Universitatea „Alexandru Ioan Cuza”

Lucrare de licenţă

Teorema lui Peano de existenţă locală

Student:
Cosmin Burtea

Coordonator ştiinţific:
Prof. Ioan I.Vrabie

Prefaţă

Lucrarea de faţă tratează problema existenţei locale pentru problema Cauchy în contextul spaţiilor Banach infinit dimensionale. Aceasta se referă la impunerea unor condiţii suficiente datelor iniţiale ale problemei Cauchy astfel încât aceasta din urmă să aibă cel puţin o soluţie.

În prima parte sunt introduse noţiuniile de spaţiu Banach, operatori liniari definiţi pe aceste spaţii precum şi unele teoreme şi rezultate celebre referitoare la acestea. Urmează prezentarea spaţiului funcţiilor continue definite pe un interval compact cu valori într-un spaţiu Banach şi teorema de compactitate Arzelá-Ascoli. În incheiere sunt prezentate noţiuniile fundamentale legate de teoria semigrupuriilor de operatori liniari şi teorema de generare Hille-Yosida.

Partea a doua este dedicată teoremei de existenţa locală a lui Peano precum şi clasificării soluţiilor problemelor Cauchy în funcţie de comportamentul lor la capătul intervalului de definiţie. Paragraful se încheie cu un rezultat de existenţă pentru o clasă particulară de probleme Cauchy.

Ultima parte a lucrării prezintă două aplicaţii ale teoremei lui Peano la studiul existenţei soluţiilor unor ecuaţii cu derivate parţiale.

Cuprins

1 Capitol introductiv

1.1 Spaţii Banach

Fie X un spaţiu vectorial peste $\mathbb{R}$. Elementul nul al lui X îl vom distinge prin simbolul $\overline{0}$.

O aplicaţie $\|\cdot\| : X \to X$ se numeşte normă pe X dacă verifică următoarele trei condiţii:

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \overline{0}$.
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \; \forall x \in X$ şi $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \; \forall x, y \in X$ şi $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Perechea $(X, \|\cdot\|)$ se numeşte spaţiu vectorial normat.

Definiţia 1.1.1 *Fie $x \in X$ şi $r > 0$. Numim bila deschisă de centru $x \in X$ şi rază $r > 0$ mulţimea:*

$$B(x, r) = \{y \in X : \|y - x\| < r\}.$$

Definiţia 1.1.2 *Fie $x \in X$ şi $r > 0$. Numim bila închisă de centru $x \in X$ şi rază $r > 0$ mulţimea:*

$$\overline{B(x, r)} = \{y \in X : \|y - x\| \leq r\}.$$

Definiţia 1.1.3 *O mulţime $G \subset X$ se numeşte deschisă dacă pentru orice $x \in G$ există $r > 0$ astfel încât:*

$$B(x, r) \subset G.$$

Definiţia 1.1.4 *O mulţime $F \subset X$ se numeşte închisă dacă mulţimea $X \backslash F$ este deschisă.*

Definiţia 1.1.5 *Fie $K \subset X$ o submulţime a lui X. Se numeşte închiderea lui K mulţimea obţinută prin intersecţia tuturor mulţimiilor închise ce conţin mulţimea K.*

Definiţia 1.1.6 *Fie $x \in X$ şi $M \subset X$ o submulţime a lui X. Definim distanţa de la punctul x la mulţimea M prin relaţia:*

$$d(x, M) = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}.$$

Definiţia 1.1.7 *Fie $M \subset X$ o submulţime a spaţiului X. Atunci diametrul lui M se defineşte prin relaţia:*

$$\delta(M) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in M\}.$$

Teorema 1.1.1 *Orice bilă deschisă din X este o mulţime deschisă.*

Teorema 1.1.2 *Într-un spaţiu vectorial normat, pentru orice două puncte distincte $x, y \in X$ există două mulţimi deschise G_x, G_y astfel încât $x \in G_x$, $y \in G_y$ şi $G_x \cap G_y = \emptyset$. Vom spune ca spaţiul vectorial normat este separat Hausdorff.*

Definiţia 1.1.8 *Spunem că un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ este convergent în X dacă există $x_0 \in X$ astfel încât pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât*

$$n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow \|x_n - x_0\| \leq \varepsilon.$$

Definiţia 1.1.9 *Spunem că un şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ este Cauchy dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât:*

$$\min\{m, n\} \geq n(\varepsilon) \Rightarrow \|x_m - x_n\| \leq \varepsilon.$$

Observaţia 1.1.1 *O consecinţă importantă a faptului că un spaţiu vectorial normat este separat Hausdorff este unicitatea limitei unui şir convergent.*

Teorema 1.1.3 *Orice şir convergent $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ este Cauchy.*

Definiţia 1.1.10 *Un spaţiu vectorial normat $(X, \|\cdot\|)$ se numeşte spaţiu Banach dacă orice şir Cauchy din X este convergent în X.*

Definiţia 1.1.11 *Fie $(X, \|\cdot\|_X)$ şi $(Y, \|\cdot\|_Y)$ două spaţii vectoriale normate. Fie $f : X \to Y$ o aplicaţie definită pe X cu valori în Y. Aplicaţia f se numeşte continuă în punctul $x_0 \in X$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât:*

$$\|x - x_0\|_X \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\|_Y \leq \varepsilon.$$

Definiţia 1.1.12 *Fie $(X, \|\cdot\|_X)$ şi $(Y, \|\cdot\|_Y)$ două spaţii vectoriale normate. Fie $f : X \to Y$ o aplicaţie definită pe X cu valori în Y. Aplicaţia f se numeşte continuă pe X dacă este continuă în fiecare punct al lui X.*

Definiţia 1.1.13 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu vectorial normat şi $K \subset X$, o submulţime a sa. Dacă fiecărui punct $x \in K$ îi facem să corespundă o mulţime deschisă G_x care să îl conţină atunci spunem că familia*

$$\mathcal{G} = \{G_x \cap K : x \in K\}$$

reprezintă o acoperire deschisă a lui K.

Definiţia 1.1.14 *Fie $(X, \|\cdot\|)$ un spaţiu vectorial normat, $K \subset X$ şi*

$$\mathcal{G} = \{G_x \cap K : x \in K\}$$

o acoperire deschisă a lui K. O submulţime $\mathcal{D} \subset \mathcal{G}$ se numeşte subacoperire a lui $\mathcal{G}$ dacă:

$$\bigcup_{G\in\mathcal{D}} G = K.$$

Definiţia 1.1.15 *O submulţime K a unui spaţiu vectorial normat $(X, \|\cdot\|)$ se numeşte compactă dacă din orice acoperire deschisă a sa se poate extrage o subacoperire finită.*

Se poate demonstra următoarea teoremă:

Teorema 1.1.4 *O submulţime K a unui spaţiu vectorial normat $(X, \|\cdot\|)$ este compactă dacă şi numai dacă din orice şir $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ se poate extrage un subşir convergent la un element din K.*

A se vedea Nicolescu[1].

Definiţia 1.1.16 *O submulţime K a unui spaţiu vectorial normat $(X, \|\cdot\|)$ se numeşte precompactă dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există o submulţime finită $F_\varepsilon \subset K$ astfel încât:*

$$d(x, F_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

pentru orice $x \in K$.

Definiţia 1.1.17 *O submulţime K a unui spaţiu vectorial normat $(X, \|\cdot\|)$ se numeşte relativ compactă dacă închiderea sa este compactă.*

Teorema 1.1.5 *O submulţime K a unui spaţiu Banach X este relativ compactă dacă şi numai dacă este precompactă.*

Demonstraţie. Partea de necesitate a teoremei este evidentă. Să presupunem atunci că submulţimea K este precompactă. Fie $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir arbitrar din K. Atunci există o mulţime finită $F_1 \subset K$ astfel încât pentru orice $x \in K$ să avem:

$$d(x, F_1) \leq \frac{1}{2}.$$

Caracterul finit al lui F_1 asigură existenţa unui element $y_1 \in F_1$ şi a unui subşir $\left(x_n^1\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât:

$$\left(x_n^1\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B\left(y_1, \frac{1}{2}\right)}.$$

Din nou, datorită faptului că submulţimea K este precompactă, există o mulţime finită F_2 astfel încât pentru orice $x \in K$ să avem:

$$d(x, F_2) \leq \frac{1}{4}.$$

Faptul că această mulţime este finită asigură existenţa unui $y_2 \in F_2$ şi a unui subşir $\left(x_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \left(x_n^1\right)_{n\in\mathbb{N}}$ astfel încât:

$$\left(x_n^2\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B\left(y_2, \frac{1}{4}\right)}.$$

Procedând iterativ, construim un şir de puncte $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi un şir de şiruri $\left((x_n^m)_{n\in\mathbb{N}}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ cu proprietăţile:

$$(x_n^m)_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_n^p)_{n\in\mathbb{N}} \ \ \forall m,p\in\mathbb{N} \ m\geq p \tag{1.1.1}$$

şi

$$(x_n^m)_{n\in\mathbb{N}} \subset \overline{B\left(y_m,\frac{1}{2m}\right)} \ \ \forall m\in\mathbb{N}. \tag{1.1.2}$$

Să alegem şirul $(x_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Fie $\varepsilon>0$ şi să alegem $n(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ astfel încât $\varepsilon^{-1}\leq n(\varepsilon)$. Atunci pentru orice $m,p\in\mathbb{N}$ mai mari ca $n(\varepsilon)$ avem din (1.1.1) că:

$$x_p^p, x_m^m \in \left(x_n^{n(\varepsilon)}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Din (1.1.2) rezultă faptul că x_p^p, x_m^m aparţin bilei $\overline{B\left(y_{n_\varepsilon},\frac{1}{2n_\varepsilon}\right)}$. Aşadar avem:

$$\left\|x_p^p - x_m^m\right\| \leq \left\|x_p^p - y_{n_\varepsilon}\right\| + \|y_{n_\varepsilon} - x_m^m\| \leq \frac{1}{n_\varepsilon} \leq \varepsilon,$$

deci şirul $(x_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ este Cauchy. Ca atare el este convergent. Evident că $(x_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ este subşir al şirului iniţial. ■

Teorema 1.1.6 (Mazur) *Închiderea înfăşurătorii convexe a unei submulţimi compacte a un spaţiu Banach este compactă.*

Corolar 1.1.1 *Fie K o submulţime compactă în X şi fie $\mathcal{F}$ o familie de funcţii continue de la $[a,b]$ în K. Atunci:*

$$\left\{\int_a^b f(t)dt : f\in\mathcal{F}\right\}$$

este relativ compactă în X.

1.2 Operatori liniari

Definiţia 1.2.1 *Fie $(X,\|.\|)$ un spaţiu vectorial normat. Aplicaţia $T:X\to X$ se numeşte operator liniar dacă:*

- $T(\alpha x)=\alpha T(x)\ \forall x\in X$ *şi* $\forall\alpha\in\mathbb{R}$
- $T(x)+T(y)=T(x+y)\ \forall x,y\in X$ *şi* $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Definiţia 1.2.2 *Fie $(X,\|.\|)$ un spaţiu vectorial normat. Un operator liniar $T:X\to X$ se numeşte mărginit dacă există o constantă $M>0$ astfel încât:*

$$\|T(x)\|\leq M\|x\|$$

pentru orice $x\in X$.

Teorema 1.2.1 *Fie X un spaţiu vectorial normat şi fie $T : X \to X$ un operator liniar. Atunci următoarele afirmaţi sunt echivalente:*

- *T continuu*
- *T mărginit*
- *T continuu într-un punct.*

Demonstraţie. Presupunem T continuu. Atunci să scriem condiţia de continuitate în origine. Dacă ţinem cont şi de faptul că $T(\overline{0}) = \overline{0}$, obţinem existenţa unui $\delta > 0$ pentru care are loc:

$$\|x\| \leq \delta \Rightarrow \|T(x)\| \leq 1.$$

Fie $x \in X$, $x \neq \overline{0}$. Evident că $\left\| \|x\|^{-1} \delta x \right\| = \delta$ deci:

$$\left\| T\left(\|x\|^{-1} \delta x \right) \right\| \leq 1 \Rightarrow \|T(x)\| \leq \delta^{-1} \|x\|$$

astfel că operatorul T este mărginit.

Presupunem T mărginit. Fie $x, y \in X$. Atunci:

$$\|T(x) - T(y)\| = \|T(x-y)\| \leq M \|x-y\|$$

ceea ce demonstrează că T este Lipschitz continuu deci continuu.

Fie $x_0 \in X$ şi să presupunem T continuu în x_0. Atunci există un $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in X$ să avem:

$$\|x - x_0\| \leq \delta \Rightarrow \|T(x) - T(x_0)\| \leq 1.$$

Fie $x \in X$ un punct arbitrar diferit de x_0. Atunci $\left\| \left(\|x\|^{-1} \delta x + x_0 \right) - x_0 \right\| = \delta$ deci:

$$\left\| T\left(\left(\|x\|^{-1} \delta x + x_0 \right) \right) - T(x_0) \right\| \leq 1,$$

de unde rezultă:

$$\|T(x)\| \leq \delta^{-1} \|x\|.$$

Deci T mărginit. ■

În continuare vom considera $\mathcal{L}(X)$ mulţimea operatoriilor liniari mărginiţi definiţi pe spaţiul Banach X cu valori în X. Să introducem următoarea normă, numită norma operatorială, sau norma supremum:

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T(x)\|.$$

Teorema 1.2.2 *Perechea $\left(\mathcal{L}(X), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)} \right)$ este un spaţiu Banach.*

Demonstraţie. În primul rând este evident că $\mathcal{L}(X)$ se organizează ca un spaţiu vectorial real cu elementul nul $\mathbb{O}_X : X \to X$ definit de:

$$\mathbb{O}_X(x) = \overline{0} \ \forall x \in X$$

În continuare ne vom referi la elementul nul al spaţiului $\mathcal{L}(X)$ ca fiind operatorul nul.

Dacă $\overline{0} = \|T\|_{\mathcal{L}(X)} = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\|$ atunci pentru orice $x \in X$ cu $\|x\| \leq 1$, avem:

$$\|T(x)\| = 0.$$

Fie $x \in X$. Atunci:

$$\left\| T(\|x\|^{-1} x) \right\| = \overline{0} \Rightarrow \|T(x)\| = 0 \Leftrightarrow T(x) = \overline{0}$$

deci T este operatorul nul. Deci:

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X)} = 0 \Leftrightarrow T = \mathbb{O}_X. \tag{1.2.1}$$

Avem imediat că:

$$\|\alpha T\|_{\mathcal{L}(X)} = |\alpha| \, \|T\|_{\mathcal{L}(X)} \, . \tag{1.2.2}$$

Fie T şi S din $\mathcal{L}(X)$. Atunci pentru orice $x \in X$ cu $\|x\| \leq 1$, avem că:

$$\begin{aligned} \|T(x) + S(x)\| &\leq \|T(x)\| + \|S(x)\| \\ &\leq \|T\|_{\mathcal{L}(X)} + \|S\|_{\mathcal{L}(X)} \, . \end{aligned}$$

Trecând la supremum în partea stângă a inegalităţii de mai sus obţinem:

$$\|T + S\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(X)} + \|S\|_{\mathcal{L}(X)} \, . \tag{1.2.3}$$

Evident, relaţiile (1.2.1), (1.2.2) şi (1.2.3) asigură faptul că aplicaţia $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(X)} : \mathcal{L}(X) \to \mathbb{R}^+$ este o normă.

