut supposer que $k = m$. Dans cette situation, on peut utiliser la construction de [42, page 349]. Précisément, on fixe un choix du sous-groupe parabolique $\widehat{P}$ de $\widehat{G}$ (comme dans le cas 2 de la sous section 4.4.2 au-dessus) : le stabilisateur dans $\widehat{G}$ du drapeau

$$\{0\} \subseteq W^{(-m)} \subseteq \cdots \subseteq \bigoplus_{j=-m}^{k} W^{(j)} \subseteq \cdots \subseteq \bigoplus_{j=-m}^{m} = V.$$

Alors [42, Lemme 7.11] et [42, Corollaire 7.12] se transportent par l'homomorphisme t et par les sections homomorphes uniques de ${}_sU$ et de ${}_sU^-$. En particulier, on a

Lemme 4.39. $\widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{s_m}\widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{s^{\varpi}_m}\widehat{J}^o_{\widehat{P}} = \widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{\zeta}\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$, *avec* $\widehat{\zeta} = \widehat{s_m}\widehat{s^{\varpi}_m}$, *et, pour* $k \geq 0$, *nous avons*

(i) $\widehat{\zeta}^k(\widehat{J}^o_{\widehat{P}} \cap {}_sU)\widehat{\zeta}^{-k} \subseteq \widehat{J}^o_{\widehat{P}} \cap {}_sU$ *;*

(i) $\widehat{\zeta}^k(\widehat{J}^o_{\widehat{P}} \cap {}_sU^-)\widehat{\zeta}^{-k} \subseteq \widehat{J}^o_{\widehat{P}} \cap {}_sU^-$ *;*

(i) $\widehat{\zeta}^k(\widehat{J}^o_{\widehat{P}} \cap \widehat{L})\widehat{\zeta}^{-k} \subseteq \widehat{J}^o_{\widehat{P}} \cap \widehat{L}$.

En particulier, pour $k_1, k_2 \geq 0$, $\widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{\zeta}^{k_1}\widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{\zeta}^{k_2}\widehat{J}^o_{\widehat{P}} = \widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{\zeta}^{k_1+k_2}\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$.

Notons $i = i_m$. Soit $\mathfrak{M}_0$ la suite de $\mathfrak{o}_E$-réseaux dans V définie comme dans le cas 2 de la sous section 4.4.2. Alors $s^{\varpi}_m \in P^+(\mathfrak{M}_0)$. Nous définissons une autre suite autoduale $\mathfrak{M}^i_2$ de $\mathfrak{o}_{E_i}$-réseaux dans V^i par

$$\mathfrak{M}^i_2(2k+r) = \begin{cases} \varpi_i^k \Lambda^i(1-q_m) \text{ pour } r = 0, \\ \varpi_i^k \Lambda^i(q_m) \text{ pour } r = 1. \end{cases}$$

Alors $\mathfrak{b}_0(\mathfrak{M}^i_2)$ est un $\mathfrak{o}_{E_i}$-ordre autodual maximal contenant $\mathfrak{b}_0(\Lambda^i)$ et, si on pose $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}^i_2 \oplus \bigoplus_{k \neq i} \Lambda^k$, alors, comme précédemment, $s_m \in P^+(\mathfrak{M}_2)$.

Comme dans le cas 2 de la sous section 4.4.2, en utilisant [26, Théorème 7.12] et l'injection d'algèbres du corollaire 4.23 nous trouverons deux éléments inversibles $T_{\widehat{s_m}}$ et $T_{\widehat{s^{\varpi}_m}}$ de $\mathcal{H}(\widehat{G}, \widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ qui sont de support $\widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{s_m}\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$ et $\widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{s^{\varpi}_m}\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$, respectivement. Avec le lemme 4.39, $S = (T_{\widehat{s_m}} * T_{\widehat{s^{\varpi}_m}})^{e(E_i/F)}$, où $e(E_i/F)$ est l'indice de ramification de E_i sur F, est un élément inversible de $\mathcal{H}(\widehat{G}, \widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ de support $\widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{\zeta}'\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$, avec $\widehat{\zeta}' = \widehat{\zeta}^{e(E_i/F)}$. Maintenant, nous posons

$$Y_1 = W^{(m)}, Y_0 = \bigoplus_{j \neq \pm m} W^{(j)} \text{ et } Y_{-1} = W^{(-m)}.$$

Alors, par l'argument du cas 2 de la sous section 4.4.2, on voit que $(\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ est une paire couvrante et donc la représentation π n'est pas supercuspidale.

