blondel@math.jussieu.fr
fax : 33 1 44 27 78 18 22 novembre 2001

Quelques propriétés des paires couvrantes

Corinne Blondel

Soit F un corps local non archimédien et soit G le groupe des points sur F d'un groupe algébrique réductif et connexe défini sur F. Soit M un sous-groupe de Levi de G et P un sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi M.

C.J. Bushnell et P.J. Kutzko rappellent dans [BK2] la décomposition de Bernstein de la catégorie des représentations lisses complexes de G et la définition d'un type pour un facteur direct minimal de cette catégorie. Ils y définissent la notion de *paire couvrante (G-cover)* et démontrent qu'une paire couvrante d'un type de M est un type de G, l'induction parabolique de P à G se trouvant alors décrite en termes de modules sur les algèbres de Hecke attachées à ces types.

M.-F. Vignéras étend dans [V2] certaines propriétés des paires couvrantes à la catégorie des représentations lisses de G sur un corps R dans lequel le cardinal du corps résiduel de F est inversible.

Par définition, une paire couvrante (J, τ) dans G, relativement à P, d'une paire (J_M, τ_M) dans M (voir les notations ci-dessous ; τ_M est ici irréductible), est en particulier une paire décomposée au-dessus de (J_M, τ_M) relativement à P. L'intuition dicte que c'est même une paire décomposée *maximale* et cette conviction est sous-jacente aux constructions de paires couvrantes effectuées jusqu'à présent, aussi bien d'ailleurs qu'aux constructions de représentations antérieures partant de strates — de fait une strate définit un caractère d'un sous-groupe de congruence que l'on tâche de prolonger à un sous-groupe aussi gros que possible, au prix si nécessaire d'une construction d'Heisenberg.

Je montre au paragraphe I qu'une paire couvrante est effectivement une paire décomposée maximale, lorsque la représentation τ_M est projective et le corps R algébriquement clos.

Noter qu'une paire décomposée maximale n'est pas nécessairement couvrante ; de fait l'existence de paires décomposées maximales va de soi, mais pas celle de paires couvrantes. Par exemple le choix, pour une classe d'inertie donnée dans M, d'un type associé dans M duquel on cherche une paire couvrante dans G, influe sur l'existence de celle-ci - voir [BB], Théorème III.9.1. A l'heure actuelle, seuls les groupes $GL_n(F)$ et $SL_n(F)$ disposent, quelle que soit la caractéristique résiduelle de F, d'une description complète de leur dual lisse complexe au moyen de types qui sont des paires couvrantes de types cuspidaux de leurs sous-groupes de Levi.

D'autre part, j'ai donné dans [B2] une condition suffisante pour qu'une paire décomposée soit couvrante : il suffit qu'elle s'insère dans une suite de paires décomposées telle que le passage d'une paire à la suivante vérifie une condition d'entrelacement convenable. Il est naturel de se demander si cette condition est aussi nécessaire. La réponse est oui dans le cas complexe comme on le verra à la fin du paragraphe III.

De fait, une paire décomposée (J,τ) peut s'insérer dans la suite de paires décomposées $(z^{-k}Jz^k, \tau^{z^k})_{k\in\mathbb{Z}}$, où z est un élément fortement positif fixé du centre de M, et cette suite permet de transformer l'action, sur la représentation induite compacte $\mathrm{ind}_J^G\tau$, de l'élément Φ_z de $\mathcal{H}_R(G,J,\tau)$ de support JzJ et valeur identité en z, en un opérateur d'entrelacement de $\mathrm{ind}_J^G\tau$ dans $\mathrm{ind}_{z^{-1}Jz}^G\tau^z$. L'itération de ce procédé débouche sur la construction d'un G-homomorphisme Ψ^+ de $\mathrm{ind}_J^G\tau$ dans la représentation induite compacte $\mathrm{ind}_{J_MN}^G\tau_M\otimes 1$.

Je montre au paragraphe II que si (J,τ) est une paire couvrante de (J_M,τ_M) relativement au sous-groupe parabolique opposé $\bar{P}$, alors Ψ^+ est un *isomorphisme.* La composition de l'inclusion naturelle

$$\mathrm{End}_{RM}(\mathrm{ind}_{J_M}^M\tau_M) \;\hookrightarrow\; \mathrm{End}_{RG}(\mathrm{ind}_{J_MN}^G\tau_M\otimes 1)$$

avec l'isomorphisme de $\mathrm{End}_{RG}(\mathrm{ind}_{J_MN}^G\tau_M\otimes 1)$ sur $\mathrm{End}_{RG}(\mathrm{ind}_J^G\tau)$ induit par Ψ^+ fournit alors un homomorphisme d'algèbres injectif :

$$\mathcal{H}_R(M,J_M,\tau_M)\hookrightarrow\mathcal{H}_R(G,J,\tau)$$

qui se trouve être exactement l'homomorphisme t de [BK2], Théorème 7.2. Ainsi le paragraphe II fait vraiment apparaître la théorie des paires couvrantes comme une déformation de l'induction parabolique.

Le fait que Ψ^+ soit un isomorphisme de $\mathrm{ind}_J^G\tau$ sur $\mathrm{ind}_{J_MN}^G\tau_M\otimes 1$ a été démontré de façon très différente par J.-F. Dat dans [D], Théorème 4.3, sous des hypothèses assez contraignantes qui sont levées ici. L'article de J.-F. Dat explique par ailleurs quelles sont les conséquences de ce résultat dans le contexte modulaire.

La proposition 2 du paragraphe III, c'est-à-dire l'admissibilité des représentations lisses irréductibles de G sur R et le fait que les $\mathcal{H}_R(G,J,\tau)$-modules à droite simples sont de dimension finie, est un résultat de M.-F. Vignéras. Je la remercie vivement de m'avoir communiqué ce résultat et de m'avoir autorisée à reproduire ici sa démonstration.

Je remercie Guy Henniart pour ses encouragements et ses conseils. Merci également à Bertrand Lemaire et Jean-François Dat pour des discussions constructives.

Notations et définitions.

Dans toute la suite, F est un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle p, G est le groupe des points sur F d'un groupe algébrique réductif et connexe défini sur F, M est un sous-groupe de Levi propre de G et P un sous-groupe parabolique de G de facteur de Levi M et radical unipotent N. On note $\bar{P}$ le sous-groupe parabolique de G opposé de P par rapport à M et $\bar{N}$ son radical unipotent.

