UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE

Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche (UMR 7586 CNRS)

Mémoire présenté pour l'obtention du

Diplôme d'habilitation à diriger les recherches de l'Université Pierre et Marie Curie

Spécialité : Mathématiques

par

Cyril DEMARCHE

Titre :

COHOMOLOGIE NON ABÉLIENNE ET APPLICATIONS À LA GÉOMÉTRIE ET À L'ARITHMÉTIQUE DES ESPACES HOMOGÈNES

Soutenu le 23 novembre 2017 devant la commission d'examen :

MICHEL BRION	Directeur de recherche (Université Grenoble Alpes)
JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE	Directeur de recherche (Université Paris-Sud)
PHILIPPE GILLE	Directeur de recherche (Université Claude Bernard Lyon 1)
DAVID HARARI	Professeur (Université Paris-Sud)
BRUNO KAHN	Directeur de recherche (Université Pierre et Marie Curie)
BORIS KUNYAVSKII	Professeur (Bar-Ilan University)

au vu des rapports de :

MICHEL BRION	Directeur de recherche (Université Grenoble Alpes)
BORIS KUNYAVSKII	Professeur (Bar-Ilan University)
BJORN POONEN	Professeur (Massachusetts Institute of Technology)

Remerciements

Je souhaiterais commencer par remercier chaleureusement David Harari, qui fut mon directeur de thèse il y a quelques années et qui dans ce rôle a accompagné mes débuts dans le monde de la recherche. Je le remercie pour son soutien constant depuis cette période, et pour les nombreuses discussions, souvent mathématiques et parfois sportives, que l'on a pu avoir et que l'on aura encore longtemps.

Je remercie particulièrement Michel Brion, Boris Kunyavskii et Bjorn Poonen, qui ont accepté d'être rapporteurs de ce mémoire et de consacrer une partie de leur temps précieux à la lecture de ce texte.

Je suis également reconnaissant à Jean-Louis Colliot-Thélène, Philippe Gille et Bruno Kahn de m'avoir fait l'honneur de participer au jury.

Je profite également de ces lignes pour saluer et remercier mes collaborateurs, qui m'ont appris à réfléchir à plusieurs : Mikhail Borovoi, Yang Cao, Mathieu Florence, David Harari, Giancarlo Lucchini Arteche, Danny Neftin, Tamás Szamuely, Dasheng Wei, Fei Xu.

Un grand merci également à tous les collègues de l'IMJ-PRG et du DMA, avec qui j'ai beaucoup partagé, avec une pensée particulière pour Mathieu Florence et nos discussions mathématiques quotidiennes, pour Antoine Ducros et Olivier Wittenberg, et la gentillesse et la disponibilité qu'ils m'ont témoignées, pour Diego Izquierdo et Vincent Maillot, et les deux demi-bureaux qu'ils ont accepté de partager avec moi et avec bonne humeur, et pour tous ceux avec qui j'ai eu la joie d'enseigner, entre autres Pierre Charollois, Pierre-Vincent Koseleff, Ariane Mézard, Patrick Polo, ...

Une pensée également pour le personnel administratif de l'IMJ-PRG et du DMA, qui m'a toujours permis de travailler dans d'excellentes conditions.

Je salue aussi les étudiants que j'ai eu le plaisir de rencontrer, et pour certains d'encadrer, lors de ces dernières années.

Et pour finir en beauté, je remercie Juliette, Alexandre et Maxime pour le bonheur qu'ils me transmettent au quotidien.

TABLE DES MATIÈRES

Travaux couvrant la période de thèse

[Dem09] C. Demarche – « Obstruction de descente et obstruction de Brauer-Manin étale », *Algebra Number Theory* **3** (2009), no. 2, p. 237–254.

[Dem10] ———, « Groupe de Brauer non ramifié d'espaces homogènes à stabilisateurs finis », *Math. Ann.* **346** (2010), no. 4, p. 949–968.

[Dem11a] ———, « Le défaut d'approximation forte dans les groupes linéaires connexes », *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **102** (2011), no. 3, p. 563–597.

[Dem11b] ———, « Suites de Poitou-Tate pour les complexes de tores à deux termes », *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2011), no. 1, p. 135–174.

[Dem13] ———, « Abélianisation des espaces homogènes et applications arithmétiques », Torsors, étale homotopy and applications to rational points, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 405, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013, p. 138–209.

Travaux présentés pour l'habilitation

[Dem11c] C. Demarche – « Une formule pour le groupe de Brauer algébrique d'un torseur », *J. Algebra* **347** (2011), p. 96–132.

[BD13] M. Borovoi & C. Demarche – « Manin obstruction to strong approximation for homogeneous spaces », *Comment. Math. Helv.* **88** (2013), no. 1, p. 1–54.

[BDH13] M. Borovoi, C. Demarche & D. Harari – « Complexes de groupes de type multiplicatif et groupe de Brauer non ramifié des espaces homogènes », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **46** (2013), no. 4, p. 651–692 (2013).

[DW14] C. Demarche & D. Wei – « Hasse principle and weak approximation for multinorm equations », *Israel J. Math.* **202** (2014), no. 1, p. 275–293.

[Dem15] C. Demarche – « Cohomologie de Hochschild non abélienne et extensions de faisceaux en groupes », Autour des schémas en groupes. Vol. II, Panor. Synthèses, vol. 46, Soc. Math. France, Paris, 2015, p. 255–292.

[CDX16] Y. Cao, C. Demarche & F. Xu – « Comparing descent obstruction and Brauer-Manin obstruction for open varieties », prépublication, 2016.

[Dem17a] C. Demarche – « Le groupe fondamental étale d'un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire », *Math. Ann.* **368** (2017), no. 1, p. 339–365.

[Dem17b] ———, « Obstructions de Brauer-Manin entières sur les espaces homogènes à stabilisateurs finis nilpotents », *Bull. Soc. Math. France* **145** (2017), no. 2, p. –.

[DLN17] C. Demarche, G. Lucchini Arteche & D. Neftin – « The Grunwald problem and approximation properties for homogeneous spaces », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **67** (2017), no. 2, p. 1009–1033.

[DL17] C. Demarche & G. Lucchini Arteche – « Le principe de Hasse pour les espaces homogènes : réduction au cas des stabilisateurs finis », prépublication, 2017.

RÉSUMÉ

Dans ce mémoire, on présente les résultats principaux obtenus entre 2010 et 2017. Ceux-ci concernent tous d'une certaine façon les espaces homogènes de groupes algébriques ou de schémas en groupes. Par définition, un tel espace est une variété algébrique ou un schéma (voire simplement un faisceau) muni d'une action transitive d'un groupe algébrique ou d'un schéma en groupes. Les contributions des travaux présentés ont notamment comme point commun l'usage de méthodes cohomologiques, que ce soit la cohomologie (galoisienne, étale ou fppf) non abélienne des schémas en groupes ou la cohomologie abélienne plus classique. Les questions abordées peuvent être essentiellement regroupées dans les thèmes suivants (qui ne sont pas sans lien) :

(1) la géométrie des schémas en groupes et de leurs espaces homogènes (voir les travaux [**BDH13**], [**Dem11c**], [**Dem15**], [**Dem17a**], [**DL17**]) : la structure des schémas en groupes sur une base assez générale, la structure et les groupes de cohomologie et d'homotopie (étale) des espaces homogènes sur des corps quelconques.

(2) l'étude des points rationnels sur les variétés algébriques sur les corps globaux par des méthodes de descente associées à des torseurs au-dessus des variétés en question (voir [**CDX16**]).

(3) l'arithmétique des groupes algébriques et de leurs espaces homogènes sur les corps globaux (voir [**BD13**], [**Dem17b**], [**DL17**] ; [**DLN17**], [**DW14**]) : principe de Hasse pour les points rationnels et pour les points entiers, approximation faible et approximation forte, obstructions cohomologiques à ces propriétés.

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Soit k un corps et G un k-groupe algébrique (par convention, dans tout ce texte, un groupe algébrique sur un corps k, parfois appelé k-groupe, est un schéma en groupes de type fini sur $\mathrm{Spec}\,(k)$). On note $\bar{k}$ une clôture algébrique de k. Un espace homogène (sur k) de G est une k-variété X, c'est-à-dire un schéma séparé de type fini sur $\mathrm{Spec}\,(k)$, munie d'une action transitive de G (définie sur k), i.e. d'une action de groupe $m : G \times_k X \to X$ telle que l'action induite de $G(\bar{k})$ sur $X(\bar{k})$ soit transitive. Ces espaces sont l'objet d'étude principal de ce mémoire. Plus généralement, on peut définir, pour tout site S et tout faisceau en groupes G sur S, un S-espace homogène de G comme un faisceau X sur S muni d'une action $m : G \times X \to X$ telle que le morphisme de faisceaux induit $G \times X \to X \times X$ soit un épimorphisme de faisceaux sur S et qu'il existe un recouvrement $(S_i \to S)$ de S tel que $X(S_i) \neq \varnothing$ pour tout i.

Dans la plupart des situations considérées ici, le faisceau en groupes G est représentable par un S-schéma en groupes, et l'espace homogène X est représentable par un S-schéma.

Parmi les premiers exemples naturels d'espaces homogènes sur un corps k, on peut citer les groupes algébriques eux-mêmes, munis de l'action naturelle par translation. Un peu plus généralement, un S-torseur sous G est un faisceau X, admettant des sections localement sur S, muni d'une action de G telle que le morphisme $G \times X \to X \times X$ soit un isomorphisme de faisceaux (autrement dit, l'action est libre et transitive) : les torseurs sont donc évidemment des espaces homogènes particuliers.

Un exemple simple d'espace homogène qui ne soit pas un torseur est donné par les quadriques sur un corps k (de caractéristique différente de 2). En effet, si q est une forme quadratique non dégénérée sur un k-espace vectoriel V, on peut considérer la quadrique affine $q(x_1, \dots, x_n) = a$ pour un $a \in k$ (vue comme une hypersurface affine dans $\mathbf{A}(V)$), et la quadrique projective $q(x_1, \dots, x_n) = 0$ (vue comme une hypersurface projective dans $\mathbf{P}(V)$). Ce sont des espaces homogènes du groupe orthogonal $\mathscr{O}(q)$ de q, qui en général ne sont pas des torseurs, et n'ont pas de point rationnel.

Naturellement, si X est un S-espace homogène de G muni d'un point $x \in X(S)$, alors la donnée de x permet d'identifier X au faisceau quotient G/H, où H est le stabilisateur de x dans G, vu comme un sous-S-faisceau en groupes de G.

En revanche, en général, X n'admet pas de section sur S, on sait seulement qu'il admet des sections locales sur S.

Les espaces homogènes de groupes algébriques ou de schémas en groupes sont des variétés algébriques ou des schémas qui se prêtent à un certain nombre de conjectures naturelles, aussi bien du point de vue de la géométrie que de celui de l'arithmétique. En effet, de nombreuses variétés intéressantes sont naturellement munies d'une action transitive d'un groupe algébrique : on peut citer par exemple les coniques, ou plus généralement les quadriques, les variétés de Severi-Brauer, les variétés définies par des équations normiques, etc .... En outre, la relativement bonne connaissance de la géométrie et de l'arithmétique des groupes algébriques amène naturellement à se poser des questions similaires pour une classe de variétés raisonnable contenant les groupes algébriques, et la classe des espaces homogènes est ainsi un cadre naturel pour chercher à étendre les résultats connus ou conjecturés pour les groupes algébriques.

Les questions que l'on se propose d'aborder ici peuvent être regroupées en deux familles (d'intersection non vide) : la famille des questions de nature géométrique, concernant la structure algébro-géométrique, la cohomologie et l'homotopie des espaces homogènes, d'abord sur un corps algébriquement clos, puis sur un corps quelconque, voire sur une base plus générale ; et la famille des questions de nature arithmétique, concernant l'existence et la quantité de points rationnels (ou de S-points) sur des corps de nature arithmétique, comme des corps globaux ou des corps locaux, ainsi que sur des schémas de nature arithmétique, comme sur des ouverts du spectre d'un anneau d'entiers d'un corps global. Bien évidemment, la géométrie et l'arithmétique ne sont pas indépendantes, et un certain nombre de conjectures qui motivent les travaux présentés ici ont justement pour but de préciser le lien entre géométrie et arithmétique, avec comme leitmotiv le fait qu'en général "la géométrie gouverne l'arithmétique", comme par exemple dans le cas désormais classique du nombre de points rationnels sur les courbes définies sur les corps globaux.

Plus précisément, parmi les questions de nature géométrique qui seront abordées dans la suite, on peut citer

– des questions de structure des espaces homogènes : de la même façon que la structure des groupes algébriques sur un corps quelconque, et celle des schémas en groupes réductifs sur un schéma S quelconque, sont désormais relativement bien connues (voir par exemple [**Bor91**] pour les groupes linéaires sur les corps algébriquement clos, [**Spr98**] pour les groupes linéaires sur les corps parfaits, [**Bri17**] pour les groupes algébriques quelconques sur un corps quelconque, [**SGA3**] pour les groupes réductifs sur une base quelconque, [**CGP15**] pour les groupes pseudo-réductifs sur des corps imparfaits, ...), on souhaite comprendre la structure des espaces homogènes généraux sur un corps quelconque, voir sur un schéma quelconque, afin de ramener l'étude d'un espace homogène quelconque à celle d'espaces homogènes plus simples, via des fibrations ayant de bonnes propriétés. Dans cette direction, le travail [**Dem15**] traite de la structure des extensions de schémas en groupes réductifs par des groupes unipotents, sur une base quelconque ; le texte [**DL17**] contient des énoncés réduisant explicitement la structure d'un espace homogène général (sous un groupe linéaire connexe) à certains espaces homogènes à stabilisateurs connexes et à des espaces homogènes de $\mathrm{SL}_{n,k}$ à stabilisateurs finis, ceci sur un corps quelconque de caractéristique nulle.

– des questions de calcul de groupes de cohomologie (souvent la cohomologie étale) des espaces homogènes sur des corps quelconques. Parmi les groupes de cohomologie intéressants de notre point de vue, on peut mentionner l'un des objets centraux de ce mémoire, à savoir le groupe de Brauer et son sous-groupe dit "non ramifié", définis via les groupes de cohomologie étale à coefficients $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$, qui sont des outils fondamentaux à la fois pour des questions de nature géométrique (problème de rationalité du type problème de Noether : voir par exemple [**CTS07**]) et pour des questions de nature arithmétique, via certaines obstructions à divers principes local-global (voir par exemple [**Sko01**], chapitre 5). On trouve des calculs de ces groupes de cohomologie dans les travaux [**Dem11c**] (pour le groupe de Brauer "presque complet") et [**BDH13**] (pour le groupe de Brauer non ramifié).

– des questions de calcul de groupes d'homotopie (étale) des espaces homogènes sur des corps quelconques. On s'intéressera essentiellement au groupe fondamental des espaces homogènes sur des corps quelconques (la question du deuxième groupe d'homotopie étale, ainsi que des suites exactes de fibrations, est l'objet d'un travail en cours avec T. Szamuely). L'un des objectifs ici est d'obtenir des résultats en caractéristique positive qui étendent des résultats classiques de topologie algébrique des groupes de Lie et de leurs espaces homogènes. On trouve notamment une description explicite du groupe fondamental étale, ainsi qu'une application à la conjecture des sections dans le texte [**Dem17a**].

De même, parmi les questions arithmétiques que l'on traitera dans le texte, mentionnons :

– des questions de type local global sur des variétés quelconques sur des corps globaux, avec des obstructions définies par des espaces homogènes (et plus précisément des torseurs) au-dessus de la variété en question. En effet, on dispose d'obstructions plus fines que la désormais classique obstruction de Brauer-Manin, par exemple l'obstruction de Brauer-Manin étale, l'obstruction de descente, l'obstruction de descente itérée, etc ...Et ces obstructions sont définies généralement en appliquant d'autres obstructions (par exemple celle de Brauer-Manin) à certains torseurs au-dessus de la variété initiale. Dans ce contexte, on cherche à comparer ces diverses obstructions aux principes local-global grâce à l'étude des torseurs et de la cohomologie non abélienne. On obtient par exemple les résultats énoncés dans les textes [**Dem09**] et [**CDX16**].

– des questions d'existence de points rationnels ou entiers sur des espaces homogènes. Sur une base quelconque, on a des obstructions naturelles à l'existence de sections, définies via la cohomologie non abélienne (on peut citer par exemple la classe d'un torseur dans le premier ensemble de cohomologie du faisceau en groupes sous-jacent, la gerbe associée à un espace homogène dans le H^2 du stabilisateur de cet espace, l'obstruction fondamentale à valeurs dans la cohomologie galoisienne du groupe fondamental étale) et que l'on peut "approcher" via des applications d'abélianisation qui aboutissent dans des groupes de cohomologie abélienne. Ces classes de cohomologie abélienne associées à des torseurs ou des espaces homogènes sont appelées des *invariants cohomologiques*, et leur étude est très fructueuse en applications arithmétiques, sur des corps divers. On trouve des exemples d'applications de ces techniques dans la dernière partie de [**Dem17a**] (conjecture faible des sections sur un bon corps de dimension cohomologique 2) et dans [**Dem09**], [**CDX16**] (où on montre que la classe d'une certaine gerbe est neutre par des techniques d'abélisanisation).

– des questions de type local-global pour les points rationnels des espaces homogènes sur les corps globaux. Si k est un corps global, on se pose la question de la validité ou non du principe de Hasse et de l'approximation faible sur les espaces homogènes, via l'obstruction dite de Brauer-Manin. Ces questions sont motivées notamment par une conjecture de Colliot-Thélène (voir conjecture 4.3) et par le lien entre celles-ci et une version forte du problème inverse de Galois sur les corps globaux. On peut d'ailleurs citer quelques exemples historiques à l'origine de ces questions : le théorème de Hasse-Minkowski (voir [**Ser77**]) affirme que les quadriques projectives (qui sont des espaces homogènes des groupes orthogonaux) vérifient le principe de Hasse et l'approximation faible ; le principe de norme de Hasse affirme que les variétés d'équation $N_{L/k}(x) = a$, avec $a \in k^*$ (qui sont des espaces homogènes de tores normiques), satisfont le principe de Hasse et l'approximation faible si l'extension L/k est cyclique ; les suites exactes classiques de Poitou-Tate et de Cassels-Tate (voir par exemple la première partie de [**Mil06**]) s'interprètent également en disant que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible sont les seules pour certains espaces homogènes de tores ou de variétés abéliennes. Parmi les résultats obtenus dans cette direction, on peut citer [**Dem10**], [**DLN17**], [**DL17**], qui s'intéressent à l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et surtout à l'approximation faible sur des espaces homogènes.

– des questions de type local-global pour les points entiers des espaces homogènes, sur des anneaux d'entiers de corps globaux. On se pose les mêmes questions que précédemment, non plus pour les points rationnels, mais pour les points entiers. Autrement dit, on se pose la question de la validité du principe de Hasse entier et de l'approximation forte, avec obstruction de Brauer-Manin, sur les espaces homogènes. Là encore, on est motivé à la fois par des analogies entre points rationnels et points entiers, et également par des exemples historiques, comme celui de la théorie du genre spinoriel des réseaux quadratiques (due notamment à Eichler et Kneser) : voir par exemple [**CTX09**], section 7. Dans ce sens, on présente ici les résultats principaux de [**Dem11a**] pour le cas des groupes linéaires ; [**Dem13**] pour le cas des stabilisateurs connexes et abéliens, [**BD13**] pour une preuve géométrique d'un résultat analogue dans le cas des stabilisateurs connexes, [**Dem17b**] dans le cas fondamentalement différent des stabilisateurs finis.

CHAPITRE 2

QUELQUES RAPPELS DE COHOMOLOGIE NON ABÉLIENNE

Dans toute cette partie, S est un site. On peut définir les ensembles de cohomologie suivants :

- si $\mathscr{E}$ est un faisceau en ensembles sur S, on définit $H^0(S, \mathscr{E})$ comme l'ensemble $\mathscr{E}(S)$ des sections globales de $\mathscr{E}$.
- si $\mathscr{G}$ est un faisceau en groupes sur S, on rappelle qu'un S-torseur sous $\mathscr{G}$ est un faisceau $\mathscr{P}$ muni d'une action $\mathscr{G} \times \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ de $\mathscr{G}$, de sorte que le morphisme naturel $\mathscr{G} \times \mathscr{P} \to \mathscr{P} \times \mathscr{P}$ induit par l'action soit un isomorphisme et qu'il existe un recouvrement $(S_i \to S)$ de S tel que $\mathscr{P}(S_i) \neq \varnothing$ pour tout i. On dispose d'une notion évidente de morphisme de torseurs, et on définit alors $H^1(S, \mathscr{G})$ comme l'ensemble pointé des classes d'isomorphisme de S-torseurs sous $\mathscr{G}$ (voir [**Gir71**], chapitre III). On peut également utiliser la cohomologie de Cech pour définir cet ensemble en termes de cocycles : voir par exemple [**Gir71**], III section 3.6, ou [**Sko01**], partie 2.2.
- On rappelle qu'un lien sur S est essentiellement une collection de faisceaux en groupes sur un recouvrement de S, recollés via des isomorphismes modulo automorphismes intérieurs. On définit la notion de S-gerbe comme étant un S-champ en groupoïdes admettant des sections localement sur S et tel que deux sections quelconques soient localement isomorphes : l'exemple standard est la gerbe des torseurs sous un S-faisceau en groupes $\mathscr{G}$. À une gerbe sur S est naturellement associé un lien sur S, défini en recollant (modulo les automorphismes intérieurs) les faisceaux d'automorphismes de sections locales de la gerbe. Si maintenant $\mathscr{L}$ est un lien sur S, on définit $H^2(S, \mathscr{L})$ comme l'ensemble marqué des classes d'équivalence de S-gerbes liées par $\mathscr{L}$ (voir par exemple [**Gir71**], chapitre IV ou [**Bre94**], [**Bre10**] pour deux définitions légérement différentes). Là encore, on peut donner une définition de cet ensemble en utilisant des cocycles (voir par exemple [**Bre94**], [**Bre10**]).

Dans le cas particulier de la cohomologie galoisienne sur un corps k dont on note k^s une clôture séparable, l'ensemble $H^1(k, G)$ peut être défini par des 1-cocycles galoisiens comme dans [**Ser94**], I.5. De la même façon, on dispose d'une description via des cocycles galoisiens de l'ensemble $H^2(k, L)$ pour un k-lien L : on pourra consulter par exemple [**Bor93**] en caractéristique nulle ou [**FSS98**] en général ; en quelques mots, un lien sur le corps k (dont on note Γ_k le groupe de Galois absolu) est la donnée d'un couple $(\bar{H}, \kappa)$ formé d'un k^s-groupe algébrique lisse $\bar{H}$ et d'un morphisme de groupes continu $\kappa : \Gamma_k \to \mathrm{SAutext}\,(\bar{H})$ qui se relève en une application continue $\Gamma_k \to \mathrm{SAut}\,(\bar{H})$, où $\mathrm{SAut}\,(\bar{H})$ (resp. $\mathrm{SAutext}\,(\bar{H})$) désigne le groupe des automorphismes semi-linéaires du k^s-groupe $\bar{H}$ (resp. le quotient de $\mathrm{SAut}\,(\bar{H})$ par le sous-groupe $\mathrm{Int}\,(\bar{H})$ des automorphismes intérieurs de $\bar{H}$). Un 2-cocycle à coefficents dans le k-lien $(\bar{H}, \kappa)$ est un couple (f, g), où $f : \Gamma_k \to \mathrm{SAut}\,(\bar{H})$ est une application continue qui relève κ et $g : \Gamma_k \times \Gamma_k \to \bar{H}(k^s)$ est une application continue vérifiant, pour tout $\sigma, \tau, \upsilon \in \Gamma_k$,

$$\begin{cases} f_{\sigma,\tau} = \mathrm{Int}\,(g_{\sigma,\tau}) \circ f_\sigma \circ f_\tau \,, \\ g_{\sigma,\tau\upsilon} \cdot f_\sigma(g_{\tau,\upsilon}) = g_{\sigma\tau,\upsilon} \cdot g_{\sigma,\tau} \,. \end{cases}$$

On dispose d'une relation d'équivalence naturelle sur l'ensemble des 2-cocycles, et l'ensemble des classes d'équivalence est exactement $H^2(k,(\bar{H},\kappa))$, le second ensemble de cohomologie galoisienne du lien $(\bar{H},\kappa)$.

Dans les deux références [**Bor93**] et [**FSS98**], on trouve également une troisième description de l'ensemble $H^2(k,(\bar{H},\kappa))$ via des extensions de groupes topologiques du groupe de Galois Γ_k par le groupe $\bar{H}(k^s)$; on pourra consulter la partie 2.2 de [**DL17**] pour des explications détaillées des trois points de vues sur le H^2 non abélien galoisien, avec des comparaisons entre ces différentes présentations.

Une construction importante dans la suite est la notion de torsion par un S-torseur, que l'on rappelle brièvement ici : si $\mathscr{P}$ est un S-torseur (à gauche) sous $\mathscr{G}$, et si $\mathscr{X}$ est un S-faisceau en ensembles muni d'une action à droite de $\mathscr{G}$, on définit le faisceau "produit contracté" $\mathscr{X}^{\mathscr{P}} = \mathscr{X} \wedge^{\mathscr{G}} \mathscr{P}$ comme le quotient de $\mathscr{X} \times \mathscr{P}$ par l'action de $\mathscr{G}$ donnée par $(x,p)\cdot g := (x\cdot g, g^{-1}\cdot p)$. Alors le faisceau $\mathscr{X}^{\mathscr{P}}$ est localement isomorphe à $\mathscr{X}$, il est muni d'un isomorphisme canonique de $\mathrm{Aut}_{\mathscr{G}}(\mathscr{X})$-torseurs $\mathscr{P} \wedge^{\mathscr{G}} \mathrm{Aut}(\mathscr{X}) \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Isom}}_{\mathscr{G}}(\mathscr{X},\mathscr{X}^{\mathscr{P}})$, et d'une action naturelle (à droite) du groupe $\mathscr{G}^{\mathscr{P}} = \mathrm{Aut}_{\mathscr{G}}(\mathscr{P})$ (ici $\mathscr{G}$ est muni de l'action de $\mathscr{G}$ par conjugaison et $\mathscr{G}^{\mathscr{P}}$ est naturellement un faisceau en groupes s'identifiant à $\mathrm{Aut}_{\mathscr{G}}(\mathscr{P})$). On vérifie également que $\mathscr{P}$ est alors naturellement un torseur à droite sous $\mathscr{G}^{\mathscr{P}}$. En outre, on a un isomorphisme canonique $\mathrm{Aut}_{\mathscr{G}}(\mathscr{X})$-équivariant $\mathscr{X}^{\mathscr{P}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(\mathscr{P},\check{\mathscr{X}})$, où $\check{\mathscr{X}}$ désigne $\mathscr{X}$ muni de l'action à gauche de $\mathscr{G}$ définie par $g\cdot x := x\cdot g^{-1}$.

Dans le cas particulier où $\mathscr{X}$ est lui-même un torseur (à droite) sous $\mathscr{G}$, alors on voit que $\mathscr{X}^{\mathscr{P}}$ est naturellement muni d'une structure de torseur (à droite) sous $\mathscr{G}^{\mathscr{P}}$, ce qui permet de définir la bijection de torsion

$$H^1(S,\mathscr{G}) \xrightarrow{\sim} H^1(S,\mathscr{G}^{\mathscr{P}}),$$

définie par $\mathscr{X} \mapsto \mathscr{X}^{\mathscr{P}}$, et dont la bijection réciproque est définie par $\mathscr{Y}^{\mathscr{P}^0} \leftarrow \mathscr{Y}$, où $\mathscr{P}^0$ est le torseur opposé à $\mathscr{P}$, i.e. $\mathscr{P}^0 := \check{\mathscr{P}}$ vu comme un torseur à gauche sous $\mathscr{G}^{\mathscr{P}}$.

Notons que la notion de produit contracté permet par exemple de montrer que le premier ensemble de cohomologie d'un faisceau en groupes est fonctoriel en ce faisceau en groupes (puisque l'on peut "pousser en avant" un torseur par un morphisme de faisceaux en groupes, grâce au produit contracté).

