

Le défaut d'approximation forte dans les groupes linéaires connexes

Cyril Demarche

21 janvier 2010

Résumé

On considère un groupe algébrique linéaire connexe G défini sur un corps de nombres k . On établit une suite exacte décrivant l'adhérence du groupe $G(k)$ des points rationnels de G dans le groupe des points adéliques de G . On en déduit que le défaut d'approximation forte sur G est mesuré par le groupe de Brauer algébrique de G via l'obstruction de Brauer-Manin entière. On montre aussi que l'obstruction de Brauer-Manin entière sur un tore sous G est la seule obstruction à l'existence d'un point entier sur ce tore. On obtient enfin une suite exacte (non-abélienne) de type Poitou-Tate pour la cohomologie galoisienne du groupe G . Les ingrédients principaux pour la preuve de ces résultats sont les théorèmes de dualité locale et globale pour les complexes de k -tores de longueur deux et les applications d'abélianisation en cohomologie galoisienne définies par Borovoi.

Abstract

Let G be a connected linear algebraic group over a number field k . We establish an exact sequence describing the closure of the group $G(k)$ of rational points of G in the group of adelic points of G . This exact sequence describes the defect of strong approximation on G in terms of the algebraic Brauer group of G . In particular, we deduce from those results that the integral Brauer-Manin obstruction on a torsor under the group G is the only obstruction to the existence of an integral point on this torsor. We also obtain a non-abelian Poitou-Tate exact sequence for the Galois cohomology of the linear group G . The main ingredients in the proof of those results are the local and global duality theorems for complexes of k -tori of length two and the abelianization maps in Galois cohomology introduced by Borovoi.

2000 Mathematics Subject Classification: Primary : 11E72; secondary : 14L15, 14G05.

1 Introduction

Soit k un corps de nombres d'anneau des entiers \mathcal{O}_k , Ω_k l'ensemble des places de k , et \bar{k} une clôture algébrique de k . Si v est une place de k , on note k_v le complété de k en v , et \mathcal{O}_v l'anneau des entiers de k_v . Par convention, on appelle k -groupe algébrique un schéma en groupes de type fini sur $\text{Spec } k$ (un tel schéma en groupes est nécessairement séparé, voir [DG70], exposé VI_A, section 0.2); pour un tel groupe G , on note indifféremment $H^0(k, G)$ ou $G(k)$ l'ensemble des k -points de G . Si G/k est un groupe algébrique, on se donne un schéma en groupes séparé \mathcal{G} sur un ouvert U (non vide) de $\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$, tel que la fibre générique de \mathcal{G} soit isomorphe à G , et on définit $P^0(k, G) := \prod'_{v \in \Omega_k} H^0(k_v, G)$ comme étant le produit restreint des groupes $H^0(k_v, G)$ (avec la convention que si v est une place archimédienne, $H^0(k_v, G)$ désigne le groupe des composantes connexes de $G(k_v)$) par rapport aux sous-groupes $H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{G}) := \mathcal{G}(\mathcal{O}_v)$. L'ensemble $P^0(k, G)$ ainsi obtenu est indépendant du modèle \mathcal{G} choisi. On munit ce groupe de sa topologie de produit restreint, que