Să demonstrăm că această normă oferă structură de spaţiu Banach spaţiului $\mathcal{L}(X)$. Într-adevăr, fie $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}(X)$ un şir Cauchy. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$\min\{m, n\} \geq n(\varepsilon) \Rightarrow \|T_m - T_n\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \varepsilon,$$

relaţie care este echivalentă cu:

$$\min\{m, n\} \geq n(\varepsilon) \Rightarrow \|T_m(x) - T_n(x)\| \leq \varepsilon$$

pentru orice $x \in X$, $\|x\| \leq 1$. Fie $x \in X$. Atunci, din faptul că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$\min\{m, n\} \geq n(\varepsilon) \Rightarrow \|T_m(x) - T_n(x)\| \leq \varepsilon \, \|x\| \, ,$$

obţinem că pentru orice $x \in X$ şirul $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ este Cauchy. În virtutea faptului că X este Banach, deduce că şirul este convergent. Atunci operatorul $T : X \to X$ dat de relaţia:

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x),$$

este binedefinit. Se observă că T este operator liniar. Într-adevăr, avem relaţiile:

$$\begin{aligned} T(x+y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(x+y) = \lim_{n\to\infty} [T_n(x) + T_n(y)] \\ &= \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \lim_{n\to\infty} T_n(y) = T(x) + T(y) \end{aligned}$$

şi:

$$\begin{aligned} T(\alpha x) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x) = \lim_{n\to\infty} \alpha T_n(x) \\ &= \alpha \lim_{n\to\infty} T_n(x) = \alpha T(x). \end{aligned}$$

Vom demonstra că T este continuu în origine, astfel rezultând că este mărginit. Procedăm prin reducere la absurd. Să presupunem că există $\varepsilon > 0$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$ să existe $x_n \in \overline{B(0,1)}$ cu $\|x_n\| \le \frac{1}{n}$ astfel încât:

$$\|T(x_n)\| > \varepsilon.$$

Din relaţia:

$$\begin{aligned} |\|T_p(x) - T(x)\| - \|T_p(y) - T(y)\|| &\le \|T_p(x) - T_p(y)\| \\ &\le \|T_p\|_{\mathcal{L}(X)} \|x - y\| \end{aligned}$$

obţinem continuitatea funcţiei $x \to \|T_p(x) - T(x)\|$. În plus, avem:

$$\lim_{x\to 0} \|T_p(x) - T(x)\| = \|T_p(0) - T(0)\| = 0.$$

Să fixăm un $p \in \mathbb{N}$. Atunci, din relaţia:

$$\begin{aligned} \varepsilon &\le \|T(x_n)\| \\ &\le \|T(x_n) - T_p(x_n)\| + \|T_p(x_n)\|, \end{aligned}$$

trecând la limită pentru $n \to \infty$ obţinem contradicţia. Astfel T este mărginit.
■

1.3 Spaţiul $C([a, b], X)$

Să considerăm $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$. Vom nota prin $C([a, b], X)$ clasa funcţiilor continue pe $[a, b]$ ce iau valori în spaţiul Banach X.

Definiţia 1.3.1 *O funcţie $f \in C([a,b],X)$ se numeşte uniform continuă pe $[a,b]$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $t,s \in [a,b]$ cu $|t-s| < \delta(\varepsilon)$ să avem:*

$$\|f(t) - f(s)\| < \varepsilon.$$

Teorema 1.3.1 *Orice funcţie $f \in C([a,b],X)$ este uniform continuă pe $[a,b]$.*

Demonstraţie. În baza definiţiei continuităţii unei funcţii într-un punct, pentru orice $t \in [a,b]$, există $\delta(\varepsilon,t) > 0$ astfel încât să avem:

$$s \in (t - \delta(\varepsilon,t), t + \delta(\varepsilon,t)) \Rightarrow ||f(s) - f(t)|| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.3.1}$$

Evident avem:

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{t\in[a,b]} \left(t - \frac{\delta(\varepsilon,t)}{2}, t + \frac{\delta(\varepsilon,t)}{2}\right).$$

Întrucât intervalul închis $[a,b]$ este compact iar în membrul drept al relaţiei de mai sus reprezintă o acoperire deschisă pentru $[a,b]$, avem, via teoremei Borel-Lebesgue, posibilitatea extragerii unei subacoperiri finite:

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n(\varepsilon)} \left(t_k - \frac{\delta(\varepsilon_k,t_k)}{2}, t_k + \frac{\delta(\varepsilon_k,t_k)}{2}\right).$$

Să alegem $\delta^* > 0$ astfel încât:

$$\delta^* < \min\left\{\frac{\delta(\varepsilon_k,t_k)}{2}, k \in \overline{1,n(\varepsilon)}\right\}.$$

Pentru orice $t,s \in [a,b]$ cu proprietatea că $|s-t| < \delta^*$, avem garantată existenţa unui $k \in \overline{1,n(\varepsilon)}$ astfel încât:

$$t \in \left(t_k - \frac{\delta(\varepsilon_k,t_k)}{2}, t_k + \frac{\delta(\varepsilon_k,t_k)}{2}\right) \subset (t_k - \delta(\varepsilon_k,t_k), t_k + \delta(\varepsilon_k,t_k)). \tag{1.3.2}$$

Atunci:

$$\begin{aligned} |s - t_k| &\leq |s-t| + |t-t_k| \\ &\leq \delta^* + \frac{\delta(\varepsilon_k,t_k)}{2} < \delta(\varepsilon_k,t_k) \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că:

$$s \in (t_k - \delta(\varepsilon_k,t_k), t_k + \delta(\varepsilon_k,t_k)). \tag{1.3.3}$$

Din (1.3.1),(1.3.2) şi (1.3.3) avem:

$$||f(s) - f(t_k)|| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1.3.4}$$

şi:

$$||f(t) - f(t_k)|| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.3.5}$$

Adunând (1.3.4) şi (1.3.5) şi folosind inegalitatea triunghiului, obţinem:

$$||f(s) - f(t)|| < \varepsilon.$$

Cum $s, t \in [a, b]$ au fost aleşi arbitrar cu $|s - t| < \delta^*$, teorema este demonstrată. ■

Definiţia 1.3.2 *O funcţie $f : [a, b] \to X$ se numeşte mărginită dacă există o constantă $M > 0$ astfel încât pentru orice $t \in [a, b]$ să avem:*

$$\|f(t)\| \leq M$$

Teorema 1.3.2 *Orice funcţie $f \in C([a, b], X)$ este mărginită.*

Demonstraţie. Vom demonstra prin reducere la absurd. Să presupunem deci că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $t_n \in [a, b]$ astfel încât:

$$\|f(t_n)\| \geq n. \tag{1.3.6}$$

Din faptul că $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$, avem datorită lemei lui Cesàro, că $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite un subşir convergen către un punct $t_0 \in [a, b]$. Atunci, trecând la limită pe acest subşir în relaţia (1.3.6), am obţine că $f(t_0) \geq \infty$ ceea ce este evident imposibil. Atunci presupunerea făcută este falsă, astfel că f este mărginită. ■

În continuare să observăm că spaţiul $C([a, b], X)$ se organizează ca un spaţiu vectorial real, introducănd operaţiile de adunare:

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t)$$

respectiv de înmulţire cu scalari:

$$(\alpha f)(t) = \alpha f(t)$$

pentru orice $f, g \in C([a, b], X)$, orice $\alpha \in \mathbb{R}$ şi orice $t \in [a, b]$. De asemenea să definim $\|\cdot\|_\infty : C([a, b], X) \to \mathbb{R}^+$ prin:

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} \|f(t)\| < +\infty.$$

Aceasta este o normă pe $C([a, b], X)$, astfel încât $(C([a, b], X), \|\cdot\|_\infty)$ devine spaţiu vectorial normat. Vom demonstra în continuare că acesta este spaţiu Banach.

Teorema 1.3.3 *Spaţiul vectorial normat $(C([a, b], X), \|\cdot\|_\infty)$ este spaţiu Banach.*

Demonstraţie. Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([a,b],X)$ un şir Cauchy. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ şi există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$\min\{m,n\} \geq n(\varepsilon) \Rightarrow \sup_{t\in[a,b]} \|f_m(t) - f_n(t)\| < \varepsilon. \tag{1.3.7}$$

Afirmaţia precedentă implică faptul că pentru orice $t \in [a,b]$, şirul $(f_n(t))_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ este Cauchy. Atunci putem defini funcţia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, prin:

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t), \tag{1.3.8}$$

pentru orice $t \in [a,b]$. Vom arăta că $f \in C([a,b],X)$. Să presupunem că există un $\varepsilon_0 > 0$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$ există $m(n) \in \mathbb{N}$ şi există $t_n \in [a,b]$ astfel încât $m(n) > n$ şi:

$$\left\|f_{m(n)}(t_n) - f(t_n)\right\| > \varepsilon_0. \tag{1.3.9}$$

Cum şirul $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$, el admite un subşir convergent. Pentru simplitatea scrierii, vom considera că şirul $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent.

Să observăm că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ funcţia $t \to \|f_n(t) - f(t)\|$ este continuă pe $[a,b]$. Într-adevăr pentru orice $t, s \in [a,b]$ avem:

$$|\|f_n(t) - f(t)\| - \|f_n(s) - f(s)\|| \leq \|f_n(t) - f_n(s)\|,$$

care, datorită continuităţii lui f_n, poate fi făcută oricât de mică pentru t, s apropriaţi.

Din (1.3.8), există un $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$\left\|f_{n_1(\varepsilon)}(t_0) - f(t_0)\right\| \leq \frac{\varepsilon_0}{4}. \tag{1.3.10}$$

Din faptul că $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge la t_0 şi din continuitatea funcţiei
$t \to \left\|f_{n_1(\varepsilon)}(t) - f(t)\right\|$ rezultă existenţa unui $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$n \geq n_2(\varepsilon) \Rightarrow \left|\left\|f_{n_1(\varepsilon)}(t_n) - f(t_n)\right\| - \left\|f_{n_1(\varepsilon)}(t_0) - f(t_0)\right\|\right| \leq \frac{\varepsilon_0}{4}.$$

Luând în considerare şi (1.3.10), avem că:

$$\left\|f_{n_1(\varepsilon)}(t_n) - f(t_n)\right\| \leq \frac{\varepsilon_0}{4} + \frac{\varepsilon_0}{4} = \frac{\varepsilon_0}{2}. \tag{1.3.11}$$

De asemenea, din (1.3.7), rezultă că există $n_3(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $t \in [a,b]$ şi pentru orice $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\min\{m,n\} > n_3(\varepsilon) \Rightarrow \|f_m(t) - f_n(t)\| \leq \frac{\varepsilon_0}{2} \tag{1.3.12}$$

Acum, considerând un $n > \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon), n_3(\varepsilon)\}$ şi având în vedere relaţiile (1.3.9), (1.3.11) şi (1.3.12), obţinem:

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 &< \left\|f_{m(n)}(t_n) - f(t_n)\right\| \leq \left\|f_{m(n)}(t_n) - f_{n_{1(\varepsilon)}}(t_n)\right\| + \left\|f_{n_1(\varepsilon)}(t_n) - f(t_n)\right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0.\end{aligned}$$

Contradicţia poate fi eliminată doar dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$n > n(\varepsilon) \Rightarrow \sup_{t\in[a,b]} \|f_n(t) - f(t)\| < \varepsilon. \tag{1.3.13}$$

Să fixăm un punct arbitrar $s_0 \in [a,b]$ şi să observăm că:

$$\|f(s) - f(s_0)\| \leq \|f(s) - f_n(s)\| + \|f_n(s) - f_n(s_0)\| + \|f_n(s_0) - f(s_0)\|$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Concluzia teoremei urmează din continuitatea funcţiilor $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şi din (1.3.13). ■

Definiţia 1.3.3 *O familie de funcţii $\mathcal{F}$ din $C([a,b],X)$ se numeşte echicontinuă într-un punct $t \in [a,b]$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon,t) > 0$ astfel încât pentru orice $s \in [a,b]$ cu $|t-s| < \delta(\varepsilon,t)$ să avem:*

$$\|f(t) - f(s)\| < \varepsilon$$

pentru toate funcţiile $f \in \mathcal{F}$.

Definiţia 1.3.4 *O familie $\mathcal{F}$ se numeşte echicontinuă pe $[a,b]$ dacă este echicontinuă în fiecare punct din $[a,b]$.*

Definiţia 1.3.5 *O familie $\mathcal{F}$ se numeşte uniform echicontinuă pe $[a,b]$ dacă şi numai dacă este echicontinuă pe $[a,b]$ şi $\delta(\varepsilon,t)$ se poate alege independent de $t \in [a,b]$.*

Lema 1.3.1 *O familie de funcţii $\mathcal{F}$ este echicontinuă pe $[a,b]$ dacă şi numai dacă este uniform echiontinuă pe $[a,b]$*

Demonstraţie. În mod evident, orice familie uniform echicontinuă pe $[a,b]$ este echicontinuă pe $[a,b]$. Să presupunem că $\mathcal{F}$ este echicontinuă pe $[a,b]$. În baza definiţiei, pentru orice $t \in [a,b]$, există $\delta(\varepsilon,t) > 0$ aşa încât pentru orice $f \in \mathcal{F}$ să avem:

$$s \in (t - \delta(\varepsilon,t), t + \delta(\varepsilon,t)) \Rightarrow ||f(s) - f(t)|| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.3.14}$$

Evident avem:

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{t\in[a,b]} \left(t - \frac{\delta(\varepsilon,t)}{2}, t + \frac{\delta(\varepsilon,t)}{2}\right).$$

Întrucât intervalul închis $[a,b]$ este compact iar în membrul drept al relaţiei de mai sus reprezintă o acoperire deschisă pentru $[a,b]$, avem via teoremei Borel-Lebesgue posibilitatea extragerii unei subacoperiri finite:

$$[a,b] \subseteq \bigcup_{k=1}^{n(\varepsilon)} \left(t_k - \frac{\delta(\varepsilon_k,t_k)}{2}, t_k + \frac{\delta(\varepsilon_k,t_k)}{2}\right).$$

Să alegem $\delta^* > 0$ astfel încât:

$$\delta^* < \min\left\{\frac{\delta(\varepsilon_k, t_k)}{2}, k \in \overline{1, n(\varepsilon)}\right\}.$$

Pentru orice $t, s \in [a, b]$ cu proprietatea că $|s - t| < \delta^*$, avem garantată existenţa unui $k \in \overline{1, n(\varepsilon)}$ astfel încât:

$$t \in \left(t_k - \frac{\delta(\varepsilon_k, t_k)}{2}, t_k + \frac{\delta(\varepsilon_k, t_k)}{2}\right) \subset (t_k - \delta(\varepsilon_k, t_k), t_k + \delta(\varepsilon_k, t_k)). \quad (1.3.15)$$

Atunci:

$$\begin{aligned} |s - t_k| &\le |s - t| + |t - t_k| \\ &\le \delta^* + \frac{\delta(\varepsilon_k, t_k)}{2} < \delta(\varepsilon_k, t_k) \end{aligned}$$

ceea ce înseamnă că:

$$s \in (t_k - \delta(\varepsilon_k, t_k), t_k + \delta(\varepsilon_k, t_k)). \quad (1.3.16)$$

Din (1.3.14),(1.3.15) şi (1.3.16) avem că pentru orice $f \in \mathcal{F}$:

$$||f(s) - f(t_k)|| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.3.17)$$

şi:

$$||f(t) - f(t_k)|| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.3.18)$$

Adunând (1.3.17) şi (1.3.18) şi folosind inegalitatea triunghiului, obţinem că pentru orice $f \in \mathcal{F}$:

$$||f(s) - f(t)|| < \varepsilon.$$

Cum $s, t \in [a, b]$ au fost aleşi arbitrar, lema este demonstrată. ■

Teorema 1.3.4 (Arzelà-Ascoli) *O familie $\mathcal{F} \in C([a, b], X)$ este relativ compactă dacă şi numai dacă:*

- *$\mathcal{F}$ este echicontinuă pe $[a, b]$;*
- *Există o mulţime $\mathcal{D} \subset [a, b]$ densă în $[a, b]$ astfel încât pentru orice $t \in \mathcal{D}$, mulţimiile:*

  $$\mathcal{F}(t) = \{f(t) : f \in \mathcal{F}\}$$

  sunt relativ compacte în X.