Soit R un corps (commutatif) de caractéristique différente de p (de façon que G possède une mesure de Haar à valeurs dans R, voir [V1]). Pour toute représentation lisse (π, V) de G dans un espace vectoriel V sur R, on note (π_N, V_N) le module de Jacquet de V relativement à P et r_N l'application canonique de V sur V_N.

Soit J un sous-groupe ouvert compact de G et τ une représentation lisse irréductible de J dans un espace vectoriel W sur R. Notons ι l'injection canonique de W dans l'espace de la représentation induite compacte $\mathrm{ind}_J^G\tau$, qui à $w \in W$ associe la fonction de support J et valeur w en 1. L'algèbre $\mathrm{End}_{RG}\left(\mathrm{ind}_J^G\tau\right)$ s'identifie à l'algèbre de convolution $\mathcal{H}_R(G, J, \tau)$ des fonctions lisses à support compact de G dans $\mathrm{End}_R W$ vérifiant $\Phi(kxh) = \tau(k)\Phi(x)\tau(h)$ pour tous éléments h, k de J et x de G, à la manière indiquée dans [V1], §I.8.5 :

$$\text{(0.1)} \qquad \widetilde{\Phi} \longmapsto \Phi \ \text{ définie par } \Phi(x)(w) = \widetilde{\Phi}(\iota(w))(x) \ (x \in G, w \in W).$$

Cette identification transforme composition des endomorphismes en convolution donnée par la formule :

$$\text{(0.2)} \qquad \Phi * \Psi(x) = \sum_{g \in G/J} \Phi(xg)\, \Psi(g^{-1}) = \sum_{g \in G/J} \Phi(g)\, \Psi(g^{-1}x)$$

et transforme l'action de $\widetilde{\Phi} \in \mathrm{End}_{RG}\left(\mathrm{ind}_J^G\tau\right)$ sur un élément f de l'espace de la représentation $\mathrm{ind}_J^G\tau$ en une convolution donnée par la même formule où l'on remplace Ψ par f, soit $\widetilde{\Phi}(f) = \Phi * f$.

On fixe *un sous-groupe ouvert compact* J_M de M et *une représentation lisse irréductible* τ_M de J_M dans un espace vectoriel W sur R. Les définitions indispensables qui suivent sont extraites de [BK2] dans le cas complexe.

Soit J un sous-groupe ouvert compact de G et τ une représentation lisse irréductible de J. On pose $J^+ = J \cap N$ et $J^- = J \cap \bar{N}$; ce sont des pro-p-groupes. On dira que (J, τ) est une *paire décomposée au-dessus de* (J_M, τ_M) *relativement à* P si :

(i) $J \cap M = J_M$ et $J = J^- J_M J^+$;
(ii) la restriction de τ à J_M est égale à τ_M et les restrictions de τ à J^+ et J^- sont triviales.

Dans ces conditions, un élément z du centre de M est dit *fortement positif relativement à* P *et* J si $zJ^+z^{-1} \subset J^+$, $zJ^-z^{-1} \supset J^-$ et pour tous sous-groupes compacts H_1, H_2 de N (resp. $\bar{N}$) il existe un entier m positif (resp. négatif) tel que $z^m H_1 z^{-m} \subset H_2$. On notera Z^{++} l'ensemble de ces éléments ; il est *non vide.*

On dira que (J,τ) est une *paire couvrante de* (J_M,τ_M) *relativement à* P si c'est une paire décomposée au-dessus de (J_M,τ_M) relativement à P vérifiant :

(0.3) il existe un élément z de Z^{++} tel que la double classe $Jz^{-1}J$ supporte un élément inversible de $\mathcal{H}_R(G,J,\tau)$.

Si la condition (0.3) est vérifiée, elle est alors valide pour tout élément de Z^{++} (voir [BK2] et [V2]). Elle entraîne par [BK2] et [V1], §II.3.1 :

(0.4) pour toute représentation lisse irréductible (π,V) de G, la restriction de r_N à V^τ, la composante isotypique de type τ de V sous l'action de J, est *injective.*

(0.5) pour toute représentation lisse irréductible (π,V) de G, l'application

$$q_{N,\tau} : V_\tau = \mathrm{Hom}_J(\tau,\pi) \longrightarrow (V_N)_{\tau_M} = \mathrm{Hom}_{J_M}(\tau_M,\pi_N)$$

définie par $q_{N,\tau}(f) = r_N \circ f$, $f \in V_\tau$, est *injective.*

On verra en III que les conditions (0.4) et (0.5) sont en fait équivalentes à (0.3), non seulement pour $R=\mathbb{C}$ comme cela découle de [BK2], mais pour tout corps R comme ci-dessus.

Remarque. La condition (0.3) dans [BK2], §7, demande qu'un élément de support JzJ soit inversible ; le changement de z en z^{-1} est dû au fait que nous travaillons ici avec l'algèbre des fonctions τ-variantes sur G tandis que C. Bushnell et P. Kutzko travaillent avec celle des fonctions $\check{\tau}$-variantes sur G.

I – Paires couvrantes et maximalité.

La question de savoir si une paire couvrante est nécessairement une paire décomposée maximale se posait déjà dans [BB] où nous avions donné une réponse partielle qui nous suffisait alors (§I.4). Le théorème ci-dessous répond à cette question de manière totalement satisfaisante si R est le corps des nombres complexes. Pour un corps R algébriquement clos (on utilise le lemme de Schur), de caractéristique différente de p, quelconque, nous nous restreignons à des représentations projectives ; c'est dans la démonstration du lemme 1 que la projectivité est utilisée à plusieurs reprises.

Théorème 1. *Soit* (J,τ) *une paire couvrante de* (J_M,τ_M) *relativement à* P. *On suppose que* R *est algébriquement clos et que la représentation* τ_M *est projective. Alors* (J,τ) *est une paire décomposée maximale au-dessus de* (J_M,τ_M) *relativement à* P.