l'on appelle indifféremment *topologie adélique* ou *topologie forte*. On s'intéresse à l'*adhérence forte* de $G(k)$ dans $P^0(k, G)$: étant donnée une partie P de $P^0(k, G)$, on note \overline{P} l'adhérence de P dans $P^0(k, G)$ muni de cette topologie adélique ; et si S est un ensemble fini de places de k , on note $G_S := \prod_{v \in S} H^0(k_v, G)$. On cherche notamment à déterminer l'adhérence $\overline{G(k).G_{S_0}}$ dans $P^0(k, G)$, où S_0 est un ensemble fini de places de k (on doit enlever un certain nombre de places de k , comme c'est le cas dans le théorème d'approximation forte pour les groupes semi-simples simplement connexes : voir [PR94], théorème 7.12) ; ici, $G(k).G_{S_0}$ désigne exactement l'ensemble des produits d'un élément de $G(k)$ par un élément de G_{S_0} dans $P^0(k, G)$ (ou de façon équivalente le sous-groupe engendré par de tels produits : on montre en effet facilement que l'ensemble des produits est un sous-groupe de $P^0(k, G)$). On va décrire cette adhérence en termes du groupe de Brauer cohomologique de G , défini par $\text{Br}(G) := H^2(G, \mathbf{G}_m) = H^2_{\text{étale}}(G, \mathbf{G}_m)$ (dans tout ce texte, sauf mention explicite du contraire, la cohomologie considérée est la cohomologie étale) ; on définit aussi le groupe de Brauer algébrique de G par la formule $\text{Br}_1(G) := \text{Ker}(\text{Br}(G) \rightarrow \text{Br}(\overline{G}))$, \overline{G} désignant le \overline{k} -groupe obtenu à partir de G par extension des scalaires de k à \overline{k} . Enfin on considère souvent le groupe quotient $\text{Br}_a(G) := \text{Br}_1(G)/\text{Br}(k)$ (que l'on identifiera, via la section unité de G , au sous-groupe de $\text{Br}_1(G)$ formé des éléments nuls sur l'unité de G), et ses sous-groupes finis $\mathbb{B}(G) := \text{Ker}(\text{Br}_a(G) \rightarrow \prod_{v \in \Omega_k} \text{Br}_a(G \times_k k_v))$ et $\mathbb{B}_\omega(G) := \{A \in \text{Br}_a(G) : A_v = 0 \in \text{Br}_a(G_v) \text{ pour presque toute place } v\}$. On utilise également les notations usuelles suivantes : si H est un k -groupe algébrique (non nécessairement commutatif), et $i = 0$ ou 1 , on note $H^i(k, H) := H^i(\Gamma_k, H(\overline{k}))$ l'ensemble de cohomologie galoisienne (voir [Ser94], I.5.1), et on définit les ensembles suivants :

$$\text{III}^i(k, H) = \text{III}^i(H) := \text{Ker} \left(H^i(k, H) \rightarrow \prod_{v \in \Omega_k} H^i(k_v, H) \right).$$

L'ensemble $\text{III}^1(k, H)$ est fini, et dans le cas où le groupe H est commutatif, le groupe $\text{III}^1(k, H)$ est le groupe de Tate-Shafarevich du groupe H .

Rappelons également que si A est un groupe topologique, on note A^\wedge la complétion de A pour la topologie des sous-groupes ouverts distingués d'indices finis. Si A est en outre abélien, on note A^D le groupe des morphismes de groupes continus $A \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. On munit ce groupe A^D de la topologie compacte-ouverte.

On rappelle enfin qu'un k -groupe semi-simple est dit presque k -simple lorsque ce groupe n'a pas de k -sous-groupe fermé distingué non trivial de dimension strictement positive. Avec ces notations, l'un des résultats principaux de ce texte est alors le suivant :

Théorème (Théorème 3.19). *Soit G/k un groupe algébrique réductif¹. Soit S_0 un ensemble fini de places de k . On note G^{sc} le revêtement simplement connexe du groupe dérivé de G et $\rho : G^{\text{sc}} \rightarrow G$ le morphisme naturel. On suppose que $(G^{\text{sc}})_{S_0}^i$ est non compact pour tout k -facteur presque k -simple $(G^{\text{sc}})^i$ de G^{sc} . Il existe une bijection fonctorielle $\mathbb{B}(G)^D \cong \text{III}^1(k, G)$ qui munit le second ensemble d'une structure de groupe abélien. Alors l'adhérence $\overline{G(k).\rho(G_{S_0}^{\text{sc}})}$ est un sous-groupe distingué de $P^0(k, G)$, et on a une suite exacte de groupes, fonctorielle en G :*

$$1 \rightarrow \overline{G(k).\rho(G_{S_0}^{\text{sc}})} \rightarrow P^0(k, G) \xrightarrow{\theta} (\text{Br}_a G)^D \rightarrow \text{III}^1(k, G) \rightarrow 0.$$

Les flèches apparaissant dans cette suite sont les morphismes suivants : la première flèche est l'injection évidente, la deuxième, notée θ , provient de l'accouplement de Brauer-Manin $P^0(k, G) \times \text{Br}(G) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ dont on rappelle la définition à la section 3.2, et la dernière flèche est la composée du morphisme dual de l'injection naturelle $\mathbb{B}(G) \rightarrow \text{Br}_a G$ avec l'isomorphisme canonique de groupes abéliens $\mathbb{B}(G)^D \cong \text{III}^1(k, G)$ (voir par exemple le théorème 8.5 de Sansuc dans [San81]).

¹par convention, dans tout ce texte, "réductif" signifie "réductif connexe", suivant la définition de [DG70], Exposé XIX, 1.6.