Demonstraţie. Începem cu partea de necesitate a teoremei. Fie $\mathcal{F}$ relativ compactă. Atunci conform teoremei (1.1.5), $\mathcal{F}$ este precompactă. Astfel, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ şi există $\left\{f_1, f_2, \ldots, f_{n(\varepsilon)}\right\} \in \mathcal{F}$ astfel încât pentru orice $f \in \mathcal{F}$ există un $i(f) \in \overline{1, n(\varepsilon)}$ cu proprietatea că:

$$\left\|f - f_{i(f)}\right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1.3.19)$$

Pentru orice $i \in \overline{1, n(\varepsilon)}$ funcţia f_i fiind continuă este uniform continuă. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_i > 0$ astfel încât:

$$|t - s| < \delta_i \Rightarrow \|f_i(t) - f_i(s)\| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.3.20}$$

Fie $f \in \mathcal{F}$ şi $t, s \in [a, b]$ cu $|t - s| < \min_{i \in \overline{1, n(\varepsilon)}} \delta_i$. Atunci:

$$\begin{aligned} \|f(t) - f(s)\| &\leq \left\|f(t) - f_{i(f)}(t)\right\| + \left\|f_{i(f)}(t) - f_{i(f)}(s)\right\| + \left\|f_{i(f)}(s) - f(s)\right\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

şi astfel $\mathcal{F}$ este echicontinuă.

Să demonstrăm că $\mathcal{F}(t)$, definită ca în enunţul teoremei, este relativ compactă în X pentru orice $t \in [a, b]$. Fie $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}(t)$. Atunci şirul de funcţii $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ admite un subşir $(f_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent uniform la o funcţie $f \in C([a, b], X)$. Dar convergenţa, fiind uniformă, este şi punctuală deci avem că

$$\lim_{n \to \infty} f_{k_n}(t) = f(t) \in X,$$

ceea ce demonstrează că pentru orice $t \in [a, b]$ mulţimea $\mathcal{F}(t)$ este relativ compactă în X.

Astfel partea de necesitate a teoremei este demonstrată.

Să continuăm cu partea de suficienţă. Fie $\mathcal{D} \subset [a, b]$ densă şi să presupunem că $\mathcal{F}$ este echicontinuă iar pentru orice $t \in \mathcal{D}$, $\mathcal{F}(t) \subset X$ este relativ compactă. Am văzut că noţiuniile de echicontinuitate şi de uniform echicontinuitate coincid. Prin urmare pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încât pentru orice $t, s \in [a, b]$ şi pentru orice $f \in \mathcal{F}$ să avem:

$$|t - s| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|f(t) - f(s)\| \leq \varepsilon$$

Pentru că $\mathcal{D}$ este densă în $[a, b]$ fie $(a, t_1, t_2, \ldots, t_n, b)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ cu norma mai mică ca $\delta(\varepsilon)$ şi cu $t_i \in \mathcal{D}$ pentru $i \in \overline{1, n}$. Atunci conform teoremei lui Tychonoff avem că spaţiul produs $\mathcal{F}(t_1) \times \mathcal{F}(t_2) \times \ldots \mathcal{F}(t_n)$ înzestrat cu norma:

$$\|(f_1(t_1), f_2(t_2), \ldots, f_n(t_n))\|_{\mathcal{F}(t_1) \times \mathcal{F}(t_2) \times \ldots \mathcal{F}(t_n)} = \max_{i \in \overline{1, n}} \|f_i(t_i)\|$$

este relativ compact. Ca atare, mulţimea $\{(f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_n)) : f \in \mathcal{F}\}$ este relativ compactă. Atunci este precompactă şi pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\left\{f_1, f_2, \cdots, f_{n(\varepsilon)}\right\} \in \mathcal{F}$ astfel încât pentru orice $f \in \mathcal{F}$ există $i(f) \in \overline{1, n(\varepsilon)}$ astfel încât:

$$\max_{i \in \overline{1, n}} \left\|f(t_i) - f_{i(f)}(t_i)\right\| < \varepsilon.$$

Pentru orice $t \in [a, b]$ avem că există un $j \in \overline{1, n}$ astfel încât $|t - t_j| < \delta$. Dar atunci să observăm că:

$$\left\|f(t) - f_{i(f)}(t)\right\| \leq \|f(t) - f(t_j)\| + \left\|f(t_j) - f_{i(f)}(t_j)\right\| + \left\|f_{i(f)}(t_j) - f_{i(f)}(t)\right\|$$

ceea ce înseamnă că $\mathcal{F}$ este precompactă în $C([a,b],X)$. Deci ea este relativ compactă în $C([a,b],X)$. ■

Prezentăm în continuare două consecinţe importante ale teoremei:

Corolar 1.3.1 *Fie* $\mathcal{F} \in C([a,b],X)$ *relativ compactă. Atunci:*

$$\mathcal{F}([a,b]) = \{f(t) : f \in \mathcal{F},\ t \in [a,b]\}$$

este o mulţime relativ compactă în X.

Demonstraţie. Fie $\{f_n(t_n) : n \in \mathbb{N}\}$ un şir Atunci, din $\mathcal{F}([a,b])$, putem extrage un subşir $\{f_{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$ care să fie convergent uniform pe $[a,b]$ la o funcţie $g \in C([a,b],X)$. Şirul $\{t_{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$ este mărginit deci putem extrage un subşir convergent la un $t^* \in [a,b]$, subşir pe care îl vom presupune a fi chiar şirul $\{t_{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$. Evident, avem:

$$\lim_{n\to\infty} f_{k_n}(t_{k_n}) = g(t^*)$$

Într-adevăr:

$$||f_{k_n}(t_{k_n}) - g(t^*)|| \le ||f_{k_n}(t_{k_n}) - f_{k_n}(t^*)|| + ||f_{k_n}(t^*) - g(t^*)||\,.$$

Primul termen din membrul al doilea poate fi făcut oricât de mic datorită echicontinuităţii şirului $\{f_{k_n} : n \in \mathbb{N}\}$ iar al doilea termen poate fi făcut oricât de mic datorită convergenţei uniforme a lui f_{k_n} la g. ■

Corolar 1.3.2 *Fie* $U \subset X$ *nevidă şi închisă,* $g : [a,b] \times U \to X$ *o funcţie continuă,*

$$\mathcal{U} = \{u \in C([a,b],X) : \forall t \in [a,b],\ u(t) \in U\}$$

şi fie $G : \mathcal{U} \to C([a,b],X)$, *operatorul de superpoziţie ataşat lui* g:

$$G(u)(t) = g(t,u(t))$$

pentru orice $t \in [a,b]$ *şi orice* $u \in \mathcal{U}$. *Atunci* G *este o funcţie continuă de la* $\mathcal{U}$ *la* $C([a,b],X)$, *ambele spaţii fiind considerate cu topologia convergenţei uniforme.*

Demonstraţie. Fie $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ un şir din $\mathcal{U}$, convergent uniform pe $[a,b]$ la o funcţie u din $\mathcal{U}$. Evident $\{u_m : m \in \mathbb{N}\}$ este relativ compactă în $C([a,b],X)$. Atunci, conform corolarului precedent avem faptul că mulţimea:

$$K = \overline{\{u_m(t); m \in \mathbb{N}, t \in [a,b]\}} \subset U$$

este compactă în X. Ca o consecinţa, avem că restricţia lui g la $[a,b] \times K$ este uniform continuă ceea ce înseamnă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încât, pentru orice $(t,v),(s.w) \in [a,b] \times K$ să avem:

$$|t-s| + ||v-w|| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow ||g(t,v) - g(s,w)|| < \varepsilon.$$

Pentru că $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge uniform pe $[a,b]$ la u, există un număr natural $m(\varepsilon)$ aşa încât:

$$m > m(\varepsilon) \Rightarrow ||u_m - u|| < \delta(\varepsilon)$$

Din ultimele două relaţii rezultă concluzia corolarului. ∎

O familie de funcţii $\mathcal{F}$ se numeşte uniform mărginită pe $[a,b]$ dacă există $M > 0$ astfel încât pentru fiecare $f \in \mathcal{F}$ şi pentru fiecare $t \in [a,b]$ să avem $\|f(t)\| \leq M$.

Teorema 1.3.5 *Fie $\mathcal{F} \subset C([a,b],\mathbb{R}^n)$ o familie de funcţii echicontinue pe $[a,b]$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

- *$\mathcal{F}$ uniform mărginită*
- *Există o mulţime $\mathcal{D} \subset [a,b]$ densă în $[a,b]$ astfel încât pentru orice $t \in \mathcal{D}$, mulţimiile:*

$$\mathcal{F}(t) = \{f(t) : f \in \mathcal{F}\}$$

  sunt relativ compacte în $\mathbb{R}^n$.

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{F}$ uniform mărginită atunci pentru orice $t \in [a,b]$, mulţimea $\mathcal{F}(t)$ este mărginită în $\mathbb{R}^n$. Dar acest lucru implică tocmai faptul că $\mathcal{F}(t)$ este relativ compactă.

Să presupunem că este adevărată a doua afirmaţie. Faptul că $\mathcal{F}(t)$ este relativ compactă în $\mathbb{R}^n$ implică $\mathcal{F}(t)$ mărginită în $\mathbb{R}^n$. Deci pentru orice $t \in \mathcal{D}$ există o constantă $M(t)$ astfel încât pentru orice $f \in \mathcal{F}$:

$$\|f(t)\| \leq M(t)$$

Familia $\mathcal{F}$ este echicontinuă deci este uniform echicontinuă astfel că există $\delta > 0$ astfel încât:

$$|t - s| < \delta \Rightarrow \|f(t) - f(s)\| \leq 1$$

Faptul că $\mathcal{D}$ este densă în $[a,b]$ implică posibilitatea alegerii unei diviziuni $(a, t_1, t_2, \ldots, t_n, b)$ a intervalului $[a,b]$, cu norma mai mică decât δ şi pentru orice $i \in \overline{1,n}$ să avem $t_i \in \mathcal{D}$. Dar atunci pentru orice $t \in [a,b]$ există $j \in \overline{1,n}$ astfel încât $t - t_j < \delta$. Astfel:

$$\|f(t)\| \leq \|f(t) - f(t_j)\| + \max_{i\in\overline{1,n}} \|M(t_i)\|$$

deci familia $\mathcal{F}$ este uniform mărginită. ∎

Ultima teoremă arată că în cazul finit dimensional teorema Arzelà-Ascoli capătă forma:

Teorema 1.3.6 (Arzelà-Ascoli) *O familie $\mathcal{F} \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ este relativ compactă dacă şi numai dacă:*

- *$\mathcal{F}$ este echicontinuă pe $[a,b]$;*
- *$\mathcal{F}$ este uniform mărginită.*

1.4 Semigrupuri de operatori liniari

Fie X un spaţiu Banach şi $\mathcal{L}(X)$ mulţimea operatoriilor liniari mărginiţi de la X cu valori în X. După cum am văzut, acesta, înzestrat cu norma supremum, este un spaţiu al lui Banach.

Definiţia 1.4.1 *O familie $\{S(t); t \geq 0\}$ se numeşte semigrup de operatori liniari dacă verifică:*

- $S(0) = I$
- $S(t+s) = S(t)S(s) \ \forall t, s \in [0, +\infty)$.

Dacă în plus:

- $\lim\limits_{t \to 0} S(t) = I$

în topologia normei lui $\mathcal{L}(X)$ atunci semigrupul se numeşte uniform continuu.

Exemplul 1.4.1 Familia $\left\{e^{tA}; t \geq 0\right\}$ unde e^{tA} este exponenţiala unei matrici $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $S(t) = e^{tA}$,

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$$

defineşte un semigrup de operatori liniari, uniform continuu.

Definiţia 1.4.2 *Se numeşte generatorul infinitezimal al unui semigrup de operatori liniar $\{S(t); t \geq 0\}$, operatorul $A : D(A) \subset X \to X$ dat de:*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ x \in X : \exists \lim\limits_{t \downarrow 0} \dfrac{1}{t}(S(t)x - x) \right\} \\ Ax = \lim\limits_{t \downarrow 0} \dfrac{1}{t}(S(t)x - x) \end{cases}$$

Spunem, echivalent, că operatorul A generează semigrupul $\{S(t); t \geq 0\}$.

Definiţia 1.4.3 *O familie de operatori $\{G(t); t \in \mathbb{R}\}$ se numeşte grup de operatori liniari pe X dacă:*

- $G(0) = I$
- $G(t+s) = G(t)G(s) \ \forall t, s \in \mathbb{R}$

Dacă în plus, acesta verifică condiţia:

- $\lim\limits_{t \downarrow 0} G(t) = I$

atunci grupul se numeşte uniform continuu.

Teorema 1.4.1 *Orice semigrup uniform continuu poate fi prelungit la un grup uniform continuu.*

Teorema 1.4.2 *Un operator liniar $A : D(A) \subset X \to X$ este generatorul unui semigrup uniform continuu dacă şi numai dacă $D(A) = X$ şi $A \in \mathcal{L}(X)$.*

Pentru ambele teoreme se poate consulta [2, p. 38].

Un exemplu de semigrup care nu este uniform continuu este prezentat mai jos.

Exemplul 1.4.2 Fie $X = C_u(\mathbb{R}^+)$, spaţiul funcţiilor uniform continue şi mărginite, de la $\mathbb{R}^+$ cu valori în $\mathbb{R}$, înzestrate cu norma supremum şi să definim:

$$[S(t)f]\,(s) = f(t+s)$$

pentru orice $f \in C_u(\mathbb{R}^+)$.