Cas 2.2 : pour tout $j \in J_{rm}$, l'élément s^{ϖ}_j n'est pas de norme spinorielle 1. Dans ce cas, pour tout $j \in J_{rm}$, la dimension $d_j = \dim_{E_{i_j}} W^{(j)}$ est impaire (voir la proposition 4.24). De plus, puisque $\widehat{s_j}$ normalise ρ, pour tout $j \in J_{rm}$, la représentation $\overline{\overline{\rho}}^{(j)}$ est une représentation cuspidale autoduale de $\mathrm{GL}_{d_j}(k_{E_{i_j}})$. Cela implique $d_j = 1, \forall j \in J_{rm}$, d'après [1].

S'il existe deux indices j et k dans J_{rm} tels que $i_j = i_k$, alors on utilise la construction du cas 2 de la sous section 4.4.2 et on voit que $(\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ est une paire couvrante. On peut donc supposer que, pour tout $j, k \in J_{rm}$, si $j \neq k$ alors $i_j \neq i_k$.

Quitte à renuméroter, on peut supposer que $m \in J_{rm}$. En particulier, nous avons $\widehat{s_m} \in \widehat{G}$ et $\widehat{s_m^{\varpi}} \notin \widehat{G}$. L'argument du cas 2.1 au-dessus nous donne un élément inversible $T_{\widehat{s_m}}$ de $\mathcal{H}(\widehat{G}, \widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ de support $\widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{s_m}\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$. Cependant, cet argument ne fonctionne plus avec l'élément $\widehat{s_m^{\varpi}}$.

Remarquons, dans ce cas, que $\widehat{s_m^{\varpi}} \in \Gamma^+$ car $s_m^{\varpi} \in G$. Nous devrons donc nous déplacer dans Γ^+. Rappelons que nous avons une suite exacte

$$1 \to F^\times \xrightarrow{\mathfrak{j}} \Gamma^+ \xrightarrow{t_\Gamma} G \to 1.$$

Notons $R = \mathfrak{j}(F^\times)$. Alors $R\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$ est un sous-groupe ouvert de Γ^+. Noter que $F^\times = \varpi_F^{\mathbb{Z}}\mu_{q_F-1}(F)(1+\mathfrak{p}_F)$, où $q_F = |k_F|$ et $\mu_{q_F-1}(F)$ est le groupe des racines $(q_F-1)^{\text{ième}}$ de l'unité de F. Nous définissons un caractère χ de R de sorte qu'il est trivial si $\vartheta_{\widehat{P}}$ est triviale sur le centre de $\widehat{G}$ et que, sinon, il est trivial sur $\mathfrak{j}(\varpi_F^{\mathbb{Z}}(1+\mathfrak{p}_F))$ et sa restriction sur $\mathfrak{j}(\mu_{q_F-1}(F))$ est un homomorphisme injectif. Alors $\vartheta_{\widehat{P}} \otimes \chi$ est une représentation de $R\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$. Il est facile de vérifier le lemme suivant :

Lemme 4.40. *L'application qui, à chaque $\phi \in \mathcal{H}(\widehat{G}, \widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$, fait correspondre la fonction $\phi_\chi \in \mathcal{H}(R\widehat{G}, R\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}} \otimes \chi)$ définie par $\phi_\chi(\xi g) = \chi(\xi)\phi(g)$, pour tout $\xi \in R$ et tout $g \in \widehat{J}^o_{\widehat{P}}$, est un isomorphisme d'algèbres,*

$$\mathcal{H}(\widehat{G}, \widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}}) \simeq \mathcal{H}(R\widehat{G}, R\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}} \otimes \chi),$$

qui préserve le support : si $\phi \in \mathcal{H}(\widehat{G}, \widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ est supportée sur $\widehat{J}^o_{\widehat{P}} y \widehat{J}^o_{\widehat{P}}$, pour $y \in \widehat{G}$, alors la fonction correspondante $\phi_\chi \in \mathcal{H}(R\widehat{G}, R\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}} \otimes \chi)$ est supportée sur $R\widehat{J}^o_{\widehat{P}} y \widehat{J}^o_{\widehat{P}}$. L'inverse de cet isomorphisme est la restriction à $\widehat{G}$ des fonctions de $\mathcal{H}(R\widehat{G}, R\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}} \otimes \chi)$.