L'un des ingrédients de la preuve de ce résultat est le théorème d'approximation forte (voir théorème 7.12 de [PR94], et début de la section 3.2), dû notamment à Kneser et Platonov, et qui concerne les groupes semi-simples simplement connexes.

Ce résultat généralise aux groupes réductifs (et même aux groupes linéaires connexes quelconques : voir corollaire 3.20) les résultats récents suivants :

- Le théorème 4.5(b) de [CTX09], dû à Colliot-Thélène et Xu Fei, qui traite le cas où le groupe G est semi-simple, et qui donne dans ce cas les trois premiers termes de la suite exacte du théorème. Le théorème 3.19 est une généralisation partielle du résultat de Colliot-Thélène et Xu Fei, puisque ces auteurs traitent des espaces homogènes de groupes semi-simples simplement connexes à stabilisateurs finis, et donc en particulier des groupes semi-simples.
- Le résultat récent de Harari (théorème 2 de [Har02]), qui traite du défaut d'approximation forte pour les k -tores (et plus généralement pour les 1-motifs) : le lien entre ce théorème de Harari et celui que l'on se propose de démontrer provient de l'isomorphisme classique $\text{Br}_a(T) \cong H^2(k, \hat{T})$ pour un k -tore T (voir [San81], lemme 6.9.(ii)).

En outre, la preuve proposée ici n'est pas un "dévissage" à partir de ces résultats : on les redémontre au passage. Dans la section 3.4, on mentionne une autre preuve d'une partie du résultat principal par dévissage et réduction au cas des tores et au théorème 2 de [Har02].

On déduit de ce résultat sur le défaut d'approximation forte de nouvelles estimations sur le nombre de classes d'un groupe réductif (voir section 4).

Les preuves de ces résultats reposent sur les théorèmes de dualité pour l'hypercohomologie des complexes de tores de longueur 2 obtenus dans [Dem09]. On déduit également de ces théorèmes de dualité une version de la suite de Poitou-Tate, pour la cohomologie (non-abélienne) d'un groupe linéaire connexe, qui prolonge la suite exacte de Kottwitz-Borovoi (voir [Bor98], théorème 5.15). Dans l'énoncé suivant, $H^2(k, G)$ désigne l'ensemble de cohomologie non abélienne, défini dans [FSS98], section 1 ou dans [Bor93], et \sim est une relation d'équivalence naturelle sur $H^2(k, G)$:

Théorème (Théorème 5.1). *Soit G/k un groupe réductif.*

- *Alors on a une suite exacte naturelle d'ensembles pointés (la première ligne est une suite exacte de groupes), fonctorielle en G :*

$$\begin{array}{ccccccc}
(\text{Br}_a G)^D & \longleftarrow & P^0(k, G) & \longleftarrow & P^0(k, G)^{\text{Br}_a} & \longleftarrow & 0 \\
\downarrow & & & & & & \\
H^1(k, G) & \longrightarrow & P^1(k, G) & \longrightarrow & (\text{Pic } G)^D & & \\
& & & & \downarrow & & \\
0 & \longleftarrow & (k[G]^*/k^*)^D & \longleftarrow & \bigoplus_{v \in \Omega_k} H^2(k_v, G)/\sim & \longleftarrow & H^2(k, G)/\sim
\end{array}$$

- *Si de plus G vérifie que $G_{S_0}^i := \prod_{v \in S_0} G^i(k_v)$ est non compact pour tout k -facteur presque k -simple G^i de G^{sc} , alors on peut identifier $P^0(k, G)^{\text{Br}_a}$ à $\overline{G_{S_0}^{\text{sc}} G}(k)$.*

Le plan de ce texte est le suivant : on montre d'abord à la section 2 un résultat concernant l'approximation forte pour les complexes de tores à l'aide des théorèmes de dualité de [Dem09]. Puis grâce aux techniques d'abélianisation de Borovoi, et à l'aide du théorème d'approximation forte, on décrit le défaut d'approximation forte pour les groupes réductifs dans le cas non compact, en terme d'obstruction de Brauer-Manin (voir section 3.2). Ensuite, on donne des applications de ces résultats, avec notamment des estimations sur le nombre de classes d'un groupe réductif (section 4). Enfin, on démontre à la section 5 l'existence d'une suite de Poitou-Tate non abélienne

pour un groupe réductif qui généralise la suite de Poitou-Tate pour les tores et qui prolonge la suite exacte de Kottwitz-Borovoi (voir [Bor98], théorème 5.15). On termine ce texte par une application concernant l'obstruction de Brauer-Manin entière sur un espace principal homogène sous un groupe algébrique connexe (section 3.2).