Cette construction s'étend plus généralement au cas d'un objet X d'un S-champ $\mathscr{C}$, muni d'une action à droite de $\mathscr{G}$: on dispose alors d'un objet $X^{\mathscr{P}}$ de $\mathscr{C}$ et un morphisme $\mathscr{P} \to \underline{\mathrm{Isom}}_S(X,X^{\mathscr{P}})$, appelé "tordu de X par $\mathscr{P}$", vérifiant des propriétés analogues au produit contracté précédent (voir [**Gir71**], III, section 2.3, ainsi que [**Sko01**], section 2.2, pour un cas particulier).

La notion de torsion est cruciale pour comprendre notamment le dévissage des ensembles de cohomologie par des suites exactes courtes de faisceaux en groupes : plus précisément, en présence d'une suite exacte courte de S-faisceaux en groupes de la forme

$$1 \to \mathscr{G}_1 \to \mathscr{G}_2 \to \mathscr{G}_3 \to 1,$$

on peut construire une suite exacte d'ensembles pointés (voir [**Gir71**], III, Proposition 3.3.1) :

$$1 \to H^0(S,\mathscr{G}_1) \to H^0(S,\mathscr{G}_2) \to H^0(S,\mathscr{G}_3) \to H^1(S,\mathscr{G}_1) \to H^1(S,\mathscr{G}_2) \to H^1(S,\mathscr{G}_3),$$

et la torsion est nécessaire pour comprendre les fibres des applications entre les H^1 (voir par exemple [**Gir71**], III, section 3). De même, pour comprendre les termes suivants (en degré 2) dans cette suite exacte "longue", la notion de torsion est fondamentale : voir [**Gir71**], IV, section 4 et en particulier la proposition 4.2.8.

Revenons maintenant au lien entre les espaces homogènes et la cohomologie non abélienne : on sait donc associer, par définition, une classe de cohomologie (en degré 1) à un torseur sous un faisceau en groupes. Une construction importante dans ce texte est celle qui permet d'associer à un espace homogène $\mathscr{X}$ d'un faisceau en groupes $\mathscr{G}$ une classe de cohomologie (en degré 2). La construction générale est la suivante : on considère la catégorie fibrée sur S dont les objets sur $T \to S$ sont les T-torseurs $\mathscr{Y}$ sous G_T munis d'un morphisme G_T-équivariant $\alpha : \mathscr{Y} \to \mathscr{X}_T$, et dont les morphismes sont les morphismes de torseurs compatibles aux flèches vers $\mathscr{X}_T$. On vérifie alors facilement que cette catégorie fibrée est une gerbe sur S, et que son lien est localement représentable par le stabilisateur dans $\mathscr{G}$ d'un point de $\mathscr{X}$: voir [**Gir71**], IV, section 5.1 pour davantage de détails. On appelle habituellement classe de Springer de $\mathscr{X}$ la classe de la gerbe associée à $\mathscr{X}$ dans le second ensemble de cohomologie du lien des stabilisateurs de $\mathscr{X}$. Par construction, cette gerbe est neutre si et seulement $\mathscr{X}$ est dominé par un S-torseur sous $\mathscr{G}$. En particulier, si $H^1(S,\mathscr{G}) = 1$, cette gerbe est neutre si et seulement si $\mathscr{X}(S) \neq \varnothing$.

De façon plus concrète, pour tout morphisme $S' \to S$, pour tout point $x \in \mathscr{X}(S')$, on définit le stabilisateur de x dans $\mathscr{G}_{S'}$ comme le sous-S'-faisceau en groupes de $\mathscr{G}_{S'}$ qui stabilise le point x. En général, si $\mathscr{X}(S) = \varnothing$, les stabilisateurs ne sont pas définis sur S, ils sont seulement définis localement, et on ne peut pas les recoller dans la catégorie des faisceaux en groupes sur S, puisque les morphismes de recollement ne sont définis qu'à conjugaison près. La bonne façon de définir le stabilisateur d'un espace homogène X sur S est donc de faire appel à la notion de lien : la catégorie des liens sur S est construite via le champ associé à la catégorie fibrée sur S dont les objets sont les faisceaux en groupes, et dont les morphismes sont les morphismes de faisceaux en groupes à conjugaison près. Il est alors essentiellement immédiat de constater que la collection des stabilisateurs des points d'un S-espace homogène $\mathscr{X}$ de $\mathscr{G}$ définit un objet, non pas de la catégorie des S-faisceaux en groupes, mais de celle des liens sur S. Cet objet est appelé le lien des stabilisateurs de $\mathscr{X}$.

Si S est un corps, on peut interpréter plus concrètement la notion de lien associé à un espace homogène (pour la topologie étale sur $\mathrm{Spec}(k)$), de la façon suivante (on pourra d'ailleurs consulter [**Spr66**], [**Bor93**] et [**FSS98**] pour une description détaillée en cohomologie galoisienne du lien d'un espace homogène et de sa classe de Springer) : soit X un k-espace homogène d'un k-groupe G, on choisit $x \in X(k^s)$ et on note $\bar{H}$ le stabilisateur de x dans G_{k^s}. Le lien de X est défini ainsi : pour tout $\sigma \in \Gamma_k$, il existe $g_\sigma \in G(k^s)$ tel que ${}^\sigma x = x \cdot g_\sigma$, et on peut supposer l'application $\sigma \mapsto g_\sigma$ continue. Alors, si l'on note σ_* l'automorphisme σ-semi-algébrique de $\bar{G}$ induit naturellement par σ, on voit que l'automorphisme $\mathrm{Int}(g_\sigma) \circ \sigma_*$ est aussi σ-semi-linéaire et qu'il laisse $\bar{H}$ invariant. On note f_σ sa restriction à $\bar{H}$. On a donc ainsi une application continue $f : \Gamma_k \to \mathrm{SAut}(\bar{H})$ qui induit un morphisme continu (donc un k-lien) $\kappa_X : \Gamma_k \to \mathrm{SAutext}(\bar{H})$. On note alors $L_X := (\bar{H}, \kappa_X)$ le lien correspondant. On pose enfin $g_{\sigma,\tau} := g_{\sigma\tau} \cdot {}^\sigma g_\tau \cdot g_\sigma^{-1} \in \bar{H}(k^s)$, et on vérifie que $\eta_X := [(f,g)]$ est un élément de $H^2(k, L_X)$ ne dépendant pas du choix des g_σ.

Par construction, on vérifie dans ce contexte que η_X est neutre si et seulement s'il existe un k-torseur P sous G et un k-morphisme G-équivariant $P \to X$.

Remarque 2.1. — Si l'on a vu que le premier ensemble de cohomologie était fonctoriel, la fonctorialité du deuxième ensemble de cohomologie d'un S-lien est plus délicate. En effet, étant donné un morphisme $\mathscr{L} \to \mathscr{L}'$ de liens sur S, on ne dispose en général que d'une relation $H^2(S,\mathscr{L}) \multimap H^2(S,\mathscr{L}')$, qui n'est pas toujours une application : voir [**Gir71**], IV, section 3.1. On peut tout de même dire que cette relation est une application si le morphisme $\mathscr{L} \to \mathscr{L}'$ est un épimorphisme de S-liens (voir [**Gir71**], IV, corollaire 3.1.6).

Une façon de corriger ce défaut de fonctorialité est de considérer la cohomologie non abélienne des modules croisés suivant Debremaeker (voir [**Deb77**]), ce qui permet d'obtenir une théorie plus fonctorielle du H^2 non abélien, avec des suites exactes "longues" plus élégantes.

En résumé, l'étude des ensembles de cohomologie non abélienne (en degré 1 et 2) est cruciale pour nombre de problèmes concernant les groupes algébriques, leurs torseurs et leurs espaces homogènes. C'est un outil majeur dans la plupart des résultats présentés ici.

Cependant, une difficulté importante pour appréhender ces ensembles réside dans l'absence d'une structure de groupe naturelle sur ces derniers. Par conséquent, un moyen de comprendre ces ensembles est de construire des applications (fonctorielles en S) de ces ensembles de cohomologie vers des groupes de cohomologie abélienne usuelle. De telles applications sont souvent appelées des *invariants cohomologiques*.

Une façon de construire des invariants cohomologiques simples est de définir d'abord, pour un morphisme de faisceaux en groupes $f : \mathscr{H} \to \mathscr{G}$ et par analogie avec l'hypercohomologie d'un complexe de faisceaux en groupes abéliens, des ensembles $H^i(S, \mathscr{H} \xrightarrow{f} \mathscr{G})$ pour $i = 0$ ou 1, qui coïncident avec $H^i(S, \mathscr{G})$ (resp. $H^{i+1}(S, \mathscr{H})$) si $\mathscr{H} = 1$ (resp. $\mathscr{G} = 1$), et de sorte que ces différents groupes s'insèrent dans des suites exactes "longues" naturelles. Si en outre le morphisme f a des propriétés supplémentaires (par exemple si c'est un module croisé, ou un module croisé tressé, ou un module croisé de Picard, ou si le complexe défini par f est quasi-isomorphe à un complexe de faisceaux en groupes abéliens etc ...), alors on peut munir ces ensembles de cohomologie d'une structure de groupe, parfois même d'une structure de groupe abélien : voir par exemple [**Bre90**] ou [**Bre94**].

Ces considérations générales permettent de construire par exemple des applications d'abélianisation (i.e. des invariants cohomologiques) de la forme suivante :

- si X est un espace homogène d'un faisceau en groupes réductif, on a $\mathrm{ab}^0_X : H^0(S, X) \to H^0_{\mathrm{ab}}(S, X)$, où $H^0_{\mathrm{ab}}(S, X)$ est un groupe abélien d'hypercohomologie d'un complexe de faisceaux en groupes commutatifs (des groupes de type multiplicatif associés à X) : voir [**Bor98**] si X est un groupe, ou [**Dem13**] en général.
- si G est un S-schéma en groupes réductif, on a des applications $\mathrm{ab}^i_G : H^i(S, G) \to H^i_{\mathrm{ab}}(S, G)$, où $H^i_{\mathrm{ab}}(S, G)$ est l'hypercohomologie (fppf) d'un complexe de S-groupes de type multiplicatif de longueur 2, pour $i = 0, 1, 2$: dans le cas des corps, voir [**Bor98**] pour le degré 0 ou 1, et [**Bor93**] pour le degré 2 ; sur une base quelconque, voir [**GA12**].
- si G est un S-schéma en groupes réductif et L un S-lien muni d'un morphisme de liens $L \to \underline{\mathrm{lien}}(G)$, on a une application d'abélianisation $\mathrm{ab}^1 : H^1(S, L \to \underline{\mathrm{lien}}(G)) \to H^1_{\mathrm{ab}}(S, L \to \underline{\mathrm{lien}}(G))$, où $H^1(S, L \to \underline{\mathrm{lien}}(G))$ classifie en un certain sens les espaces homogènes de G liés par L : voir [**Dem17a**], 5.4.

On dispose en outre de généralisations de ces invariants cohomologiques pour des groupes non nécessairement affines : voir par exemple [**Dem13**].

De telles applications d'abélianisation apparaissent dans plusieurs résultats de ce texte, de façon cruciale, notamment quand la base est de dimension cohomologique ≤ 2. Remarquons que l'on dispose souvent à la fois d'une description géométrique et d'une description cocyclique de ces différentes applications.

Enfin, notons qu'il est sans doute possible de donner une interprération "motivique" de la plupart de ces invariants cohomologiques naturels, mais cela ne sera pas évoqué dans ce texte.

CHAPITRE 3

GÉOMÉTRIE ET STRUCTURE DES ESPACES HOMOGÈNES DE GROUPES ALGÉBRIQUES LINÉAIRES

3.1. Extensions de schémas en groupes

Dans le travail [**Dem15**], on propose un formalisme général pour la cohomologie de Hochschild non abélienne sur un site quelconque. L'objectif principal de ces constructions est d'obtenir un nouveau point de vue sur un théorème classique de Mostow (voir par exemple [**Mos56**], théorème 7.1) :

Théorème 3.1 **(Mostow)**. — *Soit k un corps de caractéristique nulle. Soit G un k-groupe réductif et H un k-groupe unipotent. Alors toute suite exacte de k-groupes :*

$$1 \to H \to E \to G \to 1$$

est scindée, et deux sections quelconques de cette suite sont conjuguées par un élément de $H(k)$.

Il est bien connu que ce théorème ne s'étend pas en l'état à un corps de caractéristique positive. On trouve ainsi des contre-exemples à cette éventuelle généralisation dans la section 5.9 de l'exposé XVII de [**SGA3**]. Par exemple, si k est un corps de caractéristique p admettant une extension galoisienne de degré p, alors il existe une extension non scindée du groupe fini étale diagonalisable $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^\times$ par le groupe unipotent $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. De même, sur un corps k non parfait tel qu'il existe une k-forme U de $\mathbf{G}_{a,k}$ de H^1 non trivial, il existe une extension non scindée de μ_{p-1} par U. Citons également que si k est non parfait, il existe une extension non scindée de $\mathbf{G}_m$ par α_p. Sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, l'extension définie par le produit semi-direct naturel de μ_p par α_p est évidemment scindée, mais il existe des sections de cette extension qui ne sont pas conjuguées par un élément de $\alpha_p(k) = 1$.

Afin de proposer une généralisation du théorème de Mostow sur une base S de dimension ≤ 1 et une preuve alternative dans le cas des corps, on a besoin de définir, pour tout site S, un ensemble marqué (resp. pointé) de cohomologie de Hochschild non abélienne $H^2_0(G,H)$ (resp. $H^1_0(G,H)$) classifiant en un certain sens les S-extensions de faisceaux en groupes de G par H (resp. les sections de l'extension scindée $H \rtimes G$), où H et G sont des S-faisceaux en groupes, une action extérieure (resp. une action) de G sur H étant fixée. En particulier, ces ensembles de cohomologie doivent généraliser la cohomologie de Hochschild classique quand le groupe H est commutatif (voir par exemple [**DG70**], chapitre II, paragraphe 3). Pour les constructions qui suivent, on s'inspire des idées de Breen ([**Bre90**], paragraphe 8) et Giraud ([**Gir71**], VIII.7) et de leur travaux sur les extensions de faisceaux en groupes.

Soient H et G deux S-faisceaux en groupes, et $\varphi : G \to \underline{\mathrm{Aut}}_S(H)$ une action de G sur H, où $\underline{\mathrm{Aut}}_S(H)$ désigne le faisceau en groupes des automorphismes de H.

On définit d'abord la notion de S-H-G-torseur :

Définition 3.2. — Un S-G-H-torseur est un faisceau P sur S, muni d'une structure de S-torseur à gauche sous H et d'une structure de S-G-objet à opérateurs à gauche, telles que les actions de H et G sur P soient compatibles.

On dispose d'une notion naturelle de morphisme de S-G-H-torseurs. Cela conduit à la définition suivante :

Définition 3.3. — On définit le groupe $H^0_0(G,H) := H^0(S,H^G)$, et l'ensemble pointé $H^1_0(G,H)$ comme l'ensemble des classes d'isomorphisme de S-H-G-torseurs (pointé par le S-H-G-torseur trivial).

Pour la définition de $H^2_0(G,H)$, il n'est pas nécessaire de disposer d'une action de G sur H, mais seulement d'une action extérieure de G sur H, i.e. d'un morphisme de faisceaux en groupes $\psi : G \to \underline{\mathrm{Autext}}_S(H)$, où $\underline{\mathrm{Autext}}_S(H)$ désigne le faisceau des automorphismes extérieurs de H. Une telle action extérieure est équivalente à la donné d'une action du groupe G sur le lien $\underline{\mathrm{lien}}(H)$ associé à H. Suivant les travaux de Romagny ([**Rom05**], sections 1 et 2), on dispose d'une bonne notion d'action d'un schéma en groupes G sur un champ $\mathscr{C}$, ainsi que d'une bonne notion de champ des points fixes $\mathscr{C}^G$ pour une telle action.

Définition 3.4. — Une S-G-H-gerbe est une S-gerbe $\mathscr{C}$ liée par H et munie d'une action de G compatible avec l'action extérieure de G sur H. Une telle gerbe est dite neutre si $\mathscr{C}^G(S) \neq \varnothing$.

On dispose d'une notion évidente d'équivalence de S-G-H-gerbes.

Définition 3.5. — On définit l'ensemble marqué $H^2_0(G,H)$ comme l'ensemble des classes d'équivalence de S-G-H-gerbes (marqué par le sous-ensemble $N^2(G,H)$ des classes des gerbes neutres).

On montre alors que ces ensembles de cohomologie classifient les extensions de faisceaux en groupes et leurs sections. Pour ce faire, on définit $\mathrm{Ext}^1_S(G,H)$ comme l'ensemble des classes d'équivalence d'extensions de faisceaux en groupes de G par H compatibles avec l'action extérieure fixée de G sur H, marqué par les classes d'extensions scindées. On définit aussi $\mathrm{Sect}_S(H \rtimes G \to G)$ comme l'ensemble pointé des sections de la surjection naturelle $H \rtimes G \to G$, à conjugaison près par $H(S)$.

Proposition 3.6. — *On a une suite exacte naturelle d'ensemble pointés*

$$1 \to \mathrm{Sect}_S(H \rtimes G \to G) \xrightarrow{d^{(1)}} H^1_0(G,H) \to H^1(S,H),$$

et une suite exacte naturelle d'ensembles marqués

$$\mathrm{Ext}_S(G,H) \xrightarrow{d^{(2)}} H^2_0(G,H) \to H^2(S,H),$$

de sorte que pour toute extension E de G par H, $d^{(2)}(E)$ est neutre si et seulement s'il existe un S-torseur P sous H tel que la suite E^P, obtenue en tordant E par P, soit scindée.

Afin de pouvoir "dévisser" la cohomologie de Hochschild, on vérifie ensuite que ces ensembles de cohomologie non abélienne apparaissent dans des suites exactes "longues" associées à certaines suites exactes courtes de faisceaux en groupes :

Proposition 3.7. — *Soit*

$$1 \to H_1 \to H_2 \to H_3 \to 1$$

une suite exacte de S-groupes.

(1) *Si c'est une suite de S-G-groupes, alors on a une suite exacte d'ensembles pointés :*

$$1 \to H^0_0(G,H_1) \to H^0_0(G,H_2) \to H^0_0(G,H_3) \xrightarrow{\partial} H^1_0(G,H_1) \to H^1_0(G,H_2) \to H^1_0(G,H_3).$$

Si on suppose en outre que le morphisme naturel $H_3 \to \underline{\mathrm{Autext}}_S(H_1)$ est trivial, ou que $H^1(S,H_3) = 1$, alors la suite précédente se prolonge à droite en

$$1 \to H^0_0(G,H_1) \to H^0_0(G,H_2) \to \cdots \to H^1_0(G,H_2) \to H^1_0(G,H_3) \xrightarrow{\partial'} H^2_0(G,H_1).$$

(2) *Si* H_1 *est caractéristique dans* H_2 *et* $H^1(S, H_2) \to H^1(S, H_3)$ *est surjectif, alors une* S-G-H_2*-gerbe de la forme* $G \circlearrowleft \underline{\mathrm{TORS}}(H_2)$ *est neutre si et seulement s'il existe* $P \in \underline{\mathrm{TORS}}(H_3)^G(S)$ *tel que la gerbe induite* $G \circlearrowleft \underline{\mathrm{TORS}}({}_P H_1)$ *est neutre (l'action de* G *sur* $\underline{\mathrm{TORS}}(H_3)$ *est induite par celle de* G *sur* $\underline{\mathrm{TORS}}(H_2)$*).*

Puis on compare ces ensembles de cohomologie avec les groupes de cohomologie de Hoschschild abélienne : on renvoie à **[SGA3]**, exposé I, sections 4.6 et 4.7 pour les définitions et les notations dans l'énoncé qui suit.

Proposition 3.8. — *Soit* S *un schéma affine muni du grand site fppf,* G *un* S*-schéma en groupes affine et* $\mathscr{F}$ *un* G-$\mathscr{O}_S$*-module quasi-cohérent.*

Alors on a des bijections naturelles

$$H^i(G, \mathscr{F}) \xrightarrow{\sim} H^i_0(G, \mathbf{W}(\mathscr{F}))$$

pour $i = 1, 2$.

Autrement dit, dans le contexte de l'énoncé, les ensembles de cohomologie de Hochschild H^i_0 introduits ici (et définis via des torseurs et des gerbes) étendent les groupes de cohomologie de Hochschild H^i définis (via des cocycles ou via des foncteurs dérivés) dans le cas abélien dans **[SGA3]**, exposé I et dans **[DG70]**, II.3.

Désormais on dispose des ingrédients nécessaires pour démontrer et étendre le théorème de Mostow. La stratégie de la preuve est notamment inspirée des travaux de Margaux (voir **[Mar09]**) sur la cohomologie de Hochschild abélienne des schémas en groupes réductifs : si k est un corps, on rappelle qu'un k-groupe G est linéairement réductif si G est affine, et si la catégorie des représentations linéaires de dimension finie de G est semi-simple. Il est classique que cela équivaut au fait que $H^i(G, V) = 0$ pour tout $i \geq 1$ et pour tout G-k-module V. En outre, en caractéristique nulle, les groupes réductifs sont linéairement réductifs.

Au vu de cette caractérisation et des constructions précédentes, il est naturel d'essayer de généraliser le théorème de Mostow à des schémas en groupes G à fibres linéairement réductives.

Soit S un schéma, et G, H des S-schémas en groupes, tels que pour tout point géométrique $\bar{s} \in S$, $G_{\bar{s}}$ est un $k(\bar{s})$-groupe algébrique linéairement réductif et $H_{\bar{s}}$ est un $k(\bar{s})$-groupe algébrique unipotent. On cherche à montrer que sous des hypothèses techniques supplémentaires raisonnables sur S, H et G, toute extension de G par H est scindée, et deux sections quelconques d'une telle extension sont conjuguées par un élément de $H(S)$.

Parmi les hypothèses supplémentaires mentionnées ci-dessus, on suppose notamment que l'action (resp. l'action extérieure) de G sur H est *géométriquement linéarisable*, i.e. que pour tout point géométrique $\bar{s} \in S$, l'action (resp. l'action extérieure) de $G_{\bar{s}}$ sur $H_{\bar{s}}$ soit linéarisable au sens suivant : $H_{\bar{s}}$ admet une suite de composition (définie sur $k(\bar{s})$) $1 = H_0 \subset H_1 \subset \cdots \subset H_{m-1} \subset H_m = H_{\bar{s}}$ formée de sous-groupes caractéristiques de $H_{\bar{s}}$ et telle que pour tout i, le groupe $U_i := H_{i+1}/H_i$ soit un $k(\bar{s})$-groupe vectoriel tel qu'il existe un isomorphisme $G_{\bar{s}}$-équivariant $U_i \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{Lie}}(U_i)$. De façon analogue, on peut définir la notion d'action (resp. d'action extérieure) *linéarisable* de G sur H en adaptant la définition précédente en remplaçant "tout point géométrique $\bar{s} \in S$" par "tout point $s \in S$".

Il est connu que si k est de caractéristique nulle, toute action de G sur H est linéarisable. En caractéristique positive, la question de la linéarisabilité est encore très largement ouverte (voir par exemple l'article récent **[McN14]** de McNinch).

La preuve procède par réductions successives à des bases S plus simples. En effet, étant donnée une extension E de G par H (resp. une section s du morphisme $H \rtimes G \to G$), notons $\mathscr{C}_E$ (resp. P_s) la S-G-H-gerbe (resp. le S-G-H-torseur) associée à E (resp. associé à s) par la proposition 3.6. Alors l'existence d'une section de E à torsion près par un H-torseur (resp. l'existence d'un élément de $H(S)$ conjuguant s et la section canonique) équivaut à l'existence d'une section du S-champ $\mathscr{C}_E^G$ (resp. à l'existence d'un S-point sur le H^G-torseur P_s^G). Par conséquent, la plupart des arguments de la preuve consistent à montrer de bonnes propriétés géométriques des espaces $\mathscr{C}_E^G$ et P_s^G, de sorte qu'ils vérifient un "principe local-global" pour l'existence d'un S-point.

(1) On commence par le cas $S = \mathrm{Spec}(k)$, où k est un corps algébriquement clos.
Dans ce cas, on utilise la proposition 3.7 et la proposition 3.8 pour déduire des hypothèses (G linéairement réductif et action linéarisable) que $H_0^1(G,H) = 1$ et $H_0^2(G,H) = N^2(G,H)$. En particulier, cela démontre le théorème de Mostow pour une action linéarisable d'un groupe linéairement réductif sur un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque.

(2) Cas où $S = \mathrm{Spec}(k)$, k corps quelconque.
Le cas précédent et la descente fppf assurent alors que tout élément $\mathscr{C}$ de $H_0^2(G,H)$ définit une classe $\mathscr{C}^G$ dans un ensemble de cohomologie non abélienne $H^2_{\mathrm{fppf}}(k, \bar{H}^{\bar{G}})$, dont la neutralité équivaut à celle de l'élément initial $\mathscr{C}$ de $H_0^2(G,H)$. Or un théorème de Douai sur le H^2 des groupes unipotents (voir [**Dou75**], lemme 1.1 et théorème 1.1) assure que $H^2_{\mathrm{fppf}}(k, \bar{H}^{\bar{G}})$ est réduit aux classes neutres, ce qui assure que $H_0^2(G,H) = N^2(G,H)$.

De même, le cas précédent, joint à la théorie de la descente, assure que l'on a une bijection entre $H_0^1(G,H)$ et $H^1_{\mathrm{fppf}}(k, H^G)$. Par conséquent, on voit que $H_0^1(G,H) = 1$ si (et seulement si) $H^1_{\mathrm{fppf}}(k, H^G) = 1$. Cette dernière condition est par exemple vérifiée si k est de caractéristique nulle, ou si l'action de G sur H est linéarisable (sur k). En particulier, si k est de caractéristique 0, on a obtenu une nouvelle démonstration du théorème de Mostow : on rappelle en effet que dans ce contexte, $H^1_{\mathrm{fppf}}(k, U) = 1$ pour tout k-groupe unipotent U.

On obtient également une version dudit théorème sur un corps de caractéristique positive :

Proposition 3.9. — *Soit k un corps, G un k-groupe linéairement réductif et H un k-groupe unipotent. Soit*

$$1 \to H \to E \to G \to 1 \tag{1}$$

une suite exacte de k-groupes.

Si l'action extérieure de G sur H définie par E est géométriquement linéarisable, alors il existe un $\mathrm{Spec}(k)$*-torseur fppf sous H tel que la suite* (1) *tordue par P soit scindée.*

Dans ce cas, sous l'hypothèse supplémenaire que $H^1_{\mathrm{fppf}}(k, {}_PH^G) = 1$, deux sections de cette suite sont conjuguées par un élément de ${}_PH(k)$.

Remarque 3.10. — Dans cette proposition 3.9, la torsion par un torseur P, ainsi que la question de la trivialité de $H^1_{\mathrm{fppf}}(k, {}_PH^G)$, sont vraiment nécessaires, et cela permet d'expliquer les exemples cités plus haut et trouvés dans [**SGA3**], section 5.9 de l'exposé XVII.

(3) Cas où $S = \mathrm{Spec}(A)$, avec A un anneau local artinien de corps résiduel k. On suppose ici H lisse et G plat de type fini sur S. Alors on montre que P^G est un S-schéma lisse et $\mathscr{C}^G$ est un S-champ formellement lisse. Ces propriétés de lissité permettent de relever les $\mathrm{Spec}(k)$-sections de P^G et $\mathscr{C}^G$ en des S-sections, ce qui assure que $H_0^1(G,H) = 1$ et $H_0^2(G,H) = N^2(G,H)$, dès lors que l'on a ces égalités sur la fibre spéciale $\mathrm{Spec}(k)$ (voir cas (2)).