Avec l'isomorphisme du lemme précédent, nous avons une injection d'algèbres préservant le support :

$$\mathcal{H}(\widehat{G}, \widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}}) \simeq \mathcal{H}(R\widehat{G}, R\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}} \otimes \chi) \hookrightarrow \mathcal{H}(\Gamma^+, R\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}} \otimes \chi).$$

Nous notons aussi $T_{\widehat{s_m}}$ l'image dans $\mathcal{H}(\Gamma^+, R\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}} \otimes \chi)$ de $T_{\widehat{s_m}} \in \mathcal{H}(\widehat{G}, \widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ par cette injection. En particulier, $T_{\widehat{s_m}}$ est un élément inversible de $\mathcal{H}(\Gamma^+, R\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}} \otimes \chi)$ qui a pour support $R\widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{s_m}\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$.

Soit $\mathfrak{M}_0$ la suite des réseaux définie comme dans le cas 1.2 au-dessus. En particulier, nous avons $s_m^{\varpi} \in P(\mathfrak{M}_{0,\mathfrak{o}_E})$. Soit $\widehat{\kappa}_M$ la β-extension de $\widehat{J}^o(\beta, \mathfrak{M}_0)$ compatible à $\widehat{\kappa}$. Posons $\widehat{J}^o_{\Lambda,\mathfrak{M}_0} = \widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})_s J^1(\beta, \mathfrak{M}_0)$. Noter que l'on peut voir ρ comme une représentation de $\widehat{J}^o_{\Lambda,\mathfrak{M}_0}$ puisque $\widehat{J}^o_{\Lambda,\mathfrak{M}_0}/_s J^1(\beta, \mathfrak{M}_0)$ est isomorphe à $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/_s P_1(\mathfrak{M}_{0,\mathfrak{o}_E})$ qui contient $\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/_s P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ comme un quotient. Posons

$$\vartheta' = (\widehat{\kappa}_M|_{\widehat{J}^o_{\Lambda,\mathfrak{M}_0}}) \otimes \rho.$$

Comme dans la proposition 4.20, l'argument de [42, Proposition 7.1] nous donne un isomorphisme canonique d'algèbres

$$\mathcal{H}(\Gamma^+, R\widehat{J}^o(\beta, \Lambda), \vartheta \otimes \chi) \simeq \mathcal{H}(\Gamma^+, R\widehat{J}^o_{\Lambda,\mathfrak{M}_0}, \vartheta' \otimes \chi)$$

qui préserve le support des fonctions : si $\phi \in \mathcal{H}(\Gamma^+, R\widehat{J}^o(\beta,\Lambda), \vartheta \otimes \chi)$ a pour support $R\widehat{J}^o(\beta,\Lambda)y\widehat{J}^o(\beta,\Lambda)$ pour $y \in t_\Gamma^{-1}(G_\beta)$, alors la fonction correspondante ϕ' a pour support $R\widehat{J}^o_{\Lambda,\mathfrak{M}_0} y \widehat{J}^o_{\Lambda,\mathfrak{M}_0}$. Par le lemme 4.22, nous avons aussi un isomorphisme d'algèbres préservant le support

$$\mathcal{H}(t_\Gamma^{-1}(P(\mathfrak{M}_{0,\mathfrak{o}_E})), R\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}), \rho \otimes \chi) \simeq \mathcal{H}(t_\Gamma^{-1}(J(\beta,\mathfrak{M}_0)), R\widehat{J}^o_{\Lambda,\mathfrak{M}_0}, \vartheta' \otimes \chi).$$

De plus, l'argument de [42, Lemme 6.1] de nouveau nous donne un isomorphisme préservant le support d'algèbres de Hecke

$$\mathcal{H}(\Gamma^+, R\widehat{J}^o(\beta,\Lambda), \vartheta \otimes \chi) \simeq \mathcal{H}(\Gamma^+, R\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}} \otimes \chi).$$