Remerciements Je remercie très chaleureusement David Harari pour son aide et sa patience. Je remercie également Mikhail Borovoi, Jean-Louis Colliot-Thélène et Philippe Gille pour leurs précieux commentaires.

2 Approximation forte pour les complexes de tores

Dans cette partie, étant donné un complexe $C = [T_1 \xrightarrow{\rho} T_2]$ de k -tores, on décrit l'adhérence de $\mathbf{H}^0(k, C)$ dans $\mathbf{P}^0(k, C) := \prod'_v \mathbf{H}^0(k_v, C)$ pour la topologie de produit restreint (le produit restreint est pris par rapport aux sous-groupes $\mathbf{H}^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{C})$).

Dans toute cette section, $C = [T_1 \xrightarrow{\rho} T_2]$ est un complexe de tores sur k qui s'étend en un complexe de tores $\mathcal{C} = [\mathcal{T}_1 \xrightarrow{\rho} \mathcal{T}_2]$ sur $U = \text{Spec } \mathcal{O}_{k,S}$, S étant un ensemble fini de places de k , suffisamment grand. Dans toute la suite, on supposera *le noyau* $\text{Ker}(\rho)$ *du morphisme de k -tores fini*.

2.1 Rappels sur les théorèmes de dualité pour les complexes de tores

On renvoie à [Dem09] pour les généralités sur l'hypercohomologie des complexes de tores, et notamment pour la définition de la topologie sur les groupes $\mathbf{H}^0(k_v, C)$. On rappelle néanmoins les résultats principaux de [Dem09] que l'on utilise dans cette section, et qui sont cruciaux en vue des résultats résumés dans l'introduction.

Soit S un schéma et $\mathcal{C} := [\mathcal{T}_1 \xrightarrow{\rho} \mathcal{T}_2]$ un complexe de S -tores (au sens de [DG70], Exposé IX, définition 1.3), où \mathcal{T}_2 est en degré 0. On note $\widehat{\mathcal{T}}_i$ le dual de Cartier de \mathcal{T}_i , et $\widehat{\mathcal{C}} := [\widehat{\mathcal{T}}_2 \xrightarrow{\widehat{\rho}} \widehat{\mathcal{T}}_1]$ le complexe de faisceaux étales (localement constants), dual de \mathcal{C} (avec $\widehat{\mathcal{T}}_1$ en degré 0). On peut voir \mathcal{C} et $\widehat{\mathcal{C}}$ comme des objets de la catégorie dérivée associée à la catégorie des complexes bornés de faisceaux fppf (on renvoie à [Wei94] pour des rappels sur les catégories dérivées et sur les triangles exacts). Dans cette catégorie, on dispose d'un accouplement naturel $\mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \widehat{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbf{G}_m[1]$, fonctoriel en \mathcal{C} .

On définit également dans [Dem09] des réalisations n -adiques de \mathcal{C} , de la façon suivante : si $n \geq 1$, $T_{\mathbf{Z}/n}(\mathcal{C}) := H^0(\mathcal{C}[-1] \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ et $T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{\mathcal{C}}) := H^0(\widehat{\mathcal{C}}[-1] \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$. Ce sont des faisceaux fppf en groupes abéliens. En outre, on montre que le faisceau fppf $T_{\mathbf{Z}/n}(\mathcal{C})$ est représentable par un schéma en groupes de type multiplicatif fini sur S , et $T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{\mathcal{C}})$ est représentable par le groupe constant tordu fini dual $\underline{\text{Hom}}_{S\text{-gr}}(T_{\mathbf{Z}/n}(\mathcal{C}), \mathbf{G}_m)$, et le produit tensoriel dérivé $\mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n$ s'insère dans les triangles exacts suivants, fonctoriels en \mathcal{C} , dans la catégorie dérivée des faisceaux abéliens fppf sur S :

$${}_n(\text{Ker } \rho)[2] \rightarrow \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n \rightarrow T_{\mathbf{Z}/n}(\mathcal{C})[1] \rightarrow {}_n(\text{Ker } \rho)[3]$$

et

$$T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{\mathcal{C}})[1] \rightarrow \widehat{\mathcal{C}} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n \rightarrow {}_n(\widehat{\text{Ker } \rho}) \rightarrow T_{\mathbf{Z}/n}(\widehat{\mathcal{C}})[2].$$