(4) Cas où $S = \mathrm{Spec}(A)$, avec A anneau local noethérien complet, de corps résiduel k. On suppose ici H et G plats et de présentation finie sur S, H_k lisse sur $\mathrm{Spec}(k)$. Alors le foncteur des points $\mathscr{F}$ associé à P^G (resp. à $\mathscr{C}^G$) est de présentation finie, et le cas précédent assure que $\mathscr{F}(A/\mathfrak{m}^n) \neq \varnothing$ pour tout $n \geq 1$. Or un théorème de Pfister et Popescu (voir [**PP75**], théorème 2.5 et [**Pop85**], théorème 1.5) assure que l'anneau A vérifie la propriété dite d'approximation forte, ce qui assure que $\mathscr{F}(A) \neq \varnothing$. On en déduit donc que $H_0^1(G,H) = 1$ et $H_0^2(G,H) = N^2(G,H)$ dès lors que l'on a ces égalités sur la fibre spéciale (voir cas (2)).

(5) Cas où $S = \mathrm{Spec}\,(A)$, où A est un anneau local hensélien, de corps résiduel k. On suppose ici G et H plats et de présentation finie sur S, H lisse sur S. On note $\mathscr{F}$ le foncteur des points de P^G (resp. $\mathscr{C}^G$). Ce foncteur est localement de présentation finie.

On se ramène facilement au cas où A est le hensélisé de la localisation d'un anneau de type fini. On note $\widehat{A}$ le complété de A. Par le cas précédent, on sait que $\mathscr{F}(k) \neq \varnothing \implies \mathscr{F}(\widehat{A}) \neq \varnothing$. Alors le théorème d'approximation d'Artin appliqué à l'anneau A et au foncteur $\mathscr{F}$ assure que $\mathscr{F}(\widehat{A}) \neq \varnothing \implies \mathscr{F}(A) \neq \varnothing$. Par conséquent, on obtient $H^1_0(G,H) = 1$ et $H^2_0(G,H) = N^2(G,H)$ dès lors que l'on a ces égalités sur la fibre spéciale (voir cas (2)).

(6) Cas où S est un schéma noethérien intègre de dimension ≤ 1. Sous des hypothèses analogues aux cas précédents, on voit que le cas des anneaux locaux henséliens assure que le H^G-torseur P^G (resp. le champ $\mathscr{C}^G$) est en fait un torseur (resp. une gerbe) pour la topologie Nisnevich sur S. Cela permet donc de définir des classes de cohomologie dans $H^1_{\mathrm{Nis}}(S, H^G)$ et $H^2_{\mathrm{Nis}}(S, \underline{\mathrm{lien}}(H)^G)$.

Or S est de dimension ≤ 1, donc sa dimension cohomologique (pour la topologie Nisnevich) est ≤ 2, et $\underline{\mathrm{lien}}(H)^G$ est un lien nilpotent sur S, donc cela implique que l'ensemble $H^2_{\mathrm{Nis}}(S, \underline{\mathrm{lien}}(H)^G)$ est réduit à une unique classe neutre. Par conséquent, on en déduit le théorème suivant :

Théorème 3.11. — *Soit S un schéma noethérien de dimension ≤ 1. Soient H et G des S-schémas en groupes de présentation finie, avec G plat sur S et H lisse sur S. On suppose que pour tout $s \in S$, $G_{\bar{s}}$ est linéairement réductif et $H_{\bar{s}}$ est unipotent connexe.*

Soit $1 \to H \to E \to G \to 1$ une suite exacte de S-schémas en groupes, telle que pour tout $s \in S$, l'action de G_s sur H_s est linéarisable.

Alors

(a) *l'extension E est scindée, quitte à la tordre par un S-torseur sous H pour la topologie Nisnevich.*

(b) *si on fixe une section s_0 de E, alors on a une bijection naturelle*

$$\mathrm{Sect}_S(E \to G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ker}\,(H^1_{\mathrm{Nis}}(S, H^G) \to H^1_{\mathrm{Nis}}(S, H)).$$

Remarque 3.12. — En particulier, on dispose d'un analogue exact du théorème de Mostow si pour tout S-schéma en groupes H lisse, de présentation finie, à fibres unipotentes, $H^1_{\mathrm{Nis}}(S,H) = 1$. Ceci est le cas par exemple si $S = \mathrm{Spec}\,(A)$, avec A anneau des entiers d'un corps de nombres ou du corps des fonctions d'une courbe sur un corps fini. En effet, dans ce cas, un tel groupe H vérifie l'approximation forte, et les travaux de Nisnevich (voir par exemple [**Nis84**], théorème 2.1 ou [**Gil02**], théorème 5.1) assurent que le groupe $H^1_{\mathrm{Nis}}(S,H)$ s'identifie au groupe des classes de H sur S, lequel mesure le défaut d'approximation forte ; cet ensemble est donc trivial dans ce contexte.

3.2. Groupes d'homotopie étale des espaces homogènes

Dans le travail [**Dem17a**], on s'intéresse au groupe fondamental étale des groupes algébriques et de leurs espaces homogènes, sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$. Parmi les motivations qui sous-tendent ces travaux, on peut citer par exemple la volonté d'étendre les formules décrivant les groupes d'homotopie des groupes de Lie et de leurs espaces homogènes, au cadre de la géométrie algébrique (et notamment en caractéristique positive).

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$. Soit G un k-groupe algébrique connexe lisse et $X = G/H$ un espace homogène de G. La difficulté principale dans le calcul du groupe fondamental de X réside dans l'absence de suites exactes d'homotopie suffisamment générales en géométrie algébrique : en effet, les seuls suites exactes d'homotopie existantes s'appliquent uniquement à des morphismes propres ou à certaines fibrations admettant de bonnes compactifications relatives, sur une base simplement connexe (voir par exemple [**SGA1**], exposé X, corollaire 1.4, ou [**Fri82**], théorème 11.5), ce que l'on ne peut pas montrer facilement pour les fibrations du type $H \to G \to X$.

Par conséquent, la stratégie de preuve pour calculer $\pi_1^{\text{ét}}(X)$ consiste à établir "à la main" de bonnes suites exacte d'homotopie pour certaines fibrations entre espaces homogènes auxquelles les résultats classiques mentionnés plus haut ne s'appliquent pas.

Dans toute la suite, on s'intéresse en fait seulement à la complétion profinie première à p des groupes d'homotopie, et en particulier au groupe $\pi_1^{\text{ét}}(X)^{(p')}$, qui est le plus grand quotient premier à p de $\pi_1^{\text{ét}}(X)$, et qui classifie les revêtements galoisiens de X de degré premier à p.

Afin d'énoncer les résultats obtenus, fixons quelques notations générales sur la structure des groupes algébriques sur un corps k, supposé soit de caractéristique nulle, soit algébriquement clos. Si G est un k-groupe algébrique lisse, on note

- $G^0 \subset G$ la composante neutre de G, et $\pi_0(G) := G/G^0$ le groupe des composantes connexes de G.
- $G^{\text{lin}} \subset G^0$ le sous-groupe linéaire connexe maximal de G.
- $G^{\text{ab}} := G^0/G^{\text{lin}}$ la variété abélienne quotient maximale.
- G^{u} le radical unipotent de G^{lin}.
- $G^{\text{red}} := G^{\text{lin}}/G^{\text{u}}$ le quotient réductif de G^{lin}.
- G^{ss} le sous-groupe dérivé de G^{red}, qui est semi-simple.
- $G^{\text{tor}} := G^{\text{red}}/G^{\text{ss}}$ le k-tore quotient maximal de G^{red}.
- $G^{\text{ssu}} := \text{Ker}\,(G^{\text{lin}} \to G^{\text{tor}})$.
- G^{sc} le revêtement universel de G^{ss}, qui est semi-simple simplement connexe.
- G^{scu} le produit fibré de G^{sc} par G^{lin} au-dessus de G^{red}.
- Z_G le centre de G.
- T_G un tore maximal de G^{lin}.

Désormais dans cette section, k désigne un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$.

Avant de s'intéresser au cas des espaces homogènes en caractéristique quelconque, rappelons un résultat de Borovoi ([**Bor98**], propositions 1.11 et 1.13) et Merkurjev ([**Mer98**], section 10.1) fournissant une formule purement algébrique pour le groupe fondamental topologique des groupes de Lie associés à des groupes algébriques linéaires connexes sur $\mathbf{C}$:

Proposition 3.13 **(Borovoi, Merkurjev)**. — *Soit G un groupe algébrique linéaire connexe sur $\mathbf{C}$. Soit T (resp. T^{sc}) un tore maximal de G^{red} (resp. de G^{sc}) de sorte que le morphisme naturel $\rho : G^{\text{sc}} \to G^{\text{red}}$ induise un morphisme $\rho : T^{\text{sc}} \to T$.*

Alors on a un isomorphisme canonique de groupes abéliens

$$\text{Coker}\,(T_*^{\text{sc}} \xrightarrow{\rho_*} T_*) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(\pi_1^{\text{top}}(\mathbf{G}_m(\mathbf{C})), \pi_1^{\text{top}}(G(\mathbf{C})))\,.$$

En particulier, le groupe abélien $\pi_1^{\text{ét}}(G)(-1) := \text{Hom}(\pi_1^{\text{ét}}(\mathbf{G}_m), \pi_1^{\text{ét}}(G))$ (non canoniquement isomorphe à $\pi_1^{\text{ét}}(G)$) est canoniquement isomorphe au complété profini du groupe $\text{Coker}\,(T_*^{\text{sc}} \xrightarrow{\rho_*} T_*)$.

On cherche donc notamment à étendre ce résultat en toute caractéristique, et pour des espaces homogènes à stabilisateurs non triviaux.

Pour établir des suites exactes d'homotopie en degré 1, on s'appuie sur des résultats de Brion et Szamuely (voir l'article [**BS13**]) qui décrivent la structure des revêtements galoisiens des espaces homogènes à stabilisateurs connexes :

Théorème 3.14 **(Brion-Szamuely)**. — *Soit G un k-groupe algébrique lisse connexe et $X = G/H$ un espace homogène de G à stabilisateurs connexes.*

Alors

(1) *tout revêtement galoisien de X de degré premier à p est de la forme $\widetilde{X} = \widetilde{G}/\widetilde{H}$, pour une certaine isogénie $\widetilde{G} \to G$ de degré premier à p.*

(2) *le groupe $\pi_1^{\text{ét}}(X)^{(p')}$ est un quotient de $\mathbf{Z}_{(p')}^N$ (où $\mathbf{Z}_{(p')} := \prod_{l \neq p} \mathbf{Z}_l$), pour un entier N explicite dépendant des rangs de G et de H, ainsi que des dimensions des variétés abéliennes quotients de G et de H.*

L'objectif est donc d'exploiter ce théorème pour obtenir une formule exacte décrivant $\pi_1^{\text{ét}}(X)^{(p')}$, dans le cas d'un groupe G linéaire.

L'une des étapes cruciales dans la preuve est le résultat suivant :

Lemme 3.15. — *Soit $f : (G, X) \to (G', X')$ un morphisme d'espaces homogènes, de stabilisateurs respectifs H et H'. On suppose le morphisme $f : G \to G'$ surjectif de noyau connexe, et on note X_0 la fibre de $f : X \to X'$ au-dessus d'un point $x' \in X'(k)$.*

Si H et H' sont connexes, ou si $f : H \to H'$ est surjectif, alors on a une suite exacte naturelle de groupes

$$\pi_1^{\text{ét}}(X_0)^{(p')} \to \pi_1^{\text{ét}}(X)^{(p')} \xrightarrow{f_*} \pi_1^{\text{ét}}(X')^{(p')} \to 1\,.$$

La preuve de ce lemme utilise notamment le théorème 3.14, et plus précisément un raffinement de ce dernier dans le cas où les stabilisateurs ne sont pas supposés connexes.

On utilise ensuite ce lemme pour parvenir à la formule souhaitée pour $\pi_1^{\text{ét}}(X)^{(p')}$. Avant d'énoncer le résultat, on définit pour un k-groupe H, le sous-groupe H^{kercar} par

$$H^{\text{kercar}} := \bigcap_{\chi : H \to \mathbf{G}_m} \operatorname{Ker}(\chi)\,,$$

et on note $\operatorname{Ext}^0_{\mathbf{Z}}(A, B)$ le groupe des morphismes $A \to B$ dans la catégorie dérivée bornée des complexes de groupes abéliens.

Pour un groupe topologique A, on note $A(-1) := \operatorname{Hom}_{\text{cont}}(\mathbf{Z}_{(p')}(1), A)$ l'ensemble pointé des homomorphismes continus, où $\mathbf{Z}_{(p')}(1) := \pi_1^{\text{ét}}(\mathbf{G}_m, 1)^{(p')}$; si A est abélien, alors $A(-1)$ est naturellement un groupe, qui est (non canoniquement) isomorphe au groupe A. Enfin, pour un k-groupe H, on note $\widehat{H} := \operatorname{Hom}_{k\text{-gr}}(H, \mathbf{G}_m)$, et pour un k-groupe de type multiplicatif M, on pose $M_* := \operatorname{Hom}_{k\text{-gr}}(\mathbf{G}_m, M) = \operatorname{Hom}_{\mathbf{Z}}(\widehat{M}, \mathbf{Z})$.

On peut alors énoncer le résultat :

Théorème 3.16. — *Soit $X = G/H$ un k-espace homogène d'un k-groupe G linéaire connexe, avec $H \subset G$ lisse. On suppose* $\operatorname{Pic}(G) = 0$ *et H^{kercar} connexe.*

Alors on a un isomorphisme canonique de groupes abéliens

$$\operatorname{Ext}^0_{\mathbf{Z}}(\widehat{G} \to \widehat{H}; \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(X)^{(p')}(-1)\,.$$

Remarque 3.17. — En particulier, si le groupe H est connexe, alors on obtient la formule suivante :

$$\operatorname{Coker}({H^{\text{tor}}}_* \to {G^{\text{tor}}}_*) \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_{(p')} \xrightarrow{\sim} \pi_1^{\text{ét}}(X)^{(p')}(-1)\,.$$

Dans le cas d'un groupe linéaire connexe en caractéristique nulle, on retrouve essentiellement la proposition 3.13 de Borovoi et Merkurjev sur le groupe fondamental "algébrique" des groupes linéaires. On peut donc voir la théorème 3.16 comme la généralisation de ces travaux : on dispose en particulier d'une définition purement algébrique du groupe fondamental étale d'un espace homogène via $\pi_1^{\text{alg}}(X) := \operatorname{Ext}^0_{\mathbf{Z}}(\widehat{G} \to \widehat{H}; \mathbf{Z})$, définition ne faisant apparaître que les groupes de caractères de H et de G. Si $k = \mathbf{C}$, ce groupe fondamental "algébrique" ainsi défini est isomorphe au groupe fondamental topologique de l'espace homogène $X(\mathbf{C})$ du groupe de Lie $G(\mathbf{C})$, alors que le groupe fondamental étale est le complété profini de ce dernier.

On propose également une application concrète de cette formule : il s'agit de la variante suivante de la conjecture des sections pour les espaces homogènes (voir [**Sti13**], chapitre 13). Étant donné un espace homogène X sur un corps k, sous quelles hypothèses l'existence d'une section pour la suite exacte fondamentale (voir [**SGA1**], exposé IX, théorème 6.1)

$$1 \to \pi_1^{\text{ét}}(\bar{X}) \to \pi_1^{\text{ét}}(X) \to \Gamma_k \to 1 \tag{2}$$

implique-t-elle l'existence d'un point rationnel sur X ?

Rappelons d'abord la définition suivante (voir [**BCTS08**], section 3.4) :

Définition 3.18. — Un corps k de caractéristique nulle est un bon corps de dimension cohomologique 2 si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(1) la dimension cohomologique de k est au plus 2.

(2) pour toute extension finie K/k de corps, pour toute K-algèbre simple centrale A, l'indice de A est égal à l'exposant de la classe de A dans $\mathrm{Br}(K)$.

(3) pour tout k-groupe semi-simple simplement connexe G, $H^1(k,G) = 1$.

En utilisant une variante Galois-équivariante du théorème 3.16, on montre l'application suivante :

Corollaire 3.19. — *Soit k un bon corps de dimension cohomologique 2, de caractéristique nulle. Soit G un k-groupe algébrique linéaire connexe et X un k-espace homogène de G de stabilisateur $\bar{H}$. On suppose* $\mathrm{Ker}\,(\bar{H}^{\mathrm{tor}} \to \bar{G}^{\mathrm{tor}})$ *fini.*

Alors $X(k) \neq \varnothing$ si et seulement si la suite exacte fondamentale (2) *associée à X est scindée.*

Remarque 3.20. — (1) Par exemple, un corps p-adique, un corps de nombres totalement imaginaire ou le corps des fractions d'un anneau intègre strictement hensélien de dimension 2 et de caractéristique résiduelle nulle, est un bon corps de dimension cohomologique 2.

(2) L'hypothèse de finitude est nécessaire : une variété de Severi-Brauer sans point rationnel sur un tel corps est en effet un contre-exemple, puisqu'une telle variété est un espace homogène et qu'elle est géométriquement simplement connexe. En revanche on voit que dans cet exemple le groupe $\mathrm{Ker}\,(\bar{H}^{\mathrm{tor}} \to \bar{G}^{\mathrm{tor}})$ est bien infini.

(3) Cette hypothèse de finitude est équivalente à la finitude de $\mathrm{Ker}\,(\pi_1^{\text{ét}}(\bar{H}) \to \pi_1^{\text{ét}}(\bar{G}))$. En particulier, si k est un sous-corps de $\mathbf{C}$, cette hypothèse est équivalente à la finitude de $\pi_2^{\mathrm{top}}(X(\mathbf{C}))$: cette condition est vérifiée pour les torseurs sous G puisque $\pi_2^{\mathrm{top}}(G(\mathbf{C})) = 0$, mais pas pour les variétés de Severi-Brauer pour lesquelles $\pi_2^{\mathrm{top}}(X(\mathbf{C})) = \mathbf{Z}$.

La preuve de ce corollaire utilise de nouveau la théorie du H^2 non abélien, et interprète l'application d'abélianisation pour l'ensemble $H^1(k, L_X \to \underline{\mathrm{lien}}\,(G))$ (classifiant essentiellement les espaces homogènes de G liés par L_X) comme un raffinement de l'obstruction fondamentale. En effet, le point clé de la démonstration est un diagramme anti-commutatif naturel (dans le cas où le stabilisateur $\bar{H}$ de X est supposé connexe)

$$\begin{tikzcd}
H^1(k, L_X \to \underline{\mathrm{lien}}\,(G)) \arrow[r, "\mathrm{ab}^1"] \arrow[dr] & H^1_{\mathrm{ab}}(k, L_X \to \underline{\mathrm{lien}}\,(G)) = H^1(k, H^{\mathrm{tor}} \to G^{\mathrm{tor}}) & H^2(k, \pi_1^{\mathrm{alg}}(\bar{X}) \otimes \mathbf{Z}(1)) \arrow[l, "\sim"'] \arrow[d, "\mathrm{can.}"] \\
 & H^2(k, \pi_1^{\text{ét}}(\bar{X})) & H^2(k, \pi_1^{\mathrm{alg}}(\bar{X}) \otimes \widehat{\mathbf{Z}}(1)) \arrow[l, "\sim"']
\end{tikzcd},$$

où $\pi_1^{\mathrm{alg}}(\bar{X}) := \mathrm{Coker}\,({H^{\mathrm{tor}}}_* \to {G^{\mathrm{tor}}}_*)$, la flèche oblique associe à un espace homogène X la classe de l'extension (2), l'isomorphisme de la ligne inférieure est une conséquence de la remarque 3.17, et $\mathbf{Z}(1) := \mathbf{G}_m[-1]$ dans la catégorie dérivée des complexes bornés de faisceaux étales sur $\mathrm{Spec}\,(k)$. Par conséquent, l'application d'abélianisation ab^1 est en quelque sorte un raffinement de l'obstruction fondamentale "avant complétion profinie". On montre enfin que l'application canonique $H^2(k, \pi_1^{\mathrm{alg}}(\bar{X}) \otimes \mathbf{Z}(1)) \to H^2(k, \pi_1^{\mathrm{alg}}(\bar{X}) \otimes \widehat{\mathbf{Z}}(1))$ est injective, pour conclure la preuve du corollaire 3.19. En effet, les hypothèses faites sur le corps k assurent que ab^1 a un noyau trivial, i.e. réduit aux classes d'espaces homogènes ayant un point rationnel.

Le cas particulier où X est un k-torseur sous un k-groupe linéaire connexe est un théorème de Stix (voir [**Sti13**], théorème 182).

Pour finir cette partie, mentionnons que dans un travail en cours avec T. Szamuely, on cherche à étendre les résultats précédents sur le groupe fondamental afin d'obtenir des descriptions explicites des groupes d'homotopie étale en degrés supérieurs des groupes algébriques et de leurs espaces homogènes. On s'intéresse en particulier aux groupes d'homotopies du complété profini (premier à p) du type d'homotopie étale des espaces homogènes (comme le foncteur de complétion $(\cdot)^{(p')}$ ne commute pas avec les foncteurs $\pi_q^{\text{ét}}(\cdot)$, ces groupes diffèrent sensiblement de ceux de [**Ach17**], théorème 1.1). On cherche notamment à obtenir des formules pour ces groupes, ainsi que des suites exactes longues d'homotopie pour la fibration $H \to G \to X$.

3.3. Groupe de Brauer des espaces homogènes

Dans cette section, k est un corps et X est un k-espace homogène d'un k-groupe algébrique connexe G. On étudie le groupe de Brauer cohomologique $\mathrm{Br}(X) := H^2_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_m)$ et certains de ses sous-quotients, dont notamment le groupe de Brauer algébrique de X et le groupe de Brauer non ramifié de X. Ces invariants cohomologiques sont des outils importants pour l'étude de l'arithmétique de X sur les corps globaux (voir par exemple [**Sko01**], chapitre 5 et suivants), et pour celle de la rationalité de X sur un corps quelconque, et notamment sur un corps algébriquement clos (voir par exemple [**CTS07**]).

On présente ici deux types de résultats : une formule explicite décrivant un "gros" sous-groupe, noté $\mathrm{Br}_1(X, G)$, de $\mathrm{Br}(X)$, très utile en arithmétique pour mesurer le défaut d'approximation forte (ou du principe de Hasse entier) sur X (voir par exemple la section 5.3.2), et des résultats sur le groupe de Brauer non ramifié $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(X)$ de X sur un corps quelconque.

3.3.1. Le groupe de Brauer algébrique d'un torseur. — On suppose d'abord que k est un corps de caractéristique nulle, dont on note $\bar{k}$ une clôture algébrique, et on commence par la définition et la description du groupe $\mathrm{Br}_1(X, G)$, que l'on trouve dans [**Dem11c**] :

Définition 3.21. — On pose

$$\mathrm{Br}_1(X, G) := \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\overline{G}))\,, \text{ et } \mathrm{Br}_a(X, G) := \mathrm{Br}_1(X, G)/\mathrm{Br}(k)\,.$$

La définition précédente est motivée par le théorème 5.41, qui affirme que sur un corps de nombres, le groupe $\mathrm{Br}_a(X, G)$ (ou plus exactement son dual) mesure le défaut d'approximation forte sur X.

On se propose de décrire explicitement ce groupe, via certains invariants du groupe G et du stabilisateur $\bar{H}$ d'un point (géométrique) de X.

On dispose alors du résultat suivant (voir le début de la section 3.2 pour certaines notations) :

Théorème 3.22. — *Soit X un k-espace homogène d'un k-groupe algébrique connexe G, à stabilisateur géométrique $\bar{H}$ supposé linéaire connexe.*

(1) *Si* $\mathrm{Pic}(\bar{G}) = 0$ *(ce qui implique de G est linéaire), alors on a une suite exacte naturelle de groupes abéliens :*

$$0 \to \mathrm{Br}_a(X, G) \to \mathbf{H}^2(k, \widehat{C}_X) \to \mathrm{Ker}\,(H^3(k, \mathbf{G}_m) \to H^3(X, \mathbf{G}_m))\,,$$

où $\widehat{C}_X$ est le complexe de modules galoisiens suivants (en degrés 0 *à* 2*) :*

$$\widehat{C}_X := [\widehat{G} \to \widehat{Z_{\overline{H^{\mathrm{red}}}}} \to \widehat{Z_{\overline{H^{\mathrm{sc}}}}}]\,.$$

(2) *si $x \in X(k)$ a pour stabilisateur H, alors on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Br}_a(X, G) \xrightarrow{\sim} \mathbf{H}^2(k, \widehat{C}'_X)\,,$$

avec

$$\widehat{C}'_X := [\widehat{T_G} \to \mathrm{Pic}(\bar{G}^{\mathrm{ab}}) \oplus \widehat{T_{G^{\mathrm{sc}}}} \oplus \widehat{T_H} \to \widehat{T}_{H^{\mathrm{sc}}}]\,.$$

Remarque 3.23. — Dans le second point du théorème, pour définir le complexe $\widehat{C}'_X$, il convient de faire des choix compatibles pour les tores maximaux de H, H, G et G : on souhaite que le diagramme commutatif naturel de k-groupes

$$\begin{tikzcd} H^{\mathrm{scu}} \arrow[r] \arrow[d] & G^{\mathrm{scu}} \arrow[d] \\ H \arrow[r] & G \end{tikzcd}$$

induise un diagramme commutatif de k-tores :

$$\begin{tikzcd} T_{H^{\mathrm{sc}}} \arrow[r] \arrow[d] & T_{G^{\mathrm{sc}}} \arrow[d] \\ T_H \arrow[r] & T_G \,. \end{tikzcd}$$

Précisons également les deux morphismes non évidents dans la définition du complexe $\widehat{C'_X}$: le morphisme $\mathrm{Pic}(\bar{G}^{\mathrm{ab}}) \to \widehat{T}_{H^{\mathrm{sc}}}$ est le morphisme nul, alors que le morphisme $\widehat{\overline{T_G}} \to \mathrm{Pic}(\bar{G}^{\mathrm{ab}})$ est naturellement associé à un torseur $\mathrm{SA}_G \to G^{\mathrm{ab}}$ sous le tore T_G, défini par une sous-variété semi-abélienne maximale SA_G de G contenant T_G (le morphisme souhaité, appelé "le type" du torseur considéré, est obtenu en poussant en avant ce dernier torseur par un caractère de $\overline{T_G}$ pour obtenir un torseur sous $\overline{\mathbf{G}_m}$ au-dessus de $\overline{G^{\mathrm{ab}}}$).

Dans le théorème 3.22, le cas où X est un torseur sous G est essentiellement dû à Borovoi et van Hamel (voir [**BvH09**], corollaire 2.20.(ii)), via la définition du complexe de longueur 2 noté $\mathrm{UPic}(\bar{X})$. La description du sous-groupe $\mathrm{Br}_a(X) := \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\bar{X}))/\mathrm{Br}(k)$ de $\mathrm{Br}_a(X, G)$ est également due à ces deux auteurs dans le cas des espaces homogènes à stabilisateurs connexes (voir [**BvH12**], théorème 7.2).

En revanche, en général le groupe $\mathrm{Br}_a(X, G)$ contient des éléments transcendants qui sont nécessaires à la compréhension du défaut d'approximation forte et du principe de Hasse entier pour les espaces homogènes sur les corps de nombres.

La méthode pour obtenir ces formules consiste à introduire ce que l'on nomme le groupe de Brauer algébrique d'un torseur avec donnée de recollement. En quelques mots, si X est une k-variété lisse et géométriquement intègre, un torseur avec donnée de recollement sur X est la donnée d'un $\bar{k}$-groupe algébrique linéaire $\bar{H}$ et d'un torseur $\bar{\pi} : \bar{Y} \to \bar{X}$ sous le groupe $\bar{H}$, avec une donnée de recollement pour $\bar{\pi}$ relativement à l'extension $\bar{k}/k$. Cette notion recouvre à la fois la notion de torseur $\pi : Y \to X$ défini sur le corps k (i.e. une k-forme de $\bar{\pi}$), et la notion d'espace homogène X d'un groupe G à stabilisateur $\bar{H}$ (prendre $\bar{Y} := \bar{G}$ et $\bar{\pi}$ défini par l'action de $\bar{G}$ sur un point géométrique de X).