Vom arăta că acesta este este un semigrup care nu este uniform continuu. Este evident că sunt îndeplinite condiţiile din definiţia semigrupului. Dacă am presupune că are loc condiţia de uniform continuitate, aceasta ar implica faptul că familia $\overline{B(\mathbb{O}_{\mathbb{R}^+}, 1)}$ este echicontinuă, ceea ce este fals. Un exemplu în acest sens îl constituie familia de funcţii $\{f_n; n \in \mathbb{N}\}$ unde:

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n & x \in [0,1] \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

care nu este echicontinuă în $x = 1$.

Acest semigrup are însă proprietatea:

$$\lim_{t \downarrow 0} S(t)f = f$$

pentru orice $f \in C_u(\mathbb{R}^+)$.

Definiţia 1.4.4 *Un semigrup de operatori liniari $\{S(t); t \geq 0\}$ se numeşte semigrup de clasă C_0 dacă pentru orice $x \in X$ avem:*

$$\lim_{t \downarrow 0} S(t)x = x.$$

Teorema 1.4.3 *Dacă $\{S(t); t \geq 0\}$ este un semigrup de clasă C_0 atunci există $M \geq 1$ şi $\omega \in \mathbb{R}$ astfel încât:*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M e^{t\omega}$$

pentru orice $t \geq 0$.

Demonstraţie. În primul rând să arătăm că există $M > 0$ şi $\eta > 0$ astfel încât:

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq M$$

pentru orice $t \in [0, \eta]$. Presupunem prin reducere la absurd că nu este adevărat enunţul de mai sus. Atunci există cel puţin un C_0 semigrup $\{S(t); t \geq 0\}$ astfel încât pentru orice $\eta > 0$ şi pentru orice $M \geq 1$ există $t_{\eta,M} \in [0, \eta]$ astfel încât:

$$M < \|S(t_{\eta,M})\|_{\mathcal{L}(X)} .$$

Atunci, pentru $\eta = 1/n$, $M = n$ şi punând pe $t_n = t_{\eta,M}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$ vom avea:

$$n < \|S(t_n)\|_{\mathcal{L}(X)} . \tag{1.4.1}$$

Dar pentru că $t_n \in [0, 1/n]$, urmează că pentru orice $x \in X$ avem:

$$\lim_{n\to\infty} S(t_n)x = x.$$

Deci familia $\{S(t_n); n \in \mathbb{N}\}$ este punctual mărginită. Atunci conform principiului mărginirii uniforme, aceasta este global mărginită ceea ce este în contradicţie cu (1.4.1). Contradicţia poate fi eliminată doar dacă presupunerea făcută este falsă. Atunci există un $n \in \mathbb{N}$ şi un $\delta \in [0, \eta)$ astfel încât $t = n\eta + \delta$. Avem:

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|S^n(\eta)S(\delta)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq MM^n.$$

Dar $n = \frac{t-\delta}{\eta} \leq \frac{t}{\eta}$, deci renotând $\omega = \frac{1}{\eta}\ln M$, obţinem concluzia teoremei. ■

Definiţia 1.4.5 *Un semigrup C_0 se numeşte de tip (M, ω) cu $M \geq 1$ dacă are loc condiţia:*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{t\omega}$$

pentru orice $t \geq 0$. Semigrupul C_0 se numeşte de contracţii dacă este de tipul $(1, 0)$.

Definiţia 1.4.6 *Un operator A se numeşte închis dacă mulţimea*

$$\mathit{graph}\, A = \{(x, y) \in X \times X : y = Ax\}$$

este închisă î n $X \times X$ considerat cu topologia spatiului produs.

Definiţia 1.4.7 *Fie $A : D(A) \subset X \to X$ un operator liniar. Atunci mulţimea rezolvanta a lui A, $\rho(A)$, este formată din acele numere complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ pentru care operatorul $(\lambda I - A)^{-1}$ este dens definit şi continuu de la $(\lambda I - A)(X)$ la X.*

Teorema 1.4.4 (Hille-Yosida) *Un operator liniar $A : D(A) \subset X \to X$ este generatorul infinitezimal al unui semigrup C_0 de contracţii dacă şi numai dacă:*

- *A este dens definit şi închis*
- *$(0, +\infty) \subset \rho(A)$ şi pentru orice $\lambda > 0$ avem*

$$\|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Vezi [2, p. 51].

Teorema 1.4.5 *Un operator liniar $A : D(A) \subset X \to X$ este generatorul infinitezimal al unui grup C_0 de izometrii dacă şi numai dacă:*

- *A este dens definit şi închis*
- *$\mathbb{R}^* \subset \rho(A)$ şi pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}^*$ avem*

$$\|R(\lambda; A)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{|\lambda|}$$

Vezi [2, p. 63].
În cele ce urmează considerăm spaţiul funcţiilor pătrat sumabile:

$$L^2(0,\pi) = \left\{ f : [0,\pi] \to \mathbb{R} : \int_0^\pi f^2(x)dx < +\infty \right\}$$

şi spaţiile:

$$\begin{aligned} H_0^1(0,\pi) &= \left\{ f \in L^2(0,\pi) : \exists f' \in L^2(0,\pi),\ f(0) = f(\pi) = 0 \right\} \\ H^2(0,\pi) &= \left\{ f \in L^2(0,\pi) : \exists f', f'' \in L^2(0,\pi) \right\}. \end{aligned}$$

Spaţiul $L^2(0,\pi)$ înzestrat cu produsul scalar definit prin relaţia:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(0,\pi)} : L^2(0,\pi) \times L^2(0,\pi) \to \mathbb{R}$$
$$\langle f, g \rangle_{L^2(0,\pi)} = \int_0^\pi f(t)g(t)dt$$

este un spaţiu Hilbert

Propoziţia 1.4.1 *Operatorul $A : D(A) \subset L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi)$ definit de:*

$$\begin{cases} D(A) = H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi) \\ Au = u'' \end{cases}$$

este generatorul infinitezimal al unui C_0 semigrup de contracţii.

Demonstraţie. Să considerăm pentru orice $f \in L^2(0,\pi)$, ecuaţia:

$$\begin{cases} \lambda u - u'' = f \\ u(0) = u(\pi) = 0. \end{cases} \tag{1.4.2}$$

Căutăm soluţiile de forma:

$$u(t) = c_1(t)e^{\lambda t} + c_2(t)e^{-\lambda t}$$

unde:

$$\begin{cases} c_1'(t)e^{\lambda t} + c_2'(t)e^{-\lambda t} = 0 \\ \lambda c_1'(t)e^{\lambda t} - \lambda c_2'(t)e^{-\lambda t} = f. \end{cases}$$

Rezolvând sistemul, găsim:

$$\begin{cases} c_1(t) = c_1(0) + \displaystyle\int_0^t \frac{e^{-\lambda s}}{\lambda} ds \\ c_2(t) = c_2(0) - \displaystyle\int_0^t \frac{e^{\lambda s}}{\lambda} ds. \end{cases} \tag{1.4.3}$$

Dar avem $u(0) = u(\pi) = 0$, astfe că:

$$\begin{cases} c_1(0) + c_2(0) = 0 \\ c_1(\pi)e^{\lambda\pi} + c_2(\pi)e^{-\lambda\pi} = 0. \end{cases} \tag{1.4.4}$$

Din (1.4.3) avem:

$$\begin{cases} c_1(\pi) - c_1(0) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{e^{-\lambda s}}{\lambda} ds \\ c_2(\pi) - c_2(0) = - \displaystyle\int_0^\pi \frac{e^{\lambda s}}{\lambda} ds. \end{cases} \tag{1.4.5}$$

Dar ecuaţiile (1.4.4) şi (1.4.5) formează un sistem de patru ecuaţii cu patru necunoscute al cărui determinant este nenul:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda\pi} & e^{-\lambda\pi} \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

Atunci soluţia ecuaţiei (1.4.2) este unică. O vom distinge prin u_λ. Considerând

$$\begin{cases} R(\lambda; A) : L^2(0,\pi) \to H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi) \\ R(\lambda; A)f = u_\lambda \end{cases}$$

avem că:

$$\begin{aligned} \lambda u_\lambda - u_\lambda'' &= f \\ \langle \lambda u_\lambda - u_\lambda'', u_\lambda \rangle_{L^2(0,\pi)} &= \langle f, u_\lambda \rangle_{L^2(0,\pi)} \\ \lambda \|u_\lambda\|^2_{L^2(0,\pi)} - \langle u_\lambda'', u_\lambda \rangle_{L^2(0,\pi)} &= \langle f, u_\lambda \rangle_{L^2(0,\pi)} \leq \|f\|_{L^2(0,\pi)} \|u_\lambda\|_{L^2(0,\pi)} . \end{aligned}$$

Să observăm că:

$$\langle u_\lambda'', u_\lambda \rangle_{L^2(0,\pi)} = \int_0^\pi u_\lambda''(s) u_\lambda(s) ds = - \int_0^\pi [u_\lambda'(s)]^2 ds = - \|u_\lambda\|^2_{L^2(0,\pi)} \leq 0.$$

Din ultimele două relaţii obţinem că:

$$\begin{aligned} \lambda \|u_\lambda\|^2_{L^2(0,\pi)} &\leq \|f\|_{L^2(0,\pi)} \|u_\lambda\|_{L^2(0,\pi)} \\ \|u_\lambda\|_{L^2(0,\pi)} &\leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^2(0,\pi)} , \end{aligned}$$

astfel că operatorul A defineşte un semigrup de contracţii. $\blacksquare$

Propoziţia 1.4.2 *Operatorul* $A : D(A) \subset H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi) \to H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$ *definit prin:*

$$\begin{cases} D(A) = \left[H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)\right] \times H_0^1(0,\pi) \\ A(u,v) = (v, u'') \end{cases}$$

este generatorul unui grup C_0 *de izometrii.*

Demonstraţie. În primul rând, $H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$, considerat împreună cu produsul scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)}$ definit de:

$$\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2) \rangle_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} = \int_0^\pi u_1'(x) u_2'(x) dx + \int_0^\pi v_1(x) v_2(x) dx$$

este spaţiu Hilbert.

Fie $(f_1, f_2) \in H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$ şi $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Atunci să considerăm ecuaţiile:

$$\begin{cases} \lambda u - v = f_1 \\ \lambda v - u'' = f_2 \end{cases}$$

Înmulţind prima ecuaţie cu λ şi adunând-o la a doua ecuaţie, obţinem:

$$\begin{cases} \lambda^2 u - u'' = \lambda f_1 + f_2 \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

ecuaţie despre care ştim că admite o soluţie unică $u_\lambda \in H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)$. Atunci revenind în prima ecuaţie:

$$v_\lambda = \lambda u_\lambda + f_1$$

care este evident din $H_0^1(0,\pi)$. În continuare, avem că:

$$\begin{aligned} (\lambda u - v, \lambda v - u'') &= (f_1, f_2) \\ \langle (\lambda u - v, \lambda v - u''), (u, v) \rangle &= \langle (f_1, f_2), (u, v) \rangle \\ \langle \lambda u' - v', u' \rangle_{L^2(0,\pi)} + \langle \lambda v - u'', v \rangle_{L^2(0,\pi)} &= \langle (f_1, f_2), (u, v) \rangle . \end{aligned}$$

Dar să observam că:

$$\begin{aligned} \langle \lambda u' - v', u' \rangle_{L^2(0,\pi)} + \langle \lambda v - u'', v \rangle_{L^2(0,\pi)} &= \\ \lambda \|u'\|^2_{L^2(0,\pi)} - \langle v', u' \rangle_{L^2(0,\pi)} + \lambda \|v\|^2_{L^2(0,\pi)} - \langle u'', v \rangle_{L^2(0,\pi)} &= \\ \lambda \|u'\|^2_{L^2(0,\pi)} + \lambda \|v\|^2_{L^2(0,\pi)} &= \\ &= \lambda \|(u,v)\|^2 \end{aligned}$$

astfel că:

$$\begin{aligned} \lambda \|(u,v)\|^2_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} &= \langle (f_1, f_2), (u, v) \rangle_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} \\ &\leq \|(u,v)\|_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} \|(f_1, f_2)\|_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} \\ \|(u,v)\|_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} &\leq \frac{1}{\lambda} \|(f_1, f_2)\|_{H_0^1(0,\pi)\times L^2(0,\pi)} , \end{aligned}$$

ceea ce încheie demonstraţia propoziţiei. ■

2 Problema existenţei locale

2.1 Teorema lui Peano

Fie X un spaţiu Banach, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times X$ o mulţime nevidă, deschisă. Fie $(a, \xi) \in \mathcal{D}$ şi să considerăm problema Cauchy:

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(a) = \xi. \end{cases} \tag{2.1.1}$$

Dacă X este finit dimensional şi f este continuă, problema de mai sus are soluţie pentru orice $(a, \xi) \in \mathcal{D}$. În cazul infinit dimensional aceast rezultat nu se transpune exact în această formă, după cum rezultă din exemplul de mai jos.

Fie $X = c_0$ spaţiul şiruriilor reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ cu $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$, înzestrat cu norma supremum definită de:

$$\left\| (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \right\| = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} |x_n|$$

pentru orice şir din c_0. Acest spaţiu este Banach, infinit dimensional. Fie $f : X \to X$ dată de relaţia:

$$\left(f \left((x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \right)_k \right)_{k \in \mathbb{N}^*} = \left(2\sqrt{|x_k|} \right)_{k \in \mathbb{N}^*}$$

pentru orice $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ din c_0. Fie $\xi = (\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ şi să considerăm problema:

$$\begin{cases} u' = f(u) \\ u(0) = \xi. \end{cases}$$

Să observăm că $u : [0, \delta) \to X$ este o soluţie pentru problema de mai sus dacă şi numai dacă $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ este o soluţie a sistemului de ecuaţii diferenţiale:

$$\begin{cases} u_k' = 2\sqrt{|u_k|}, \\ u(0) = 1/k, \end{cases} \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Să presupunem că acest sistem are soluţii. Evident soluţiile sunt de forma:

$$u_k(t) = (t + 1/k)^2$$

pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Dar atunci pentru orice $t > 0$ avem că:

$$\lim_{k \to \infty} u_k(t) = t^2,$$

relaţie ce contrazice faptul că $u_k(t) \in c_0$, pentru orice $t > 0$.

Contradicţia poate fi eliminată doar dacă problema Cauchy (2.1.1), cu X, f şi ξ ca mai sus, nu are soluţie.

Analizând demonstraţia teoremei lui Peano din cazul finit dimensional(vezi [2, p. 55]) putem să tragem concluzia că fenomenul de neexistenţă în cazul infinit dimensional este cauzat de lipsa de relativă compactitate a mulţimiilor mărginite în aceste spaţii. Acest contraexemplu arată că, înafara continuităţii, trebuie impuse condiţii suplimentare asupra lui f care să suplinească deficitul de relativă compactitate a mulţimiilor mărginite.

Definiţia 2.1.1 *Funcţia $f : \mathcal{D} \to X$ se numeşte b-compactă dacă pentru orice $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\xi \in X$ şi $r > 0$ cu $[a, b] \times B(\xi, r) \subset \mathcal{D}$, $f([a, b] \times B(\xi, r))$ este relativ compactă în X.*

Funcţia $f : \mathcal{D} \to X$ se numeşte compactă dacă duce mulţimiile mărginite din $\mathcal{D}$ în mulţimi relativ compacte din X.