Démonstration. Il s'agit de montrer que si (J',τ') est une autre paire décomposée au-dessus de (J_M,τ_M) relativement à P telle que J soit contenu dans J', alors J est égal à J'. Commençons par une constatation.

$$(1.1)\qquad \begin{aligned} &\dim \mathrm{Hom}_{J'}\,(\tau',\ \mathrm{ind}_J^{J'}\tau) = 1,\\ &\dim \mathrm{Hom}_J\,(\tau,\ \mathrm{Res}_J(\mathrm{ind}_J^{J'}\tau)\ ) \geqslant |J\backslash J'/J|. \end{aligned}$$

Le premier point découle de la réciprocité de Frobenius : τ est irréductible et la restriction de τ' à J est égale à τ. Pour le deuxième point, on décompose comme suit la restriction à J de la représentation induite :

$$\mathrm{Res}_J(\mathrm{ind}_J^{J'}\tau) \simeq \bigoplus_{w\in J\backslash J'/J} \mathrm{ind}_{wJw^{-1}\cap J}^{J}\,\tau^w$$

et il suffit de montrer que τ apparaît dans chacun des morceaux de cette décomposition. Comme $J' = J_M J'^+ J'^- = JJ'^+J'^-$, on peut choisir des représentants w de $J\backslash J'/J$ dans $J'^+J'^-$ qui est contenu dans Ker τ'. Comme τ' est un prolongement de τ à J', on a alors, pour tout élément x de $wJw^{-1}\cap J$:

$$\tau^w(x) = \tau(w^{-1}xw) = \tau'(w^{-1}xw) = \tau'(w^{-1})\tau'(x)\tau'(w) = \tau(x).$$

Or par réciprocité de Frobenius, τ figure dans $\mathrm{ind}_{wJw^{-1}\cap J}^{J}\tau$, cqfd.

Pour toute représentation lisse (π, V) de G, l'espace $V_{\tau'} = \mathrm{Hom}_{J'}(\tau', \pi)$ est inclus dans V_τ et on a évidemment

$$\ker q_{N,\tau'} \subset \ker q_{N,\tau}. \tag{1.2}$$

Le point crucial est alors le suivant :

Lemme 1. *Supposons J strictement contenu dans J'. Alors il existe une représentation lisse irréductible (π, V) de G pour laquelle*

$$\dim\ker q_{N,\tau'} < \dim\ker q_{N,\tau}.$$

Démonstration du lemme. Il nous faut deux résultats préliminaires :

(1.3) *Le sous-groupe de J engendré par J^+ et J^- est un pro-p-groupe.*

Le groupe $J = J^-J_MJ^+$ est profini : le pro-p-sous-groupe J^+ de J est donc contenu dans un pro-p-sous-groupe de Sylow S de J ([W] 2.2.2). Nous allons montrer que S contient aussi J^-.

L'ensemble quotient J/S est fini ([V1] I.6), de cardinal premier à p. L'action du pro-p-groupe J^- sur J/S par translations à gauche possède donc au moins un point fixe, que l'on peut écrire sous la forme aS avec $a \in J^-J_M$. Mais alors $J^-aS = aS$ implique $a^{-1}J^-a \subset S$, d'où l'assertion puisque a normalise J^-. ∘

(1.4) *Si la représentation τ_M est projective, alors pour toute paire décomposée (J, τ) au-dessus de (J_M, τ_M), la représentation τ est projective.*

En effet, le sous-groupe H du noyau de τ engendré par J^+ et J^- est de pro-ordre inversible dans R par (1.3), donc par [V1] I.4.6, pour toute suite exacte

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0$$

de J-modules, la suite des H-invariants

$$0 \to (E')^H \to E^H \to (E'')^H \to 0$$

est exacte, et c'est une suite exacte de J_M-modules. La projectivité de τ_M donne alors l'exactitude de la suite
$$0 \to \mathrm{Hom}_{J_M}(\tau_M, (E')^H) \to \mathrm{Hom}_{J_M}(\tau_M, E^H) \to \mathrm{Hom}_{J_M}(\tau_M, (E'')^H) \to 0$$
et il n'y a plus qu'à remarquer que $\mathrm{Hom}_J(\tau, E) = \mathrm{Hom}_{J_M}(\tau_M, E^H)$ pour tout J-module E. $\circ$

Ainsi les représentations τ, τ' et $\mathrm{ind}_J^{J'}\tau$ sont projectives. Dans ces conditions, $\mathrm{ind}_J^{J'}\tau$ possède un quotient irréductible τ'' tel que $\mathrm{Hom}_{J'}(\tau', \tau'') = \{0\}$ et $\mathrm{Hom}_J(\tau, \tau'') \neq \{0\}$ (tout quotient par un sous-module propre maximal de $\mathrm{ind}_J^{J'}\tau$ contenant l'unique sous-module isomorphe à τ' convient, puisque l'image de l'injection canonique ι de τ dans $\mathrm{ind}_J^{J'}\tau$ engendre cette induite ; par projectivité de τ' ce quotient ne peut être équivalent à τ').

Soit (π, V) une représentation lisse irréductible de G telle que $V^{\tau''}$ soit non nul (par exemple, un quotient irréductible de la représentation induite compacte $\mathrm{ind}_{J'}^G\tau''$, qui est de type fini). Soit ϕ un élément non nul de $\mathrm{Hom}_J(\tau, \tau'')$. L'application $\Phi : V_{\tau''} \to V_\tau$ définie par $\Phi(f) = f \circ \phi$ est injective, puisque les éléments non nuls de $V_{\tau''}$ sont des homomorphismes injectifs de W dans V. En outre $\Phi(V_{\tau''})$ et $V_{\tau'}$ sont en somme directe dans V_τ car $V^{\tau'} \cap V^{\tau''} = \{0\}$. Notons que V_τ est de dimension finie car (π, V) est admissible ([V1], II.2.8) et τ est de dimension finie ([V1], I.4.16). Ainsi:
$$\dim V_\tau > \dim V_{\tau'}.$$

Or les applications $q_{N,\tau}$ et $q_{N,\tau'}$ ont pour image $(V_N)_{\tau_M}$ ([V1], II.3.5), de sorte que $\dim V_\tau = \dim(V_N)_{\tau_M} + \dim\ker q_{N,\tau}$ et $\dim V_{\tau'} = \dim(V_N)_{\tau_M} + \dim\ker q_{N,\tau'}$. Il en résulte l'inégalité stricte annoncée. $\square$

Le théorème découle immédiatement du lemme : si J est strictement contenu dans J', le lemme fournit une représentation lisse irréductible (π, V) de G pour laquelle $q_{N,\tau}$ n'est pas injective. $\square$

II – Paires couvrantes et induction parabolique.