Étant donné un tel torseur $\bar{\pi} : \bar{Y} \to \bar{X}$ avec donnée de recollement, on lui associe, grâce à la théorie du H^2 non abélien de Giraud, réinterprétée par Harari et Skorobogatov dans [**HS02**] (proposition 2.2), un k-lien sur $\bar{H}$ et une classe dans $H^2(k, \bar{H})$ qui mesure l'obstruction à descendre $\bar{\pi}$ sur le corps de base k. Puis, grâce à un théorème de Douai (cf [**Dou06**], proposition 1.1 ou [**Bor93**], proposition 3.1) sur le H^2 des groupes réductifs, on construit un torseur $p : Z \to X$ défini sur k, sous une k-forme H' du groupe $\bar{H}^{\mathrm{red}}/Z_{\bar{H}^{\mathrm{red}}}$. Ensuite, on introduit le complexe de modules galoisiens

$$C_{\bar{Y}/X} := [\bar{k}(Z)^*/\bar{k}^* \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Div}(\bar{Z}) \xrightarrow{\partial} H^0(\bar{X}, R^1 p_* \mathbf{G}_{m,Z})] \,,$$

où $\mathrm{Div}(\bar{Z})$ désigne le module galoisien des diviseurs sur $\bar{Z}$, Δ est le morphisme naturel et ∂ provient de l'application du foncteur p_* à la suite exacte naturelle de faisceau étales sur Z :

$$0 \to \mathbf{G}_{m,Z} \to \mathscr{K}_Z^* \to \mathscr{D}\mathrm{iv}_Z \to 0 \,.$$

Or, en utilisant le théorème 90 de Hilbert, on voit que l'on dispose de la suite exacte naturelle de faisceaux étales sur X

$$0 \to \mathbf{G}_{m,X} = p_* \mathbf{G}_{m,Z} \to p_* \mathscr{K}_Z^* \to p_* \mathscr{D}\mathrm{iv}_Z \to R^1 p_* \mathbf{G}_{m,Z} \to 0 \,,$$

ce qui permet de montrer que l'hypercohomologie galoisienne du complexe $C_{\bar{Y}/X}$ calcule la cohomologie étale du faisceau $\mathbf{G}_{m,X}$, "relativement au morphisme $Z \to X$". En particulier, on obtient une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Br}_a(X, \bar{Y}) \to \mathbf{H}^2(k, C_{\bar{Y}/X}) \to \mathrm{Ker}\,(H^3(k, \mathbf{G}_m) \to H^3(X, \mathbf{G}_m)) \,,$$

où on a défini $\mathrm{Br}_1(X, \bar{Y}) := \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(\bar{X}) \xrightarrow{\bar{\pi}^*} \mathrm{Br}(\bar{Y}))$.

Ensuite, il s'agit de construire, dans le cas particulier d'un espace homogène X de G (resp. tel que $X(k) \neq \varnothing$), un triangle exact canonique, dans la catégorie dérivée des complexes bornés de modules galoisiens, impliquant le complexe $\widehat{C}_X$ (resp. $\widehat{C}'_X$), le complexe $C_{\bar{G}/X}$ et le module galoisien $\mathrm{Pic}(\bar{G})$ (resp. le groupe de Néron-Severi $\mathrm{NS}(\bar{G}^{\mathrm{ab}}) := \mathrm{Pic}(\bar{G}^{\mathrm{ab}})/\mathrm{Pic}^0(\bar{G}^{\mathrm{ab}})$). Cela se fait en généralisant certaines constructions de Borovoi et van Hamel, et en dévissant la structure des groupes algébriques G et $\bar{H}$ pour se ramener aux cas extrêmes que sont les tores, les groupes semi-simples simplement connexes et les variétés abéliennes.

3.3.2. Le groupe de Brauer non ramifié d'un espace homogène. — Intéressons-nous maintenant au groupe de Brauer non ramifié de X. Dans un travail en commun avec M. Borovoi et D. Harari (voir [**BDH13**]), on a entrepris de calculer le groupe de Brauer non ramifié, ou plus exactement le groupe de Brauer d'une compactification lisse, d'un espace homogène d'un groupe linéaire connexe sur un corps k de caractéristique $p \geq 0$. Les motivations pour ces calculs résident à la fois dans les applications du groupe de Brauer au principe de Hasse et à l'approximation faible sur un corps global, ainsi que par ses applications dans les problèmes de rationalité sur un corps quelconque.

On rappelle que l'on peut définir le groupe de Brauer non ramifié d'une k-variété lisse intègre X de la façon suivante : c'est un groupe abélien de torsion, tel que pour tout n premier à p, le sous-groupe $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(X)[n]$ de n-torsion est défini par la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(X)[n] \to H^2(k(X), \mu_n) \xrightarrow{\oplus \partial_x} \bigoplus_{x \in X^{(1)}} H^1(\kappa(x), \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}),$$

où $X^{(1)}$ est l'ensemble des points de codimension 1 de X et ∂_x désigne l'application "résidu en x" : voir par exemple [**CT95**], section 4. Dans tout ce travail, on se limite à la torsion première à p du groupe de Brauer non ramifié et du groupe de Brauer d'une compactification lisse de X. Pour tout groupe abélien A, pour tout entier n, on note $A[n]$ le sous-groupe de n-torsion de A, pour tout nombre premier l, on note $A\{l\}$ le sous-groupe de torsion l-primaire de A (i.e. la réunion des $A[l^m]$ quand m décrit $\mathbf{N}$), et pour tout nombre premier p, on note $A\{p'\}$ le sous-groupe de torsion première à p, i.e. l'ensemble des éléments de torsion dont l'ordre est premier à p.

Le théorème de pureté de Grothendieck (voir par exemple [**Gro68**], section 6 et [**CT95**], proposition 4.2.3) assure que si X^c est une compactification lisse de X, alors $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(X)\{l\} = \mathrm{Br}(X^c)\{l\}$, pour tout $l \neq p$ (où p est la caractéristique de corps de base k).

L'un des grands intérêts du groupe de Brauer non ramifié (et plus généralement de la cohomologie non ramifiée) réside dans ses applications aux problèmes de rationalité des variétés algébriques : en effet, la cohomologie non ramifiée est un invariant birationnel stable des variétés projectives lisses (voir [**CT95**], proposition 2.1.8), et par conséquent la non-trivialité de ces groupes de cohomologie pour une variété donnée implique que celle-ci n'est pas stablement birationnelle.

On présente ici trois résultats sur le calcul du groupe de Brauer d'une compactification lisse d'un espace homogène, sur trois types de corps différents. Avant d'énoncer ces résultats, on mentionne une proposition clé pour les théorèmes qui suivent. Cette proposition caractérise les élément de $\mathrm{Br}(X^c)$ et de $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(X)$ à l'intérieur de $\mathrm{Br}(X)$.

On commence par définir un sous-groupe d'un groupe de cohomologie galoisienne qui est fondamental dans les formules qui suivent. Il s'agit de l'analogue en cohomologie des groupes profinis des groupes de nature arithmétique $Ш^i_\omega(k, C)$ définis dans le cas des corps de nombres (voir la définition 3.30) :

Définition 3.24. — Soit k un corps et C un complexe borné de modules galoisiens. On définit $Ш^i_{\omega,\mathrm{alg}}(k, C)$ comme le sous-groupe de $H^i(k, C)$ formé des éléments dont la restriction à $H^i(P, C)$ est nulle pour tout sous-groupe procyclique $P \subset \Gamma_k$.

Si $p : X \to \mathrm{Spec}\,(k)$ est une k-variété lisse et géométriquement intègre, on définit, suivant Borovoi-van Hamel ([**BvH09**], section 2), Harari-Szamuely ([**HS08**]) et Colliot-Thélène (voir [**CT08**], appendice B), le complexe $KD'(X)$ comme le cône du morphisme $\mathbf{G}_m[1] \to$

$(\tau_{\leq 1}\mathbf{R}p_*\mathbf{G}_{m,X})[1]$ dans la catégorie dérivée bornée des faisceaux étales sur Spec (k). Alors on a par construction une suite exacte naturelle

$$\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}_1(X) \xrightarrow{r} \mathbf{H}^1(k, KD'(X)) \to \mathrm{Ker}\,(H^3(k,\mathbf{G}_m) \to H^3(X,\mathbf{G}_m))\,.$$

Proposition 3.25. — *Soit k un corps et X une k-variété lisse géométriquement intègre.*

(1) *si X admet une compactification lisse X^c, alors*

$$r^{-1}\left(Ш^1_{\omega,\mathrm{alg}}(k, KD'(X))\right) \subset \mathrm{Br}_1(X^c)\,.$$

(2) *si k est un corps global et $\alpha \in \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(X)\{p'\}$ (resp. $\alpha \in \mathrm{Br}(X^c)$ si X admet une compactification lisse X^c), alors pour presque toute place v de k, $\alpha_v \in \mathrm{Br}(X_v)$ est orthogonal à $X(k_v)$ pour l'accouplement naturel.*

La démonstration du premier point est facile. En revanche, le second point est plus délicat dans le cas où l'on ne suppose pas l'existence d'une compactification lisse, et la preuve utilise de façon cruciale le théorème de Gabber sur les altérations que l'on trouve dans [**ILO14**], exposé X, théorème 2.1 (théorème qui précise le théorème de de Jong). Dans la suite, on peut souvent, dans les cas où l'on ne connaît pas l'existence de X^c, remplacer dans les énoncés le groupe $\mathrm{Br}(X^c)$ par $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(X)$ en utilisant le théorème de Gabber comme dans la proposition 3.25.

Décrivons maintenant les trois types de résultats obtenus, en fonction du corps de base.

(1) Sur un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$, si les stabilisateurs sont connexes.

On montre le résultat suivant :

Théorème 3.26. — *Soit k un corps séparablement clos.*

Soit G un k-groupe lisse linéaire connexe et H un k-sous-groupe connexe lisse de G. On note $X := G/H$ et on suppose que X admet une compactification lisse X^c.

On suppose l'une des conditions suivantes satisfaites :

- *k est de caractéristique nulle.*
- *k est algébriquement clos et H est produit semi-direct de H^{u} par H^{red}.*
- *H et G sont réductifs.*

Alors $\mathrm{Br}(X^c)\{l\} = 0$ *pour tout l premier à l'exposant caractéristique de k.*

Remarque 3.27. —
- Si $k = \mathbf{C}$, $G = \mathrm{GL}_{n^2}$ et $H = \mathrm{PGL}_n$, c'est un résultat de Saltman : voir [**Sal85**], théorème 2.9.
- Si $k = \mathbf{C}$ et G est semi-simple simplement connexe, c'est un théorème classique de Bogomolov (voir [**Bog89**], théorème 2.4 ou [**CTS07**], théorème 9.1). La preuve de Bogomolov, qui est de nature topologique, ne s'étend pas a priori à la caractéristique positive. La preuve présentée ici est indépendante de celle de Bogomolov dans le cas complexe.
- Si k est de caractéristique nulle et H est connexe, Borovoi a donné dans [**Bor13**] une preuve alternative du théorème par réduction à celui de Bogomolov.

La preuve du théorème 3.26 peut se résumer ainsi :

(a) On montre d'abord le lemme suivant :

Lemme 3.28. — *Soit X une variété lisse géométriquement intègre sur un corps k. Soit $\alpha \in \mathrm{Br}(X)$. On suppose qu'il existe une extension de corps K/k telle que la restriction α_K soit nulle dans $\mathrm{Br}(X_K)$.*

Si k est parfait ou si $\alpha \in \mathrm{Br}(X)\{p'\}$, alors $\alpha \in \mathrm{Br}_1(X)$.

(b) On montre ensuite le théorème 3.26 dans le cas de la clôture séparable d'un corps global. Pour ce faire, on utilise la version de la suite exacte de Sansuc obtenue dans [**BD13**] (voir (6)), l'abélianisation du premier groupe de cohomologie galoisienne de H, un théorème de dualité locale pour des complexes de tores de longueur 2 démontré dans [**Dem11b**] et la proposition 3.25. En outre, la preuve de la proposition 3.25 assure que l'on peut remplacer $\mathrm{Br}(X^c)\{l\}$ par $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(X)\{l\}$ en utilisant des altérations.

(c) On montre ensuite le théorème dans le cas d'un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. La rigidité de la cohomologie non ramifiée à coefficients finis, ainsi qu'un théorème de Vinberg-Margaux (voir [**Mar09**], théorème 1.1) sur la stabilité par extension de corps algébriquement clos des ensembles de morphismes entre groupes réductifs, assurent que l'on peut supposer que le corps de base est $\bar{\mathbf{Q}}$, et donc se ramener à l'étape précédente (1b).

(d) On montre enfin le cas d'un corps séparablement clos de caractéristique positive. Dans ce contexte, le théorème de Vinberg-Margaux n'est plus valable et donc la preuve de l'étape précédente ne s'adapte pas. On suit plutôt l'approche suivante :

– si k est la clôture algébrique d'un corps fini $\mathbf{F}$, alors le lemme 3.28 appliqué à l'extension $k \subset \overline{\mathbf{F}(t)}$ permet de se ramener à l'étape (1b).

– dans le cas général, un argument de spécialisation un peu délicat permet de se ramener au cas précédent de la clôture algébrique d'un corps fini.

(2) Sur un corps global de caractéristique positive et sur un corps fini, si les stabilisateurs sont de type (ssumult) (voir ci-dessous pour la définition de cette notion).

Dans [**BDH13**], on propose la définition suivante qui permet d'assouplir l'hypothèse de connexité des stabilisateurs dans plusieurs énoncés :

Définition 3.29. — Soit k un corps, H un k-groupe algébrique. On dit que H est de type (ssumult) s'il existe une suite exacte de k-groupes

$$1 \to L \to H \to S \to 1$$

telle que S est lisse de type multiplicatif et L est lisse connexe et sans caractères (tout morphisme de groupes de $\bar{H}$ vers $\overline{\mathbf{G}_m}$ est constant).

Rappelons également la définition des groupes $Ш^i_\omega$ dans ce contexte arithmétique (voir la définition 3.24 pour une version algébrique) :

Définition 3.30. — Soit C un complexe borné de modules galoisiens sur un corps global k. On note $Ш^i_\omega(k, C)$ le sous-groupe de $H^i(k, C)$ formé des éléments dont la restriction à $H^i(k_v, C)$ est nulle pour presque toute place v de k.

On énonce d'abord la version globale du théorème, qui fait intervenir une variante de l'hypothèse (ssumult) :

Théorème 3.31. — *Soit k un corps global de caractéristique $p \geq 0$. Soit G un k-groupe réductif tel que $\mathrm{Pic}(\bar{G}) = 0$ et $H \subset G$ un k-sous-groupe lisse, extension d'un groupe de type multiplicatif S par un groupe lui-même extension d'un groupe semi-simple par un groupe unipotent distingué dans H. On note $X := G/H$.*

Alors

(a) *on a un morphisme injectif canonique pour tout $l \neq p$*

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}a}(X)\{l\} \hookrightarrow Ш^1_\omega(k, [\widehat{G^{\mathrm{tor}}} \to \widehat{S}])\{l\} .$$

(b) *si X possède une compactification lisse X^c, alors*

$$\mathrm{Br}_a(X^c) \xrightarrow{\sim} Ш^1_\omega(k, [\widehat{G^{\mathrm{tor}}} \to \widehat{S}]) .$$

(c) *si en outre le groupe H est connexe (réductif si $p > 0$), alors on a*

$$(\mathrm{Br}(X^c)/\mathrm{Br}(k))\{p'\} \xrightarrow{\sim} Ш^1_\omega(k, [\widehat{G^{\mathrm{tor}}} \to \widehat{S}])\{p'\} .$$

La preuve de ce théorème utilise un résultat de Douai (voir [**Dou75**], lemme 1.1 et théorème 1.1) sur le H^2 non abélien des groupes semi-simples sur les corps locaux, un théorème de dualité locale pour les complexes de tores (dans l'esprit des théorèmes de dualité locale dans [**Dem11b**]), l'isomorphisme entre $KD'(X)$ et $[\widehat{G^{\mathrm{tor}}} \to \widehat{S}]$ dû à Borovoi et van Hamel (voir [**BvH12**], théorème 5.8) et la caractérisation des éléments non ramifiés dans $\mathrm{Br_a}(X)$ (voir la proposition 3.25).

Avec des techniques similaires, en travaillant dans le corps local $\mathbf{F}((t))$ où $\mathbf{F}$ est un corps fini et en utilisant de nouveau le théorème de Douai et un théorème de dualité locale pour les complexes de groupes de type multiplicatif, on montre :

Théorème 3.32. — *Soit k un corps fini de caractéristique p. Soit G un k-groupe réductif, X un espace homogène de G à stabilisateur géométrique $\bar{H}$ lisse. On suppose l'une des conditions suivantes :*

(a) *le groupe $\bar{H}$ est connexe.*

(b) *le groupe $\bar{H}$ est de type (ssumult) et* $\mathrm{Pic}(\bar{G}) = 0$.

Alors $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}1}(X)\{l\} = 0$ *pour tout $l \neq p$.*

Si on suppose l'existence d'une compactification lisse X^c, alors $\mathrm{Br}_1(X^c) = 0$. *En outre, si $\bar{H}$ est réductif, alors* $\mathrm{Br}(X^c)\{p'\} = 0$.

(3) Sur un corps quelconque de caractéristique nulle, si les stabilisateurs sont de type (ssumult).

On cherche à étendre le théorème 3.31 à un corps quelconque (de caractéristique nulle).

Suivant un argument de spécialisation de Colliot-Thélène et Kunyavskii (voir [**CTK98**]), on montre alors par réduction aux corps finis (et donc au cas précédent) le théorème suivant :

Théorème 3.33. — *Soit k un corps de caractéristique nulle, G un k-groupe linéaire connexe tel que* $\mathrm{Pic}(\bar{G}) = 0$ *et X un espace homogène de G de stabilisateur $\bar{H}$, supposé de type (ssumult). On note S le plus grand quotient de type multiplicatif de $\bar{H}$. Soit X^c une compactification lisse de X.*

Alors on a une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Br}_a(X^c) \to Ш^1_{\omega,\mathrm{alg}}(k, [\widehat{G^{\mathrm{tor}}} \to \widehat{S}]) \to \mathrm{Ker}\left(H^3(k, \mathbf{G}_m) \to H^3(X, \mathbf{G}_m)\right).$$

Remarque 3.34. — – Si G est un tore, c'est un résultat de Colliot-Thélène et Sansuc (voir [**CTS87b**])
– Si G est semi-simple et $\bar{H}$ connexe, c'est un résultat de Colliot-Thélène et Kunyavskii (voir [**CTK98**]).

On conclut cette partie en mentionnant quelques exemples qui illustrent l'importance des hypothèses sur le stabilisateur (voir [**BDH13**], propositions 8.4 et 8.5 pour davantage de détails).

Exemple 3.35. — (1) il existe un corps de nombres k et un k-sous-groupe H de $\mathrm{SL}_{n,k}$ qui est extension d'un groupe fini commutatif par un k-tore, et tel que si $X := \mathrm{SL}_{n,k}/H$, on a

$$Ш^1_{\omega}(k, \widehat{H^{\mathrm{mult}}}) \subsetneq \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}a}(X).$$

Par conséquent, on ne peut pas remplacer l'hypothèse "$\bar{H}$ de type (ssumult)" par "$\pi_0(\bar{H})$ commutatif" dans le théorème 3.33.

(2) il existe un corps fini k de caractéristique impaire, un k-groupe semi-simple G de groupe fondamental μ_2 et un k-sous-groupe H de G fini constant commutatif, tel que si $X := G/H$, on a

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}1}(X)\{2\} \neq 0.$$

Par conséquent, l'hypothèse "$\mathrm{Pic}(\bar{G}) = 0$" est nécessaire dans le théorème 3.32.

3.4. Réduction aux espaces homogènes à stabilisateurs finis

L'arithmétique des espaces homogènes des groupes algébriques est bien comprise, pourvu que les stabilisateurs géométriques soient supposés *connexes* (voir [**Bor96**]). Sans cette hypothèse, beaucoup de questions restent largement ouvertes. Parmi les espaces homogènes à stabilisateurs non connexes, une classe particulièrement intéressante est celle des espaces homogènes du groupe $\mathrm{SL}_{n,k}$ à stabilisateurs finis (non triviaux). Il est naturel de se demander à quel point le comportement de ces espaces homogènes très particuliers régit celui des espaces homogènes quelconques.

Dans cette partie, on s'intéresse donc à la possibilité de réduire l'étude de certaines propriétés des espaces homogènes quelconques au cas particulier des espaces homogènes du groupe $\mathrm{SL}_{n,k}$ à *stabilisateurs finis*. Dans le travail [**DL17**], en commun avec G. Lucchini Arteche, on montre par des méthodes géométriques et cohomologiques, que sur un corps de caractéristique nulle, de nombreuses propriétés arithmétiques (comme l'approximation faible avec obstruction de Brauer-Manin sur les corps de nombres, ou l'existence d'un point rationnel sur les bons corps de dimension cohomologique 2, par exemple), se réduisent au cas des espaces homogènes de $\mathrm{SL}_{n,k}$ à stabilisateurs finis.

Pour cela, on introduit la définition suivante :

Définition 3.36. — Soit k un corps de caractéristique nulle, et soir P une propriété des espaces homogènes de k-groupes linéaires connexes. On dit que la propriété P est une *bonne propriété des espaces homogènes* si on a, pour tous X, Y espaces homogènes de groupes linéaires connexes :

(1) si X et Y sont stablement birationnels, alors $P(X)$ équivaut à $P(Y)$.

(2) si $X \to Y$ est un morphisme admettant une section, alors $P(X)$ implique $P(Y)$.

(3) si $X \to Y$ est un morphisme surjectif dont toute fibre est un espace homogène d'un groupe semi-simple simplement connexe à stabilisateur géométrique $\bar{H} = \bar{H}^{\mathrm{ssu}}$, alors $P(Y)$ implique $P(X)$.

Le résultat principal de [**DL17**] peut alors s'énoncer ainsi :

Théorème 3.37. — *Soit k un corps de caractéristique nulle ($\bar{k}$ désigne toujours une clôture algébrique de k), soit P une propriété des espaces homogènes de k-groupes algébriques linéaires connexes. On suppose que P est une bonne propriété des espaces homogènes.*

Soit G un k-groupe linéaire connexe, X un espace homogène de G, $\bar{x} \in X(\bar{k})$ un point de stabilisateur $\bar{H}$.

Alors il existe un $\bar{k}$-groupe fini $\bar{F}$, extension de $\pi_0(\bar{H})$ par un $\bar{k}$-groupe abélien, et un k-espace homogène X' de $\mathrm{SL}_{n,k}$ à stabilisateur $\bar{F}$, tel que $P(X')$ implique $P(X)$.

Cela implique immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 3.38. — *Soit k un corps de caractéristique nulle, soit P une bonne propriété des espaces homogènes.*

Si P est vérifiée pour tout les espaces homogènes de $\mathrm{SL}_{n,k}$ à stabilisateurs finis, alors P est vérifiée pour tous les espaces homogènes.

Donnons maintenant quelques éléments de preuve pour le théorème 3.37.

La preuve repose sur la théorie du H^2 non abélien, en combinant trois points de vue : celui de Giraud (via la théorie des gerbes développée dans [**Gir71**]), celui de Springer-Borovoi (via les cocycles galoisiens comme dans [**Spr66**], [**Bor93**] ou [**FSS98**]) et celui des extensions de groupes (que l'on trouve à la fois dans [**Spr66**], [**Bor93**] et [**FSS98**]). La première étape de la démonstration consiste à montrer :

Proposition 3.39. — *Soit L un k-lien affine (i.e. dont le groupe algébrique sous-jacent est affine) et $\eta \in H^2(k, L)$. Alors il existe un entier n et un k-espace homogène de $\mathrm{SL}_{n,k}$ de lien L et de classe de Springer $\eta \in H^2(k, L)$. En outre, cette construction est fonctorielle en (L, η).*

Remarque 3.40. — Cette proposition peut s'interpréter comme une sorte de variante du théorème 90 de Hilbert pour le H^2. En effet, le théorème 90 de Hilbert pour $\mathrm{SL}_{n,k}$ implique que pour tout k-groupe fini H, il existe un entier n, un plongement $H \hookrightarrow \mathrm{SL}_{n,k}$ tel que si $X \coloneqq \mathrm{SL}_{n,k}/H$, alors toute classe $\eta \in H^1(k, H)$ est la classe caractéristique associée à un certain $x \in X(k)$.

On peut voir la proposition précédente comme un analogue formel de cet énoncé, à un échange de quantificateurs près.

La preuve de la proposition consiste à montrer d'abord que le k-lien affine L se plonge dans un k-lien de la forme $\underline{\mathrm{lien}}(\mathrm{SL}_{n,k})$, en utilisant une variante "semi-linéaire" du théorème classique (voir [**Wat79**], chapitre 3) qui affirme qu'un groupe algébrique affine est linéaire. Puis on montre, par un argument d'extension des scalaires et de restriction à la Weil, que quitte à augmenter n, on peut supposer que la classe $\eta \in H^2(k, L)$ est en relation avec la classe neutre $n(\mathrm{SL}_{n,k}) \in H^2(k, \mathrm{SL}_{n,k})$ via le plongement $i : L \to \underline{\mathrm{lien}}(\mathrm{SL}_{n,k})$ construit plus haut. Enfin, on construit l'espace homogène souhaité par descente galoisienne à partir de la donnée de descente associée à η et à une trivialisation de η dans $\mathrm{SL}_{n,k}$.

On utilise ensuite la proposition pour montrer le théorème suivant, dont la preuve est évidente si $X(k) \neq \varnothing$:

Théorème 3.41. — *Soit G un k-groupe algébrique, X un espace homogène de G de k-lien $L_X = (\bar{H}, \kappa_X)$, et de classe de Springer $\eta_X \in H^2(k, L_X)$.*

Soit $\pi : L_X \to L'$ un morphisme surjectif de k-liens avec L' supposé affine. Notons $\bar{\pi} : \bar{H} \to \bar{H}'$ le morphisme de $\bar{k}$-groupes correspondant. Soit $\eta' = \pi^{(2)}(\eta_X) \in H^2(k, L')$ et $N \subset G$ un sous-groupe distingué tel que $\ker \bar{\pi} \subset \bar{N}$.

Alors il existe un k-espace homogène X' de $(G/N \times \mathrm{SL}_{n,k})$ de lien $L_{X'} = L'$ et de classe de Springer $\eta_{X'} = \eta'$; un k-espace homogène Y de $(G \times \mathrm{SL}_{n,k})$ de lien $L_Y = L_X$ et de classe de Springer $\eta_Y = \eta_X$; et des morphismes naturels de k-espaces homogènes

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X & & X', \end{tikzcd}$$

de sorte que Y est un X-torseur sous $\mathrm{SL}_{n,k}$ et Y est un X'-espace homogène de $N_{X'}$, dont les fibres géométriques ont pour stabilisateur $\ker \bar{\pi} \subset \bar{N}$.

Au passage, on observe que ce théorème a une conséquence intéressante concernant une variante du célèbre lemme sans nom (voir [**CTS07**], paragraphe 3.2) : ce dernier affirme que pour un k-groupe linéaire muni d'une action linéaire génériquement libre sur un k-espace affine $\mathbf{A}(V)$, le classe de birationalité stable du quotient U/H d'un ouvert $U \subset \mathbf{A}(V)$ (sur lequel H agit librement) est indépendante des choix de V, de l'action de H et de l'ouvert U. En particulier, tous les espaces homogènes $\mathrm{GL}(V)/\rho(H)$ (resp. $\mathrm{SL}(V)/\rho(H)$), pour $\rho : H \to \mathrm{GL}(V)$ (resp. $\rho : H \to \mathrm{SL}(V)$) une représentation fidèle de H, sont stablement birationnels. On donne une version de cet énoncé pour des espaces homogènes *sans point rationnel* :

Corollaire 3.42 **(Le lemme sans nom, ni point rationnel)**

Soit k un corps de caractéristique nulle, G, G' deux k-groupes algébriques spéciaux k-rationnels (par exemple $G = \mathrm{SL}_{n,k}$ et $G' = \mathrm{SL}_{m,k}$).

Soit X (resp. X') un espace homogène de G (resp. G') de lien L (resp. L') et de classe de Springer η (resp. η').

S'il existe un isomorphisme entre L et L' envoyant η sur η', alors X et X' sont k-stablement birationnels.

Autrement dit, si deux espaces homogènes de groupes spéciaux k-rationnels ont même lien et même classe de Springer, alors ils sont k-stablement birationnels.