Observaţia 2.1.1 Orice funcţie compactă este b-compactă dar reciproca nu este adevărată. Un exemplu în acest sens îl constituie cazul în care $X = \mathbb{R}$, şi $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(t, u) = 1/u$.

În cele ce urmează vom arăta că dacă $f : \mathcal{D} \to X$ este o funcţie b-compactă şi continuă atunci pentru orice $(a, \xi) \in \mathcal{D}$ problema Cauchy (2.1.1) are soluţie locală. Vom analiza, în primul rând, cazul cel mai simplu, $f : \mathbb{I} \times X \to X$ cu $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{I} \neq \emptyset$, f continuă pe $\mathbb{I} \times X$ şi $f(\mathbb{I} \times X)$ relativ compactă în X, apoi vom trece la cazul general.

Fie $f : \mathbb{I} \times X \to X$ o funcţie continuă, $(a, \xi) \in \mathbb{I} \times X$ şi $\lambda > 0$, $\delta > 0$ astfel încât $[a, a + \delta] \subset \mathbb{I}$. Să considerăm ecuaţia integrală:

$$u_\lambda(t) = \begin{cases} \xi & \textit{dacă} \quad t \in [a - \lambda, a] \\ \xi + \displaystyle\int_a^t f(s, u_\lambda(s - \lambda)) & \textit{dacă} \quad t \in (a, a + \delta]\,. \end{cases} \tag{2.1.2}$$

Lema 2.1.1 *Dacă $f : \mathbb{I} \times X \to X$ este continuă, atunci, pentru orice $\lambda > 0$, pentru orice $(a, \xi) \in \mathbb{I} \times X$ şi pentru orice $\delta > 0$ cu proprietatea că $[a, a + \delta] \subset \mathbb{I}$, problema* (2.1.2) *are o soluţie unică pe intervalul $[a - \lambda, a + \delta]$.*

Demonstraţie. Evident u_λ este unică pe intervalul $[a - \lambda, a]$. Atunci pentru orice $t \in (a, a + \lambda]$ şi pentru orice $s \in [a, t]$, avem $s - \lambda \in [a - \lambda, a]$. Astfel obţinem:

$$u_\lambda(t) = \xi + \int_a^t f(s, \xi) ds$$

aşa încât u_λ este bine definită pe $[a, a + \delta]$. Procedând analog putem determina pe u_λ pe fiecare din intervalele $[a + i\lambda, a + (i + 1)\lambda]$, $1 \leq i$. Evident există un m natural astfel încât $m\lambda > \delta$, deci u_λ va fi unic determinată după m paşi pe intervalul $[a - \lambda, a + \delta]$. ■

După cum am menţionat şi mai sus, vom demonstra mai întâi un rezultat de existenţă auxiliar.

Lema 2.1.2 *Dacă $f : \mathbb{I} \times X \to X$ este continuă si $f(\mathbb{I} \times X)$ este relativ compactă, atunci pentru orice $(a, \xi) \in \mathbb{I} \times X$ şi pentru orice $\delta > 0$ aşa încât $[a, a + \delta] \subset \mathbb{I}$, problema* (2.1.1) *are cel puţin o soluţie definită pe $[a, a + \delta]$.*

Demonstraţie. Fie $(a, \xi) \in \mathbb{I} \times X$ şi $\delta > 0$ aşa încât $[a, a+\delta] \subset \mathbb{I}$, fie $m \in \mathbb{N}$ şi să considerăm ecuaţiile integrale:

$$u_m(t) = \begin{cases} \xi, & \textit{dacă} \quad t \in [a - \delta_m, a] \\ \xi + \displaystyle\int_a^t f(s, u_m(s - \delta_m))ds, & \textit{dacă} \quad t \in (a, a+\delta] \end{cases} \tag{2.1.3}$$

unde $\delta_m = \delta/m$. Să observăm că, pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$, (2.1.3) admite o soluţie unică continuă $u_m : [a - \delta_m, a+\delta] \to X$. Vom arăta că familia de funcţii $\{u_m;\, m \in \mathbb{N}\}$ îndeplineşte condiţiile teoremei Arzelà-Ascoli.

Pentru fiecare $t \in [a, a+\delta]$ avem că funcţia $g : [a, t] \to f(\mathbb{I} \times X)$ definită de relaţia:

$$g(s) = f(s, u_m(s - \delta_m))$$

este continuă. Deci, conform corolarului (1.1.1), mulţimea:

$$\{u_m(t) : m \in \mathbb{N}\} = \left\{\xi + \int_a^t f(s, u_m(s - \delta_m))ds\right\}$$

este relativ compactă.

În al doilea rând, din (2.1.3), avem că:

$$\|u_m(t) - u_m(s)\| \leq \int_s^t \|f(\sigma, u_m(\sigma - \delta_m))\|\, d\sigma \leq M\,|t - s|$$

pentru orice $m \in \mathbb{N}^*$ şi pentru orice $(t, s) \in [a, a+\delta]$. Urmează că $\{u_m;\, m \in \mathbb{N}\}$ admite un subşir uniform convergent la o funcţie $u : [a, a+\delta] \to X$. Pentru simplitatea scrierii vom considera $\{u_m;\, m \in \mathbb{N}\}$ ca fiind subşirul în cauză. În mod clar avem:

$$\lim_{n \to \infty} u_m(s - \delta_m) = u(s)$$

uniform pentru $s \in [a, a+\delta]$. Pentru că f este continuă, conform corolarului 1.3.2 este permisă trecerea la limită sub semnul de integrală din (2.1.3) Astfel funcţia u verifică relaţia:

$$u(t) = \xi + \int_a^t f(s, u(s))ds$$

pentru orice $t \in [a, a+\delta]$. Astfel avem că $x : \mathbb{I} \times X \to X$ este soluţia ecuaţiei (2.1.1). ■

Teorema 2.1.1 *Dacă $f : \mathcal{D} \to X$ este continuă pe $\mathcal{D}$ şi b-compactă atunci pentru fiecare $(a, \xi) \in \mathbb{I} \times X$, problema (2.1.1) are cel puţin o soluţie locală.*

Demonstraţie. Fie $(a, \xi) \in \mathcal{D}$. Pentru că $\mathcal{D}$ este o mulţime deschisă avem garantată existenţa unui $d > 0$ şi a unui $r > 0$ aşa încât:

$$[a - d, a + d] \times B(\xi, r) \subset \mathcal{D}$$

Să definim $\rho : X \to X$ prin:

$$\rho(y) = \begin{cases} y, & y \in B(\xi, r) \\ \dfrac{r}{\|y-\xi\|}(y-\xi)+\xi, & y \in X \backslash B(\xi, r). \end{cases} \tag{2.1.4}$$

Este uşor de verificat că ρ este continuă si $\rho(X) = B(\xi, r)$.

Să definim $g : (a-d, a+d) \times X \to X$ prin:

$$g(t, y) = f(t, \rho(y))$$

pentru orice $(t, y) \in (a-d, a+d) \times X$.

Pentru că f este b-compactă $f\left([a-d, a+d]\right) \times B(\xi, r)$ este relativ compactă astfel că $g\left([a-d, a+d] \times X\right)$ este relativ compactă. Conform lemei precedente, pentru orice $d' \in (0, d)$ problema Cauchy:

$$\begin{cases} u' = g(t, u) \\ u(a) = \xi \end{cases}$$

are cel puţin o soluţie $u : [a, a+d'] \to X$. Pentru că $u(a) = \xi$ şi u este continuă în $t = a$, pentru $r > 0$ există $\delta \in (0, d']$ astfel încât pentru orice $t \in [a, a+\delta]\,, \|u(t) - \xi\| \leq r$. Dar, în acest caz, $g(t, u(t)) = f(t, u(t))$, şi astfel că $u : [a, a+\delta] \to X$ este soluţie a problemei (2.1.1). ∎

Să considerăm în continuare $X = \mathbb{R}^n$ şi să demonstrăm că în acest caz, dacă $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times X$ este o mulţime deschisă atunci dacă f este continuă, f este b-compactă.

Lema 2.1.3 *Fie $f : \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcţie continuă. Atunci f este b-compactă.*

Demonstraţie. Fie $[a, b] \subset \mathbb{I}$ şi $B(\xi, r) \subset X$. Atunci să presupunem că $f([a, b] \times B(\xi, r))$ nu este relativ compactă în $\mathbb{R}^n$. Atunci mulţimea $f([a, b] \times B(\xi, r))$ nu este mărginită. Acest lucru implică existenţa a două şiruri $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$ şi $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B(\xi, r)$ astfel încât:

$$\lim_{n\to\infty} \|f(t_n, \xi_n)\| = +\infty. \tag{2.1.5}$$

Dar $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a, b]$, deci conform lemei lui Cesaro admite un subşir convergent $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ către un element t_0. Şirul $(\xi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ este inclus în $B(\xi, r)$ deci putem extrage un subşir convergent către un element ξ_0. Trecând la limită pe acest subşir în relaţia (2.1.5) obţinem că $\|f(t_0, \xi_0)\| = +\infty$, ceea ce este absurd. ∎

Teorema 2.1.2 *Fie $\mathbb{I} \times \Omega \subset R \times R^n$ o mulţime deschisă şi $f : \mathbb{I} \times \Omega \to R^n$ o funcţie continuă. Atunci f este b-compactă.*

Demonstraţie. Fie $[a, b] \subset \mathbb{I}$ şi $B(\xi, r) \subset \Omega$. Să considerăm funcţia $\rho : \mathbb{R}^n \to B(\xi, r)$ definită ca în relaţia (2.1.4). Atunci putem defini funcţia $g : \mathbb{I} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ prin:

$$g(t, y) = f(t, \rho(y))$$

pentru orice y din $\mathbb{R}^n$ şi pentru orice t din $\mathbb{I}$. Este evident că funcţia g este continuă şi atunci conform lemei de mai sus, ea este b-compactă. Pentru că avem relaţia:

$$g([a,b] \times B(\xi,r)) = f([a,b] \times B(\xi,r))$$

obţinem concluzia teoremei. ■

Astfel obţinem teorema lui Peano din cazul finit dimensional:

Teorema 2.1.3 (Peano) *Dacă $f : \mathbb{I} \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ este continuă pe $\mathbb{I} \times \Omega$ atunci pentru fiecare $(a,\xi) \in \mathbb{I} \times \Omega$, 2.1.1 are cel puţin o soluţie locală.*

2.2 Soluţii saturate

Fie $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times X$, o mulţime nevidă, deschisă, fie $f : \mathcal{D} \to X$ o funcţie dată şi $(a,\xi) \in \mathcal{D}$. Să considerăm problema Cauchy:

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(a) = \xi \end{cases} \tag{2.2.1}$$

Definiţia 2.2.1 *O soluţie $u : \mathbb{J} \to X$ a problemei* (2.2.1) *se numeşte continuabilă dacă există o altă soluţie $v : \mathbb{K} \to X$ a problemei* (2.2.1) *astfel încât $\mathbb{J} \subset \mathbb{K}$ şi $u(t) = v(t)$ pentru orice $t \in \mathbb{J}$ unde $\mathbb{I}$ şi $\mathbb{J}$ sunt intervale nedegenerate ce conţin punctul a.*

Definiţia 2.2.2 *O soluţie se numeşte saturată dacă nu este continuabilă.*

Dacă proiecţia lui $\mathcal{D}$ pe $\mathbb{R}$ conţine $(0,\infty)$, atunci:

Definiţia 2.2.3 *O soluţie $u : [a,b) \to X$ se numeşte globală dacă este definită pe $[a,\infty)$.*

Lema 2.2.1 *Fie $f : \mathcal{D} \to X$ o funcţie b-compactă pe $\mathcal{D}$. Atunci o soluţie este continuabilă dacă şi numai dacă există:*

$$u^* = \lim_{t \uparrow b} u(t) \tag{2.2.2}$$

şi

$$(b, u^*) \in \mathcal{D} \tag{2.2.3}$$

Demonstraţie. Partea de necesitate este evidentă. Partea de suficienţa este o consecinţă a teoremei de existenţă locală. Într-adevăr, dacă condiţiile (2.2.2) şi (2.2.3) sunt îndeplinite atunci problema:

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(b) = u^* \end{cases}$$

are o soluţie, $v : [b,c) \to X$. Invocând principiul concatenării(vezi [3, p. 51]), funcţia:

$$z(t) = \begin{cases} u(t) & t \in [a,b) \\ v(t) & t \in b,c) \end{cases}$$

este o soluţie a lui (2.2.1) care prelungeşte pe u. ■

Observaţia 2.2.1 Din propoziţia de mai sus reiese faptul că o soluţie saturată a problemei (2.2.1) este neapărat definită pe un interval de forma [a,b).

Propoziţia 2.2.1 *Fie* $u : [a, b] \to X$ *o soluţie a lui* (2.2.1) *şi să presupunem că* $b < \infty$ *şi că există* $M > 0$ *astfel încât:*

$$\|f(t, u(t))\| \le M$$

pentru orice $t \in (a, b)$. *Atunci există:*

$$u^* = \lim_{t \uparrow b} u(t)$$

Demonstraţie. Să observăm că pentru orice $t, s \in [a, b]$ avem:

$$\|u(t) - u(s)\| \le \left| \int_s^t \|f(\sigma)\| \, d\sigma \right| \le M \, |t - s| \, .$$

Deci u verifică criteriul lui Cauchy de existenţă a limitei finite în punctul b. ∎

Teorema 2.2.1 *Fie* $f : \mathcal{D} \to X$, *b-compactă şi* $u : [a, b) \to X$ *o soluţie a problemei* (2.2.1). *O condiţie necesară şi suficientă ca* u *să fie continuabilă este ca mulţimea* $graph(u) = \{(t, u(t)) \in \mathbb{R} \times X : t \in [a, b)\}$ *să fie inclusă într-o mulţime compactă a lui* $\mathcal{D}$.

Demonstraţie. Să presupunem că u este continuabilă. Deci poate fi prelungită prin continuitate la o funcţie $v : [a, b] \to X$. Avem atunci

$$\{(t, u(t)); t \in [a, b]\} \subset [a, b] \times v([a, b]).$$

Dar $[a, b] \times v([a, b])$ este compactă, ceea ce demonstrează necesitatea condiţiei.