Soit (J, τ) une paire décomposée au-dessus de (J_M, τ_M) relativement à P. Fixons un élément z de Z^{++} et posons pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$(2.1) \qquad J_k = z^{-k}Jz^k, \ \tau_k(x) = \tau(z^k x z^{-k}) \quad (x \in J_k).$$

Comme z est central dans M et fortement positif, les paires (J_k, τ_k) sont décomposées au-dessus de (J_M, τ_M) relativement à P et la suite des J_k^+ est croissante de réunion N, celle des J_k^- décroissante d'intersection $\{1\}$. On définit pour tout k un G-entrelacement
$$L(z) \ : \ \mathrm{ind}_{J_k}^G\tau_k \longrightarrow \mathrm{ind}_{J_{k+1}}^G\tau_{k+1}, \quad L(z)(f)(x) = f(zx);$$

c'est un isomorphisme d'inverse $L(z^{-1})$, qui induit un isomorphisme d'algèbres de $\mathrm{End}_{RG}\left(\mathrm{ind}_{J_k}^G \tau_k\right)$ sur $\mathrm{End}_{RG}\left(\mathrm{ind}_{J_{k+1}}^G \tau_{k+1}\right)$.

Notons Φ_z et $\Phi_{z^{-1}}$ les éléments de $\mathcal{H}_R(G,J,\tau)$ de supports respectifs JzJ et $Jz^{-1}J$ et tels que $\Phi_z(z)=\Phi_{z^{-1}}(z^{-1})=I_W$, puis $\Phi_z^{(k)}$ et $\Phi_{z^{-1}}^{(k)}$ les éléments analogues de $\mathcal{H}_R(G,J_k,\tau_k)$. On vérifie aisément que $\Phi_z^{(k+1)}$ et $\Phi_{z^{-1}}^{(k+1)}$ sont les images de $\Phi_z^{(k)}$ et $\Phi_{z^{-1}}^{(k)}$ par l'isomorphisme induit par $L(z)$, i.e. :

$$\widetilde{\Phi_{z^{-1}}^{(k+1)}} = L(z)\circ \widetilde{\Phi_{z^{-1}}^{(k)}} \circ L(z^{-1}) \quad \text{et} \quad \widetilde{\Phi_z^{(k+1)}} = L(z)\circ \widetilde{\Phi_z^{(k)}}\circ L(z^{-1}).$$

Il en résulte :

(2.2) *Φ_z est inversible dans $\mathcal{H}_R(G,J,\tau)$ si et seulement si $\Phi_z^{(k)}$ est inversible dans $\mathcal{H}_R(G,J_k,\tau_k)$; en d'autres termes, (J,τ) est une paire couvrante de (J_M,τ_M) relativement à $\bar{P}$ si et seulement si (J_k,τ_k) en est une pour tout $k\in\mathbb{Z}$.*

Les endomorphismes de $\mathrm{ind}_J^G\tau$ correspondant à Φ_z et $\Phi_{z^{-1}}$ sont donnés par les formules suivantes, où f appartient à l'espace de la représentation $\mathrm{ind}_J^G\tau$:

$$(2.3)\qquad \begin{aligned} \widetilde{\Phi_z} f(x) &= \sum_{g\in JzJ/J} \Phi_z(g) f(g^{-1}x) = \sum_{j\in J^+\backslash z^{-1}J^+z} f(jz^{-1}x),\\ \widetilde{\Phi_{z^{-1}}} f(x) &= \sum_{g\in Jz^{-1}J/J} \Phi_z(g) f(g^{-1}x) = \sum_{j\in J^-\backslash zJ^-z^{-1}} f(jzx). \end{aligned}$$

Fixant des mesures de Haar sur N et $\bar{N}$ normalisées de telle sorte qu'il existe un sous-groupe ouvert compact de volume 1 (voir [V1], §I.2.4 et II.1.3), on pose pour $f\in \mathrm{ind}_{J_k}^G\tau_k$:

$$\Psi_k^+(f)(x) = \frac{1}{|J_k^+|}\int_{z^{-1}J_k^+z} f(jx)dj\ , \quad \Psi_k^-(f)(x) = \frac{1}{|J_k^-|}\int_{zJ_k^-z^{-1}} f(jx)dj,$$

où l'on note $|H|$ le volume d'un sous-groupe ouvert compact de N ou $\bar{N}$ pour la mesure choisie ; c'est une puissance de p. Les applications Ψ_k^+ et Ψ_k^- sont des homomorphismes de G-modules de $\mathrm{ind}_{J_k}^G\tau_k$ dans $\mathrm{ind}_{J_{k+1}}^G\tau_{k+1}$ et $\mathrm{ind}_{J_{k-1}}^G\tau_{k-1}$ respectivement, puisqu'on vérifie immédiatement :

$$(2.4)\qquad \Psi_k^+ = L(z)\circ\widetilde{\Phi_z^{(k)}} \quad \textit{et} \quad \Psi_k^- = L(z^{-1})\circ \widetilde{\Phi_{z^{-1}}^{(k)}}.$$

Ainsi Ψ_k^+ est un isomorphisme si et seulement si Φ_z est inversible. Cette remarque joue un rôle essentiel dans l'établissement du théorème suivant :

Théorème 2. *Soit (J,τ) une paire couvrante de (J_M,τ_M) relativement à $\bar{P}$. L'application :*

$$\Psi^+ \ :\ \mathrm{ind}_J^G\tau \longrightarrow \mathrm{ind}_{J_MN}^G\ \tau_M\otimes 1, \quad \Psi^+(f)(x) = \frac{1}{|J^+|}\int_N f(nx)dn,$$

est un isomorphisme de G-modules.

Démonstration. Remarquons tout d'abord que si (J, τ) est seulement une paire décomposée au-dessus de (J_M, τ_M) relativement à $\bar{P}$ (ou à P, c'est la même chose), l'application Ψ^+ ainsi définie est un homomorphisme de G-modules : elle commute aux translations à droite et, comme f elle-même est à support compact, l'intégrale converge et définit une fonction invariante à gauche sous N, τ_M-variante à gauche sous J_M et de support contenu dans N Supp(f) qui est bien compact modulo $J_M N$. L'application Ψ^+ coïncide du reste avec le morphisme Φ de [D], §2.1.