Mettant ensemble les isomorphismes d'algèbres au-dessus, nous avons une injection d'algèbres de Hecke (similaire à [42, injection (7.3)])

$$\mathcal{H}(t_\Gamma^{-1}(P(\mathfrak{M}_{0,\mathfrak{o}_E})), R\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}), \rho \otimes \chi) \hookrightarrow \mathcal{H}(\Gamma^+, R\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}} \otimes \chi) \tag{4.2}$$

qui préserve le support des fonctions : si $\phi_\beta \in \mathcal{H}(t_\Gamma^{-1}(P(\mathfrak{M}_{0,\mathfrak{o}_E})), R\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}), \rho \otimes \xi)$ est de support $R\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})y\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$, pour $y \in t_\Gamma^{-1}(P(\mathfrak{M}_{0,\mathfrak{o}_E}))$, alors la fonction correspondante $\phi \in \mathcal{H}(\Gamma^+, R\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}} \otimes \chi)$ est de support $R\widehat{J}^o_{\widehat{P}} y \widehat{J}^o_{\widehat{P}}$.

Puisque $\widehat{s^\varpi_m}$ normalise ρ, il existe une fonction $T_{\widehat{s^\varpi_m}}$ dans l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(t_\Gamma^{-1}(P(\mathfrak{M}_{0,\mathfrak{o}_E})), R\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}), \rho \otimes \chi)$ de support $R\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\widehat{s^\varpi_m}\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$. Cet élément est uniquement déterminé à un scalaire près. De plus $T_{\widehat{s^\varpi_m}}(\widehat{s^\varpi_m})T_{\widehat{s^\varpi_m}}((\widehat{s^\varpi_m})^{-1})$ est un scalaire non nul.

Lemme 4.41. *$T_{\widehat{s^\varpi_m}}$ est un élément inversible de $\mathcal{H}(t_\Gamma^{-1}(P(\mathfrak{M}_{0,\mathfrak{o}_E})), R\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}), \rho \otimes \chi)$.*

Démonstration. Il s'agit du calcul du carré $T^2_{\widehat{s^\varpi_m}}$. Noter que $\widehat{s^\varpi_m}$ et son inverse ne diffèrent que d'un élément du centre R. Le support, $\mathrm{supp}(T^2_{\widehat{s^\varpi_m}})$, de $T^2_{\widehat{s^\varpi_m}}$ est donc contenu dans

$$R\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\widehat{s^\varpi_m}\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})(\widehat{s^\varpi_m})^{-1}\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}).$$

Notons que ce support est une réunion de doubles classes de $R\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ dans $t_\Gamma^{-1}(P(\mathfrak{M}_{0,\mathfrak{o}_E}))$. Comme

$$R\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\widehat{s^\varpi_m}\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})(\widehat{s^\varpi_m})^{-1}\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \subseteq R\widehat{G},$$

alors $\mathrm{supp}(T^2_{\widehat{s^\varpi_m}})$ est une réunion de doubles classes de $R\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ dans $R\widehat{P}(\mathfrak{M}_{0,\mathfrak{o}_E}) = t_\Gamma^{-1}(P(\mathfrak{M}_{0,\mathfrak{o}_E})) \cap R\widehat{G}$.

Par ailleurs, avec la proposition 4.29, on voit que $\mathrm{supp}(T^2_{\widehat{s^\varpi_m}})$ est contenu dans

$$R\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \cup \left[R\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})s^\varpi_m\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\right]$$

et donc dans $R\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ car $\left[R\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\widehat{s^\varpi_m}\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\right] \cap R\widehat{G} = \emptyset$. Calculons la valeur de $T^2_{\widehat{s^\varpi_m}}$ en 1, nous avons

$$T^2_{\widehat{s^\varpi_m}}(1) = \int_{R\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})\widehat{s^\varpi_m}\widehat{P}^o(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})} T_{\widehat{s^\varpi_m}}(x)T_{\widehat{s^\varpi_m}}(x^{-1})dx.$$

C'est un scalaire non nul car $T_{\widehat{s_m^\varpi}}(\widehat{s_m^\varpi})T_{\widehat{s_m^\varpi}}((\widehat{s_m^\varpi})^{-1})$ est un scalaire non nul. Cela implique que $T_{\widehat{s_m^\varpi}}$ est un élément inversible et il ne diffère de son inverse que d'un scalaire. $\square$