Să presupunem acum că mulţimea $graph(u)$ este inclusă într-o submulţime compactă a lui $\mathcal{D}$. Atunci f este mărginită pe grafic si deci există un $M > 0$ astfel încât:

$$\|f(t, u(t))\| \le M$$

pentru orice $t \in [a, b)$. Concluzia este o consecinţă a propoziţiei anterioare. ∎

Teorema 2.2.2 *Dacă* $f : \mathcal{D} \to X$ *este b-compactă şi* u *este o soluţie a problemei* (2.2.1) *atunci fie* u *este saturată fie poate fi continuată până la o soluţie saturată.*

Demonstraţie. Dacă u este saturată, atunci nu este nimic de demonstrat. Dacă u este continuabilă, să considerăm $\mathcal{S}$ mulţimea tuturor soluţiilor problemei (2.2.1) care prelungesc pe u. Pentru că $u \in \mathcal{S}$ şi u este continuabilă, atunci $\mathcal{S}$ conţine cel puţin două elemente. Pe $\mathcal{S}$ considerăm relaţia $\preceq$ definită prin: $v \preceq w$ dacă w prelungeşte pe v. Fie $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$, o mulţime total ordonată şi $u_i : [a, b_i) \to X$ elementele sale. Să considerăm funcţia: $\overline{u} : [a, \sup_{i \in I} b_i) \to X$

$$\overline{u}(t) = u_i(t), \quad t \in [a, b_i), \quad i \in I.$$

Funcţia $\overline{u}(t)$ este binedefinită şi este un majorant relativ la $\mathcal{S}$ faţă de relaţia $\preceq$. Deci lema lui Zorn este aplicabilă în acest context. Aceasta înseamnă că există cel puţin un element maximal $u_m \in \mathcal{S}$. Din definiţia $\preceq$ şi din maximilitatea lui u_m, obţinem că u_m este saturată. ∎

Corolar 2.2.1 *Dacă $f : \mathcal{D} \to X$ este b-compactă atunci pentru orice $(a, \xi) \in \mathcal{D}$, problema* (2.2.1) *are cel puţin o soluţie saturată.*

Definiţia 2.2.4 *Un punct $u^* \in X$ se numeşte punct limită pentru funcţia $u : [a, b) \to X$ când $t \uparrow b$, dacă există un şir $(t_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ astfel încât*

$$\lim_{k\to\infty} u(t_k) = u^*.$$

Mulţimea punctelor limită a unei funcţii $u : [a, b) \to X$ când $t \uparrow b$ se notează cu $Lim_{t\uparrow b}u(t)$.

Teorema 2.2.3 *Fie $f : \mathcal{D} \to X$ b-compactă şi $u : [a, b) \to X$ o soluţie saturată a problemei* (2.2.1). *Atunci are loc una şi numai una din condiţiile:*

- *u este nemărginită;*
- *u este mărginită şi u este globală;*
- *u este mărginită si nu este globală, caz în care fie $Lim_{t\uparrow b}u(t)$ este vidă fie pentru orice $u^* \in Lim_{t\uparrow b}u(t)$ avem $(b, u^*) \in \partial\mathcal{D}$.*

Demonstraţie. Presupunem că $u : [a, b) \to X$ este mărginită, $b < \infty$ şi $Lim_{t\uparrow b}u(t) \neq \emptyset$. Să presupunem că $(b, u^*) \notin \partial\mathcal{D}$. Atunci există $c > b$, $r > 0$ astfel încât $[a, c) \times B(u^*, r) \subset \mathcal{D}$. Ideea este să demonstrăm că există $\lim_{t\uparrow b} u(t) = u^*$. Cum f este continuă, diminuând eventual pe $r > 0$, există o constantă $M > 0$ astfel încât:

$$\|f(t, u)\| \leq M$$

pentru orice $(t, u) \in [a, b]\times B(u^*, r)$. Pentru că $\lim_{k\to\infty} t_k = b$ şi $\lim_{k\to\infty} u(t_k) = u^*$ putem alege $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât:

$$\begin{cases} b - t_k < \frac{r}{2M} \\ \|u(t_k) - u^*\| < \frac{r}{2} \end{cases}$$

Fixăm un astfel de k. Vom demonstra că pentru orice $t \in [t_k, b)$ avem $u(t) \in B(u^*, r)$. Fie

$$t^* = \sup\{t \in [t_k, b) : \forall s \in [t_k, t),\ u(s) \in B(u^*, r)\}$$

Dacă $t^* = b$, atunci nu este nimic de demonstrat. Să presupunem atunci că $t^* < b$. Atunci exisă un şir $s_k \downarrow t^*$ astfel încât pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\|u(s_k) - u^*\| > r.$$

Dacă ţinem cont de definiţia lui t^* obţinem că $\|u(t^*) - u^*\| = r$. Dar atunci:

$$\begin{aligned} r &= \|u(t^*) - u^*\| \leq \|u(t^*) - u(t_k)\| + \|u(t_k) - u^*\| \\ &\leq \int_{t_k}^{t^*} \|f(\sigma, u(\sigma))\|\, d\sigma + \|u(t_k) - u^*\| \leq (t^* - t_k)M + \|u(t_k) - u^*\| \\ &\leq (b - t_k)M + \|u(t_k) - u^*\| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r \end{aligned}$$

Contradicţia $r < r$ provine din presupunerea că $t^* < b$. Atunci $t^* = b$ şi deci pentru orice $t \in [t_k, b)$ avem $u(t) \in B(u^*, r)$. Cum r poate fi făcut oricât de mic, avem că $\lim_{t\uparrow b} u(t) = u^*$ care împreună cu observaţia evidentă $(b, u^*) \in \mathcal{D}$ duc la contradicţia $u : [a, b) \to X$ este continuabilă. Aceasta poate fi eliminată doar dacă $u^* \in \partial\mathcal{D}$. ■

Dacă impunem funcţiei f o condiţie mai puternică, rezultatul care se obţine este mai profund.

Teorema 2.2.4 *Fie $f : \mathcal{D} \to X$ b-compactă şi să presupunem că f duce mulţimi mărginite din $\mathcal{D}$ în mulţimi mărginite din X. Fie $u : [a, b) \to X$ o soluţie saturată a problemei* (2.2.1). *Atunci are loc una şi numai una din condiţiile*

- *u este nemărginită şi dacă $b < \infty$ atunci $\lim\limits_{t\uparrow b} \|u(t)\| = \infty$ sau*
- *u este mărginită şi u este globală sau*
- *u este mărginită si nu este globală caz în care există $u^* = \lim\limits_{t\uparrow b} u(t)$ şi avem $(b, u^*) \in \partial\mathcal{D}$.*

Demonstraţie. Să presupunem că nu au loc prima şi a doua condiţie. Atunci înseamnă că $\{u(t) : t \in [a, b)\}$ este mărginită şi astfel mulţimea $\{(t, u(t)) : t \in [a, b)\}$ este mărginită. Cum f duce mulţimi mărginite în mulţimi mărginite, există $M > 0$ astfel încât:

$$\|f(t, u(t))\| \leq M$$

pentru orice $t \in [a, b)$. Dar acest lucru implică existenţa limitei lui u în $t = b$ şi conform teoremei precedente $(b, u^*) \in \partial\mathcal{D}$. Să presupunem că nu au loc ultimele două condiţii şi $b < \infty$. Să presupunem că există un şir $(t_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ convergent la b pentru care există $r > 0$ astfel încât $\|u(t_k)\| < r$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$. Fie $C = \{v \in \Omega : \|v\| < r + 1\}$ unde Ω este proiecţia lui $\mathcal{D}$ pe X. Pentru că f duce mulţimi mărginite în mulţimi mărginite, există $M > 0$ astfel încât:

$$\|f(t, v)\| \leq M$$

pentru orice $(t, v) \in [a, b) \times C$. Să alegem un număr real $d > 0$ astfel încât $dM < 1$ şi să fixăm $k \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $b - d < t_k < b$. Pentru că u este nemărginită pe $[a, b)$ există un $t^* \in (t_k, b)$ astfel încât $\|u(t^*)\| = r + 1$ şi pentru orice $\sigma \in [t_k, t^*)$ avem:

$$\|u(\sigma)\| < r + 1.$$

Să observăm că în acest caz:

$$\begin{aligned} r + 1 &= \|u(t^*)\| = \left\| u(t_k) + \int_{t_k}^{t^*} f(\sigma, u(\sigma))d\sigma \right\| \\ &\leq \|u(t_k)\| + \int_{t_k}^{t^*} \|f(\sigma, u(\sigma))\| \, d\sigma \\ &\leq r + dM < r + 1. \end{aligned}$$

Contradicţia poate fi eliminată doar dacă:

$$\lim_{t\uparrow b} \|u(t)\| = \infty.$$

■

Observaţia 2.2.2 *Dacă $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+ \times X$ atunci orice funcţie $f : \mathcal{D} \to X$ compactă duce mulţimi mărginite în mulţimi mărginite*

Corolar 2.2.2 *Fie $f : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ compactă. Atunci o soluţie saturată este fie globală fie nu este globală, caz în care există limita:*

$$\lim_{t\uparrow b} \|u(t)\| = \infty.$$

Demonstraţie. Dacă $b < \infty$, u este în mod necesar nemărginită pe $[a, b)$. Dacă presupunem contrariul atunci u are cel puţin un punct limită când $t \uparrow b$ şi acesta aparţine frontierei mulţimii $\mathbb{R}^+ \times X$ care este mulţimea vidă. Deci u nu poate fi mărginită pe $[a, b)$. Atunci concluzia urmează din observaţia de mai sus si teorema 4. ■

Corolar 2.2.3 *Fie $f : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ compactă. O condiţie necesară şi suficientă pentru ca o soluţie $u : [a, b) \to X$ a problemei (2.2.1) să fie continuabilă este ca $b < \infty$ şi u să fie mărginită pe $[a, b)$.*

Demonstraţie. Dacă u este continuabilă atunci evident $b < \infty$ şi există limita: $\lim_{t\uparrow b} u(t) = u^*$. Prelungind funcţia u prin continuitate pe $[a, b]$ tragem concluzia că u este mărginită. Dacă $b < \infty$ şi $u(t)$ este mărginită, concluzia urmează din Propoziţia 2.2.1 şi din Lema 2.2.1. ■

În sfârşit vom prezenta un criteriu de existenţă a soluţiilor globale pentru problema (2.2.1).

Teorema 2.2.5 *Fie $f : \mathbb{R}^+ \times X \to X$ compactă şi să presupunem că există două funcţii continue $h, k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ astfel încât:*

$$\|f(t, u)\| \leq h(t) \|u\| + k(t)$$

pentru orice $(t, u) \in \mathbb{R}^+ \times X$. Atunci pentru orice $(a, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times X$, problema (2.2.1) are cel puţin o soluţie globală.

Demonstraţie. Fie $u : [a, b) \to X$ o soluţie saturată a lui (2.2.1) şi să presupunem că $b < \infty$. Cum h, k sunt continue atunci restricţiile lor la intervalul compact $[a, b]$ sunt mărginite. Fie M_1, respectiv M_2 aceste constante. Atunci:

$$\begin{aligned} \|u(t)\| &\leq \|\xi\| + \int_a^t \|f(t, u(s))\| \, ds \leq \|\xi\| + \int_a^t \{h(s) \|u\| + k(s)\} \, ds \\ &= \|\xi\| + M_2 + \int_a^t M_1 \|u(s)\| \, ds \end{aligned}$$

Se observă că lema Gronwall este aplicabilă în acest caz si astfel:

$$\|u(t)\| \leq (\xi + M_2)e^{(b-a)M_1}$$

pentru orice $t \in [a, b)$. Deci u este mărginită şi luând în considerare corolarul precedent am obţine că u este continuabilă. Această contradicţie poate fi eliminată doar dacă $b = \infty$, adică soluţia este globală ■

2.3 Problema $u' = f(t, u) + g(t, u)$

Fie X un spaţiu Banach şi $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R} \times X$ o mulţime nevidă, deschisă. În acest paragraf vom demonstra un rezultat de existenţă pentru o clasă de probleme Cauchy de tipul:

$$\begin{cases} u' = f(t, u) + g(t, u) \\ u(a) = \xi \end{cases} \tag{2.3.1}$$

unde $f : \mathcal{D} \to X$ este o funcţie continuă şi b-compactă iar $g : \mathcal{D} \to X$ este o funcţie continuă pe $\mathcal{D}$ şi local Lipschitz în al doilea argument.

Definiţia 2.3.1 *Funcţia $g : \mathcal{D} \to X$ se numeşte local Lipschitz relativ la ultimul argument dacă pentru orice $(a, \xi) \in \mathcal{D}$ există $b > a$, există $r > 0$, şi $L = L_{a,\xi}$ pozitiv astfel încât $[a, b] \times B(\xi, r) \subset \mathcal{D}$ şi*

$$\|g(t, u) - g(t, v)\| \leq L \|u - v\|$$

pentru orice $(t, u), (t, v)$ din $[a, b] \times B(\xi, r)$.

Definiţia 2.3.2 *Prin soluţie a acestei probleme vom întelege o funcţie de clasă C^1, $u : [a, b] \to X$, cu proprietatea că pentru orice $t \in [a, b]$, $(t, u(t)) \in \mathcal{D}$, $u'(t) = f(t, u(t)) + g(t, u(t))$, cât şi condiţia iniţială $u(a) = \xi$.*

Teorema 2.3.1 *Fie $f : \mathcal{D} \to X$ o funcţie continuă şi b-compactă iar $g : \mathcal{D} \to X$ o funcţie continuă pe $\mathcal{D}$ şi local Lipschitz în ultimul argument. Atunci pentru orice $(a, \xi) \in \mathcal{D}$ există $b > a$, astfel încât (2.3.1) să aibă cel putin o soluţie definită pe $[a, b]$.*

O să demonstrăm această teoremă cu ajutorul a trei leme. În primul rând să demonstrăm o variantă a bine cunoscutei leme Gronwall.

Lema 2.3.1 (Gronwall) *Fie $x, k : [a, b) \to \mathbb{R}^+$ măsurabile cu $s \mapsto k(s)x(s)$ şi $s \mapsto k(s)$ integrabile pe $[a, b)$. Fie $m \geq 0$ şi să presupunem că:*

$$x(t) \leq m + \int_a^t k(s)x(s)ds$$

a.p.t. pe $[a, b)$. Atunci:

$$x(t) \leq me^{\int_a^t k(s)ds}$$

a.p.t. pe $[a, b)$.

Demonstraţie. Fie $y(t) = m + \int_a^t k(s)\,x(s)\,ds$. Atunci y este a.p.t. derivabilă şi:

$$y'(t) = k(t)x(t) \le k(t)y(t)$$

a.p.t. pe $[a, b)$. Deci obţinem că:

$$\frac{d}{dt}\left(y(t)e^{-\int_a^t k(s)ds}\right) \le 0$$

a.p.t. pe $[a, b)$. Integrând de a la t obţinem că:

$$y(t) \le e^{\int_a^t k(s)ds}$$

a.p.t. pe $[a, b)$. Pentru că $x(t) \le y(t)$, a.p.t. pe $[a, b)$, obţinem concluzia lemei. ■

În următoarele leme, $\mathbb{I}$ semnifică un interval cu interiorul nevid dar nu este neapărat nevoie ca $\mathbb{I}$ să fie deschis.