Pour continuer nous avons besoin d'introduire un nouvel opérateur $\mathcal{I}_k$:

$$\mathcal{I}_k(f)(x) = \int_{J_k^+} f(nx)dn,$$

dans l'espace des fonctions lisses à support compact de G dans W qui vérifient $f(mx) = \tau_M(m)f(x)$ pour tous $m \in J_M, x \in G$. On a, pour $f \in \mathrm{ind}_{J_i}^G \tau_i$:

$$\mathcal{I}_k(f) = |J_k^+|\, f \quad \text{si } i \geqslant k, \quad \mathcal{I}_k(f) = |J_i^+|\, \Psi_{k-1}^+ \circ \Psi_{k-2}^+ \cdots \circ \Psi_i^+(f) \quad \text{si } i < k.$$

Il résulte alors de (2.2), (2.4) que

(2.5) $\mathcal{I}_k$ *se restreint, pour* $i \leqslant k$, *en un* G*-isomorphisme de* $\mathrm{ind}_{J_i}^G \tau_i$ *sur* $\mathrm{ind}_{J_k}^G \tau_k$.

Montrons à présent l'injectivité de Ψ^+. Soit $f \in \mathrm{ind}_J^G \tau$, de support contenu dans Ω, compact de G. La condition $\Psi^+(f) = 0$ équivaut à $\Psi^+(f)(x) = 0$ pour tout x appartenant au support de f (en effet, si c'est le cas, $\Psi^+(f)$ est nulle en tout point de N Supp(f), or elle est déjà nulle en dehors de cet ensemble). Or pour tout x de Ω, le support de l'intégrale $\int_N f(nx)dn$ est contenu dans $N \cap \Omega\Omega^{-1}$ qui est compact dans N, donc contenu dans J_k^+ pour k assez grand. Ainsi, pour $x \in \Omega$: $\Psi^+(f)(x) = \frac{1}{|J^+|}\, \mathcal{I}_k(f)(x)$. Si donc $\Psi^+(f)$ est nulle, la fonction $\mathcal{I}_k(f)$ est nulle pour tout x de Ω donc nulle sur $J_k^+\Omega$ qui contient son support : alors $\mathcal{I}_k(f) = 0$ donc $f = 0$ par (2.5).

Passons à la surjectivité de Ψ^+. La représentation $\mathrm{ind}_{J_M N}^G\ \tau_M \otimes 1$ est lisse et formée de fonctions à support compact modulo $J_M N$; il suffit donc de montrer que l'image de Ψ^+ contient toute fonction de support contenu dans $J_M N g K$ et invariante à droite par K, pour $g \in G$ arbitraire et K sous-groupe ouvert compact de G arbitrairement petit. Comme l'image par g d'une telle fonction est de support contenu dans $J_M N(gKg^{-1})$ et est invariante à droite par gKg^{-1}, il suffit d'atteindre toute fonction de la forme ci-dessous, où K est un sous-groupe ouvert compact de G arbitraire et $w \in W$:

$$f_{w,K}(x) = \begin{cases} \tau_M(m)w & \text{si } x = mnk, m \in J_M, n \in N, k \in K, \\ 0 & \text{si } x \notin J_M N K. \end{cases}$$

L'existence d'une telle fonction avec $w \neq 0$ implique : $K \cap J_M N \subset J_M(w)N$ où $J_M(w)$ est le fixateur de w dans la représentation τ_M. Comme K est compact et ouvert on peut choisir $k \geqslant 0$ de sorte que :

$$K \cap J_M N \subset J_M(w)J_k^+ \quad \text{ et } \quad K \cap \bar{N} \supset J_k^-.$$

Définissons alors une fonction $f_k \in \mathrm{ind}_{J_k}^G \tau_k$ par

$$f_k(x) = \begin{cases} \tau_k(j)\, w & \text{si } x = jk, j \in J_k, k \in K, \\ 0 & \text{si } x \notin J_k K. \end{cases}$$

Elle est bien définie car $J_k \cap K = J_k^-(J_M J_k^+ \cap K)$ est contenu dans $J_k^- J_M(w) J_k^+$ qui est le fixateur de w dans la représentation τ_k. Considérons maintenant la fonction $\Psi^{+,k}(f_k) \in \mathrm{ind}_{J_M N}^G\ \tau_M \otimes 1$ définie par

$$\Psi^{+,k}(f_k)(x) = \frac{1}{|J_k^+|} \int_N f_k(nx) dn.$$

Son support est contenu dans $NJ_kK = J_M NK$, elle est invariante à droite par K et sa valeur en 1 est $\frac{1}{|J_k^+|}\int_N f_k(n)dn = \frac{1}{|J_k^+|}\int_{J_k^+} f_k(n)dn = w$ car $N \cap J_k K = N \cap J_k^+ J_M K = J_k^+(N \cap J_M K) \subset J_k^+$.

Ainsi $\Psi^{+,k}(f_k) = f_{w,K}$. Par (2.5) il existe $f_0 \in \mathrm{ind}_J^G \tau$ telle que $\mathcal{I}_k(f_0) = f_k$, soit finalement $f_{w,K} = \Psi^{+,k} \circ \mathcal{I}_k(f_0) = |J^+|\ \Psi^+(f_0)$: Ψ^+ est surjective. □

L'isomorphisme Ψ^+ induit un isomorphisme d'algèbres :

$$\Psi_+ : \mathrm{End}_{RG}\left(\mathrm{ind}_J^G \tau\right) \longrightarrow \mathrm{End}_{RG}\left(\mathrm{ind}_{J_M N}^G\ \tau_M \otimes 1\right).$$

D'autre part, l'isomorphisme canonique

$$\theta\ :\ \mathrm{ind}_{J_M N}^G \tau_M \otimes 1 \ \longrightarrow\ \mathrm{ind}_P^G\left(\left(\mathrm{ind}_{J_M}^M\ \tau_M\right) \otimes 1\right),$$

défini par $\theta(f)(g)(p) = f(pg)$ $(g \in G, p \in P)$, détermine un homomorphisme injectif d'algèbres à unité

$$\Theta_P\ :\ \mathrm{End}_{RM}(\mathrm{ind}_{J_M}^M\ \tau_M)\ \hookrightarrow\ \mathrm{End}_{RG}(\mathrm{ind}_{J_M N}^G \tau_M \otimes 1)$$

via $\Theta_P(\phi)(f) = \theta^{-1}\left(g \mapsto \phi(\theta(f)(g))\right)$. Noter que ind_P^G désigne ici la représentation induite parabolique non normalisée ; elle est en l'occurrence isomorphe à la représentation induite normalisée, car le module est trivial sur J_M, mais la définition de Θ_P dépend de ce choix.