Reprenons la preuve du théorème 3.41 : l'ingrédient suivant est une généralisation du lemme d'Ono sur les isogénies de k-tores (voir [**Ono61**], théorème 1.5.1) au cadre des tores munis d'une action d'une k-gerbe (cette notion généralise l'action du groupe de Galois sur un k-tore). C'est un lemme qui permet de remplacer les tores quelconques par des tores quasi-triviaux (i.e. des tores dont le module des caractères admet une base permutée par le groupe de Galois absolu de k) dans les constructions qui suivent.

Enfin, une fois ces ingrédients démontrés, le coeur de la preuve est une succession de réductions de la propriété P à des espaces homogènes X_n dont la structure est de plus en plus simple. On part d'un espace homogène $X = X_0$ quelconque d'un k-groupe $G = G_0$ (à stabilisateur $\bar{H}$).

(1) On peut d'abord supposer G_0^{ss} simplement connexe, en remplaçant G_0 par une z-extension G_1 (ou une résolution flasque), c'est-à-dire par un k-groupe linéaire connexe G_1, tel que G_1^{ss} est simplement connexe, muni d'un morphisme sujectif de k-groupes $G_1 \to G_0$ (dont on peut également imposer des propriétés sur le noyau : voir **[CT08]**, Proposition-Définition 3.1).

(2) On se ramène au cas où $G_2 = G_1^{\mathrm{tor}} \times \mathrm{SL}_{n,k}$ et $\bar{H}_2$ est extension du groupe fini $\pi_0(\bar{H}_1)$ par le tore $\bar{H}_1^{\mathrm{tor}}$. Il suffit pour cela d'appliquer le théorème 3.41 pour obtenir un diagramme d'espaces homogènes

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ X_1 & & X_2 , \end{tikzcd}$$

de sorte que p soit un torseur sous $\mathrm{SL}_{n,k}$ et les fibres de q soient des espaces homogènes de G_1^{ssu} à stabilisateur $\bar{H}_1^{\mathrm{ssu}}$. Les hypothèses faites sur la propriété P assurent alors que $P(X_2)$ implique $P(X_1)$.

(3) On se ramène au cas où $\bar{H}_3^{\mathrm{tor}}$ est quasi-trivial pour l'action de la gerbe associée à X_3. C'est exactement le contenu du lemme d'Ono généralisé, joint aux bonnes propriétés vérifiées par P.

(4) On se ramène au cas où $\bar{H}_4$ est extension de $\pi_0(H_3)$ par un $\bar{k}$-groupe abélien fini. Pour ce faire, on utilise la description des élément du H^2 non abélien via les extensions du groupe de Galois absolu de k par le groupe des $\bar{k}$-points de $\bar{H}_3$. À une telle extension est associée une extension de Γ_k par $\bar{H}_3^{\mathrm{tor}}(\bar{k})$. Or une telle extension est de torsion (dans le groupe des extensions correspondant), ce qui permet de fabriquer un sous-groupe fini de $\bar{H}_3^{\mathrm{tor}}(\bar{k})$ convenable, puis d'utiliser le théorème 3.41. On conclut de nouveau en utilisant les bonnes propriétés de P.

(5) On se ramène au cas où $G_5 = \mathrm{SL}_{n,k}$ et $\bar{H}_4$ extension de $\pi_0(\bar{H}_3)$ par un $\bar{k}$-groupe fini abélien. Pour cela, on utilise de nouveau le lemme d'Ono, ainsi que l'invariance de P par stable birationnalité.

Finalement, cela conclut la preuve du théorème 3.37.

On présentera des applications arithmétique de ce théorème géométrique dans la section 5.2.2

CHAPITRE 4

OBSTRUCTIONS COHOMOLOGIQUES AU PRINCIPE DE HASSE

Dans cette partie, k désigne un corps de nombres, dont on note $\mathcal{O}_k$ l'anneau des entiers.

Afin de décider si une variété algébrique définie sur k a un point rationnel, une première étape naturelle consiste à tester si la variété a des points rationnels dans tous les complétés de k. Si la réponse à cette question est positive, il est légitime de se demander si la variété a effectivement un k-point.

Il est donc naturel d'introduire deux ensembles de points locaux naturellement associés à une k-variété X. Si Ω désigne l'ensemble des places de k, pour tout $v \in \Omega$, on note k_v le complété de k en v et $\mathcal{O}_v$ son anneau d'entiers. On considère l'ensemble

$$X(k_\Omega) := \prod_{v\in\Omega} X(k_v)\,,$$

muni de la topologie produit des topologies v-adiques, ainsi que l'ensemble des points adéliques

$$X(\mathbf{A}_k) := \prod_{v\in\Omega} \left(X(k_v) : \mathscr{X}(\mathcal{O}_v)\right)\,,$$

où $\mathscr{X}$ désigne un schéma plat de type fini sur un ouvert non-vide $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_{k,S})$ de $\operatorname{Spec}(\mathcal{O}_k)$ dont la fibre générique est isomorphe à X. L'ensemble $X(\mathbf{A}_k)$ est muni de la topologie de produit restreint. Remarquons que ni cet ensemble, ni sa topologie ne dépende du modèle $\mathscr{X}$ choisi.

On dit alors qu'une famille de variétés sur k vérifie le principe de Hasse si pour toute variété X de cette famille, on a

$$X(\mathbf{A}_k) \neq \varnothing \implies X(k) \neq \varnothing\,.$$

Par exemple, le théorème de Hasse-Minkowski affirme que les quadriques vérifient le principe de Hasse. De même, Hasse a montré que les équations normiques $N_{K/k}(z) = a$ vérifient le principe de Hasse si l'extension K/k est cyclique.

En revanche, comme Hasse lui-même l'a remarqué, certaines équations normiques ne vérifient pas ce principe.

On est donc amené à remplacer la condition "$X(\mathbf{A}_k) \neq \varnothing$" par une condition plus précise ; autrement dit, on cherche des obstructions naturelles au principe de Hasse, afin de raffiner le principe local-global évoqué plus haut.

Dans toute cette partie, X désigne une k-variété lisse et géométriquement intègre.

La cohomologie étale de X, et notamment les torseurs au-dessus de X, permettent de définir plusieurs obstructions naturelles au principe de Hasse pour X.

Manin a proposé la définition suivante dans **[Man71]** ; on pourra également consulter la seconde partie de **[Sko01]** pour davantage de détails.

Définition 4.1 **(Obstruction de Brauer-Manin)**. — La théorie du corps de classes local assure l'existence d'un accouplement naturel $\langle \cdot, \cdot \rangle : X(\mathbf{A}_k) \times \operatorname{Br}(X) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

Pour tout $B \subset \mathrm{Br}(X)$, on définit l'ensemble de Brauer-Manin de X associé à B comme le sous-ensemble $X(\mathbf{A}_k)^B \subset X(\mathbf{A}_k)$ défini par

$$X(\mathbf{A}_k)^B := \{x \in X(\mathbf{A}_k) : \langle x, A\rangle = 0\,,\ \forall A \in B\}\,.$$

Si $B = \mathrm{Br}(X)$, on note $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ l'ensemble de Brauer-Manin ainsi défini.

La suite exacte de Brauer-Hasse-Noether de la théorie du corps de classes global assure que l'on a les inclusions suivantes (on rappelle que $X(\mathbf{A}_k)$ est muni de sa topologie de produit restreint) :

$$X(k) \subset \overline{X(k)} \subset X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}} \subset X(\mathbf{A}_k)\,,$$

ce qui permet de définir l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse (et à l'approximation forte, à savoir la densité des points rationnels dans les points adéliques) sur X. Cette obstruction permet ainsi par exemple d'expliquer le défaut du principe de Hasse pour les torseurs sous les tores, et donc notamment pour les équations normiques.

Remarque 4.2. — On dispose d'une variante de cette définition, utile en vue de l'étude de l'approximation faible sur des variétés non propres : si $X(k_\Omega)$ désigne le produit direct des $X(k_v)$, v décrivant toutes les places de k, on dit que X vérifie l'approximation faible si $X(k)$ est dense dans $X(k_\Omega)$, muni de la topologie du produit direct.

On dispose d'un accouplement naturel, analogue au précédent, $\langle\cdot\,,\cdot\rangle : X(k_\Omega)\times \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(X) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, de sorte que l'on peut définir $X(k_\Omega)^B \subset X(k_\Omega)$ pour un sous-groupe $B \subset \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(X)$, vérifiant $X(k) \subset \overline{X(k)} \subset X(k_\Omega)^B \subset X(k_\Omega)$ où l'adhérence est cette fois pour la topologie de produit direct sur $X(k_\Omega)$. Cela permet de définir l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible.

Cette obstruction de Brauer-Manin est fondamentale en géométrie arithmétique, et elle est au coeur d'une conjecture qui motive plusieurs des travaux présentés ici (voir [**CT03**], p. 174) :

***Conjecture 4.3* (Colliot-Thélène).** — *Soit X une k-variété projective lisse géométriquement intègre et rationnellement connexe.*

Alors $\overline{X(k)} = X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}}$, autrement dit les obstructions de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible sur X sont les seules.

Cette conjecture est encore largement ouverte à l'heure actuelle, malgré des progrès substantiels récents (voir notamment [**HW16**]). On pourra consulter le texte [**Wit16**] pour un état des lieux des travaux autour de cette conjecture.

En revanche, hors de la classe des variétés rationnellement connexes, on ne peut espérer que ces obstructions soient les seules : en 1999, Skorobogatov construit dans [**Sko99**] le premier exemple de variété X projective lisse géométriquement intègre (en l'occurrence une surface bielliptique) pour laquelle $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}} \neq \varnothing$ alors que $X(k) = \varnothing$.

À cette occasion, Skorobogatov propose un raffinement de l'obstruction de Brauer-Manin afin d'expliquer son contre-exemple (voir [**Sko99**], section 3) :

***Définition 4.4* (Obstruction de Brauer-Manin étale).** — Soit $f : Y \to X$ un torseur sous un k-groupe fini (étale) F.

On note $X(\mathbf{A}_k)^{f,\mathrm{Br}} := \bigcup_{[\sigma]\in H^1(k,F)} f^\sigma(X^\sigma(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}})$.

L'ensemble de Brauer-Manin étale est alors le sous-ensemble $X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét},\mathrm{Br}} \subset X(\mathbf{A}_k)$ défini par

$$X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét},\mathrm{Br}} := \bigcap_{\substack{f : Y \xrightarrow{F} X \\ F \text{fini}}} X(\mathbf{A}_k)^{f,\mathrm{Br}}\,.$$

Le fait que l'ensemble de Brauer-Manin contienne l'ensemble des points rationnels, joint aux propriétés de la torsion des X-torseurs, assure que l'on a les inclusions suivantes :

$$X(k) \subset \overline{X(k)} \subset X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét},\mathrm{Br}} \subset X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}} \subset X(\mathbf{A}_k)\,,$$

définissant ainsi une obstruction au principe de Hasse, dite obstruction de Brauer-Manin étale (voir par exemple [**CDX16**], proposition 6.4 pour une preuve de l'inclusion non triviale $\overline{X(k)} \subset X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét},\mathrm{Br}}$).

Une variante des obstructions précédentes a également été étudiée par Harari et Skorobogatov (voir par exemple [**HS02**]) :

***Définition 4.5* (Obstruction de descente).** — Soit $f : Y \to X$ un torseur sous un k-groupe linéaire G.

On note $X(\mathbf{A}_k)^f := \bigcup_{[\sigma]\in H^1(k,G)} f^\sigma(X^\sigma(\mathbf{A}_k))$.

L'ensemble de descente est alors le sous-ensemble $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc}} \subset X(\mathbf{A}_k)$ défini par

$$X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc}} := \bigcap_{\substack{f : Y \xrightarrow{G} X \\ G \text{ linéaire}}} X(\mathbf{A}_k)^f .$$

Là-encore, les propriétés élémentaires de la torsion des X-torseurs assurent que l'on a

$$X(k) \subset \overline{X(k)} \subset X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc}} \subset X(\mathbf{A}_k) ,$$

définissant par là-même une obstruction, dite obstruction de descente, au principe de Hasse pour X.

Cette dernière obstruction a le mérite de se prêter à des généralisations naturelles, ou plus précisément à des itérations. En effet, Poonen a proposé la définition suivante (voir [**Poo17**], section 8.5.2 et question 8.5.5) :

***Définition 4.6* (Obstruction de descente itérée).** — Soit $f : Y \to X$ un torseur sous un k-groupe linéaire G.

On note $X(\mathbf{A}_k)^{f,\mathrm{desc}} := \bigcup_{[\sigma]\in H^1(k,G)} f^\sigma(X^\sigma(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc}})$.

L'ensemble de descente itérée (ou de deuxième descente) de X est le sous-ensemble $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc},2} = X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc},\mathrm{desc}} \subset X(\mathbf{A}_k)$ défini par

$$X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc},2} := \bigcap_{\substack{f : Y \xrightarrow{G} X \\ G \text{ linéaire}}} X(\mathbf{A}_k)^{f,\mathrm{desc}} .$$

On a clairement

$$X(k) \subset \overline{X(k)} \subset X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc},2} \subset X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc}} \subset X(\mathbf{A}_k) ,$$

d'où une nouvelle obstruction, dite de deuxième descente, au principe de Hasse.

On laisse à la lectrice et au lecteur intéressés le soin de définir une obstruction de n-ième descente $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc},n}$, voire une obstruction de descente infinie $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc},\infty}$.

Une question naturelle se pose alors : celle de la comparaison des diverses obstructions introduites ci-dessus.

Manin, dans son texte fondateur [**Man71**], exhibe des exemples de variétés X telles que $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}} = \emptyset$ alors que $X(\mathbf{A}_k) \neq \emptyset$: certaines surfaces cubiques, ainsi que des torseurs sous des tores ou des variétés abéliennes.

Comme mentionné plus haut, Skorobogatov a construit dans son article [**Sko99**] un exemple important de surface bielliptique X telle que $X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét},\mathrm{Br}} = \emptyset$ alors que $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}} \neq \emptyset$.

En 2002, Harari défini dans [**Har02**] un ensemble $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc-conn}}$ contenant $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc}}$, par la formule

$$X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc-conn}} := \bigcap_{\substack{f : Y \xrightarrow{G} X \\ G \text{ linéaire } \textit{connexe}}} X(\mathbf{A}_k)^f .$$

Il montre dans cet article le résultat suivant, qui permet de voir l'obstruction de Brauer-Manin comme une certaine obstruction de descente :

Théorème 4.7 **(Harari).** — *Soit X une k-variété* quasi-projective *lisse géométriquement intègre.*

Alors $X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}} = X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc-conn}}$.

Remarque 4.8. — L'hypothèse de quasi-projectivité apparaît naturellement dans cet énoncé et dans certains énoncés qui suivent, puisque l'on a besoin de pouvoir comparer le groupe de Brauer cohomologique de X considéré ici avec le groupe de Brauer de X défini via les algèbres d'Azumaya sur X. On utilise donc le théorème de Gabber (voir [**dJ**]), d'où la présence de cette hypothèse de quasi-projectivité.

En 2009, des travaux de Skorobogatov ([**Sko09**]) et l'auteur ([**Dem09**]) montrent le résultat suivant, qui répond à une question de Poonen :

Théorème 4.9 **(D., Skorobogatov).** — *Soit X une variété projective lisse géométriquement intègre.*

Alors $X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét},\mathrm{Br}} = X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc}}$.

Cette égalité complète une construction importante de Poonen en 2010 dans son article [**Poo10**] permettant d'obtenir l'existence de variétés X projectives lisses géométriquement intègres explicites pour lesquelles l'obstruction de Brauer-Manin étale (resp. de descente) ne suffit pas à expliquer le défaut du principe de Hasse, i.e. telles que $X(k) = \varnothing$ alors que $X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét},\mathrm{Br}} = X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc}} \neq \varnothing$.

Le point clé de la preuve de l'inclusion $X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét},\mathrm{Br}} \subset X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc}}$ réside dans une proposition que l'on peut formuler ainsi en termes de cohomologie galoisienne (voir [**Dem09**], proposition 5) :

Proposition 4.10. — *Soit X une k-variété projective lisse géométriquement intègre. Soit $1 \to H \to G \to F \to 1$ une suite exacte de k-groupes algébriques, avec H connexe et F fini. Soit $f : Y \to X$ un torseur sous G et $Z := Y/H \to X$ le torseur sous F induit par f.*

Pour tout $[\sigma] \in H^1(k,F)$, si $Y^\sigma(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_1} \neq \varnothing$, alors $[\sigma] \in \mathrm{Im}(H^1(k,G) \to H^1(k,F))$.

La preuve de cette proposition utilise la théorie du H^2 non abélien de Giraud, en voyant l'obstruction à relever $[\sigma]$ dans $H^1(k,G)$ comme une classe de cohomologie galoisienne dans le H^2 d'un k-lien sur $\overline{H}$, puis les résultats de Borovoi sur l'abélianisation du H^2 non abélien, et le reste de la preuve consiste en un usage intensif de la théorie de la descente classique (pour des groupes abéliens) due à Colliot-Thélène et Sansuc (voir [**CTS87a**]).

Après les travaux de Skorobogatov et l'auteur, (au moins) deux questions relativement naturelles restaient ouvertes :

– l'extension de ces résultats aux variétés non projectives, en lien avec d'éventuelles applications à l'approximation forte ou au principe de Hasse pour les points entiers (par opposition à l'approximation faible et au principe de Hasse pour les points rationnels).

– l'étude des obstructions de descente itérées (sur des variétés projectives d'abord, puis plus générales).

Or il se révèle que ces deux questions sont intrinséquement liées. En effet, la définition même de l'obstruction de descente itérée sur une variété projective fait intervenir des ensembles de descente pour des variétés non nécessairement projectives (en l'occurrence des torseurs sous un groupe linéaire au-dessus d'une variété projective).

Ces deux questions ont été résolues en 2016-2017.

Et dans les deux cas, une étape cruciale est la généralisation de la proposition clé 4.10 au cas d'une variété ouverte. Dans le travail [**CDX16**] en collaboration avec Y. Cao et F. Xu, nous avons démontré cette version plus générale, en utilisant deux ingrédients qui n'étaient pas dans la version projective :

(1) la théorie de la descente ouverte, due à Harari et Skorobogatov dans [**HS13a**], qui étend la théorie classique de la descente due à Colliot-Thélène et Sansuc (voir [**CTS87a**] et [**Sko01**]) à des variétés ouvertes ;

(2) la théorie des gerbes de Giraud (voir [**Gir71**]), qui permet de donner une interprétation "géométrique" aux calculs de cocycles qui apparaissaient dans la version projective. Cette dernière interprétation a pour conséquence une comparaison plus aisée de deux classes de cohomologie naturellement associées à la situation.

Avec ces deux ingrédients supplémentaires, on démontre donc :

Proposition 4.11. — *Soit X une k-variété lisse géométriquement intègre. Soit $1 \to H \to G \to F \to 1$ une suite exacte de k-groupes algébriques, avec H connexe et F fini. Soit $f : Y \to X$ un torseur sous G et $Z := Y/H \to X$ le torseur sous F induit par f.*

Pour tout $[\sigma] \in H^1(k, F)$, si $Y^\sigma(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}_1} \neq \varnothing$, alors $[\sigma] \in \mathrm{Im}(H^1(k, G) \to H^1(k, F))$.

Ce résultat implique alors formellement, en suivant la preuve du cas projectif, le théorème :

Théorème 4.12. — *Soit X une variété lisse géométriquement intègre. Alors $X(\mathbf{A}_k)^{\text{ét},\mathrm{Br}} \subset X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc}}$, avec égalité si X est quasi-projective.*

Par ailleurs, la proposition 4.11 a été également exploitée par Balestrieri (voir [**Bal16**] et [**Bal18**]) et surtout par Cao, et c'est l'un des ingrédients du théorème suivant (voir [**Cao17**], corollaire 1.2) :

***Théorème 4.13* (Cao)**. — *Soit X une variété quasi-projective lisse géométriquement intègre. Alors*

$$X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc},\mathrm{desc}} = X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{desc}}.$$

En particulier, l'obstruction de descente itérée coincide avec l'obstruction de descente, et donc aussi avec l'obstruction de Brauer-Manin étale.

Remarque 4.14. — Plusieurs autres obstructions au principe de Hasse ont été proposées depuis l'article [**Poo10**], et il s'avère qu'elles sont essentiellement toutes équivalentes à l'obstruction de Brauer-Manin étale (et donc également à l'obstruction de descente). Une obstruction élégante au principe de Hasse a été par exemple construite par Harpaz et Schlank (voir [**HS13b**]), en utilisant la théorie de l'homotopie étale introduite initialement par Artin et Mazur dans [**AM69**]. L'un des résultats principaux de [**HS13b**] (en l'occurence le théorème 9.136) affirme exactement que cette nouvelle obstruction est équivalente à l'obstruction de Brauer-Manin étale.

CHAPITRE 5

ARITHMÉTIQUE DES ESPACES HOMOGÈNES DE GROUPES ALGÉBRIQUES

Dans toute cette partie, le corps de base k est un corps global. On s'intéresse à diverses propriétés arithmétiques des espaces homogènes : on peut citer par exemple le principe de Hasse, l'approximation faible, le principe de Hasse pour les points entiers, l'approximation forte, les obstructions de Brauer-Manin aux propriétés précédentes, ...

5.1. Équations multinormiques

Dans le travail [**DW14**] en commun avec D. Wei, on a considéré des équations dites multinormiques, à savoir de la forme

$$\prod_{i=1}^{n} N_{L_i/k}(z_i) = a \,, \tag{3}$$

où $a \in k^*$ et L_i/k sont des extensions finies séparables, contenues dans une clôture séparable $\bar{k}$ de k fixée dans toute cette partie. L'intersection et le compositum de telles extensions sont toujours considérés à l'intérieur de $\bar{k}$.

De telles équations apparaissent naturellement dans l'arithmétique des groupes algébriques de type A_n. Par exemple (voir [**PR10**], proposition 4.2), si l'on cherche à plonger un corps muni d'une involution dans une algèbre simple centrale munie d'une involution de seconde espèce, on aboutit naturellement à une équation multinormique (avec $n = 2$). Un autre exemple d'apparition de ces équations est la preuve simplifiée du principe de Hasse pour la cohomologie galoisienne des groupes semi-simples simplement connexes de type A_n extérieur (voir par exemple [**PR94**], chapitre VI).

On note X l'hypersurface affine définie par l'équation (3). Il est clair que X est un k-torseur sous le k-tore multinormique T défini par la suite exacte suivante :

$$0 \to T \to \prod_{i=1}^{n} R_{L_i/k}\mathbf{G}_m \xrightarrow{\prod_i N_{L_i/k}} \mathbf{G}_m \to 0 \,.$$

Le résultat classique de Sansuc et Voskresenskii (voir par exemple [**San81**], proposition 8.3 et théorème 8.12) assure que le défaut du principe de Hasse sur X est mesuré par le groupe fini $Ш^2(k, \widehat{T})$, alors que le défaut d'approximation faible sur X est mesuré par le groupe fini $Ш^2_\omega(k, \widehat{T})/Ш^2(k, \widehat{T})$ (on renvoie à la définition 3.30 pour les notations $Ш^i$ et $Ш^i_\omega$). Plus précisément, on dispose d'accouplements (coïncidant avec les accouplements de Brauer-Manin)

$$Ш^1(k, T) \times Ш^2(k, \widehat{T}) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

et

$$T(k_\Omega)/\overline{T(k)} \times Ш^2_\omega(k, \widehat{T})/Ш^2(k, \widehat{T}) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

qui sont des accouplements parfaits de groupes abéliens finis. Le premier correspond exactement à l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse pour les k-torseurs sous T, et le second à l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible pour le k-tore T. On rappelle en effet que pour tout k-torseur X sous T, le groupe $\mathrm{Br}_{\mathrm{a}}(X)$ s'identifie naturellement au groupe $H^2(k, \widehat{T})$, de sorte que le sous-groupe $Б_\omega(X)$ (resp. $Б(X)$) de $\mathrm{Br}_{\mathrm{a}}(X)$, formé des classes d'éléments de $\mathrm{Br_a}(X)$ qui sont nuls dans $\mathrm{Br_a}(X_v)$ pour presque toute place v de k (resp. pour toute place v de k), s'identifie via cet isomorphisme au sous-groupe $Ш^2_\omega(k, \widehat{T})$ (resp. $Ш^2(k, \widehat{T})$) de $H^2(k, \widehat{T})$.

Le cas particulier le plus simple des équations multinormiques est le cas $n = 1$ des extensions (et des tores) normiques, dont l'étude remonte au moins à Hasse lui-même.

Étant donnée une équation multinormique de la forme (3), on peut naturellement lui associer une équation normique de la forme

$$N_{F/k}(w) = a\,, \tag{4}$$

avec $F := \bigcap_i L_i$. La variété Y associée à cette équation est naturellement un torseur sous le k-tore normique $S := R^1_{F/k}\mathbf{G}_m$.

Les équations normiques étant mieux comprises que les équations multinormiques, on se demande à quel point l'arithmétique des équations multinormiques se ramène à celle des équations normiques.

On définit les notions suivantes :

Définition 5.1. — (1) On dit que les extensions $L_1, \dots, L_n$ de k vérifient le principe de multinorme si pour tout $a \in k^*$, l'équation (3) vérifie le principe de Hasse.

(2) On dit qu'une extension finie séparable F/k vérifie le principe de norme si pour tout $a \in k^*$, l'équation (4) vérifie le principe de Hasse.

Inspirés par les travaux de Prasad et Rapinchuk, Pollio et Rapinchuk montrent le théorème suivant (voir [**PR13**]) :

***Théorème 5.2* (Pollio-Rapinchuk)**. — *Si $n = 2$ et si $E_1 \cap E_2 = k$, où E_i est la clôture galoisienne de L_i/k, alors L_1, L_2 satisfont le principe de multinorme.*

À partir de ce résultat et après avoir calculé quelques exemples et contre-exemples, Pollio et Rapinchuk conjecturent la généralisation suivante dans le cas où les extensions ne sont pas linéairement disjointes (voir [**PR13**], section 4) :

***Conjecture 5.3* (Pollio-Rapinchuk)**. — *Si $n = 2$ et L_i/k sont des extensions galoisiennes, alors L_1, L_2 satisfont le principe de multinorme si et seulement si toute extension P/k contenue dans $L_1 \cap L_2$ satisfait le principe de norme (il pourrait même suffire que l'extension $L_1 \cap L_2$ de k satisfasse le principe de norme).*

Parmi les résultats obtenus dans l'article [**DW14**], on peut citer la réfutation de cette conjecture grâce à un contre-exemple explicite, et la preuve d'une version corrigée de ladite conjecture.

Avant de formuler la version "correcte" de la conjecture, on a besoin d'une variante de la définition 5.1 :

Définition 5.4. — (1) On dit que les extensions $L_1, \dots, L_n$ de k vérifient le principe de multinorme avec approximation faible si pour tout $a \in k^*$, l'équation (3) vérifie le principe de Hasse et l'approximation faible.

(2) On dit qu'une extension finie séparable F/k vérifie le principe de norme avec approximation faible si pour tout $a \in k^*$, l'équation (4) vérifie le principe de Hasse et l'approximation faible.

Expliquons maintenant la variante de la conjecture que l'on se propose de démontrer :

Conjecture 5.5. — *Si $n = 2$ et L_i/k sont des extensions galoisiennes, alors L_1, L_2 satisfont le principe de multinorme avec approximation faible si et seulement si toute extension P/k contenue dans $L_1 \cap L_2$ satisfait le principe de norme avec approximation faible (il pourrait même suffire que l'extension $L_1 \cap L_2$ de k satisfasse le principe de norme avec approximation faible).*

Remarquons ensuite que l'on peut généraliser le théorème 5.2 sous la forme suivante, qui permet d'avoir non seulement le principe de multinorme, mais aussi l'approximation faible dans le cas "linéairement disjoint" :

Théorème 5.6. — *Soient $L_1, \dots, L_n/k$ des extensions finies et séparables. On écrit $\{1, \dots, n\} = I \cup J$, avec $I \cap J = \varnothing$ et $I, J \neq \varnothing$. Soit L_I (resp. L_J) le compositum des corps L_i, $i \in I$ (resp. $i \in J$). On note E_I (resp. E_J) la clôture galoisienne de l'extension L_I/k (resp. L_J/k). Notons T le k-tore d'équation $\prod_{i=1}^n N_{L_i/k}(z_i) = 1$.*

Si $L_I \cap E_J = k$, alors

$$Ш^2_\omega(k, \widehat{T}) = 0 .$$

En particulier, sous ces hypothèses, pour tout $a \in k^*$, la k-variété définie par $\prod_{i=1}^n N_{L_i/k}(z_i) = a$ vérifie le principe de Hasse et l'approximation faible.