Dans [Dem09], on utilise ces réalisations n -adiques pour montrer des théorèmes de dualité locale et globale. L'un des résultats principaux de [Dem09] est la suite de Poitou-Tate suivante, que l'on utilise dans la suite de ce texte (voir théorème 6.1 de [Dem09]) :

Théorème. Soit k un corps de nombres et $C = [T_1 \xrightarrow{\rho} T_2]$ un complexe de tores défini sur k , avec $\text{Ker}(\rho)$ fini. On a alors une suite exacte fonctorielle en C :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbf{H}^{-1}(k, C) & \longrightarrow & \mathbf{P}^{-1}(k, C) & \longrightarrow & \mathbf{H}^2(k, \widehat{C})^D \\
& & & & & & \downarrow \\
& & \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D & \longleftarrow & \mathbf{P}^0(k, C)^\wedge & \longleftarrow & \mathbf{H}^0(k, C)^\wedge \\
& & \downarrow & & & & \\
& & \mathbf{H}^1(k, C) & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(k, C) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k, \widehat{C})^D \\
& & & & & & \downarrow \\
0 & \longleftarrow & \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})^D & \longleftarrow & \mathbf{P}^2(k, C) & \longleftarrow & \mathbf{H}^2(k, C).
\end{array}$$

On dispose également, sous les mêmes hypothèses, de la suite exacte duale :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})^\wedge & \longrightarrow & \mathbf{P}^{-1}(k, \widehat{C})^\wedge & \longrightarrow & \mathbf{H}^2(k, C)^D \\
& & & & & & \downarrow \\
& & \mathbf{H}^1(k, C)^D & \longleftarrow & \mathbf{P}^0(k, \widehat{C}) & \longleftarrow & \mathbf{H}^0(k, \widehat{C}) \\
& & \downarrow & & & & \\
& & \mathbf{H}^1(k, \widehat{C}) & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(k, \widehat{C})_{\text{tors}} & \longrightarrow & (\mathbf{H}^0(k, C)^D)_{\text{tors}} \\
& & & & & & \downarrow \\
0 & \longleftarrow & \mathbf{H}^{-1}(k, C)^D & \longleftarrow & \mathbf{P}^2(k, \widehat{C}) & \longleftarrow & \mathbf{H}^2(k, \widehat{C}).
\end{array}$$

2.2 Approximation forte pour les complexes de tores

L'objectif de cette section est d'utiliser les résultats rappelés à la sous-section 2.1 pour décrire l'adhérence de $\mathbf{H}^0(k, C)$ dans $\mathbf{P}^0(k, C) := \prod'_v \mathbf{H}^0(k_v, C)$. Rappelons d'abord un résultat bien connu que l'on va utiliser dans tout le texte :

Théorème (Lang). Soit A un anneau local hensélien, à corps résiduel fini. Soit \mathcal{G} un $\text{Spec}(A)$ -schéma en groupes lisse, dont la fibre spéciale est connexe. Alors $H^1(\text{Spec}(A), \mathcal{G}) = 1$.

Démonstration : C'est la combinaison de [Mil80], III.3.11 et du théorème de Lang "usuel", à savoir le théorème 2 de [Lan56]. \square

Commençons désormais l'étude de l'approximation forte sur le complexe C par le lemme suivant :

Lemme 2.1. Soit v une place hors de S . On note $\mathbf{H}_v^0(k_v, C) := \mathbf{H}^0(k_v, C)/\mathbf{H}^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{C})$. Alors $\mathbf{H}_v^0(k_v, C)$ est un groupe discret, i.e. le sous-groupe $\mathbf{H}^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{C})$ est ouvert dans $\mathbf{H}^0(k_v, C)$.