On obtient par composition un homomorphisme injectif d'algèbres à unité :

$$\Psi_+^{-1} \circ \Theta_P\ :\ \mathrm{End}_{RM}(\mathrm{ind}_{J_M}^M\ \tau_M)\ \hookrightarrow\ \mathrm{End}_{RG}\left(\mathrm{ind}_J^G \tau\right),$$

soit via les identifications habituelles :

$$\Psi_+^{-1} \circ \Theta_P \ : \ \mathcal{H}_R(M, J_M, \tau_M) \ \hookrightarrow \ \mathcal{H}_R(G, J, \tau).$$

Soit $m \in M$; on note ϕ_m un élément de $\mathcal{H}_R(M, J_M, \tau_M)$ de support contenu dans $J_M m J_M$, et Φ_m l'élément de $\mathcal{H}_R(G, J, \tau)$ de support contenu dans JmJ et valeur en m : $\Phi_m(m) = \phi_m(m)$. On veut comparer les endomorphismes $\widetilde{\Phi_m}$ et $\Psi_+^{-1} \circ \Theta_P(\widetilde{\phi_m})$ de $\mathrm{ind}_P^G \tau$. Il suffit de comparer leurs valeurs sur les générateurs $\iota(w)$, $w \in W$, ou encore de comparer

$$A(w) = \Psi_+(\widetilde{\Phi_m})(\Psi^+(\iota(w))) = \Psi^+(\widetilde{\Phi_m}(\iota(w))) \ \text{ et } \ B(w) = \Theta_P(\widetilde{\phi_m})(\Psi^+(\iota(w))),$$

qui valent respectivement, pour $x \in G$:

$$A(w)(x) = \frac{1}{|J^+|} \sum_{j \in J/J \cap mJm^{-1}} \tau(j)\Phi_m(m) \int_N \iota(w)(m^{-1}j^{-1}nx)dn, \tag{2.6}$$

$$B(w)(x) = \frac{1}{|J^+|} \sum_{j \in J_M/J_M \cap mJ_Mm^{-1}} \tau_M(j)\phi_m(m) \int_N \iota(w)(nm^{-1}j^{-1}x)dn. \tag{2.7}$$

Si m est quelconque on ne peut rien conclure, mais si m est (P, J)-positif, i.e. si $mJ^+m^{-1} \subset J^+$ et $mJ^-m^{-1} \supset J^-$, alors on peut trouver un système de représentants de $J/J \cap mJm^{-1}$ formé d'éléments uj où u appartient à J^+ et j décrit un système de représentants de $J_M/J_M \cap mJ_Mm^{-1}$, le nombre de classes distinctes à $j \in J_M$ fixé étant $[J^+ : mJ^+m^{-1}]$. Ceci, plus un changement de variable $n \mapsto m^{-1}nm$ dans (2.6), dont le module compense le nombre de classes ci-dessus, permet de montrer l'égalité des expressions 2.6 et 2.7. En résumé :

Corollaire. *L'homomorphisme injectif d'algèbres à unité $\Psi_+^{-1} \circ \Theta_P$ vérifie, pour tout élément (P, J)-positif m de M : $\Psi_+^{-1} \circ \Theta_P(\phi_m) = \Phi_m$.*

Bien entendu, vu l'unicité prouvée dans [BK2], $\Psi_+^{-1} \circ \Theta_P$ est exactement l'homomorphisme t de [BK2], 7.2 : on retrouve ainsi une partie du théorème 7.2 de [BK2] en même temps qu'une interprétation de l'homomorphisme donné par ce théorème. Noter que le corollaire ci-desssus est aussi une conséquence immédiate du théorème 2 et de [D], §2.2, où la $\mathcal{H}_R(M, J_M, \tau_M)$-équivariance du morphisme Ψ^+ est démontrée. Les conventions de [D] étant différentes, on a préféré donner les grandes lignes de la démonstration.

III – Suites de paires décomposées.

Poursuivons l'étude de la suite $(J_k, \tau_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ définie en (2.1) en commençant par deux lemmes bien commodes.

Lemme 2. *Soit (J',τ') une autre paire décomposée au-dessus de (J_M,τ_M) relativement à P telle que ${J'}^+\supset J^+$ et ${J'}^-\subset J^-$. On pose pour $f\in \mathrm{ind}_J^G\tau$ et $f'\in \mathrm{ind}_{J'}^G\tau'$:*

$$\Delta^+(f)(x)=\frac{1}{|J^+|}\int_{{J'}^+} f(jx)dj\ ,\quad \Delta^-(f')(x)=\frac{1}{|{J'}^-|}\int_{J^-} f'(jx)dj.$$

Pour tout $w\in W$ et tout $x\in G$, on a les identités :

$$\Delta^+(\iota(w))(x)=\frac{1}{|J^+|}\int_{{J'}^+}\iota(w)(jx)dj=\frac{1}{|{J'}^-|}\int_{J^-}\iota'(w)(xy)dy\ ;$$
$$\Delta^-(\iota'(w))(x)=\frac{1}{|{J'}^-|}\int_{J^-}\iota'(w)(jx)dj=\frac{1}{|J^+|}\int_{{J'}^+}\iota(w)(xy)dy.$$

Les applications Δ^+ et Δ^- sont des homomorphismes de G-modules :

$$\Delta^+ :\ \mathrm{ind}_J^G\tau\longrightarrow \mathrm{ind}_{J'}^G\tau'\quad et\quad \Delta^- :\ \mathrm{ind}_{J'}^G\tau'\longrightarrow \mathrm{ind}_J^G\tau.$$

Démonstration. Démontrons la première égalité, la seconde s'obtient de façon identique. Le support en x de la première expression est contenu dans ${J'}^+J$, celui de la seconde dans $J'J^-$ et ces deux sous-ensembles sont égaux à ${J'}^+J_MJ^-$. Les deux intégrales représentent des fonctions de x invariantes à gauche par ${J'}^+$, à droite par J^-. Reste à vérifier l'identité des valeurs pour $x\in J_M$: la première vaut $\iota(w)(x)=\tau_M(x)(w)$ et la seconde aussi.