Notons aussi $T_{\widehat{s_m^\varpi}}$ l'image dans $\mathcal{H}(\Gamma^+, R\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}} \otimes \chi)$ de $T_{\widehat{s_m^\varpi}}$ par l'injection d'algèbres (4.2). C'est donc un élément inversible de support $R\widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{s_m^\varpi}\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$. Considérons maintenant la convolution $T_{\widehat{s_m}} * T_{\widehat{s_m^\varpi}}$. C'est un élément inversible dans $\mathcal{H}(\Gamma^+, R\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}} \otimes \chi)$ car les deux facteurs sont inversibles. En particulier, avec le lemme 4.39, le carré de cette convolution est un élément inversible de $\mathcal{H}(R\widehat{G}, R\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}} \otimes \chi)$ de support $R\widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{\zeta}^2\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$. Notons S l'image de $(T_{\widehat{s_m}} * T_{\widehat{s_m^\varpi}})^2$ dans $\mathcal{H}(\widehat{G}, \widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ par l'isomorphisme du lemme 4.40. Alors S est un élément inversible de $\mathcal{H}(\widehat{G}, \widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ de support $\widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{\zeta}^2\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$. En particulier, $S^{e(E_i/F)}$ est aussi un élément inversible de $\mathcal{H}(\widehat{G}, \widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ de support $\widehat{J}^o_{\widehat{P}}\widehat{\zeta}'\widehat{J}^o_{\widehat{P}}$, avec $\widehat{\zeta}' = \widehat{\zeta}^{2e(E_i/F)}$. Comme dans le cas précédent, cela implique que $(\widehat{J}^o_{\widehat{P}}, \vartheta_{\widehat{P}})$ est une paire couvrante et donc π n'est pas supercuspidale.

Bibliographie

[1] J. Adler, *Self-contragredient supercuspidal representations of* GL_n, Proc. Am. Math. Soc., Vol. 125, no. 8, 1997, P. 2471-2479.

[2] E. Artin, Geometric Algebra, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, no. 3, 1957, Interscience Publishers, Inc. NewYork.

[3] L. Blasco et C. Blondel, *Caractères semi-simples de* $G_2(F), F$ *corps local non archimédien*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4^e série, t. 45, 2012, p. 985-1025.

[4] C. Blondel, *Représentation de Weil et* β*-extensions*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **62**, 4 (2012), p. 1319-1366.

[5] A. Borel, Linear algebraic groups, Graduate Texts in Mathematics 126, 1991, Springer-Verlag, New York.

[6] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4, 5 et 6, 1981, Masson, Paris.

[7] P. Broussous, *Minimal strata for* $GL(m, D)$, J. Reine Angew. Math. **5**14 (1), 1999, p. 199 – 236.

[8] P. Broussous et B. Lemaire, *Buildings of* $\mathrm{GL}(m, D)$ *and centralizers*, Transformations groups, Vol. 7, No. 1, 2002, p. 15-50.

[9] P. Broussous et S. Stevens, *Buildings of classical groups and centralizers of Lie algebra elements*, J. Lie Theory **19**, 2009, p. 55-78.

[10] F. Bruhat et J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local. I, Données radicielles valuées*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Scientifiques **41**, 1972, p. 5-251.

[11] F. Bruhat et J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local. II, Schémas en groupes*, Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Scientifiques **60**, 1984, p. 5-184.

[12] C. J. Bushnell, *Hereditary orders, Gauss sums and supercuspidal representations of* GL_N, J. Reine Angew. Math. **375/376**, 1987, p. 184–210.

[13] C. J. Bushnell et P. C. Kutzko, The admissible dual of $\mathrm{GL}(N)$ via compact open subgroups, Annals of Mathematics Studies 129, 1993, Princeton.

[14] C. J. Bushnell et P. C. Kutzko, *Smooth representations of reductive* p*-adic groups : structure theory via types*, London Math. Soc. (3) **77**, 1998, p. 582-634.

[15] C. J. Bushnell et P. C. Kutzko, *Semisimple types in* GL_n, Compositio Math. **119**, 1999, p. 53-97.

[16] H. Carayol, *Représentations cuspidales du groupe linéaire*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér., IV, Sér. 17, 1984, p. 191-225.

[17] W. Casselman, *Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups*, Preprint, 1995.

[18] A. H. Clifford, *Representations induced in an invariant subgroup*, Annals of Mathematics, Vol. 38, No. 3 (1937), pp. 533-550.