Remarque 5.7. — On trouve dans [**DW14**] des exemples explicites qui assurent qu'une hypothèse du type $L_I \cap L_J = k$ n'est pas suffisante : il est donc nécessaire que l'hypothèse fasse intervenir les clôtures galoisiennes des extensions. De même, on trouve des exemples qui montrent qu'une hypothèse du type $E_i \cap E_j = k$ pour tout $i \neq j$ n'est pas non plus suffisante.

Notons aussi que ce théorème a été utilisé par Harpaz, Skorobatov et Wittenberg dans leurs travaux (voir [**HSW14**]) sur les applications du théorème de Green-Tao-Ziegler (à propos de la conjecture généralisée de Hardy-Littlewood) à la méthode des fibrations. Ils utilisent (entre autres) le théorème 5.6 pour montrer le résultat suivant :

Théorème 5.8 **(Harpaz, Skorobogatov, Wittenberg)**. — *Soit $P(t) \in \mathbf{Q}[t]$ un polynôme scindé. Soient $L_1, \dots, L_n$, $n \geq 2$, des extensions finies de $\mathbf{Q}$ telles que $L_1/\mathbf{Q}$ soit abélienne et linéairement disjointe du compositum $L_2 \dots L_n$. Soit X une $\mathbf{Q}$-variété projective lisse géométriquement intègre munie d'un morphisme $\pi : X \to \mathbf{P}^1$ dont la fibre générique est birationnelle à la variété affine $\prod_{i=1}^n N_{L_i/k}(z_i) = P(t)$ sur $\mathbf{Q}(\mathbf{P}^1) = \mathbf{Q}(t)$.*

Alors X vérifie le principe de Hasse et l'approximation faible.

Revenons maintenant aux équations multinormiques proprement dites, et intéressons-nous aux cas où l'hypothèse sur l'intersection triviale n'est pas vérifiée. Dans ce cas, on montre la généralisation suivante du théorème 5.6 :

Théorème 5.9. — *Soient $L_1, \dots, L_n/k$ des extensions finies et séparables. On note $F := \bigcap_{i=1}^n L_i$ et on suppose F/k galoisienne. Notons T le k-tore d'équation $\prod_{i=1}^n N_{L_i/k}(z_i) = 1$ et S le k-tore d'équation $N_{F/k}(w) = 1$. On écrit $\{1, \dots, n\} = I \cup J$, avec $I \cap J = \varnothing$ et $I, J \neq \varnothing$. Soit F_i une extension de L_i telle que $\mathrm{Aut}_k(F_i) \to \mathrm{Aut}_k(F)$ soit surjective.*

Soit F_I (resp. F_J) le compositum des corps F_i, $i \in I$ (resp. $i \in J$). On note E_I (resp. E_J) la clôture galoisienne de l'extension F_I/F (resp. F_J/F).

Si $F_I \cap E_J = F$, alors

$$Ш^2_\omega(k, \widehat{S}) \xrightarrow{\sim} Ш^2_\omega(k, \widehat{T}) .$$

Remarque 5.10. — Notons que les énoncés et les preuves des théorèmes 5.6 et 5.9 restent valables si le corps de base k est un corps quelconque, en remplaçant les groupes $Ш^2_\omega$ par les groupes $Ш^2_{\omega,\mathrm{alg}}$ introduits à la définition 3.24.

On en déduit immédiatement le corollaire suivant, qui démontre en particulier la conjecture "corrigée" 5.5 :

Corollaire 5.11. — *Sous les hypothèses du théorème 5.9,*

(1) *Soit $a \in k^*$. Si la k-variété d'équation $\prod_{i=1}^n N_{L_i/k}(z_i) = a$ possède un k-point, alors l'approximation faible vaut pour cette équation si et seulement si elle vaut pour l'équation normique $N_{F/k}(w) = a$.*

(2) *Si le principe de Hasse et l'approximation faible sont vérifiés pour toutes les équations normiques $N_{F/k}(w) = a$ (pour tout $a \in k^*$), alors ils sont vérifiés pour les équations multinormiques $\prod_{i=1}^n N_{L_i/k}(z_i) = a$ (pour tout $a \in k^*$).*

La preuve du théorème 5.9 consiste en des calculs explicites en cohomologie galoisienne de groupes du type $Ш^i_\omega$, grâce notamment à la suite exacte naturelle de k-tores :

$$0 \to R \to T \to S \to 0\,,$$

où $R := R_{F/k}(T')$, avec T' le F-tore multinormique d'équation $\prod_{i=1}^n N_{L_i/F}(z_i) = 1$.

Ensuite, on propose un contre-exemple à la conjecture initiale 5.3 :

Exemple 5.12. — On note $k := \mathbf{Q}$, $L_1 := \mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt[4]{2})$ et $L_2 := \mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{7\sqrt{2}})$. Alors $F = L_1 \cap L_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{2})$. Alors l'équation $N_{L_1/k}(z_1) N_{L_2/k}(z_2) = 97$ est un contre-exemple au principe de Hasse, alors que $N_{F/k}(3 + \sqrt{2} + \sqrt{-2}) = 97$. C'est donc un contre-exemple à la conjecture 5.3.

On peut pour finir donner un argument géométrique heuristique justifiant pourquoi la conjecture 5.5 est vraie, et pourquoi la conjecture 5.3 est fausse. Géométriquement, la variété X d'équation $\prod_{i=1}^n N_{L_i/k}(z_i) = a$ est fibrée au-dessus de la variété Y d'équation $N_{F/k}(w) = a$, et le morphisme $\pi : X \to Y$ ainsi défini est clairement un X-torseur sous le k-tore R défini plus haut. Le théorème 5.6 assure que les fibres de π au-dessus des points rationnels de Y vérifient le principe de Hasse et l'approximation faible. On aimerait alors appliquer la méthode de fibration (comme expliquée par exemple dans la section 3 de [**CT92**]) pour déduire le principe de Hasse et/ou l'approximation faible pour X à partir des mêmes résultats pour Y.

En général, on ne peut pas déduire le principe de Hasse pour X en supposant uniquement le principe de Hasse sur Y (sachant le principe de Hasse et l'approximation faible sur les fibres de π). On a besoin d'une hypothèse de type "approximation faible sur Y". Cette heuristique est confirmée par le corollaire 5.11 et le contre-exemple 5.12. En revanche, on n'a pas réussi à transformer cette heuristique en une preuve géométrique du corollaire 5.11, le principal obstacle étant la non-propreté de la base Y (usuellement, la méthode de fibration suppose la variété de base Y propre ou vérifiant l'approximation forte, ce qui n'est pas le cas ici).

5.2. Principe de Hasse et approximation faible dans les espaces homogènes

Puisque les compactifications lisses des espaces homogènes de groupes linéaires connexes sur les corps de nombres sont des variétés rationnellement connexes, la conjecture 4.3 de Colliot-Thélène suggère que l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible devraient être les seules pour ces espaces.

Le cas des stabilisateurs connexes ou abéliens est un résultat classique dû à Borovoi (voir [**Bor96**], corollaire 2.5), que l'on rappelle ici (en se limitant au cas connexe) :

Théorème 5.13 **(Borovoi)**. — *Soient k un corps de nombres, G un k-groupe linéaire connexe et X un k-espace homogène de G à stabilisateurs connexes.*

Alors

$$\overline{X(k)} = X(k_\Omega)^{\text{Б}_\omega(X)} = X(k_\Omega)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(X)}\,,$$

où le groupe $\text{Б}_\omega(X)$ est défini au début de la partie 5.1.

On cherche donc à supprimer l'hypothèse de connexité dans cet enoncé.

5.2.1. Approximation très faible ; obstruction transcendante. — Dans cette partie, on montre deux résultats (très partiels) en direction de la conjecture de Colliot-Thélène pour les espaces homogènes, obtenu dans un travail [**DLN17**] en commun avec G. Lucchini Arteche et D. Neftin.

On introduit d'abord la définition suivante :

Définition 5.14. — Soit k un corps de nombres et X une k-variété lisse et géométriquement intègre.

Pour tout ensemble S de places de k, on dit que X vérifie l'approximation faible hors de S si $X(k)$ est dense dans $\prod_{v \notin S} X(k_v)$.

On dit que X vérifie l'approximation très faible s'il existe un ensemble fini S tel que X vérifie l'approximation faible hors de S.

Si H est un k-groupe fini, on dit que H vérifie l'approximation faible (resp. l'approximation faible hors de S, resp. l'approximation faible avec obstruction de Brauer-Manin) si pour tout plongement de H dans $\mathrm{SL}_{n,k}$, l'espace homogène $X := \mathrm{SL}_{n,k}/H$ vérifie la même propriété.

Remarquons alors que si l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation faible sur X est la seule et si le groupe $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(X)/\mathrm{Br}(k)$ est fini (ce qui est le cas par exemple pour les espaces homogènes), alors X vérifie l'approximation très faible. Cependant, dans cette situation, on ne connaît pas a priori l'ensemble fini S des mauvaises places pour X, à moins de connaître précisément le groupe $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(X)/\mathrm{Br}(k)$.

On rappelle également le proposition classique suivante, qui permet de relier l'approximation faible sur les espaces homogènes et les problèmes de type Grunwald en théorie inverse de Galois :

Proposition 5.15. — *Soit H un k-groupe algébrique plongé dans $\mathrm{SL}_{n,k}$, et notons $X := \mathrm{SL}_{n,k}/H$. Soit S un ensemble fini de places de k.*

Alors $X(k)$ est dense dans $\prod_{v\in S} X(k_v)$ si et seulement si l'application

$$H^1(k,H) \to \prod_{v\in S} H^1(k_v,H)$$

est surjective.

***Remarque 5.16* (Colliot-Thélène)**. — Cette proposition permet entre autres de montrer, dans le cas où le groupe H est un groupe fini constant, que si $X = \mathrm{SL}_{n,k}/H$ vérifie l'approximation très faible, alors H est groupe de Galois sur k, avec "contrôle de la ramification en un ensemble fini de places". En particulier, la conjecture 4.3 implique donc une réponse positive à une variante forte du problème inverse de Galois avec ramification prescrite, hors d'un ensemble fini de mauvaises places.

Les résultats connus avant ce travail à propos de la conjecture 4.3 dans le cas des espaces homogènes, et donc les généralisations du théorème 5.13 au cas des stabilisateurs non connexes, peuvent essentiellement se résumer ainsi :

- Si H est un k-groupe fini abélien, la suite de Poitou-Tate associée à H permet de montrer que H vérifie l'approximation faible avec obstruction de Brauer-Manin, et l'approximation faible hors de S, où S est formé des places de mauvaise réduction de H et des places divisant l'exposant de $H(\bar{k})$ (voir [**Neu73**]).
- Si $k = \mathbf{Q}$ et $H = \mathbf{Z}/8\mathbf{Z}$, Wang a montré que H ne vérifie pas l'approximation faible en la place 2 (voir [**Wan50**])
- Dans le cas des groupes constants résolubles, on dispose du théorème suivant dû à Neukirch (voir [**Neu79**]) :

  ***Théorème 5.17* (Neukirch)**. — *On note $\mu(k)$ l'ensemble des racines de l'unité dans k. Soit H un groupe constant résoluble tel que $(\mu(k), |H|) = 1$.*

  Alors H vérifie l'approximation faible.

  On peut vérifier dans ce cas (voir [**CT14**], corollaire 5.7) que le groupe de Brauer non ramifié de tout espace homogène $\mathrm{SL}_{n,k}/H$ associé à une représentation fidèle $H \to \mathrm{SL}_{n,k}$, est trivial, ce qui explique l'absence d'obstruction de Brauer-Manin.

  Remarque 5.18. — Il est intéressant de noter que le théorème 5.17 implique non seulement que tout groupe fini résoluble d'ordre impair est groupe de Galois sur $\mathbf{Q}$, avec "ramification prescrite en un ensemble fini de places", mais également que pour tout corps de nombres k, tout groupe fini résoluble d'ordre impair (et pas seulement d'ordre premier à $\mu(k)$) est groupe de Galois sur k.

- Harari (voir [**Har07**]) a montré le résultat partiel suivant

***Théorème 5.19* (Harari).** — *Soient k un corps de nombres et $H := A_1 \rtimes (A_2 \rtimes \cdots \rtimes A_n)$ un produit semi-direct itéré de k-groupes abéliens.*

Alors H vérifie l'approximation faible avec obstruction de Brauer-Manin.

Dans ce résultat, on n'a pas de contrôle sur le sous-groupe de $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(X)$ nécessaire à mesurer le défaut d'approximation faible, ni sur l'ensemble des mauvaises places hors desquelles l'approximation faible est vérifiée.

– Dans ma thèse (voir [**Dem10**]), j'ai construit un exemple de p-groupe H montrant que le sous-groupe $Б_\omega(X) \subset \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(X)/\mathrm{Br}(k)$ ne suffit pas à expliquer le défaut d'approximation faible sur X, contrairement au cas du théorème 5.13. Dans cet exemple, l'obstruction de Brauer-Manin algébrique est la seule pour X, i.e. il suffit de remplacer $Б_\omega(X)$ par $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}a}(X)$.

– Lucchini Arteche (voir [**Luc14**]) a étendu le théorème 5.17 de Neukirch au cas des groupes résolubles non constants, avec une hypothèse analogue sur les racines de l'unité présentes dans k.

Dans un premier temps, on cherche à préciser le théorème 5.19 de Harari en déterminant explicitement un ensemble suffisamment petit de mauvaises places, dans le cas où $H = A_1 \rtimes (A_2 \rtimes \cdots \rtimes A_n)$. On montre le résultat suivant :

***Théorème 5.20*.** — *Soit k un corps de nombres, H un k-groupe fini qui est un produit semi-direct itéré de k-groupes abéliens, i.e. $H = A_1 \rtimes (A_2 \rtimes \cdots \rtimes A_n)$.*

Soit L/k une extension finie déployant H et T_H l'ensemble formé des places de k qui divisent $|H|$ et de celles qui sont ramifiées dans L/k.

Alors H vérifie l'approximation faible hors de T_H.

***Remarque 5.21*.** — La classe des groupes constants qui sont de tels produits semi-directs contient par exemple les groupes diédraux, les groupes d'Heisenberg d'ordre p^3, les p-sous-groupes de Sylow des groupes symétriques, de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F})$ et des autres groupes classiques sur $\mathbf{F}$, où $\mathbf{F}$ est un corps fini de caractéristique différente de p.

La preuve du théorème 5.20 se fait naturellement par dévissage, et on montre en fait un résultat un peu plus fort, disant essentiellement que pour un produit semi-direct $E = A \rtimes H$ de k-groupes, avec A abélien, si H vérifie l'approximation faible hors de l'ensemble T_H, alors E vérifie l'approximation faible hors de T_E. La preuve de ce dernier énoncé consiste en une chasse au diagramme pour la cohomologie non abélienne, avec deux ingrédients arithmétiques : la suite de Poitou-Tate pour les formes tordues du groupe A, et la proposition ci-dessous qui affirme en susbstance que pour un groupe H donné et $v \notin T_H$, il existe une infinité de places w telles que $H^1(k_w, H) \cong H^1(k_v, H)$.

Pour énoncer précisément cette proposition, on introduit les notations suivantes : si v est une place finie de k, on note Γ_v le groupe de Galois de l'extension maximale modérément ramifiée de k_v, et $T_v \subset \Gamma_v$ le sous-groupe d'inertie modérée. On rappelle que T_v est un sous-groupe distingué procyclique, et on en note $\tau_v \in T_v$ un générateur. Le quotient Γ_v/T_v est isomorphe à $\widehat{\mathbf{Z}}$ et il est engendré par un relèvement $\bar{\sigma}_v$ du Frobenius. On note σ_v un relevé de $\bar{\sigma}_v$ dans Γ_v. Si v est une place archimédienne, σ_v désigne le générateur du groupe de Galois absolu de k_v, et on pose $\tau_v = 1$, $\Gamma_v = \Gamma_{k_v}$ et $T_v := \{1\}$. On peut alors énoncer la proposition promise :

***Proposition 5.22*.** — *Soit H un k-groupe fini d'ordre n, L/k une extension galoisienne déployant H et $v \in \Omega_k$.*

On suppose que v est archimédienne, ou alors que v est finie, non ramifiée dans L/k et ne divisant pas n.

Alors il existe une infinité de places $w \in \Omega_k$ telles que

(1) *les groupes de décomposition de v et w dans* $\mathrm{Gal}(L/k)$ *sont conjugués.*

(2) *il existe un morphisme surjectif $\phi : \Gamma_w/T_w^n \to \Gamma_v/T_v^n$ donné par $\phi(\sigma_w) = \sigma_v$ et $\phi(\tau_w) = \tau_v$. De plus, ϕ est un isomorphisme si v est finie.*

En particulier, le morphisme ϕ induit une application injective $\phi^* : H^1(k_v, H) \to H^1(k_w, H)$, qui est une bijection si v est finie.

La preuve de cette proposition repose notamment sur le théorème de Chebotarev et sur la structure du groupe de Galois modéré des corps locaux (voir par exemple [**NSW08**], section 7.5).

Dans un second temps, on cherche à préciser quel sous-quotient de $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(X)$ est nécessaire pour expliquer le défaut d'approximation faible dans les espaces homogènes. Si les stabilisateurs sont connexes, on voit (voir théorème 3.26 et théorème 3.31) que $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(X)/\mathrm{Br}(k) = \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}a}(X) = Б_\omega(X)$. En revanche, on sait que ces trois groupes ne coïncident pas en général pour les espaces homogènes, mais on a seulement les inclusions $Б_\omega(X) \subset \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}a}(X) \subset \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(X)/\mathrm{Br}(k)$, ce qui légitime la question de savoir quel "morceau" du groupe de Brauer est nécessaire pour expliquer le défaut d'approximation faible sur X.

On a déjà mentionné un exemple d'espace homogène où $Б_\omega(X) \subsetneq \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}a}(X)$ et où $\overline{X(k)} = X(k_\Omega)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}a}(X)} \subsetneq X(k_\Omega)^{Б_\omega(X)}$, assurant que le groupe $Б_\omega(X)$ ne suffit pas (voir [**Dem10**], section 6, propositions 1 et 2).

Reste donc ouverte la question de la possibilité d'une obstruction de Brauer-Manin transcendante, i.e. d'un exemple tel que $X(k_\Omega)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(X)} \subsetneq X(k_\Omega)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}1}(X)}$. On apporte la réponse à cette question dans le théorème suivant. Avant de l'énoncer, on définit, pour tout groupe fini H et tout H-module fini A, le groupe

$$Ш^1_{\mathrm{bic}}(H, A) := \mathrm{Ker}\left(H^1(H, A) \to \prod_{B \subset H \text{ bicyclique}} H^1(B, A)\right),$$

où B décrit les sous-groupes bicycliques de H.

Théorème 5.23. — *Soit H un groupe fini, k un corps de nombres et S un ensemble fini de places de k. Soit A un H-module fini et $E := A \rtimes H$, vu comme un k-groupe constant.*

On suppose :

1. *k contient les racines e-ièmes de l'unité, où $e = \exp(A)$ est l'exposant du groupe A.*
2. *il existe $v_0 \in S$ tel que H est groupe de Galois sur k_{v_0}.*
3. *S contient toutes les places de k divisant $|H|$.*
4. *$Ш^1_{\mathrm{bic}}(H, \widehat{A}) \neq 0$.*

Alors l'application $H^1(k, E) \to \prod_{v \in S} H^1(k_v, E)$ n'est pas surjective.

Corollaire 5.24. — *Si on suppose en outre que k contient les racines $\exp(E)$-ièmes de l'unité, alors il y a une obstruction de Brauer-Manin transcendante à l'approximation faible sur $X = \mathrm{SL}_{n,k}/E$, i.e. $X(k_\Omega)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(X)} \subsetneq X(k_\Omega)^{\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}1}(X)}$.*

Exemple 5.25. — Soit p est un nombre premier et $H := (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^3$. Soit A le dual de l'idéal d'augmentation de $(\mathbf{Z}/p^3\mathbf{Z})[H]$. On dispose d'une action naturelle de H sur A et on note $E := A \rtimes H$. On considère $k := \mathbf{Q}(\zeta_{p^4})$ et S le singleton formé de l'unique place de k divisant p. Alors les hypothèses du théorème sont vérifiées, et par conséquent le groupe E fournit le premier exemple d'obstruction transcendante à l'approximation faible sur un espace homogène. En effet, dans le résultat de Borovoi (voir théorème 5.13), le groupe de Brauer algébrique suffit à expliquer le défaut d'approximation faible si les stabilisateurs sont connexes.

La preuve du théorème 5.23 se déroule suivant une chasse au diagramme non commutative, après avoir comparé le groupe $Ш^1_{\mathrm{bic}}(H, \widehat{A})$ aux groupes $Ш^1_S(k, \widehat{A^c})$ (définis comme les sous-groupes des groupes $H^1(k, \widehat{A^c})$ formés des éléments nuls en toute place $v \notin S$), pour certains $c \in Z^1(k, H)$. On peut ainsi construire, à partir de la non-trivialité de $Ш^1_{\mathrm{bic}}(H, \widehat{A})$, des éléments non triviaux dans les groupes $Ш^1_S(k, \widehat{A^c})$, que l'on identifie avec des obstructions de Brauer-Manin à l'approximation faible pour les k-groupes tordus A^c. Enfin, on déduit de ces obstructions pour A^c une obstruction à l'approximation faible sur E. On peut remarquer que cette chasse au diagramme correspond essentiellement à une variante d'une méthode de fibration.

5.2.2. Réduction aux stabilisateurs finis. — On revient au théorème 3.37, et on se pose maintenant la question de savoir quelles sont les propriétés P (de nature arithmétique) des espaces homogènes qui sont de *bonnes propriétés des espaces homogènes*. On démontre notamment dans [**DL17**] la proposition suivante :

Proposition 5.26. — *Les propriétés suivantes sont de bonnes propriétés des espaces homogènes :*

(1) *le principe de Hasse avec approximation réelle (k corps de nombres).*

(2) *l'approximation faible (k corps de nombres).*

(3) *l'approximation faible hors de S, avec S ensemble de places non archimédiennes (k corps de nombres).*

(4) *le principe de Hasse avec obstruction de Brauer-Manin et approximation réelle (k corps de nombres).*

(5) *l'approximation faible avec obstruction de Brauer-Manin (k corps de nombres).*

(6) *le principe de Hasse et l'approximation faible, tous deux avec obsruction de Brauer-Manin (k corps de nombres).*

(7) *l'existence d'un point rationnel (k bon corps de dimension cohomologique 2).*

La preuve de cette proposition utilise les ingrédients suivants :

- dans un corps local ou global, la propriété "avoir un point rationnel" est un invariant birationnel des espaces homogènes. C'est par exemple une conséquence du théorème de Lang-Nishimura et d'un résultat de Florence (voir [**Flo06**], théorème 5.7).
- pour les espaces homogènes, le quotient $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(X)/\mathrm{Br}(k)$ est un invariant birationnel et c'est un groupe fini. Ces deux premiers points assurent la condition (1) de la définition 3.36.
- la condition (2) de la définition 3.36 est une conséquence de la fonctorialité de l'obstruction de Brauer-Manin.
- la proposition 3.4 de [**Bor96**] assure que sous les hypothèses de la condition (3) de la définition 3.36, les fibres de $X \to Y$ vérifient le principe de Hasse, l'approximation faible, et possèdent des points en toute place finie. Cela permet d'appliquer facilement la méthode des fibrations au morphisme $X \to Y$ et d'en déduire la condition (3).

En particulier, la proposition implique le corollaire suivant :

Corollaire 5.27. — *Si l'obstruction de Brauer-Manin est la seule obstruction au principe de Hasse et à l'approximation faible pour tout espace homogène de $\mathrm{SL}_{n,k}$ à stabilisateur fini, alors il en va de même pour tout espace homogène d'un groupe linéaire connexe.*

Remarque 5.28. — On ne peut remplacer dans l'énoncé précédent "principe de Hasse et approximation faible" par le "principe de Hasse" seul. On peut en revanche l'affaiblir en remplaçant cette propriété par "principe de Hasse avec approximation réelle".

Le théorème 3.37 a également été utilisé récemment par Harpaz et Wittenberg. Pour énoncer leur résultat, on a besoin de quelques rappels sur les zéro-cycles. Si X est une k-variété propre lisse et géométriquement intègre, on note $\mathrm{CH}_0(X)$ le groupe de Chow des zéro-cycles sur X définis sur k, et on dispose d'un accouplement de Brauer-Manin pour les zéro-cycles de la forme

$$\left(\prod_{v\in\Omega} \mathrm{CH}_0(X \times_k k_v)\right) \times \mathrm{Br}(X) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}\,.$$

On peut alors formuler la conjecture suivante :

***Conjecture 5.29* (Colliot-Thélène, Kato, Saito).** — *Soit X une k-variété propre lisse et géométriquement intègre. S'il existe une famille $(z_v) \in \prod_{v\in\Omega} \mathrm{CH}_0(X \times_k k_v)$ orthogonale à $\mathrm{Br}(X)$, telle que $\deg(z_v) = 1$ pour tout v, alors X possède un zéro-cycle de degré 1.*

Remarque 5.30. — Cette conjecture est en fait une conséquence d'une conjecture plus forte, appelée conjecture (E), qui affirme que sous ces mêmes hypothèses, toute famille locale $(z_v) \in \prod_{v\in\Omega} \mathrm{CH}_0(X \times_k k_v)$ orthogonale à $\mathrm{Br}(X)$ est "approximable" par un zéro-cycle global $z \in \mathrm{CH}_0(X)$. Pour un énoncé précis de cette conjecture (E), on renvoie à [**Wit12**], section 1.1. Cette conjecture (E) est en quelque sorte l'analogue de la conjecture 4.3 pour les zéro-cycles, sans hypothèse de connexité rationnelle dans ce contexte.

Dans leur travail récent [**HW17**], Harpaz et Wittenberg montrent essentiellement qu'une variante de la conjecture (E) pour les zéro-cycles sur les espaces homogènes est une bonne propriété des espaces homogènes au sens de la définition 3.36. Leur résultat principal consiste à montrer la conjecture (E) pour les espaces homogènes de $\mathrm{SL}_{n,k}$ à stabilisateurs finis : la preuve de ce cas particulier utilise une réduction au cas des stabilisateurs résolubles, puis la théorie de la descente usuelle de Colliot-Thélène et Sansuc, et enfin la méthode des fibrations développée dans [**HW16**]. Puis, en appliquant le corollaire 3.38, ils en déduisent le théorème suivant :

***Théorème 5.31* (Harpaz-Wittenberg).** — *La conjecture (E) (et donc la conjecture 5.29) est vraie pour les (compactifications lisses des) espaces homogènes de groupes algébriques linéaires connexes.*

Dans le même article, ces deux auteurs montrent également un résultat important pour les points rationnels sur les espaces homogènes, améliorant nettement le théorème 5.17 de Neukirch dans le cas des groupes finis nilpotents :

***Théorème 5.32* (Harpaz-Wittenberg).** — *Soit X un espace homogène d'un groupe semi-simple simplement connexe sur k, à stabilisateurs finis nilpotents.*

Alors les obstructions de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible sur X sont les seules. Autrement dit, toute compactification lisse de X vérifie la conjecture 4.3.

Remarque 5.33. — (1) Ce dernier théorème implique par exemple que sur un corps de nombres k, tout groupe fini nilpotent vérifie l'approximation très faible. C'est une généralisation de la version nilpotente du théorème 5.17 de Neukirch (voir [**Neu73**] pour cette version) et du théorème de Shafarevich sur le problème inverse de Galois dans le cas particulier des groupes nilpotents (voir [**NSW08**], théorème 9.6.1, pour le théorème de Shafarevich dans le cas résoluble).