Soit $f\in\mathrm{ind}_J^G\tau$; $\Delta^+(f)$ est une fonction lisse à support compact de G dans W et Δ^+ commute visiblement aux translations à droite par G. La représentation $\mathrm{ind}_J^G\tau$ est engendrée par l'image $\iota(W)$ de ι, or les identités précédentes montrent que pour tout $w\in W$, $\Delta^+(\iota(w))$ vérifie $\Delta^+(\iota(w))(jx)=\tau'(j)\Delta^+(\iota(w))(x)$ pour tous $x\in G$ et $j\in J'$, i.e. appartient à $\mathrm{ind}_{J'}^G\tau'$. $\square$

Lemme 3. *Gardons les hypothèses du lemme 2 et posons :*

$$\mathfrak{N}_J^{J'}(x)(w)=\int_{J^-}dy\int_{{J'}^+}\iota(w)(xyn)\,dn\qquad (x\in G\ ,\ w\in W).$$

Alors $\mathfrak{N}_J^{J'}$ appartient à $\mathcal{H}_R(G,J,\tau)$ et vérifie : $\widetilde{\mathfrak{N}_J^{J'}}=|{J'}^-||J^+|\ \Delta^-\circ\Delta^+$.

Démonstration. Il suffit par (0.1) d'établir que pour tous $w\in W$, $x\in G$ on a bien : $\mathfrak{N}_J^{J'}(x)(w)=|{J'}^-||J^+|\ \Delta^-\circ\Delta^+(\iota(w))(x)$, ce que l'on fait à l'aide du lemme 2 :

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}_J^{J'}(x)(w)&=\int_{J^-}dy\int_{{J'}^+}\iota(w)(xyn)\,dn=\frac{|J^+|}{|{J'}^-|}\int_{J^-}dy\int_{J^-}\iota'(w)(nxy)\,dn\\&=\frac{|J^+|}{|{J'}^-|}\int_{J^-}dn\int_{J^-}\iota'(w)(nxy)\,dy\\&=\frac{|J^+|}{|{J'}^-|}\frac{|{J'}^-|}{|J^+|}\int_{J^-}dn\int_{{J'}^+}\iota(w)(ynx)\,dy\\&=|{J'}^-||J^+|\ \Delta^-\circ\Delta^+(\iota(w))(x).\end{aligned}$$

$\square$

Revenant à notre suite (J_k, τ_k), on applique les lemmes précédents à $J' = J_1$. Alors $\Delta^+ = \Psi_0^+$ et $\Delta^- = \Psi_1^-$ et on a par (2.4) :

$$\Delta^- \circ \Delta^+ = L(z^{-1}) \circ \widetilde{\Phi_{z^{-1}}^{(1)}} \circ L(z) \circ \widetilde{\Phi_z^{(0)}} = \Phi_{z^{-1}} \widetilde{* \,\Phi_z}, \quad \text{d'où}$$

Proposition 1. *Soit (J, τ) une paire décomposée au-dessus de (J_M, τ_M) relativement à P. Fixons un élément z de Z^{++} et posons pour $x \in G$, $w \in W$:*

$$\mathfrak{N}_z(x)(w) = \int_{J^-} dy \int_{z^{-1}J^+z} \iota(w)(xyn)\, dn..$$

Alors $\mathfrak{N}_z$ appartient à $\mathcal{H}_R(G, J, \tau)$ et vérifie : $\quad \mathfrak{N}_z = |z^{-1}J^-z||J^+|\ \Phi_{z^{-1}} * \Phi_z$.

Cette proposition va nous permettre de relier l'inversibilité de $\mathfrak{N}_z$ à celle de $\Phi_{z^{-1}}$ et Φ_z. Bien entendu l'inversibilité de $\mathfrak{N}_z$ entraîne l'inversibilité à droite de $\Phi_{z^{-1}}$ et à gauche de Φ_z. Pour en déduire l'inversibilité bilatère nous avons besoin du résultat de finitude ci-dessous ; rappelons que R est, dans tout cet article, un corps commutatif dans lequel p est inversible.

Proposition 2 (M.-F. Vignéras).
(i) Toute représentation lisse irréductible de G sur R est admissible.
(ii) Soient K un sous-groupe ouvert compact de G et ρ une représentation lisse irréductible de K dans un espace vectoriel X sur R. Alors les $\mathcal{H}_R(G, K, \rho)$-modules à droite (ou à gauche) simples sont de dimension finie.

Démonstration (M.-F. Vignéras). (i) Si R est algébriquement clos, c'est [V1], II.2.8 ; pour le cas général il faut lire entre les lignes de [V1], II.4, comme suit.

Soit (π, V) une représentation lisse irréductible de G sur R et soit $\bar{R}$ une clôture algébrique de R. La représentation $(\pi_{\bar{R}}, V_{\bar{R}} = \bar{R} \otimes_R V)$ de G sur $\bar{R}$ obtenue par extension des scalaires est monogène, donc possède un quotient irréductible (π', V'), qui par [V1], II.4.7 est réalisable sur une extension finie E de R, c'est-à-dire : $V' \simeq \bar{R} \otimes_E V'_E$ pour une représentation (π_E, V_E) de G sur E.

Soit donc f un $\bar{R}G$-homomorphisme non nul de $\bar{R} \otimes_R V$ dans $\bar{R} \otimes_E V'_E$ et soit $v \neq 0$, $v \in V$. Puisque v engendre $\bar{R} \otimes_R V$ comme $\bar{R}G$-module, son image $f(v)$ est non nulle et appartient à $F \otimes_E V'_E = V'_F$ pour une extension finie F de E. En composant avec l'injection naturelle de V dans $\bar{R} \otimes_R V$, on trouve un RG-homomorphisme injectif $i : V \hookrightarrow V'_F$.

On a donc, pour tout sous-groupe ouvert compact H de G : $V^H \hookrightarrow (V'_F)^H$. Or $\bar{R} \otimes_F (V'_F)^H$ est contenu dans $(V')^H$ qui est de dimension finie sur $\bar{R}$, donc $(V'_F)^H$ est de dimension finie sur F et sur R.

(ii) Soit Y l'espace de la représentation induite compacte $\mathrm{ind}_K^G \rho$. Comme l'algèbre $\mathcal{H} = \mathcal{H}_R(G, K, \rho)$ s'identifie à $\mathrm{End}_{RG}\left(\mathrm{ind}_K^G \rho\right)$, l'espace Y est naturellement un $(\mathcal{H}, RG)$-bimodule, de type fini comme RG-module.