Démonstration : On considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{T}_1) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{T}_2) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{C}) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{T}_1) = 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^0(k_v, T_1) & \longrightarrow & H^0(k_v, T_2) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k_v, C) & \longrightarrow & Q \longrightarrow 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H_r^0(k_v, T_1) & \longrightarrow & H_r^0(k_v, T_2) & \longrightarrow & \mathbf{H}_r^0(k_v, C) & \longrightarrow & Q \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}$$

où Q est un sous-groupe fini (sous-groupe de $H^1(k_v, T_1)$). Le groupe $H^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{T}_1)$ est trivial par le théorème de Lang, après restriction à la fibre spéciale de $\text{Spec}(\mathcal{O}_v)$. Les colonnes de ce diagramme sont exactes par définition, et les deux premières lignes sont exactes. Une chasse au diagramme assure l'exactitude de la suite suivante :

$$H_r^0(k_v, T_1) \rightarrow H_r^0(k_v, T_2) \rightarrow \mathbf{H}_r^0(k_v, C) \rightarrow Q \rightarrow 0.$$

Or les deux premiers groupes de cette suite sont discrets, et le groupe Q est fini, donc cela assure que le groupe $\mathbf{H}_r^0(k_v, C)$ est discret. \square

Notons $\mathbf{P}_S^0(C) := \prod'_{v \notin S} \mathbf{H}^0(k_v, C)$

Lemme 2.2. *L'image de $\mathbf{H}^0(k, C)$ dans $\mathbf{P}_S^0(C)/\prod_{v \notin S} \mathbf{H}^0(\mathcal{O}_v, C) = \bigoplus_{v \notin S} \mathbf{H}_r^0(k_v, C)$ est d'indice fini.*

Démonstration : On sait déjà que ce résultat est vrai pour un tore (voir [Har08], lemme 3). On a un diagramme commutatif à lignes exactes (voir preuve du lemme 2.1 pour la seconde ligne) de la forme :

$$\begin{array}{ccccccc}
H^0(k, T_2) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k, C) & \xrightarrow{h} & H^1(k, T_1) & \longrightarrow & H^1(k, T_2) \\
\downarrow & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow \\
\bigoplus_{v \notin S} H_r^0(k_v, T_2) & \longrightarrow & \bigoplus_{v \notin S} \mathbf{H}_r^0(k_v, C) & \xrightarrow{h'} & \bigoplus_{v \notin S} H^1(k_v, T_1) & \longrightarrow & \bigoplus_{v \notin S} H^1(k_v, T_2)
\end{array}$$

On sait que le conoyau du morphisme g est fini : en effet, via la suite exacte de Poitou-Tate pour T_1 (voir [HS05], théorème 5.6 ou [Dem09], théorème 6.1), on sait que le conoyau de $g' : H^1(k, T_1) \rightarrow \bigoplus_{v \in \Omega_k} H^1(k_v, T_1)$ s'identifie à un sous-groupe de $H^1(k, \widehat{T_1})^D$, donc $\text{Coker}(g')$ est fini, et donc $\text{Coker}(g)$ aussi puisque ce dernier est un quotient de $\text{Coker}(g')$.

On s'intéresse au diagramme suivant, à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \text{Ker } h & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k, C) & \longrightarrow & \text{Im } h \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow f' & & \downarrow f & & \downarrow \tilde{g} \\
0 & \longrightarrow & \text{Ker } h' & \longrightarrow & \bigoplus_{v \notin S} \mathbf{H}_r^0(k_v, C) & \longrightarrow & \text{Im } h' \longrightarrow 0.
\end{array}$$

On va montrer que les conoyaux de \tilde{g} et de f' sont finis. Pour \tilde{g} , cela résulte de la finitude du noyau de $H^1(k, T_2) \rightarrow \bigoplus_{v \notin S} H^1(k_v, T_2)$ (cette finitude est une conséquence de la finitude de

$\mathbb{H}_\omega^1(k, T_2)$) et de la finitude du conoyau de g , par le lemme du serpent. Pour f' , c'est une conséquence directe de la finitude du conoyau du morphisme $H^0(k, T_2) \rightarrow \bigoplus_{v \notin S} H_r^0(k_v, T_2)$ (qui est une conséquence de la finitude du nombre de classes de T_2 : voir [PR94], théorème 5.1). On applique alors le lemme du serpent au diagramme précédent pour montrer que Coker f est fini. \square

Proposition 2.3. *Pour un ouvert U de $\text{Spec}(\mathcal{O}_k)$ assez petit, on a une suite exacte (fonctorielle en C)*

$$\mathbf{H}^0(U, \mathcal{C}) \rightarrow \mathbf{H}^0(k, C) \rightarrow \bigoplus_{v \notin S} \mathbf{H}_r^0(k_v, C).$$