(2) À l'heure actuelle, la conjecture 4.3 dans le cas des stabilisateurs finis résolubles (et a forciori dans le cas des stabilisateurs finis quelconques) reste ouverte.

5.3. Approximation forte dans les espaces homogènes

Dans cette partie, on s'intéresse à des variantes entières des problèmes de points rationnels traités dans les sections précédentes. En particulier, on étudie la question du défaut du principe de Hasse entier et de l'approximation forte dans un espace homogène d'un groupe algébrique connexe.

On rappelle la définition suivante :

Définition 5.34. — Soit k un corps de nombres et X une k-variété lisse et géométriquement intègre.

On dit que X vérifie l'approximation forte hors de S avec obstruction de Brauer-Manin si $X(k)$ est dense dans $p_S(X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}})$, où $p_S : X(\mathbf{A}_k) \to X(\mathbf{A}_k^S)$ est la projection naturelle de l'ensemble des points adéliques de X vers l'ensemble des points adéliques de X hors de S.

Si on note $X(\mathbf{A}_k)_\bullet$ le produit restreint des $X(k_v)$ pour v finie, et des $\pi_0(X(k_v))$ pour v infinie, on peut définir l'approximation forte "finie" en demandant seulement la densité de $X(k)$ dans $p_S(X(\mathbf{A}_k)_\bullet^{\mathrm{Br}}) \subset X(\mathbf{A}_k^S)_\bullet$.

Historiquement, la question de l'approximation forte dans le contexte des espaces homogènes a d'abord été étudiée dans le cas des variétés abéliennes, pour lesquelles approximations faible et forte coïncident. Pour les variétés abéliennes, la suite exacte duale de Cassels-Tate (voir [**Tat63**] ou [**Mil06**], I.6.14) correctement interprétée (voir par exemple [**Wan96**], théorème 1.1) apporte une réponse complète au problème de l'approximation forte (sous l'hypothèse de finitude du groupe de Tate-Shafarevich) :

Théorème 5.35 **(Cassels, Tate, Wang)**. — *Soit J une variété abélienne telle que $Ш^1(k, J)$ soit fini.*

Alors $J(k)$ est dense dans $J(\mathbf{A}_k)_\bullet^{\mathrm{Br}_1(J)}$.

Autrement dit, avec les notations de la définition 5.34, J vérifie l'approximation forte finie (avec $S = \varnothing$) avec obstruction de Brauer-Manin algébrique.

Il est intéressant de remarquer ici que l'obstruction de Brauer-Manin algébrique suffit pour les variétés abéliennes, alors que leur groupe de Brauer contient en général des éléments transcendants : ceux-ci ne contribuent donc pas à l'obstruction de Brauer-Manin. Un résultat récent de Creutz démontre l'absence d'obstruction de Brauer-Manin transcendante dans ce contexte sans supposer la finitude du groupe de Tate-Shafarevich (voir [**Cre17**], Theorem 1).

Dans le contexte des groupes algébriques linéaires, le cas des groupes semi-simples simplement connexes remonte à Kneser et Platonov (voir [**Kne66**] et [**Pla69**]) : il s'agit du fameux théorème d'approximation forte, que l'on rappelle ici.

Théorème 5.36 **(Kneser, Platonov)**. — *Soit G un k-groupe semi-simple simplement connexe. Soit S un ensemble fini de places de k.*

On suppose que pour tout facteur presque k-simple G' de G, le groupe $\prod_{v \in S} G'(k_v)$ n'est pas compact (en particulier, S est non vide).

Alors $G(k)$ est dense dans $G(\mathbf{A}_k^S)$; autrement dit, G vérifie l'approximation forte hors de S.

On peut d'ailleurs vérifier que le groupe de Brauer d'un tel groupe G est trivial.

Le cas des tores, et plus généralement celui des variétés semi-abéliennes, est plus récent et est dû à Harari (voir [**Har08**]), et sa preuve repose sur une généralisation de la suite de Cassels-Tate (et de celle de Poitou-Tate pour les tores) au cas des variétés semi-abéliennes et plus généralement des 1-motifs :

Théorème 5.37 **(Harari)**. — *Soit S une k-variété semi-abélienne. On suppose que $Ш^1(k, S^{\mathrm{ab}})$ est fini.*

Alors $S(k)$ est dense dans $S(\mathbf{A}_k)_\bullet^{\mathrm{Br}_1(S)}$.

Autrement dit, S vérifie l'approximation forte finie (avec $S = \varnothing$) avec obstruction de Brauer-Manin algébrique.

Comme dans le cas des variétés abéliennes, pour un k-tore T, le groupe de Brauer contient en général des éléments transcendants, mais ceux-ci ne contribuent pas à l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation forte.

On peut citer également les travaux de Colliot-Thélène et Xu (voir [**CTX09**]) concernant certains espaces homogènes de groupes semi-simples simplement connexes, à stabilisateurs connexes ou abéliens finis : cela contient par exemple le cas des quadriques affines de dimension ≥ 2. On peut citer par exemple l'énoncé suivant :

Théorème 5.38 **(Colliot-Thélène, Xu)**. — *Soit G un groupe semi-simple simplement connexe et $H \subset G$ un sous-groupe connexe (resp. fini commutatif).*

On suppose que G vérifie l'approximation forte hors de S (voir théorème 5.36).

Alors $X := G/H$ vérifie l'approximation forte hors de S avec obstruction de Brauer-Manin (resp. obstruction de Brauer-Manin algébrique).

A priori, il peut y avoir une obstruction de Brauer-Manin transcendante dans le cas des stabilisateurs connexes. Pour un exemple explicite, voir remarque 5.42, (2).

On se pose maintenant la question d'étendre ces différents résultats au cas d'un espace homogène général $X = G/H$, avec G connexe et H quelconque.

5.3.1. Stabilisateurs connexes : approche cohomologique. — Dans ma thèse et dans l'année qui a suivi, j'ai d'abord obtenu une description explicite du défaut d'approximation forte d'abord dans un groupe linéaire connexe quelconque (voir [**Dem11a**]), puis dans un espace homogène à stabilisateurs connexes (voir [**Dem13**]), en utilisant des théorèmes de dualité pour des complexes de tores et des techniques d'abélianisation de la cohomologie galoisienne. On rappelle ici brièvement les grandes lignes de cette approche (pour davantage de détails, on pourra consulter [**Dem13**]).

Soit k un corps de caractéristique nulle.

Soit G un k-groupe connexe. Si G est linéaire, Borovoi associe (dans ses travaux [**Bor98**] et [**Bor93**]) au groupe G un complexe de k-tores de longueur 2 de la forme $[T^{\mathrm{sc}} \to T]$, où T est un tore maximal de G et T^{sc} un tore maximal de G^{sc}, choisis de façon compatible. Borovoi définit ensuite les groupes de cohomologie abélianisée de G, notés $H^i_{\mathrm{ab}}(k,G)$, comme les groupes d'hypercohomologie galoisienne de ce complexe de k-tores. On dispose d'applications naturelles $H^i(k,G) \to H^i_{\mathrm{ab}}(k,G)$ pour $i = 0,1,2$, définies à l'aide de cocycles et de la cohomologie du module croisé $[G^{\mathrm{sc}} \to G^{\mathrm{red}}]$.

On peut généraliser sans difficultés les constructions de Borovoi au cas d'un groupe connexe pas forcément linéaire, en remplaçant le k-tore T par une sous-variété semi-abélienne maximale SA_G de G.

On peut aussi étendre ces définitions à des schémas en groupes réductifs sur une base quelconque S.

En revanche, pour étendre ces constructions au cas d'un espace homogène $X = G/H$, dans le but d'obtenir une application naturelle analogue $X(k) \to H^0_{\mathrm{ab}}(k,X)$, on a besoin d'une compréhension plus géométrique des applications de Borovoi. Cette interprétation géométrique est fournie par la théorie des gerbes et des torseurs sous un gr-champ, due entre autres à Giraud et Breen (voir [**Gir71**] et [**Bre90**] par exemple), et elle permet de généraliser des idées de Labesse et Breen concernant la cohomologie d'un morphisme de modules croisés (voir la notion d'ensemble croisé dans [**Lab99**]).

En effet, étant donné un module croisé $M = [F \to G]$ sur un site S, on peut lui associer fonctoriellement un gr-champ $\mathscr{M}$ sur S (voir [**Bre90**]). En quelques mots, un gr-champ (encore appelé champ en 2-groupes, ou champ en gr-catégories) sur S est un S-champ $\mathscr{G}$ muni d'une loi de composition, i.e. d'un morphisme de S-champs $\mathscr{G} \times \mathscr{G} \to \mathscr{G}$, avec la donnée d'inverses et celle d'un élément neutre, vérifiant des compatibilités naturelles (voir [**Bre90**] pour davantage de détails).

À la notion de gr-champ est associée la notion de torseur sous un gr-champ (un tel torseur est notamment un champ sur S muni d'une action dudit gr-champ), et de tels torseurs sont classifiés par le premier groupe de cohomologie du gr-champ. Si maintenant $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ est un morphisme de gr-champs, on dispose d'une notion de f-torseur, qui est la donnée d'un torseur $\mathscr{P}$ sous $\mathscr{M}$ muni d'une trivialisation du torseur $f_* \mathscr{P}$ sous $\mathscr{N}$. Cela permet de définir un ensemble de cohomologie $H^0(S, [\mathscr{M} \xrightarrow{f} \mathscr{N}])$ classifiant les f-torseurs.

Dans le cas particulier où f est un morphisme de gr-champs *tressés* (une certaine hypothèse de commutativité sur les lois de groupes sur $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$), on peut munir l'ensemble $H^0(S, [\mathscr{M} \xrightarrow{f} \mathscr{N}])$ d'une structure de groupe naturelle. Ce groupe est même commutatif si les gr-champs sont supposés de Picard, ce qui est le cas par exemple si les gr-champs considérés proviennent de modules croisés du type $[G^{\mathrm{sc}} \to G]$ mentionné plus haut (et si f provient d'un morphisme de schémas en groupes).

Ces considérations générales permettent d'associer, sous certaines hypothèses techniques, à un morphisme de schémas en groupes (lisses connexes séparés de présentation finie) sur un schéma S

$$f : H \to G\,,$$

un complexe (de longueur 3) de S-schémas en groupes commutatifs C_f et une application d'abélianisation

$$H^0(S, [H \xrightarrow{f} G]) \to H^0_{\mathrm{ab}}(S, [H \xrightarrow{f} G]) := \mathbf{H}^0(S, C_f)\,,$$

qui étendent les constructions de Borovoi dans les cas extrêmes (S est le spectre d'un corps de caractéristique nulle et H ou G est trivial). En particulier, si S est le spectre d'un corps de caractéristique nulle, le complexe C_f est naturellement quasi-isomorphe au complexe de variétés semi-abéliennes suivant :

$$[T_{H^{\mathrm{sc}}} \to \mathrm{SA}_H \oplus T_{G^{\mathrm{sc}}} \to \mathrm{SA}_G]\,,$$

où les tores maximaux et les sous-variétés semi-abéliennes maximales de H, H^{sc}, G, G^{sc} ont été choisis de façon compatibles, comme à la remarque 3.23.

On démontre ensuite des théorèmes de dualité pour certains complexes C de 1-motifs de longueur 3 sur un corps de nombres k (incluant les complexes de la forme ci-dessus) et notamment une suite exacte de Poitou-Tate :

$$\mathbf{H}^0(k, C)^\wedge \to \mathbf{P}^0(k, C)^\wedge \to \left(\mathbf{H}^0(k, \widehat{C})\right)^D \to Ш^0(k, \widehat{C})^D \to 0\,, \tag{5}$$

où $\widehat{C}$ est le dual du complexe C, $\mathbf{P}^0(k, C)$ est le produit restreint des $\mathbf{H}^0(k_v, C)$ pour v finie, et des groupes $\widehat{\mathbf{H}}^0(k_v, C)$ si v est infinie, $A^\wedge$ désigne le complété profini d'un groupe A et $B^D := \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.}}(B, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ pour tout groupe topologique B.

On montre ensuite que l'on peut remplacer dans la suite précédente $\mathbf{H}^0(k, C)^\wedge$ (resp. $\mathbf{P}^0(k, C)^\wedge$) par l'adhérence de $\mathbf{H}^0(k, C)$ dans $\mathbf{P}^0(k, C)$ (resp. par $\mathbf{P}^0(k, C)$).

Ensuite, dans le cas où f est un morphisme injectif, on note $X := G/f(H)$, $C_X := C_f$, et on démontre que les applications $X(k) \to H^0_{\mathrm{ab}}(k, X) := \mathbf{H}^0(k, C_X)$ et $X(\mathbf{A}_k)_\bullet \to \mathbf{P}^0(k, C_X)$ satisfont de bonnes propriétés, pour déduire ensuite du cas des groupes semi-simples simplement connexes (voir théorème 5.36) et de la suite de Poitou-Tate (5) le théorème suivant :

Théorème 5.39. — *Soit k un corps de nombres, G un k-groupe connexe, H un k-sous-groupe linéaire connexe de G. On pose $X := G/H$. On suppose que G^{sc} vérifie les hypothèses du théorème 5.36 pour S_0 et que $Ш^1(k, G^{\mathrm{ab}})$ est fini.*

Alors il existe une application naturelle (surjective si G est linéaire) $\theta : X(\mathbf{A}_k)_\bullet \to \left(\mathbf{H}^0(k, \widehat{C}_X)/Ш^0(k, \widehat{C}_X)\right)^D$, dont le noyau est exactement l'adhérence de $G^{\mathrm{scu}}_{S_0} \cdot X(k)$ dans $X(\mathbf{A}_k)_\bullet$.

Remarque 5.40. — (1) On peut reformuler cet énoncé en disant que l'on dispose d'une suite exacte naturelle d'ensembles pointés :

$$1 \to \overline{G^{\mathrm{scu}}_{S_0} \cdot X(k)} \to X(\mathbf{A}_k)_\bullet \xrightarrow{\theta} \left(\mathbf{H}^0(k, \widehat{C}_X)/Ш^0(k, \widehat{C}_X)\right)^D\,.$$

(2) Le théorème 3.22 assure que le groupe $\mathbf{H}^0(k, \widehat{C}_X)/Ш^0(k, \widehat{C}_X)$ s'identifie au quotient du groupe $\mathrm{Br}_1(X, G)$ par le sous-groupe formé des éléments localement constants, donc on peut remplacer dans la suite exacte précédente le groupe de droite par le dual de ce sous-quotient de $\mathrm{Br}(X)$.

(3) On peut montrer un résultat analogue si le stabilisateur H est supposé linéaire commutatif (pas forcément connexe), auquel cas le groupe de Brauer algébrique $\mathrm{Br}_1(X)$ suffit.

Ce résultat pose la question naturelle de savoir si l'on peut remplacer dans le théorème 5.39 l'accouplement (défini via l'application d'abélianisation de X et le cup-produit local pour C_X et $\widehat{C}_X$)

$$X(\mathbf{A}_k)_\bullet \times \mathbf{H}^0(k, \widehat{C}_X) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

par l'accouplement de Brauer-Manin

$$X(\mathbf{A}_k)_\bullet \times \mathrm{Br}_1(X,G) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z},$$

afin de montrer que l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation forte sur X est la seule.

On aimerait également avoir une preuve purement géométrique d'une tel résultat. C'est l'objet de la section qui suit.

5.3.2. Stabilisateurs connexes : approche géométrique. — Dans un travail en commun avec M. Borovoi (voir [**BD13**]), on établit que les espaces homogènes à stabilisateurs connexes vérifient l'approximation forte "finie" hors d'un ensemble fini S avec obstruction de Brauer-Manin, par des méthodes plus géométriques.

Plus précisément, on démontre l'énoncé suivant, qui est l'analogue du théorème 5.39 rappelé plus haut, et que l'on peut voir comme une version entière du théorème 5.13 de Borovoi :

Théorème 5.41. — *Soit k un corps de nombres, G un k-groupe connexe, $H \subset G$ un k-sous-groupe connexe. On note $X := G/H$.*

On suppose que $Ш^1(k, G^{\mathrm{ab}})$ est fini et que le groupe G^{sc} vérifie l'approximation forte hors d'un ensemble fini S de places de k contenant les places archimédiennes. On note S_f l'ensemble des places finies de S.

Alors

$$\overline{G^{\mathrm{scu}}_{S_f} \cdot X(k)} = X(\mathbf{A}_k)_\bullet^{\mathrm{Br}_1(X,G)}.$$

En particulier, X vérifie l'approximation forte finie hors de S_f avec obstruction de Brauer-Manin (associée à $\mathrm{Br}_1(X,G)$).

Remarque 5.42. — On montre également deux autres résultats autour de cet énoncé :

(1) Si S contient une place finie v_0, tout point de $X(\mathbf{A}_k)_\bullet^{\mathrm{Br}_1(X)}$ est dans l'adhérence de $G^{\mathrm{scu}}_{S_f} \cdot X(k)$, quitte à modifier le point initial en la place v_0. Autrement dit, l'obstruction de Brauer-Manin algébrique suffit pour avoir l'approximation forte hors d'une place finie v_0 fixée.

(2) En revanche, on dispose de l'exemple explicite de l'espace homogène $X := \mathrm{SL}_n/\mathrm{SO}_n$ ($n \geq 3$) sur un corps de nombres totalement imaginaire (par exemple $k = \mathbf{Q}(i)$) : X s'identifie à la variété des matrices symétriques de déterminant égal à 1. Dans ce cas, $\mathrm{Br}_a(X) = 0$ alors que $\mathrm{Br}_a(X,G) = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, et l'obstruction de Brauer-Manin sur $X(\mathbf{A}_k)$ associée au groupe $\mathrm{Br}_a(X,G)$ s'identifie au produit des invariants de Hasse locaux des formes quadratiques correspondantes. Il est alors facile de construire un point adélique de X dont le produit des invariants de Hasse locaux est non trivial, ce qui assure qu'un tel point n'est pas dans l'adhérence forte des points rationnels de X. Par conséquent, le théorème 5.41 est faux si l'on se limite à l'obstruction de Brauer-Manin algébrique et au sous-groupe $\mathrm{Br}_{\mathrm{a}}(X)$ de $\mathrm{Br}_{\mathrm{a}}(X,G)$: on a vraiment besoin de tout le groupe $\mathrm{Br}_a(X,G)$ et des éventuelles obstructions transcendantes qu'il définit.

Remarque 5.43. — Comme c'est déjà le cas pour un tore, le groupe $\mathrm{Br}_a(X,G)$ est en général un groupe infini. Pour cette raison, Wei et Xu ont proposé des variantes du théorème d'approximation forte avec obstruction de Brauer-Manin, dans le cas des tores, ne faisant intervenir que des sous-groupes finis du groupe de Brauer : voir par exemple [**WX12**].

Pour démontrer le théorème 5.41, on commence par établir une variante d'une suite exacte classique de Sansuc (voir [**San81**], proposition 6.10) qui relie les groupes de Picard et de Brauer de la base, de l'espace total et du groupe sous-jacent à un torseur : si k est un corps de caractéristique nulle, H un k-groupe linéaire connexe, X une k-variété lisse et $Y \to X$ un torseur sous H, alors on a une suite exacte fonctorielle de groupes abéliens

$$\mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(Y) \to \mathrm{Pic}(H) \xrightarrow{\Delta} \mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(Y) \to \mathrm{Br}(H \times_k Y), \tag{6}$$

avec des flèches explicites (ce qui n'est pas le cas chez Sansuc). Pour obtenir cette suite exacte, un lemme clé consiste à montrer qu'un torseur $Z \to Y$ sous $\mathbf{G}_m$ est naturellement muni d'une structure de torseur $Z \to X$ sous une extension centrale de H par $\mathbf{G}_m$.

On procède ensuite à la preuve géométrique du théorème 5.41, par des réductions successives utilisant à chaque fois des variantes de la méthode des fibrations :

(1) En utilisant notamment l'approximation forte pour les groupes unipotents (i.e. le théorème d'approximation forte usuel pour l'espace affine, via l'application exponentielle), ainsi que la trivialité de la cohomologie galoisienne des groupes unipotents sur k en degrés 1 et 2, on peut supposer que $G^{\mathrm{u}} = 1$.

(2) En utilisant notamment une résolution flasque du groupe G (cf l'article [**CT08**]) et la suite (6), on peut supposer en outre G^{ss} simplement connexe et H linéaire.

(3) En utilisant une résolution coflasque (voir également [**CT08**]) du tore H^{tor} de la forme

$$0 \to H^{\mathrm{tor}} \to P \to Q \to 0$$

avec P quasi-trivial et Q coflasque, on construit un torseur $W \to X$ sous P, avec $W = F/H'$ espace homogène d'un k-groupe F vérifiant les mêmes hypothèses que X, avec en outre $H'^{\mathrm{tor}} \to F^{\mathrm{sab}}$ injectif et $\mathrm{Br}_a(F^{\mathrm{sab}}) \to \mathrm{Br}_a(H'^{\mathrm{tor}})$ surjectif. Et on vérifie qu'il suffit alors de montrer le théorème pour l'espace homogène W.

Par conséquent, on peut bien supposer, en plus des hypothèses précédentes, que $H^{\mathrm{tor}} \to G^{\mathrm{sab}}$ est injectif et que $\mathrm{Br}_a(G^{\mathrm{sab}}) \to \mathrm{Br}_a(H^{\mathrm{tor}})$ est surjectif.

(4) En définissant $Y := X/G^{\mathrm{ss}}$, on dispose d'une fibration $\psi : X \to Y$ telle que Y soit un espace homogène d'une variété semi-abélienne et les fibres de ψ soient des espaces homogènes d'un groupe semi-simple simplement connexe à stabilisateurs semi-simples (connexes). Les hypothèses assurent en outre, via un usage intensif de la suite exacte (6), que $\mathrm{Br}_a(X, G) \to \mathrm{Br}(X_y)/\mathrm{Br}(k)$ est surjectif pour tout $y \in Y(k)$. La méthode des fibrations permet alors de réduire le résultat souhaité pour l'espace total X aux résultats analogues pour la base Y et pour les fibres X_y de ψ. Comme Y est une variété semi-abélienne, l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation forte finie est la seule par le théorème 5.37 de Harari (voir [**Har08**]), et comme les fibres X_y sont des espaces homogènes de groupes semi-simples simplement connexes à stabilisateurs semi-simples, l'obstruction de Brauer-Manin à l'approximation forte hors de S est la seule par le théorème 5.38 de Colliot-Thélène et Xu (voir [**CTX09**], théorème 3.7(b)). Cela conclut la preuve du théorème 5.41.

En résumé, la géométrie de la preuve est illustrée par le dessin suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[dr, "p"] & & W \arrow[dl, "q"] \arrow[dr, "\psi"] & \\ & X' & & Y, \end{tikzcd}$$

où X est l'espace homogène initial, Y est une variété semi-abélienne, tous les morphismes sont lisses et surjectifs, les fibres de p sont des espaces homogènes de groupes unipotents, q est un torseur sous un tore quasi-trivial, et les fibres de ψ sont des espaces homogènes de groupes simplement connexes à stabilisateurs semi-simples. La réduction de X à W est l'objet des étapes (1) à (3). La réduction de W à Y et aux fibres de ψ est l'objet de l'étape (4), qui est de loin la plus technique. Le cas de la variété Y est traité par le résultat de Harari (théorème 5.37) et celui des fibres de ψ par le résultat de Colliot-Thélène et Xu (théorème 5.38).

On peut également voir que le théorème sur l'approximation forte a la conséquence immédiate suivante concernant le principe de Hasse entier :

Corollaire 5.44. — *Soit $\mathscr{X}$ un $\mathscr{O}_S$-schéma plat dont la fibre générique X est un espace homogène d'un k-groupe connexe G, à stabilisateurs connexes. On suppose que $Ш^1(k, G^{\mathrm{ab}})$ est fini et que G^{sc} vérifie l'approximation forte hors de S_0 pour un certain ensemble fini $S_0 \subset S$.*

On suppose qu'il existe un point $(P_v) \in \mathscr{X}(\mathbf{A}_S) := \prod_{v\in S} X(k_v) \times \prod_{v\notin S} \mathscr{X}(\mathscr{O}_v)$ qui est orthogonal au groupe $\mathrm{Br}_1(X,G)$. Alors il existe un point dans $\mathscr{X}(\mathscr{O}_S)$ qui est arbitrairement proche de P_v pour $v \in S \smallsetminus S_0$ non archimédienne, et dans la même composante connexe de $X(k_v)$ que P_v pour $v \in S$ réelle.

En particulier,

$$\left(\prod_{v\in S} X(k_v) \times \prod_{v\notin S} \mathscr{X}(\mathscr{O}_v)\right)^{\mathrm{Br}_1(X,G)} \neq \varnothing \Longrightarrow \mathscr{X}(\mathscr{O}_S) \neq \varnothing \, .$$

Notons également que le théorème principal 5.41 a été utilisé comme un ingrédient important dans la généralisation suivante obtenue successivement par Cao et Xu (voir [**CX15**]), puis par Cao (voir [**Cao16**]) :

***Théorème 5.45* (Cao, Xu).** — *Soit G un k-groupe linéaire connexe, X une G-variété lisse et géométriquement intègre sur k. Supposons qu'il existe un ouvert G-stable $U \subset X$ qui soit k-isomorphe à G/H, avec H sous-groupe fermé connexe. On suppose que le groupe G^{sc} vérifie l'approximation forte aux places finies de k.*

Alors X vérifie l'approximation forte aux places finies de k, avec obstruction de Brauer-Manin.

5.3.3. Stabilisateurs finis. — Au vu des théorèmes 5.39 et 5.41, il semble naturel de se demander si l'hypothèse de connexité (ou d'abélianité) sur les stabilisateurs est nécessaire. En ce qui concerne l'approximation faible, la conjecture de Colliot-Thélène (voir la conjecture 4.3) affirme que les espaces homogènes quelconques devraient vérifier le principe de Hasse et l'approximation faible avec obstruction de Brauer-Manin. Qu'en est-il du principe de Hasse entier et de l'approximation forte ?

Le résultat (voir [**Dem17b**]) que l'on présente ici affirme que, contrairement à ce qui est conjecturé pour l'approximation faible, l'hypothèse de connexité ou d'abélianité est cruciale pour l'approximation forte. En effet :

***Théorème 5.46*.** — *Soit p un nombre premier. Soit H un groupe fini* non commutatif *de cardinal p^n, k un corps de nombres contenant les racines p^{n+1}-ièmes de l'unité, S_0 un ensemble fini de places de k. On note $X := \mathrm{SL}_{n,k}/H$, pour un plongement de H dans $\mathrm{SL}_{n,k}$.*

Alors il existe un point adélique $x \in X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ dont la projection n'est pas dans l'adhérence de $X(k)$ dans $X(\mathbf{A}_k^{S_0})$, i.e. $X(k)$ n'est pas dense dans $p_{S_0}(X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}})$.

Autrement dit, X ne vérifie pas l'approximation forte hors de S_0 avec obstruction de Brauer-Manin.

La preuve de ce théorème peut se résumer ainsi :

(1) On montre d'abord que l'on dispose d'un isomorphisme canonique et fonctoriel

$$\mathrm{Ext}^c_k(H, \mathbf{G}_m) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k) \, ,$$

où pour tout k-groupe algébrique F, $\mathrm{Ext}^c_k(F, \mathbf{G}_m)$ désigne le groupe des extensions *centrales* de k-groupes algébriques de F par $\mathbf{G}_m$. La démonstration est une application simple de la suite spectrale de Hochschild-Serre et de la comparaison de la cohomologie de Hochschild avec le groupe des extensions centrales.

(2) On montre ensuite que si $Z \subset H$ est un sous-groupe central, d'ordre p et contenu dans le sous-groupe dérivé de H, alors le morphisme naturel de restriction

$$\mathrm{Ext}^c_k(H, \mathbf{G}_m) \to \mathrm{Ext}^c_k(Z, \mathbf{G}_m)$$

est le morphisme nul. Pour ce faire, on utilise des dévissages simples des groupes d'extensions centrales et une étude précise de l'action de Galois sur certaines extensions centrales de H par $\mu_{p^{n+1}}$.