Soit M un $\mathcal{H}$-module à droite simple. Alors $M \otimes_{\mathcal{H}} Y$ est un RG-module lisse, de type fini comme Y ; il possède donc un quotient simple V. On a :

$$\mathrm{Hom}_{RG}(M \otimes_{\mathcal{H}} Y, V) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(M, \mathrm{Hom}_{RG}(Y, V)),$$

de sorte qu'il existe un $\mathcal{H}$-homomorphisme non nul, donc injectif, de M dans $\mathrm{Hom}_{RG}(Y,V)$, isomorphe à $\mathrm{Hom}_K(X,V) = V_\rho$. Par admissibilité de V, ce dernier espace est de dimension finie et M également. □

Cette proposition, jointe aux résultats de [V2], §II (en particulier II.10.3), permet d'adapter la démonstration de [BK2], Proposition 7.14, pour obtenir :

Corollaire. *Soit (J,τ) une paire décomposée au-dessus de (J_M,τ_M) relativement à P. Les conditions (0.3), (0.4) et (0.5) sont équivalentes.*

La proposition 2 assure que pour un élément Φ de $\mathcal{H}_R(G,J,\tau)$, inversibilité et inversibilité à droite sont équivalentes ([V2], II.10.3), d'où l'équivalence des trois premières conditions ci-dessous :

Proposition 3. *Soit (J,τ) une paire décomposée au-dessus de (J_M,τ_M) relativement à P. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) (J,τ) est une paire couvrante de (J_M,τ_M) relativement à P et à $\bar{P}$.

(ii) Pour un z de Z^{++}, l'élément $\mathfrak{N}_z$ de $\mathcal{H}_R(G,J,\tau)$ est inversible.

(iii) Pour tout z de Z^{++}, l'élément $\mathfrak{N}_z$ de $\mathcal{H}_R(G,J,\tau)$ est inversible.

Si $R=\mathbb{C}$, elles sont aussi équivalentes à chacune des suivantes :

(iv) (J,τ) est une paire couvrante de (J_M,τ_M) relativement à P.

(v) Il existe une suite $(J_k,\tau_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de paires décomposées au-dessus de (J_M,τ_M) relativement à P, contenant (J,τ), telle que la suite $(J_k^+)_{k\in\mathbb{N}}$ soit croissante avec $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} J_k^+ = N$ et la suite $(J_k^-)_{k\in\mathbb{N}}$ décroissante, et telle que pour toute représentation lisse irréductible (π,V) de G et tout $k\in\mathbb{N}$, l'application :

$$\mathfrak{N}_k^\pi \quad : \quad V^{\tau_k} \longrightarrow V^{\tau_k}, \quad w \longmapsto \int_{J_k^-} \pi(y)\,dy \int_{J_{k+1}^+} \pi(n)w\,dn,$$

soit injective.

Démonstration. Restons tout d'abord sur un corps R quelconque. Alors :

$(v) \Rightarrow (iv)$: c'est [B2], proposition 1, qui reste valide grâce au corollaire de la proposition 2, puisque c'est l'injectivité de r_N sur V^τ qui y est montrée. Pour étendre la démonstration au cas d'un corps quelconque, il suffit d'y remplacer l'usage de [B1], lemme 2, par celui du lemme 2 ci-dessus.

$(ii) \Rightarrow (v)$: on insère (J,τ) dans la suite $(J_k,\tau_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ définie en (2.1), où $z\in Z^{++}$ est celui de (ii). Or pour toute suite comme en (v), le lien entre $\mathfrak{N}_{J_0}^{J_1}$ et $\mathfrak{N}_0^\pi$ est donné par $\mathfrak{N}_0^\pi \circ f = F\circ \mathfrak{N}_{J_0}^{J_1}$, si $f\in \mathrm{Hom}_J(\tau,\pi)$ et $F\in\mathrm{Hom}_G(\mathrm{ind}_J^G\tau,\pi)$ sont reliées par $F\circ\iota = f$ ([B2], théorème 2,b ; d'où le fait que $\mathfrak{N}_k^\pi$ envoie V^{τ_k} dans lui-même). L'inversibilité de $\mathfrak{N}_z = \mathfrak{N}_{J_0}^{J_1}$ entraîne l'injectivité de $f\mapsto \mathfrak{N}_0^\pi\circ f$ sur V_τ ; on en déduit l'injectivité sur V^τ par l'argument de [V1], II.3.1, puis par périodicité celle des $\mathfrak{N}_k^\pi$ ([B2], lemme 1).

Supposons maintenant $R = \mathbb{C}$; alors (i) est équivalente à (iv). En effet, une paire décomposée relativement à P l'est aussi relativement à $\bar{P}$, et l'algèbre $\mathcal{H}_R(G, J, \tau)$ est munie d'une involution $F \mapsto \bar{F}$ telle que : $F(x) \neq 0 \iff \bar{F}(x^{-1}) \neq 0$ (voir [BK1], §4), donc l'inversibilité de $\Phi_{z^{-1}}$ pour un z de Z^{++} équivaut à celle de Φ_z. $\square$

Références

[BB] L. BLASCO et C. BLONDEL, 'Types induits des paraboliques maximaux de $Sp_4(F)$ et $GSp_4(F)$', *Ann. Inst. Fourier* (6) 49 (1999) 1805–1851.

[B1] C. BLONDEL, 'Critère d'injectivité pour l'application de Jacquet', *C. R. Acad. Sci. Paris, t. 325, Série I (1997), 1149–1152.*

[B2] C. BLONDEL, 'Une méthode de construction de types induits et son application à G_2', *J. of Algebra 213 (1999), 231–271.*

[BK1] C. J. BUSHNELL and P. C. KUTZKO, *The admissible dual of GL_n over a local field via compact open subgroups,* Ann. Math. Studies 129 (Princeton, 1993).

[BK2] C.J. BUSHNELL and P.C. KUTZKO, 'Smooth representations of reductive p-adic groups: structure theory via types', *Proc. London Math. Soc., Vol. 77 (1998), 582–634.*

[D] J.-F. DAT, 'Types et induction pour les représentations modulaires de groupes p-adiques', *Ann. Scient. E.N.S., Vol. 32 (1999), 1–38.*

[V1] M.-F. VIGNÉRAS, *Représentations l-modulaires d'un groupe p-adique avec l différent de p,* Progress in Math. 137 (Birkhäuser, 1996).

[V2] M.-F. VIGNÉRAS, 'Induced R-representations of p-adic reductive groups', *Selecta Math. (N.S.) 4 (1998), 549–623.*

[W] J. S. WILSON, *Profinite Groups,* London Math. Society Monographs 19 (Oxford University Press, 1998).

C.N.R.S. - Théorie des Groupes - Case 7012,
Institut de Mathématiques de Jussieu,
Université Paris 7,
F-75251 PARIS Cedex 05.
blondel@math.jussieu.fr