Lema 2.3.2 *Fie $g : \mathbb{I} \times X \to X$, continuă pe $\mathbb{I} \times X$ şi Lipschitz pe X în a doua variabilă. Atunci pentru orice $(a, \xi) \in \mathbb{I} \times X$, pentru orice $b > a$ cu $[a, b] \subset \mathbb{I}$, şi pentru orice $h \in L^1(a, b, X)$, problema:*

$$\begin{cases} u' = g(t, u) + h(t) \\ u(a) = \xi \end{cases} \tag{2.3.2}$$

are soluţie unică $S(h)$ definită pe $[a, b]$. În plus, operatorul $h \to S(h)$, satisface:

$$\|S(h_1) - S(h_2)\|_{C([a,b],X)} \le e^{(b-a)L}\,\|H_1 - H_2\|_{C([a,b],X)}$$

unde $L > 0$ este constanta Lipschitz a lui g şi

$$H_i(t) = \int_a^t h_i(s)ds,\ \ i \in \overline{1,2},\ \ t \in [a, b].$$

Demonstraţie. Fie $a \in \mathbb{I}$, $b > a$ cu $[a, b] \subset \mathbb{I}$, $\xi \in X$ şi $h \in L^1(a, b, X)$. Definim $Q : C([a, b], X) \to C([a, b], X)$ prin:

$$Q(u)(t) = \xi + \int_a^t g(s, u(s))ds + \int_a^t h(s)ds$$

pentru orice $u \in C([a, b], X)$, şi pentru orice $t \in [a, b]$. Să observăm că pentru orice $u, v \in C([a, b], X)$ şi pentru orice $t \in [a, b]$ avem:

$$\|Q(u)(t) - Q(v)(t)\| \le L(t - a)\,\|u - v\|_{C([a,b],X)}\ .$$

Din ultima inegalitate folosind un argument inductiv obţinem că:

$$\left\|Q^{(n)}(u)(t) - Q^{(n)}(v)(t)\right\| \le \frac{L^n\,(t-a)^n}{n!}\,\|u - v\|_{C([a,b],X)}$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Trecând la supremum în stânga şi majorând $(t-a)$ cu $(b-a)$, obţinem că:

$$\left\| Q^{(n)}(u) - Q^{(n)}(v) \right\|_{C([a,b],X)} \leq \frac{L^n (b-a)^n}{n!} \|u - v\|_{C([a,b],X)}$$

ceea ce arată că pentru n mare $Q^{(n)}$ este o contracţie. Folosind teorema de punct fix a lui Banach, $Q^{(n)}$ are un unic punct fix $u \in C([a,b], X)$. Dar atunci:

$$\|Qu - u\|_{C([a,b],X)} = \left\| Q^{(n)}Qu - Q^{(n)}u \right\|_{C([a,b],X)} \tag{2.3.3}$$

$$\leq \frac{L^n (b-a)^n}{n!} \|Qu - u\|_{C([a,b],X)} \tag{2.3.4}$$

ceea ce se întâmplă doar dacă $Qu = u$. Dacă ţinem cont că orice punct fix pentru Q este punct fix pentru $Q^{(n)}$ şi că acesta din urmă posedă un singur astfel de punct, obţinem că u este singurul punct fix al operatorului Q. Dar orice punct fix al operatorului Q este soluţie a problemei (2.3.2), astfel că prima parte a acestei leme este demonstrată.

Fie acum două elemente, h_1 şi h_2 din $L^1(a, b, X)$. Să observăm că:

$$\|S(h_1)(t) - S(h_2)(t)\| \leq$$

$$\left\| \int_a^t (h_1(s) - h_2(s))ds \right\| + \int_a^t \|g(s, S(h_1)(s)) - g(s, S(h_2)(s))\| \, ds \leq$$

$$\|H_1 - H_2\|_{C([a,b],X)} + L \int_a^t \|S(h_1)(s) - S(h_2)(s)\| \, ds$$

pentru orice $t \in [a, b]$. Aplicăm lema lui Gronwall şi astfel deducem că:

$$\|S(h_1)(t) - S(h_2)(t)\| \leq e^{(b-a)L} \|H_1 - H_2\|_{C([a,b],X)} .$$

Trecând la supremum în partea stângă obţinem concluzia lemei. ■

Lema 2.3.3 *Fie $f : \mathbb{I} \times X \to X$ o funcţie continuă cu $f(\mathbb{I} \times X)$ relativ compactă şi $g : \mathbb{I} \times X \to X$ continuă şi Lipschitz pe X. Atunci pentru orice $(a, \xi) \in \mathbb{I} \times X$ şi pentru orice $b > a$ cu $[a, b] \subset \mathbb{I}$ problema* (2.3.1) *are cel putin o soluţie pe $[a, b]$.*

Demonstraţie. Fie $\lambda > 0$. Din lema precedentă avem că problema:

$$u_\lambda(t) = \begin{cases} \xi & t \in [a - \lambda, a] \\ \xi + \displaystyle\int_a^t g(s, u_\lambda(s))ds + \int_a^t f(s, u_\lambda(s - \lambda))ds & t \in (a, b] \end{cases} \tag{2.3.5}$$

are soluţie unică continuă u_λ. Într-adevăr fie $u_\lambda^0 = \xi$ pe $[a - \lambda, a]$. Evident că există un m natural astfel încât $m\lambda + a > b$. Să considerăm problema:

$$\begin{cases} u' = g(t, u) + f(t, \xi) \\ u(a) = \xi. \end{cases}$$

Aceasta, conform lemei precedente, are evident o soluţie unică u^1_λ definită pe $[a, a+\lambda]$. Să considerăm problema:

$$\begin{cases} u' = g(t,u) + f(t, u^1_\lambda(t)) \\ u\,(a+\lambda) = u^1_\lambda(a+\lambda) \end{cases}$$

care, datorită aceluiaşi argument, admite o soluţie u^2_λ pe $[a+\lambda, a+2\lambda]$.
Procedând ca mai sus după m paşi vom obţine funcţiile u^0_λ, u^1_λ, ... ,u^m_λ pe care le putem concatena obţinând astfel soluţia pentru problema (2.3.5) .

Fie $\lambda = 1/n$ şi u_n soluţia corespunzătoare. Cum $f(\mathbb{I} \times X)$ este relativ compactă, din (1.1.1) rezultă că:

$$\{F_n(t); n \in \mathbb{N}\}$$

este relativ compactă, unde $F_n(t) = \int_a^t f(s, u_n(s - 1/n))ds$. Cum f este şi mărginită pe $\mathbb{I} \times X$ există $M > 0$, astfel încât:

$$\|f(t,u)\| < M$$

pentru orice $(t,u) \in \mathbb{I} \times X$. Avem atunci că:

$$\|F_n(t) - F_m(s)\| \le M(t-s)$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$ şi pentru orice $t, s \in [a,b]$. Atunci conform teoremei Arzelà-Ascoli există $F \in C([a,b]\,, X)$ astfel încât măcar pe un subşir să avem:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = F(t)$$

uniform pe $[a,b]$. Pentru simplitatea expunerii vom presupune că $\{F_n; n \in \mathbb{N}\}$ este şirul în cauză. Dar atunci:

$$\begin{aligned} & \|u_n(t) - u_m(t)\|_{C([a,b],X)} \\ \le\ & \|F_n(t) - F_m(t)\| + \int_a^t \|g(s,u_n(s)) - g(s,u_m(s))\|\,ds \\ \le\ & \|F_n - F_m\|_{C([a,b],X)} + L\int_a^t \|u_n(s) - u_m(s)\|\,ds \end{aligned}$$

relaţie care, conform lemei Gronwall, conduce la:

$$\|u_n - u_m\|_{C([a,b],X)} \le e^{L(b-a)}\,\|F_n - F_m\|_{C([a,b],X)}$$

pentru orice $n, m \in \mathbb{N}$. Întrucât $\{F_n; n \in \mathbb{N}\}$ este Cauchy, urmează că $\{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ este Cauchy deci converge uniform la o funcţie $u \in C([a,b]\,, X)$. Trecând la limită în (2.3.5) obţinem concluzia lemei. ■

Să trecem acum la a demonstra teorema enunţată la începutul paragrafului.
Demonstraţie. Fie $(a,\xi) \in \mathcal{D}$. Pentru că $\mathcal{D}$ este deschis, există $c, d, r > 0$ astfel încât $c < a < d$ şi:

$$[c,d] \times B(\xi, r) \subset \mathcal{D}$$

În plus, pentru că g este continuă şi local Lipschitz în a doua variabilă, eventual diminuând r, putem presupune că:

$$\|g(t,u)\| \leq M$$

pentru orice $(t,u) \in [c,d] \times B(\xi,r)$ şi:

$$\|g(t,u) - g(t,v)\| \leq L \|u - v\| \ .$$

Să definim $\rho : X \to X$ prin:

$$\rho(y) = \begin{cases} y & y \in B(\xi,r) \\ \frac{r}{\|y-\xi\|}(y-\xi)+\xi & y \in X \backslash B(\xi,r). \end{cases}$$

Observăm că $\rho(X) = B(\xi,r)$ şi este Lipschitz de constant ă 2. Definim f_r, g_r pe $[c,d] \times B(\xi,r)$ prin:

$$f_r(t,y) = f(t,\rho(y))$$

respectiv:

$$g_r(t,y) = g(t,\rho(y)).$$

Cum f este b-compactă, obţinem că $f([c,b] \times B(\xi,r))$ este relativ compactă, deci şi $f_r([c,d] \times B(\xi,r))$ este relativ compactă. Funcţia g_r este Lipschitz de constantă $2L$. Din lema anterioară obţinem că:

$$\begin{cases} u' = f_r\,(t,u) + g_r\,(t,u) \\ u\,(a) = \xi \end{cases}$$

are cel puţin o soluţie $u : [a,b] \to X$. Cum u este continuă şi $u(a) = \xi$ putem diminua b astfel încât $\|u(t) - \xi\| \leq r$ pentru orice $t \in [a,b]$. Dar acest fapt implică $f_r(t,u(t)) = f(t,u(t))$ şi $g_r(t,u(t)) = g(t,u(t))$. Astfel $u : [a,b] \to X$ este soluţie pentru problema (2.3.1). ■

3 Aplicaţii

3.1 Ecuaţia Klein-Gordon

Scopul acestui capitol este demonstrarea unui rezultat de existenţă pentru ecuaţia Klein-Gordon:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} + g(u) & \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & \forall t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0,x) = \xi_1(x) & \forall x \in [0,\pi] \\ u_t(0,x) = \xi_2(x) & \forall x \in [0,\pi] \end{cases} \tag{3.1.1}$$

Să considerăm mai întâi spaţiile:

$$H_0^1(0,\pi) = \left\{ f \in L^2(0,\pi) : \exists\ f' \in L^2(0,\pi),\ f(0) = f(\pi) = 0 \right\}$$

şi:

$$H^2(0,\pi) = \left\{ f \in L^2(0,\pi) : \exists\ f', f'' \in L^2(0,\pi) \right\}.$$

Vom demonstra mai întâi un rezultat de incluziune. Spaţiul $H_0^1(0,\pi)$ înzestrat cu norma $\|.\|_{H_0^1(0,\pi)}$ dată de:

$$\|f\|_{H_0^1(0,\pi)} = \|f\|_{L^2(0,\pi)} + \|f'\|_{L^2(0,\pi)}$$

este spaţiu Banach.

Propoziţia 3.1.1 *Incluziunea $H_0^1(0,\pi) \subset C[0,\pi]$ este compactă iar incluziunea $C[0,\pi] \subset L^2(0,\pi)$ este continuă. În particular, incluziunea $H_0^1(0,\pi) \subset L^2(0,\pi)$ este compactă.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{M} \subset H_0^1(0,\pi)$ o mulţime mărginită. Atunci există o constantă $M > 0$ astfel încât:

$$\|f\|_{L^2(0,\pi)} + \|f'\|_{L^2(0,\pi)} \leq M$$

pentru orice $f \in \mathcal{M}$. Atunci pentru orice $t \in [0,\pi]$ avem:

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)ds = \int_0^t f'(s)ds$$

astfel încât:

$$|f(t)| = \left| \int_0^t f'(s)ds \right| \leq \left(\int_0^t |f'(s)|\, ds \right) \leq \left(\int_0^t 1ds \right)^{1/2} \left(\int_0^t |f'(s)|^2\, ds \right)^{1/2}$$

deci:

$$|f(t)| \leq \sqrt{t}\sqrt{M} \leq \sqrt{\pi}\sqrt{M}.$$

Trecând la supremum obţinem că $\mathcal{M}$ este egal mărginită. Această familie este şi echicontinuă:

$$\begin{aligned} |f(t)-f(s)| &= \left|\int_s^t f'(\sigma)d\sigma\right| \le \left(\int_s^t |f'(\sigma)|\, d\sigma\right) \\ &\le \sqrt{t-s}\, \|f'\|_{L^2(0,\pi)} < \sqrt{t-s} M\ . \end{aligned}$$

Astfel putem aplica Teorema Arzelà-Ascoli şi obţinem că $\mathcal{M}$ este relativ compactă în $C[0,\pi]$. Incluziunea $C[0,\pi] \subset L^2(0,\pi)$ este continuă. Într-adevăr:

$$\|f\|_{L^2(0,\pi)} = \left(\int_0^\pi |f(s)|^2\, ds\right)^{1/2} \le \left(\int_0^\pi \|f\|^2_{C[0,\pi]}\right)^{1/2} \le \sqrt{\pi}\, \|f\|_{C[0,\pi]}$$

ceea ce demonstrează propoziţia. ■

Să considerăm în continuare operatorul
$A : D(A) \subset H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi) \to H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$ definit de:

$$\begin{cases} D(A) = \left[H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)\right] \times H_0^1(0,\pi) \\ A\,(u,v) = (v, u''). \end{cases} \tag{3.1.2}$$

Să considerăm spaţiul $H = H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$ care, înzestrat cu produsul scalar:

$$\langle (u_1,v_1),(u_2,v_2)\rangle = \int_0^\pi u_1'(x)u_2'(x)\, dx + \int_0^\pi v_1(x)v_2(x)\, dx,$$

pentru orice $(u_1,v_1),(u_2,v_2) \in H \times H$, este un spaţiu Hilbert real. Conform propoziţiei 1.4.1, operatorul $A : D(A) \to H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$ definit de relaţia (3.1.2) generează un grup de izometrii $\{G(t) : H \to H;\ t \in \mathbb{R}\}$.

Teorema 3.1.1 *Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă. Pentru orice $(\xi_1,\xi_2) \in H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$ există $T \in \mathbb{R}$ astfel încât:*

$$(u,u_t) \in C^1\left([0,T]\,; H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)\right)$$

este soluţie pentru ecuaţia (3.1.1).