(3) On utilise ensuite la filtration naturelle entre espaces homogènes :

$$f : Y = \mathrm{SL}_n/Z \to X = \mathrm{SL}_n/H \, ,$$

pour montrer, grâce à l'étape précédente, qu'il existe des points adéliques y sur Y qui ne sont pas orthogonaux au groupe $\mathrm{Br}(Y)$, mais tels que $x = f(y)$ soit orthogonal à $\mathrm{Br}(X)$. On montre ensuite que l'on peut faire en sorte qu'un tel x ne puisse pas se relever en un point orthogonal au groupe de Brauer dans un tordu du torseur $Y \to X$, en utilisant la suite exacte de Poitou-Tate pour le groupe Z et des propriétés des groupes de cohomologie étale de Z sur des ouverts de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$. Cela assure essentiellement que x ne peut être dans l'adhérence des points rationnels de X.

On fournit également un exemple défini sur le corps des nombres rationnels, en l'occurrence :

Théorème 5.47. — *Soient k un corps de nombres et S_0 un ensemble fini de places de k. On note Q_8 le groupe des quaternions d'ordre 8 et $X := \mathrm{SL}_{4,k}/Q_8$ l'espace homogène associé à une représentation fidèle de dimension 4 de Q_8 sur k. Alors il existe un point adélique $x \in X(\mathbf{A}_k)^{\mathrm{Br}}$ qui n'est pas dans l'adhérence de $X(k)$ dans $X(\mathbf{A}_k^{S_0})$.*

Pour établir ce résultat, il faut montrer que l'étape (2) de la preuve précédente (qui utilise la présence de suffisamment de racines de l'unité dans k) reste valable dans ce contexte, par une étude explicite des actions de Galois possibles sur certains groupes finis d'ordre 64. Cette dernière étude utilise la classification des groupes finis d'ordre 64.

Remarque 5.48. — La preuve indique que si ces contre-exemples ne sont pas expliqués par l'obstruction de Brauer-Manin entière, il le sont en revanche par une obstruction de Brauer-Manin étale entière fournie par le torseur $Y \to X$: cela peut être rapproché des exemples de Colliot-Thélène et Wittenberg dans [**CTW12**].

On peut donner comme au corollaire 5.44, en utilisant cette fois un résultat de Liu et Xu (voir le théorème 2.10 de [**LX15**]), une interprétation de ces exemples en terme du principe de Hasse entier pour les espaces homogènes :

Corollaire 5.49. — *Soit p un nombre premier, k un corps de nombres contenant les racines p^{n+1}-ièmes de l'unité, H un groupe fini non commutatif d'ordre p^n et S_0 un ensemble fini de places de k. Alors il existe un $\mathcal{O}_{k,S_0}$-schéma $\mathcal{X}$ fidèlement plat, séparé de type fini, tel que $X := \mathcal{X} \times_{\mathcal{O}_{k,S_0}} k \cong \mathrm{SL}_{n,k}/H$ et*

$$\left(\prod_{v \in S_0} X(k_v) \times \prod_{v \notin S_0} \mathcal{X}(\mathcal{O}_v)\right)^{\mathrm{Br}(X)} \neq \varnothing,$$

alors que

$$\mathcal{X}(\mathcal{O}_{S_0}) = \varnothing.$$

En particulier, l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse entier sur $\mathcal{X}$ n'est pas la seule.

De même, on dispose de l'exemple suivant sur $\mathbf{Z}$:

Corollaire 5.50. — *Il existe un $\mathbf{Z}$-schéma $\mathcal{X}$ fidèlement plat, séparé de type fini, tel que $X := \mathcal{X} \times_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q} \cong \mathrm{SL}_{4,\mathbf{Q}}/Q_8$, vérifiant*

$$\left(\prod_{p \leq \infty} \mathcal{X}(\mathbf{Z}_p)\right)^{\mathrm{Br}(X)} \neq \varnothing,$$

alors que

$$\mathcal{X}(\mathbf{Z}) = \varnothing.$$

En particulier, l'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse entier sur $\mathcal{X}$ n'est pas la seule.

CHAPITRE 6

PERSPECTIVES ET PROJETS

Un certain nombre de questions posées au fil du texte ci-dessus restent encore largement ouvertes : on peut citer par exemple

– Les calculs des groupes d'homotopie étale supérieurs pour les groupes algébriques et leurs espaces homogènes en caractéristique positive, et des suites exactes longues d'homotopie associées. La difficulté principale est l'absence de bonnes suites exactes de fibrations sans hypothèse de propreté sur les fibres.

– Le calcul des groupes de cohomologie non ramifiée des espaces homogènes en degré ≥ 3, et plus généralement, la question de la rationalité des espaces homogènes sur un corps algébriquement clos, en vue d'étendre les résultats sur le groupe de Brauer non ramifié (degré 2) et ceux de Merkurjev sur la cohomologie non ramifiée en degré 3 des espaces classifiants (voir [**Mer02**] et [**Mer16**]).

– L'obstruction de Brauer-Manin au principe de Hasse et à l'approximation faible sur les espaces homogènes sur les corps globaux, et notamment dans le cas particulier mais crucial des stabilisateurs finis.

Il va de soi que ces questions continuent de m'intéresser, et les progrès récents dus à Harpaz et Wittenberg (voir [**HW17**]) dans la direction de la troisième question font naître de nouveaux espoirs.

Dans des directions un peu différentes, je peux mentionner quelques autres questions sur lesquelles je compte me pencher dans les années qui viennent :

– Une interprétation motivique (au sens de Voevodsky) de tous les invariants cohomologiques des groupes algébriques et de leurs espaces homogènes utilisés dans ce texte, avec pour objectif d'en donner une description uniforme, incluant également d'autes invariants comme l'invariant de Rost pour les groupes semi-simples simplement connexes (voir [**GMS03**], partie II) ou l'invariant de Kahn-Suslin pour l'étude du SK_1 d'une algèbre simple centrale (voir par exemple [**Kah10**]).

– L'étude des théorèmes de dualité en arithmétique sur des corps globaux de caractéristique positive, avec notamment pour but l'arithmétique des groupes algébriques connexes et de leurs espaces homogènes sur de tels corps. Le point de départ devrait être une meilleure compréhension et une généralisation du théorème de dualité d'Artin-Verdier en cohomologie fppf en caractéristique positive.

– La construction et l'étude des variétés de normes : si $\alpha \in H^n(k, \mu_p^{\otimes n})$ est un symbole, Rost (voir [**SJ06**]) construit une k-variété X (propre, lisse, irréductible), appelée variété de norme associée à α, de sorte qu'essentiellement, pour toute extension L/k, $\alpha_L = 0$ dans $H^n(L, \mu_p^{\otimes n})$ si et seulement si $X(L) \neq \varnothing$. Ces variétés sont cruciales dans la preuve de la conjecture de Bloch-Kato (voir [**Rio14**]). L'objectif serait de voir dans quelle mesure on peut associer des variétés de normes à des éléments quelconques de $H^n(k, A)$, pour un module galoisien fini A, et si l'on peut proposer une construction simple de telles variétés.

– La recherche de nouvelles obstructions naturelles au principe de Hasse et à l'approximation faible pour les variétés algébriques sur les corps globaux.

BIBLIOGRAPHIE

[Ach17] P. Achinger – « Wild ramification and $K(\pi, 1)$ spaces », *Invent. Math.* **210** (2017), no. 2, p. 453–499.

[AM69] M. Artin & B. Mazur – *Etale homotopy*, Lecture Notes in Mathematics, No. 100, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1969.

[Bal16] F. Balestrieri – « Obstruction sets and extensions of groups », *Acta Arith.* **173** (2016), no. 2, p. 151–181.

[Bal18] F. Balestrieri – « Iterating the algebraic étale-Brauer set », *J. Number Theory* **182** (2018), p. 284–295.

[BCTS08] M. Borovoi, J.-L. Colliot-Thélène & A. N. Skorobogatov – « The elementary obstruction and homogeneous spaces », *Duke Math. J.* **141** (2008), no. 2, p. 321–364.

[BD13] M. Borovoi & C. Demarche – « Manin obstruction to strong approximation for homogeneous spaces », *Comment. Math. Helv.* **88** (2013), no. 1, p. 1–54.

[BDH13] M. Borovoi, C. Demarche & D. Harari – « Complexes de groupes de type multiplicatif et groupe de Brauer non ramifié des espaces homogènes », *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)* **46** (2013), no. 4, p. 651–692 (2013).

[Bog89] F. A. Bogomolov – « Brauer groups of the fields of invariants of algebraic groups », *Mat. Sb.* **180** (1989), no. 2, p. 279–293.

[Bor91] A. Borel – *Linear algebraic groups*, second éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 126, Springer-Verlag, New York, 1991.

[Bor93] M. Borovoi – « Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology », *Duke Math. J.* **72** (1993), no. 1, p. 217–239.

[Bor96] ______, « The Brauer-Manin obstructions for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer », *J. Reine Angew. Math.* **473** (1996), p. 181–194.

[Bor98] ______, « Abelian Galois cohomology of reductive groups », *Mem. Amer. Math. Soc.* **132** (1998), no. 626, p. viii+50.

[Bor13] ______, « On the unramified Brauer group of a homogeneous space », *Algebra i Analiz* **25** (2013), no. 4, p. 23–27.

[Bre90] L. Breen – « Bitorseurs et cohomologie non abélienne », The Grothendieck Festschrift, Vol. I, Progr. Math., vol. 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 401–476.

[Bre94] ———, « On the classification of 2-gerbes and 2-stacks », *Astérisque* (1994), no. 225, p. 160.

[Bre10] ———, « Notes on 1- and 2-gerbes », Towards higher categories, IMA Vol. Math. Appl., vol. 152, Springer, New York, 2010, p. 193–235.

[Bri17] M. Brion – « Some structure theorems for algebraic groups », Algebraic groups : structure and actions, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 94, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017, p. 53–126.

[BS13] M. Brion & T. Szamuely – « Prime-to-p étale covers of algebraic groups and homogeneous spaces », *Bull. Lond. Math. Soc.* **45** (2013), no. 3, p. 602–612.

[BvH09] M. Borovoi & J. van Hamel – « Extended Picard complexes and linear algebraic groups », *J. Reine Angew. Math.* **627** (2009), p. 53–82.

[BvH12] ———, « Extended equivariant Picard complexes and homogeneous spaces », *Transform. Groups* **17** (2012), no. 1, p. 51–86.

[Cao16] Y. Cao – « Approximation forte pour les variétés avec une action d'un groupe linéaire », prépublication, 2016.

[Cao17] ———, « Sous-groupe de Brauer invariant et obstruction de descente itérée », `https://arxiv.org/abs/1704.05425`, 2017, prépublication.

[CDX16] Y. Cao, C. Demarche & F. Xu – « Comparing descent obstruction and Brauer-Manin obstruction for open varieties », `https://arxiv.org/abs/1604.02709`, 2016, prépublication.

[CGP15] B. Conrad, O. Gabber & G. Prasad – *Pseudo-reductive groups*, second éd., New Mathematical Monographs, vol. 26, Cambridge University Press, Cambridge, 2015.

[CT92] J.-L. Colliot-Thélène – « L'arithmétique des variétés rationnelles », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **1** (1992), no. 3, p. 295–336.

[CT95] ———, « Birational invariants, purity and the Gersten conjecture », K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, p. 1–64.

[CT03] ———, « Points rationnels sur les fibrations », Higher dimensional varieties and rational points (Budapest, 2001), Bolyai Soc. Math. Stud., vol. 12, Springer, Berlin, 2003, p. 171–221.

[CT08] ———, « Résolutions flasques des groupes linéaires connexes », *J. Reine Angew. Math.* **618** (2008), p. 77–133.

[CT14] ———, « Groupe de Brauer non ramifié de quotients par un groupe fini », *Proc. Amer. Math. Soc.* **142** (2014), no. 5, p. 1457–1469.

[CTK98] J.-L. Colliot-Thélène & B. E. Kunyavskiĭ – « Groupe de Brauer non ramifié des espaces principaux homogènes de groupes linéaires », *J. Ramanujan Math. Soc.* **13** (1998), no. 1, p. 37–49.

[CTS87a] J.-L. Colliot-Thélène & J.-J. Sansuc – « La descente sur les variétés rationnelles. II », *Duke Math. J.* **54** (1987), no. 2, p. 375–492.

[CTS87b] ______, « Principal homogeneous spaces under flasque tori : applications », *J. Algebra* **106** (1987), no. 1, p. 148–205.

[CTS07] ______, « The rationality problem for fields of invariants under linear algebraic groups (with special regards to the Brauer group) », Algebraic groups and homogeneous spaces, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., vol. 19, Tata Inst. Fund. Res., Mumbai, 2007, p. 113–186.

[CTW12] J.-L. Colliot-Thélène & O. Wittenberg – « Groupe de Brauer et points entiers de deux familles de surfaces cubiques affines », *Amer. J. Math.* **134** (2012), no. 5, p. 1303–1327.

[CTX09] J.-L. Colliot-Thélène & F. Xu – « Brauer-Manin obstruction for integral points of homogeneous spaces and representation by integral quadratic forms », *Compos. Math.* **145** (2009), no. 2, p. 309–363, Avec un appendice par Dasheng Wei et Xu.

[Cre17] B. Creutz – « No transcendental Brauer-Manin obstruction on abelian varieties », `https://arxiv.org/abs/1711.01541`, 2017, prépublication.

[CX15] Y. Cao & F. Xu – « Strong approximation with Brauer-Manin obstruction for groupic varieties », `https://arxiv.org/abs/1507.04340`, 2015, prépublication.

[Deb77] R. Debremaeker – « Non-abelian cohomology », *Bull. Soc. Math. Belg.* **29** (1977), no. 1, p. 57–72.

[Dem09] C. Demarche – « Obstruction de descente et obstruction de Brauer-Manin étale », *Algebra Number Theory* **3** (2009), no. 2, p. 237–254.

[Dem10] ______, « Groupe de Brauer non ramifié d'espaces homogènes à stabilisateurs finis », *Math. Ann.* **346** (2010), no. 4, p. 949–968.

[Dem11a] ______, « Le défaut d'approximation forte dans les groupes linéaires connexes », *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **102** (2011), no. 3, p. 563–597.

[Dem11b] ______, « Suites de Poitou-Tate pour les complexes de tores à deux termes », *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2011), no. 1, p. 135–174.

[Dem11c] ______, « Une formule pour le groupe de Brauer algébrique d'un torseur », *J. Algebra* **347** (2011), p. 96–132.

[Dem13] ______, « Abélianisation des espaces homogènes et applications arithmétiques », Torsors, étale homotopy and applications to rational points, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 405, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013, p. 138–209.

[Dem15] ______, « Cohomologie de Hochschild non abélienne et extensions de faisceaux en groupes », Autour des schémas en groupes. Vol. II, Panor. Synthèses, vol. 46, Soc. Math. France, Paris, 2015, p. 255–292.

[Dem17a] ______, « Le groupe fondamental étale d'un espace homogène d'un groupe algébrique linéaire », *Math. Ann.* **368** (2017), no. 1, p. 339–365.

[Dem17b] ______, « Obstructions de Brauer-Manin entières sur les espaces homogènes à stabilisateurs finis nilpotents », *Bull. Soc. Math. France* **145** (2017), no. 2, p. –.

[DG70] M. Demazure & P. Gabriel – *Groupes algébriques. Tome I : Géométrie algébrique, généralités, groupes commutatifs*, Masson & Cie, Éditeur, Paris ; North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1970, Avec un appendice *Corps de classes local* par Michel Hazewinkel.

[dJ] A. J. de Jong – « A result of Gabber », `https://www.math.columbia.edu/~dejong/papers/2-gabber.pdf`, prépublication.

[DL17] C. Demarche & G. Lucchini Arteche – « Le principe de Hasse pour les espaces homogènes : réduction au cas des stabilisateurs finis », `https://arxiv.org/abs/1704.08646`, 2017, prépublication.

[DLN17] C. Demarche, G. Lucchini Arteche & D. Neftin – « The Grunwald problem and approximation properties for homogeneous spaces », *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **67** (2017), no. 2, p. 1009–1033.

[Dou75] J.-C. Douai – « 2-cohomologie galoisienne des groupes semi-simples définis sur les corps locaux », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **280** (1975), no. 6, p. Aii, A321–A323.

[Dou06] ———, « Sur la 2-cohomologie galoisienne de la composante résiduellement neutre des groupes réductifs connexes définis sur les corps locaux », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **342** (2006), no. 11, p. 813–818.

[DW14] C. Demarche & D. Wei – « Hasse principle and weak approximation for multinorm equations », *Israel J. Math.* **202** (2014), no. 1, p. 275–293.

[Flo06] M. Florence – « Points rationnels sur les espaces homogènes et leurs compactifications », *Transform. Groups* **11** (2006), no. 2, p. 161–176.

[Fri82] E. M. Friedlander – *Étale homotopy of simplicial schemes*, Annals of Mathematics Studies, vol. 104, Princeton University Press, Princeton, N.J. ; University of Tokyo Press, Tokyo, 1982.

[FSS98] Y. Z. Flicker, C. Scheiderer & R. Sujatha – « Grothendieck's theorem on non-abelian H^2 and local-global principles », *J. Amer. Math. Soc.* **11** (1998), no. 3, p. 731–750.

[GA12] C. D. González-Avilés – « Quasi-abelian crossed modules and nonabelian cohomology », *J. Algebra* **369** (2012), p. 235–255.

[Gil02] P. Gille – « Torseurs sur la droite affine », *Transform. Groups* **7** (2002), no. 3, p. 231–245.

[Gir71] J. Giraud – *Cohomologie non abélienne*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179.

[GMS03] S. Garibaldi, A. Merkurjev & J.-P. Serre – *Cohomological invariants in Galois cohomology*, University Lecture Series, vol. 28, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[Gro68] A. Grothendieck – « Le groupe de Brauer. III. exemples et compléments », Dix exposés sur la cohomologie des schémas, Adv. Stud. Pure Math., vol. 3, North-Holland, Amsterdam, 1968, p. 88–188.

[SGA1] ———, *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, Documents Mathématiques (Paris), vol. 3, Société Mathématique de France, Paris, 2003, Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61. Dirigé par A. Grothendieck.

[Har02] D. Harari – « Groupes algébriques et points rationnels », *Math. Ann.* **322** (2002), no. 4, p. 811–826.

[Har07] ———, « Quelques propriétés d'approximation reliées à la cohomologie galoisienne d'un groupe algébrique fini », *Bull. Soc. Math. France* **135** (2007), no. 4, p. 549–564.

[Har08] ———, « Le défaut d'approximation forte pour les groupes algébriques commutatifs », *Algebra Number Theory* **2** (2008), no. 5, p. 595–611.

[HS02] D. Harari & A. N. Skorobogatov – « Non-abelian cohomology and rational points », *Compositio Math.* **130** (2002), no. 3, p. 241–273.

[HS08] D. Harari & T. Szamuely – « Local-global principles for 1-motives », *Duke Math. J.* **143** (2008), no. 3, p. 531–557.

[HS13a] D. Harari & A. N. Skorobogatov – « Descent theory for open varieties », Torsors, étale homotopy and applications to rational points, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 405, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013, p. 250–279.

[HS13b] Y. Harpaz & T. M. Schlank – « Homotopy obstructions to rational points », Torsors, étale homotopy and applications to rational points, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 405, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013, p. 280–413.

[HSW14] Y. Harpaz, A. N. Skorobogatov & O. Wittenberg – « The Hardy-Littlewood conjecture and rational points », *Compos. Math.* **150** (2014), no. 12, p. 2095–2111.

[HW16] Y. Harpaz & O. Wittenberg – « On the fibration method for zero-cycles and rational points », *Ann. of Math. (2)* **183** (2016), no. 1, p. 229–295.

[HW17] ———, « Conjecture (E) for homogeneous spaces », en préparation, 2017.

[ILO14] L. Illusie, Y. Laszlo & F. Orgogozo (éds.) – *Travaux de Gabber sur l'uniformisation locale et la cohomologie étale des schémas quasi-excellents*, Société Mathématique de France, Paris, 2014, Séminaire à l'École Polytechnique 2006–2008. Avec la collaboration de Frédéric Déglise, Alban Moreau, Vincent Pilloni, Michel Raynaud, Joël Riou, Benoît Stroh, Michael Temkin et Weizhe Zheng, Astérisque No. 363-364 (2014).

[Kah10] B. Kahn – « Cohomological approaches to SK_1 and SK_2 of central simple algebras », *Doc. Math.* (2010), no. Extra vol. : Andrei A. Suslin sixtieth birthday, p. 317–369.

[Kne66] M. Kneser – « Strong approximation », Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966, p. 187–196.

[Lab99] J.-P. Labesse – « Cohomologie, stabilisation et changement de base », *Astérisque* (1999), no. 257, p. vi+161, Appendice A par L. Clozel et J.-P. Labesse, et Appendice B par L. Breen.

[Luc14] G. Lucchini Arteche – « Approximation faible et principe de Hasse pour des espaces homogènes à stabilisateur fini résoluble », *Math. Ann.* **360** (2014), no. 3-4, p. 1021–1039.

[LX15] Q. Liu & F. Xu – « Very strong approximation for certain algebraic varieties », *Math. Ann.* **363** (2015), no. 3-4, p. 701–731.

[Man71] Y. I. Manin – « Le groupe de Brauer-Grothendieck en géométrie diophantienne », Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970), Tome 1, Gauthier-Villars, Paris, 1971, p. 401–411.

[Mar09] B. Margaux – « Vanishing of Hochschild cohomology for affine group schemes and rigidity of homomorphisms between algebraic groups », *Doc. Math.* **14** (2009), p. 653–672.

[McN14] G. J. McNinch – « Linearity for actions on vector groups », *J. Algebra* **397** (2014), p. 666–688.

[Mer98] A. Merkurjev – « K-theory and algebraic groups », European Congress of Mathematics, Vol. II (Budapest, 1996), Progr. Math., vol. 169, Birkhäuser, Basel, 1998, p. 43–72.

[Mer02] ———, « Unramified cohomology of classifying varieties for classical simply connected groups », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **35** (2002), no. 3, p. 445–476.

[Mer16] ———, « Unramified degree three invariants of reductive groups », *Adv. Math.* **293** (2016), p. 697–719.

[Mil06] J. S. Milne – *Arithmetic duality theorems*, second éd., BookSurge, LLC, Charleston, SC, 2006.

[Mos56] G. D. Mostow – « Fully reducible subgroups of algebraic groups », *Amer. J. Math.* **78** (1956), p. 200–221.

[Neu73] J. Neukirch – « Über das Einbettungsproblem der algebraischen Zahlentheorie », *Invent. Math.* **21** (1973), p. 59–116.

[Neu79] ———, « On solvable number fields », *Invent. Math.* **53** (1979), no. 2, p. 135–164.

[Nis84] Y. A. Nisnevich – « Espaces homogènes principaux rationnellement triviaux et arithmétique des schémas en groupes réductifs sur les anneaux de Dedekind », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **299** (1984), no. 1, p. 5–8.

[NSW08] J. Neukirch, A. Schmidt & K. Wingberg – *Cohomology of number fields*, second éd., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[Ono61] T. Ono – « Arithmetic of algebraic tori », *Ann. of Math. (2)* **74** (1961), p. 101–139.

[Pla69] V. P. Platonov – « The problem of strong approximation and the Kneser-Tits hypothesis for algebraic groups », *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* **33** (1969), p. 1211–1219.

[Poo10] B. Poonen – « Insufficiency of the Brauer-Manin obstruction applied to étale covers », *Ann. of Math. (2)* **171** (2010), no. 3, p. 2157–2169.

[Poo17] ———, « Rational points on varieties », `http://www-math.mit.edu/~poonen/papers/Qpoints.pdf`, 2017, prépublication.

[Pop85] D. Popescu – « General Néron desingularization », *Nagoya Math. J.* **100** (1985), p. 97–126.

[PP75] G. Pfister & D. Popescu – « Die strenge Approximationseigenschaft lokaler Ringe », *Invent. Math.* **30** (1975), no. 2, p. 145–174.

[PR94] V. Platonov & A. Rapinchuk – *Algebraic groups and number theory*, Pure and Applied Mathematics, vol. 139, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994.

[PR10] G. Prasad & A. S. Rapinchuk – « Local-global principles for embedding of fields with involution into simple algebras with involution », *Comment. Math. Helv.* **85** (2010), no. 3, p. 583–645.

[PR13] T. P. Pollio & A. S. Rapinchuk – « The multinorm principle for linearly disjoint Galois extensions », *J. Number Theory* **133** (2013), no. 2, p. 802–821.

[Rio14] J. Riou – « La conjecture de Bloch-Kato (d'après M. Rost et V. Voevodsky) », *Astérisque* (2014), no. 361, p. Exp. No. 1073, x, 421–463.

[Rom05] M. Romagny – « Group actions on stacks and applications », *Michigan Math. J.* **53** (2005), no. 1, p. 209–236.

[Sal85] D. J. Saltman – « The Brauer group and the center of generic matrices », *J. Algebra* **97** (1985), no. 1, p. 53–67.

[San81] J.-J. Sansuc – « Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres », *J. Reine Angew. Math.* **327** (1981), p. 12–80.

[Ser77] J.-P. Serre – *Cours d'arithmétique*, Presses Universitaires de France, Paris, 1977, Deuxième édition revue et corrigée, Le Mathématicien, No. 2.

[Ser94] ______, *Cohomologie galoisienne*, fifth éd., Lecture Notes in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[SGA1] A. Grothendieck – *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)*, Documents Mathématiques (Paris), vol. 3, Société Mathématique de France, Paris, 2003, Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61. Dirigé par A. Grothendieck.

[SGA3] M. Demazure & A. Grothendieck – *Schémas en groupes (SGA 3). Tome I. Propriétés générales des schémas en groupes ; Tome II. Groupes de type multiplicatif, et structure des schémas en groupes généraux ; Tome III. Structure des schémas en groupes réductifs*, Documents Mathématiques (Paris), vol. 7, 8, Société Mathématique de France, Paris, 2011, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962–64. Un séminaire dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck avec la collaboration de M. Artin, J.-E. Bertin, P. Gabriel, M. Raynaud et J-P. Serre, édition révisée.

[SJ06] A. Suslin & S. Joukhovitski – « Norm varieties », *J. Pure Appl. Algebra* **206** (2006), no. 1-2, p. 245–276.

[Sko99] A. N. Skorobogatov – « Beyond the Manin obstruction », *Invent. Math.* **135** (1999), no. 2, p. 399–424.

[Sko01] ______, *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 144, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[Sko09] ———, « Descent obstruction is equivalent to étale Brauer-Manin obstruction », *Math. Ann.* **344** (2009), no. 3, p. 501–510.

[Spr66] T. A. Springer – « Nonabelian H^2 in Galois cohomology », Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966, p. 164–182.

[Spr98] ———, *Linear algebraic groups*, second éd., Progress in Mathematics, vol. 9, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1998.

[Sti13] J. Stix – *Rational points and arithmetic of fundamental groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 2054, Springer, Heidelberg, 2013, Evidence for the section conjecture.

[Tat63] J. Tate – « Duality theorems in Galois cohomology over number fields », Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962), Inst. Mittag-Leffler, Djursholm, 1963, p. 288–295.

[Wan50] S. Wang – « On Grunwald's theorem », *Ann. of Math. (2)* **51** (1950), p. 471–484.

[Wan96] L. Wang – « Brauer-Manin obstruction to weak approximation on abelian varieties », *Israel J. Math.* **94** (1996), p. 189–200.

[Wat79] W. C. Waterhouse – *Introduction to affine group schemes*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 66, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1979.

[Wit12] O. Wittenberg – « Zéro-cycles sur les fibrations au-dessus d'une courbe de genre quelconque », *Duke Math. J.* **161** (2012), no. 11, p. 2113–2166.

[Wit16] ———, « Rational points and zero-cycles on rationally connected varieties over number fields », `http://www.math.ens.fr/~wittenberg/slc.pdf`, 2016, à paraître aux actes de l'AMS Summer Institute in Algebraic Geometry, Salt Lake City.

[WX12] D. Wei & F. Xu – « Integral points for multi-norm tori », *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **104** (2012), no. 5, p. 1019–1044.