Démonstration : Cette suite est clairement un complexe. Pour l'exactitude, on s'intéresse au diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$(1) \quad \begin{array}{ccccccccc} H^0(U, \mathcal{T}_1) & \longrightarrow & H^0(U, \mathcal{T}_2) & \longrightarrow & H^0(U, \mathcal{C}) & \longrightarrow & H^1(U, \mathcal{T}_1) & \longrightarrow & H^1(U, \mathcal{T}_2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^0(k, T_1) & \longrightarrow & H^0(k, T_2) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k, C) & \longrightarrow & H^1(k, T_1) & \longrightarrow & H^1(k, T_2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \bigoplus_{v \notin S} H_r^0(k_v, T_1) & \longrightarrow & \bigoplus_{v \notin S} H_r^0(k_v, T_2) & \longrightarrow & \bigoplus_{v \notin S} \mathbf{H}_r^0(k_v, C) & \longrightarrow & \bigoplus_{v \notin S} H^1(k_v, T_1) & \longrightarrow & \bigoplus_{v \notin S} H^1(k_v, T_2) \end{array} .$$

L'exactitude de la troisième ligne de ce diagramme a été montrée dans la preuve du lemme 2.1. On sait également que la deuxième colonne est exacte. Enfin, la quatrième colonne de ce diagramme est aussi exacte par le théorème A.8 de [GP08].

Or, pour U assez petit, le morphisme $H^1(U, \mathcal{T}_2) \rightarrow H^1(k, T_2)$ est injectif (voir le corrigenda de [HS05]). Une chasse au diagramme dans (1) assure alors que l'exactitude de la suite de la proposition (i.e. de la troisième colonne) est une conséquence de la surjectivité du morphisme $H^0(k, T_1) \rightarrow \bigoplus_{v \notin S} H_r^0(k_v, T_1)$. Or cette surjectivité est elle-même une conséquence de la finitude du nombre de classes d'un tore (voir théorème 5.1 de [PR94]), quitte à augmenter S , i.e. quitte à réduire U . \square

Corollaire 2.4. *La suite suivante est exacte :*

$$\mathbf{H}^0(U, \mathcal{C})^\wedge \rightarrow \mathbf{H}^0(k, C)^\wedge \rightarrow \left(\bigoplus_{v \notin S} \mathbf{H}_r^0(k_v, C) \right)^\wedge .$$

Démonstration : C'est une conséquence directe du lemme 2.2 et de la proposition 2.3 (voir preuve du corollaire 1 de [Har08]). \square

Notons désormais $\mathcal{P}_S^0(\mathcal{C}) := \prod_{v \in S} \mathbf{H}^0(k_v, C) \times \prod_{v \notin S} \mathbf{H}^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{C})$.

Proposition 2.5. *Pour U assez petit, on a une suite exacte, fonctorielle en \mathcal{C} :*

$$\mathbf{H}^0(U, \mathcal{C})^\wedge \rightarrow \mathcal{P}_S^0(\mathcal{C})^\wedge \xrightarrow{\theta} \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D .$$

Démonstration : On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{H}^0(U, \mathcal{C})^\wedge & \longrightarrow & \mathcal{P}_S^0(\mathcal{C})^\wedge & \xrightarrow{\theta} & \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D \\
\downarrow & & \downarrow i & & \downarrow = \\
\mathbf{H}^0(k, C)^\wedge & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(C)^\wedge & \xrightarrow{\theta} & \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
(\bigoplus_{v \notin S} \mathbf{H}_r^0(k_v, C))^\wedge & \xrightarrow{\cong} & (\bigoplus_{v \notin S} \mathbf{H}_r^0(k_v, C))^\wedge & & .
\end{array}$$

La deuxième ligne de ce diagramme est exacte (extraite de la suite de Poitou-Tate pour C : voir la deuxième ligne de la suite exacte du théorème 6.1 de [Dem09], ou les rappels de la section 2.1), ainsi que la première colonne (voir le corollaire précédent). La deuxième colonne est clairement un complexe. Il suffit donc de montrer l'injectivité de l'application $i : \mathcal{P}_S^0(\mathcal{C})^\wedge \rightarrow \mathbf{P}^0(C)^\wedge$. Pour cela, grâce à la preuve du lemme 5.21 de [Dem09], on sait que le morphisme $\mathbf{P}^0(C)_\wedge \rightarrow \mathbf{P}^0(C)^\wedge$ est injectif, donc il suffit d'avoir l'injectivité de $\mathcal{P}_S^0(\mathcal{C})^\wedge \rightarrow \mathbf{P}^0(C)_\wedge$.