Demonstraţie. Să observăm că ecuaţia (3.1.2) se poate scrie sub forma echivalentă:

$$\begin{cases} u_t = v & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi) \\ v_t = u_{xx} + g(u) & (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times (0,\pi) \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0 & t \in \mathbb{R}^+ \\ u(0,x) = \xi_1(x) & x \in (0,\pi) \\ v(0,x) = \xi_2(x) & x \in (0,\pi) \end{cases} \tag{3.1.3}$$

sau încă sub forma:

$$\begin{cases} z' = Az + f(z) \\ z(0) = \xi \end{cases} \tag{3.1.4}$$

unde $f : H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi) \to H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$ definită prin:

$$f(u,v)(x) = (0, g(u(x))),$$

pentru orice $(u,v) \in H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$ şi a.p.t. $x \in (0,\pi)$. Problema (3.1.4) este echivalentă cu:

$$z(t) = G(t)\xi + \int_0^t G(t-s)f(z(s))ds. \tag{3.1.5}$$

Să considerăm $h : D(h) \to H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$ dat de:

$$\begin{cases} D(h) = \left\{(t, G(-t)z);\ (t,z) \in \mathbb{R}^+ \times H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)\right\} \\ h(t,w) = G(-t)f(G(t)w), \quad (t,w) \in D(h). \end{cases}$$

Să considerăm problema:

$$\begin{cases} w'(t) = h(t, w(t)) \\ w(0) = \xi. \end{cases} \tag{3.1.6}$$

Să observăm că funcţia h definită mai sus este b-compactă. Într-adevăr fie $\mathcal{M} \subset D(h)$ o mulţime mărginită şi fie $(t_m, w_m)_m$ din $\mathcal{M}$ un şir. Atunci:

$$w_m(t) = G(-t)z_m(t) = G(-t)(u_m, v_m).$$

Avem:

$$h(t_m, w_m) = G(-t_m)f(G(t_m)w_m) = G(-t_m)f(z_m) = G(-t_m)(0, g(u_m))\ .$$

Cum $(u_m)_m$ este mărginit, din Propoziţia 3.1.1, rezultă că $(u_m)_m$ admite un subşir convergent în $L^2(0,\pi)$. Cum $(t_m)_m$ este mărginit în $\mathbb{R}^+$, din Lema lui Cesarò, deducem în final că există un subşir al lui $(t_m, u_m)_m$, notat pentru simplitate tot cu $(t_m, u_m)_m$, astfel încât:

$$\lim_m t_m = t^*$$

în $\mathbb{R}^+$ şi

$$\lim_m u_m(t) = u^*$$

în $L^2(0,\pi)$.

Cum G operator continuu, deducem că h este b-compactă. Din Teorema 2.1.1 rezultă că ecuaţia (3.1.6) are o soluţie locală, adică există un $T > 0$ şi o funcţie $w : [0,T] \to H_0^1(0,\pi) \times L^2(0,\pi)$, $(t, w(t)) \in D(h)$ astfel încât:

$$w(t) = \xi + \int_0^t h(s, w(s))ds,$$

sau, echivalent:

$$G(t)w(t) = G(t)\xi + \int_0^t G(t-s)f(G(s)w(s))ds.$$

Deci $t \mapsto G(t)w(t)$ este soluţie pentru (3.1.5) deci pentru (3.1.4). ■

3.2 Aplicaţie la o problemă de mecanică

Să considerăm următoarea problemă:

$$\begin{cases} u_t = \alpha u_{xxt} + \beta u_{xx} + f(t,x,u) & \forall (t,x) \in [0,T] \times [0,\pi] \\ u(t,0) = u(t,\pi) & \forall t \in [0,T] \\ u(0,x) = g(x) & \forall x \in [0,\pi] \end{cases} \tag{3.2.1}$$

unde α, β sunt numere reale strict pozitive.

Să considerăm operatorul $A : D(A) \subset L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi)$ definit prin:

$$\begin{cases} D(A) = H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi) \\ Au = u''. \end{cases}$$

După cum am văzut acesta generează un semigrup de contracţii şi are proprietatea că pentru orice $\lambda > 0$, $(I - \lambda A)^{-1} \in \mathcal{L}(L^2(0,\pi))$. De asemenea, conform unei consecinţe a Teoremei Hille-Yosida, spaţiul $H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)$ înzestrat cu norma:

$$\begin{aligned} \|u\|_{H_0^1(0,\pi)\cap H^2(0,\pi)} &:= \|u\|_{L^2(0,\pi)} + \|Au\|_{L^2(0,\pi)} \\ &= \|u\|_{L^2(0,\pi)} + \|u''\|_{L^2(0,\pi)} \end{aligned}$$

este spaţiu Banach.

Să observăm că dacă identificăm $u(t,x)$ cu funcţia $z : [0,T] \to H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)$, $z(t)(x) = u(t,x)$, problema (3.2.1) se poate rescrie sub forma:

$$\begin{cases} z' = \beta\,(I - \alpha A)^{-1} Az + (I - \alpha A)^{-1} f(t,x,u)) \\ z(0) = g. \end{cases}$$

Dar să observăm că

$$(I - \alpha A)^{-1} \beta A = \beta \alpha^{-1} (I - \alpha A)^{-1} (I - (I - \alpha A)) = \beta\alpha^{-1}(I - \alpha A)^{-1} - \beta\alpha^{-1} I$$

şi $G = \beta\alpha^{-1}(I - \alpha A)^{-1} - \beta\alpha^{-1} I \in \mathcal{L}(L^2(0,\pi))$. De asemenea vom defini $F : \mathbb{R}^+ \times H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi) \to H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)$ prin:

$$F(t,u)(x) = (I - \alpha A)^{-1} f(t,x,u(x)).$$

În acest moment, problema (3.2.1) capătă forma:

$$\begin{cases} z'(t) = Gz(t) + F(t,z(t)) \\ z(0) = g. \end{cases} \tag{3.2.2}$$

Teorema 3.2.1 *Fie $f : \mathbb{R}^+ \times [0,\pi] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă. Atunci pentru orice $g \in H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)$, există $T > 0$ şi există $u : [0,T] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ soluţie pentru problema* (3.2.1).

Demonstraţie. Evident o soluţie pentru problema (3.2.2) este soluţie pentru problema (3.2.1). Vom demonstra că G este Lipschitz şi că F este compactă. În primul rând fie $z_1, z_2 \in H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)$. Atunci:

$$\begin{aligned}
& \|Gz_1 - Gz_2\|_{H_0^1(0,\pi)\cap H^2(0,\pi)} = \|Gz_1 - Gz_2\|_{L^2(0,\pi)} + \|Gz_1'' - Gz_2''\|_{L^2(0,\pi)} \\
= \; & \|G(z_1 - z_2)\|_{L^2(0,\pi)} + \|G(z_1'' - Gz_2'')\|_{L^2(0,\pi)} \\
\leq \; & \|G\|_{\mathcal{L}(L^2(0,\pi))} \|z_1 - z_2\| + \|G\|_{\mathcal{L}(L^2(0,\pi))} \|z_1'' - z_2''\| \\
= \; & \|G\|_{\mathcal{L}(L^2(0,\pi))} \|z_1 - z_2\|_{H_0^1(0,\pi)\cap H^2(0,\pi)}
\end{aligned}$$

astfel că G este Lipschitz.

Fie $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^+ \times H_0^1(0,\pi) \cap H^2(0,\pi)$ o mulţime mărginită. Fie $(t_n, u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}$. Atunci există $M > 0$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
t_n &\leq M \\
\|u_n\|_{L^2(0,\pi)} + \|u_n''\|_{L^2(0,\pi)} &\leq M
\end{aligned}$$

Observăm că:

$$\begin{aligned}
\|u_n'\|_{L^2(0,\pi)}^2 &= \int_0^\pi [u'(x)]^2 dx = -\int_0^\pi u(x)u''(x)dx = -\langle u, u'' \rangle_{L^2(0,\pi)} \\
&\leq \|u\|_{L^2(0,\pi)} \|u''\|_{L^2(0,\pi)} \leq \left(\frac{\|u\|_{L^2(0,\pi)} + \|u''\|_{L^2(0,\pi)}}{2} \right)^2 \leq \frac{1}{4} M^2
\end{aligned}$$

deci:

$$\|u_n'\|_{L^2(0,\pi)} \leq \frac{1}{2} M.$$

În acest moment avem că:

$$\|u_n\|_{H_0^1(0,\pi)} = \|u_n\|_{L^2(0,\pi)} + \|u_n'\|_{L^2(0,\pi)} \leq \frac{3}{2} M.$$

Însă incluziunea $H_0^1(0,\pi) \subset C[0,\pi]$ este compactă astfel că $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este relativ compactă în $C[0,\pi]$. Dar şirul $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit astfel încât măcar pe un subşir notat pentru simplitate tot cu indicele n avem:

$$\lim_{n\to\infty} t_n = t_0 \tag{3.2.3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,\pi]} |u_n(x) - u_0(x)| = 0 \tag{3.2.4}$$

unde $u_0 \in C[0,\pi]$. Dar atunci există $M_1 > 0$ astfel încât pentru orice $x \in [0,\pi]$ să avem:

$$|u_0(x)| \leq M_1.$$

Relaţiile (3.2.3) şi (3.2.4) implică existenţa unui $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel încât pentru orice $n \geq n_1$ să avem:

$$\begin{aligned}
& t_n \in [t_0 - r, t_0 + r], \\
& \sup_{x\in[0,\pi]} |u_n(x) - u_0(x)| \leq r,
\end{aligned}$$

unde $r > 0$ este ales astfel încât $t_0 - r > 0$. Dar atunci avem că pentru orice $x \in [0, \pi]$

$$|u_n(x)| \leq M_1 + r.$$

Pentru că f este continuă, restricţia acesteia la $[t_0 - r, t_0 + r] \times [0, \pi] \times [-M_1 - r, M_1 + r]$ este uniform continuă. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât din:

$$|t - s| + |x - y| + |u - v| \leq \delta$$

să rezulte:

$$|f(t, x, u) - f(s, y, v)| \leq \varepsilon.$$

Dar din (3.2.3) şi (3.2.4) există un $n(\delta) \in \mathbb{N}$ aşa încât pentru orice $n > \max(n(\delta), n_1)$ şi pentru orice $x \in [0, \pi]$ să avem:

$$|t_n - t_0| + |u_n(x) - u_0(x)| \leq \delta$$

ceea ce implică:

$$\sup_{x \in [0,\pi]} |f(t_n, x, u_n(x)) - f(t_0, x, u_0(x))| \leq \varepsilon.$$

Să observăm că:

$$\begin{aligned} & \|(I - \alpha A)F(t_n, u_n)(x) - f(t_0, x, u_0(x))\| \\ = \; & |f(t_n, x, u_n(x)) - f(t_0, x, u_0(x))| \\ \leq \; & \sup_{x \in [0,\pi]} |f(t_n, x, u_n(x)) - f(t_0, x, u_0(x))| \, . \end{aligned}$$

Ridicând la pătrat şi integrând în inegalitatea de mai sus ambii membrii de la 0 la π obţinem:

$$\|(I - \alpha A)F(t_n, u_n) - f(t_0, \cdot, u_0(\cdot)\|_{L^2(0,\pi)} \leq \varepsilon\sqrt{\pi} \tag{3.2.5}$$

pentru orice $n > \max(n(\delta), n_1)$. Notăm cu $k(\cdot) = f(t_0, \cdot, u_0(\cdot)) \in L^2(0, \pi)$. Pentru că ε a fost ales arbitrar, relaţia (3.2.5) este echivalentă cu:

$$\lim_{n\to\infty} \|(I - \alpha A)F(t_n, u_n) - k\|_{L^2(0,\pi)} = 0. \tag{3.2.6}$$

Vom demonstra că:

$$\lim_{n\to\infty} F(t_n, u_n) = (I - \alpha A)^{-1}k \in H_0^1(0, \pi) \cap H^2(0, \pi)$$

în topologia normei lui $H_0^1(0, \pi) \cap H^2(0, \pi)$.

$$\begin{aligned} & \left\|F(t_n, u_n) - (I - \alpha A)^{-1}k\right\|_{H_0^1(0,\pi)\cap H^2(0,\pi)} \\ = & \left\|F(t_n, u_n) - (I - \alpha A)^{-1}k\right\|_{L^2(0,\pi)} + \left\|A[F(t_n, u_n) - (I - \alpha A)^{-1}k]\right\|_{L^2(0,\pi)} . \end{aligned}$$

Să observăm că:

$$
\begin{aligned}
& \left\|F(t_n,u_n)-(I-\alpha A)^{-1}k\right\|_{L^2(0,\pi)} \\
= & \left\|(I-\alpha A)^{-1}(I-\alpha A)F(t_n,u_n)-(I-\alpha A)^{-1}k\right\|_{L^2(0,\pi)} \\
= & \left\|(I-\alpha A)^{-1}\left[(I-\alpha A)F(t_n,u_n)-k\right]\right\|_{L^2(0,\pi)} \\
\leq & \left\|(I-\alpha A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(L^2(0,\pi))}\left\|(I-\alpha A)F(t_n,u_n)-k\right\|_{L^2(0,\pi)}
\end{aligned}
$$

dar atunci folosind relaţia (3.2.6) pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$\left\|F(t_n,u_n)-(I-\alpha A)^{-1}k\right\|_{L^2(0,\pi)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.2.7}$$

pentru orice $n \geq n_1(\varepsilon)$. În continuare avem că:

$$
\begin{aligned}
& \left\|A[F(t_n,u_n)-(I-\alpha A)^{-1}k]\right\|_{L^2(0,\pi)} \\
= & \left\|A[(I-\alpha A)^{-1}(I-\alpha A)F(t_n,u_n)-A(I-\alpha A)^{-1}k\right\|_{L^2(0,\pi)}.
\end{aligned} \tag{3.2.8}
$$

Însă avem că:

$$
\begin{aligned}
A(I-\alpha A)^{-1} &= \alpha^{-1}(I-(I-\alpha A))(I-\alpha A)^{-1} \\
&= \alpha^{-1}((I-\alpha A)^{-1}-I)
\end{aligned}
$$

şi evident că $H = \alpha^{-1}((I-\alpha A)^{-1}-I) \in \mathcal{L}(L^2(0,\pi))$. Dar atunci din (3.2.8) obţinem că:

$$
\begin{aligned}
& \left\|A[F(t_n,u_n)-(I-\alpha A)^{-1}k]\right\|_{L^2(0,\pi)} \\
\leq & \|H\|_{\mathcal{L}(L^2(0,\pi))}\left\|(I-\alpha A)F(t_n,u_n)-k\right\|_{L^2(0,\pi)}.
\end{aligned}
$$

Din nou, invocând relaţia (3.2.6) obţinem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ astfel încât:

$$\left\|A[F(t_n,u_n)-(I-\alpha A)^{-1}k]\right\|_{L^2(0,\pi)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.2.9}$$

pentru orice $n \geq n_2(\varepsilon)$. Din relaţiile (3.2.7) şi (3.2.9) obţinem că pentru orice $n \geq \max(n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon))$ avem:

$$\left\|F(t_n,u_n)-(I-\alpha A)^{-1}k\right\|_{H_0^1(0,\pi)\cap H^2(0,\pi)} \leq \varepsilon$$

deci:

$$\lim_{n\to\infty} F(t_n,u_n) = (I-\alpha A)^{-1}k$$

în topologia normei lui $H_0^1(0,\pi)\cap H^2(0,\pi)$. Atunci funcţia $F : \mathbb{R}^+ \times H_0^1(0,\pi)\cap H^2(0,\pi) \to H_0^1(0,\pi)\cap H^2(0,\pi)$ este compactă. Dacă ţinem cont şi de faptul că G Lipschitz, obţinem că problema (3.2.2) are soluţie. Atunci problema (3.2.1) are soluţie. ■

Bibliografie

[1] Nicolescu, Miron (1968), *Functii reale si elemente de topologie*, Editura Didactica si Pedagogica, Bucuresti

[2] Vrabie, Ioan I.(2003), *C_0−semigroups and applications. North-Holland Mathematics Studies, 191.*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam.

[3] Vrabie, Ioan I. (2011), *Differential Equations. Basic Concepts, Results and Applications*, Second Edition, World Scientific, New Jersey, London, Singapore, Beijing, Shanghai, Hong Kong, Taipei, Chennai.