[19] J.-F. Dat, *Finitude pour les représentations lisses de groupes p-adique*, J. Inst. Math. Jussieu **8** (2009), no. 2, p. 261-333.

[20] J. Dieudonné, La géométrie des groupes classiques, 1955, Springer (Berlin).

[21] R. E. Howe, *Some qualitative results on the representation theory of* GL_n *over a p-adic field*, Pac. J. Math. **73**(2), 1977, p. 479-538.

[22] R. E. Howe et A. Moy, *Minimal K-types for* GL_n *over a p-adic field*, SMF, Astérisque **171-172** (1989), p. 257-273.

[23] J.-L Kim, *Supercuspidal representations : an exhaustion theorem*, J. Am. Math. Soc. **20**, 2007, p. 273-320.

[24] P. C. Kutzko, *Towards a classification of the supercuspidal representations of* GL_N, J. London Math. Soc. (2) **37**, 1988, p. 265-274.

[25] M. Miyauchi et S. Stevens, *Semisimple types for p-adic classical groups*, Preprint, 2012.

[26] L. Morris, *Tamely ramified intertwining algebras*, Invent. Math. **1**14, 1993, p. 1-54.

[27] L. Morris, *Level zero G-types*, Compos. Math. **1**18, 1999, p. 135-157.

[28] A. Moy et G. Prasad, *Unrefined minimal K-types for p-adic groups*, Invent. Math. **1**16, 1994, p. 393-408.

[29] A. Moy et G. Prasad, *Jacquet fonctor and unrefined minimal K-types*, Comment. Math. Helv. **7**1(1), 1996, p. 98-121.

[30] S. -Y. Pan et J. -K. Yu, *Unrefined minimal k-types for p-adic classical groups*, Manuscript, Princeton University, 1998.

[31] P. Samuel, *Le lemme de Hensel*, Séminaire Dubreil, Algèbre et théorie des nombres, tome 7 (1953-1954), exp. no. 9, p. 1-5.

[32] W. Scharlau, Quadratic and Hermitian Forms, 1985, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg NewYork Tokyo.

[33] V. Sécherre, *Représentations lisses de* $\mathrm{GL}(m, D)$. *II : β-extensions.*, Compos. Math. **1**41, 2005, p. 1531–1550.

[34] V. Sécherre, *Représentations lisses de* $\mathrm{GL}(m, D)$. *III : Types simples.*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **3**8 (4), 2005, no. 6, p. 951–977.

[35] V. Sécherre et S. Stevens, *Représentations lisses de* $\mathrm{GL}(m, D)$. *IV : Représentations supercuspidales.*, J. Inst. Math. Jussieu 7, 2008, no. 3, p. 527–574.

[36] T. A. Springer, Linear Algebraic Groups, Vol. 9 de “Progress in mathematics”, Birkhäuser Boston, 2ème édition, 1998.

[37] T. A. Springer et F. D. Veldkamp, Octonions, Jordan Algebras and Exceptional Groups, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2000.

[38] R. STEINBERG, *Torsion in Reductive Groups*, Advances in Mathematics **15**, 1975, p. 63–92.

[39] S. STEVENS, *Intertwining and supercuspidal types for p-adic classical groups*, Proc. London Math. Soc. **83**, 2001, p. 120–140.

[40] S. STEVENS, *Semisimple Strata for p-adic classical groups*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., 4e série, t. 35, 2002, p. 423-435.

[41] S. STEVENS, *Semisimple characters for p-adic classical groups*, Duke Math. J. **127(1)**, 2005, p. 123–173.

[42] S. STEVENS, *The supercuspidal representations of p-adic classical groups*, Invent. math. **172**, 2008, p. 289–352.

[43] J. TITS, *Reductive groups over local fields*, dans : Automorphic Forms, Representations, and L-Functions, Proc. Symp. Pure Math. **33**, part 1, 1979, p. 29-69.

[44] G. E. WALL, *The structure of a unitary factor group*, Publ. Math. inst. Hautes Études Sci. **1**, 1959, p. 7–23.

[45] J. S. WILSON, Profinite Groups, Clarendon Press - Oxford, 1997.

[46] J.-K. YU, *Construction of tame supercuspidal representations*, J. Am. Math. Soc. **14**(3), 2001, p. 579-622.

[47] H. ZASSENHAUS, *On the Spinor norm*, Arch. Math., Vol. 13, 1962, p. 434–451.