Montrons l'injectivité de $\mathcal{P}_S^0(\mathcal{C})_\wedge \rightarrow \mathbf{P}^0(C)_\wedge$, à la manière du lemme 5.15 de [Dem09], à la différence qu'ici il est nécessaire d'avoir recours à la cohomologie plate : la preuve du lemme 5.15 de [Dem09] assure qu'il suffit, en considérant le triangle exact suivant

$$\mathcal{C} \xrightarrow{n} \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n \rightarrow \mathcal{C}[1]$$

de montrer que pour toute place v hors de S et pour tout entier n non-nul, le morphisme

$$\mathbf{H}_{\text{fppf}}^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \mathbf{H}_{\text{fppf}}^0(k_v, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$$

est injectif, puis d'utiliser le fait que \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 sont lisses sur U pour identifier les groupes d'hypercohomologie $\mathbf{H}_{\text{fppf}}^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{C})$ et $\mathbf{H}_{\text{ét}}^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{C})$ (voir [Gro68], III, théorème 11.7).

Soit un entier $n \geq 1$. On dispose du triangle exact suivant dans la catégorie dérivée associée à la catégorie des complexes bornés de faisceaux fppf (voir section 2.1 et [Dem09], lemme 2.3) :

$${}_n\text{Ker } \rho[2] \rightarrow \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n \rightarrow T_{\mathbf{Z}/n}(\mathcal{C}) \rightarrow {}_n\text{Ker } \rho[3].$$

On en déduit donc le diagramme commutatif à lignes exactes suivant, pour toute place v hors de S :

$$\begin{array}{ccccc}
H_{\text{fppf}}^2(\mathcal{O}_v, {}_n\text{Ker } \rho) & \longrightarrow & \mathbf{H}_{\text{fppf}}^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & \mathbf{H}_{\text{fppf}}^0(\mathcal{O}_v, T_{\mathbf{Z}/n}(\mathcal{C})) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H_{\text{fppf}}^2(k_v, {}_n\text{Ker } \rho) & \longrightarrow & \mathbf{H}_{\text{fppf}}^0(k_v, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) & \longrightarrow & \mathbf{H}_{\text{fppf}}^0(k_v, T_{\mathbf{Z}/n}(C)).
\end{array}$$

Or le groupe $H_{\text{fppf}}^2(\mathcal{O}_v, {}_n\text{Ker } \rho)$ est trivial par le lemme III.1.1.(a) de [Mil06], puisque ${}_n\text{Ker } \rho$ est un schéma en groupes fini plat sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_v)$. Donc l'injectivité de la deuxième flèche verticale est une conséquence de celle de la troisième. Pour montrer celle-ci, on utilise à nouveau le lemme III.1.1.(b) de [Mil06], qui implique que le groupe $H_v^1(\mathcal{O}_v, T_{\mathbf{Z}/n}(\mathcal{C}))$ est trivial, car le schéma en groupes $T_{\mathbf{Z}/n}(\mathcal{C})$ est fini plat sur \mathcal{O}_v . Donc on en déduit que le morphisme

$$\mathbf{H}_{\text{fppf}}^0(\mathcal{O}_v, T_{\mathbf{Z}/n}(\mathcal{C})) \rightarrow \mathbf{H}_{\text{fppf}}^0(k_v, T_{\mathbf{Z}/n}(C))$$

est injectif, ce qui implique bien, via le diagramme précédent, que le morphisme

$$\mathbf{H}_{\text{fppf}}^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \rightarrow \mathbf{H}_{\text{fppf}}^0(k_v, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$$

est injectif, pour tout n et toute place $v \notin S$. On a donc montré (puisque la cohomologie fppf de \mathcal{C} coïncide avec sa cohomologie étale par lissité) l'injectivité du morphisme $\mathcal{P}_S^0(\mathcal{C})_\wedge \rightarrow \mathbf{P}^0(C)_\wedge$.

Pour conclure la preuve, il suffit désormais de montrer que $\mathcal{P}_S^0(\mathcal{C})_\wedge$ est bien la complétion profinie de $\mathcal{P}_S^0(\mathcal{C})$. Puisque la limite projective commute au produit (pour des groupes abéliens), il suffit de montrer que $\mathbf{H}^0(k_v, C)_\wedge = \mathbf{H}^0(k_v, C)^\wedge$ et $\mathbf{H}^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{C})_\wedge = \mathbf{H}^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{C})^\wedge$. Mais ces résultats sont clairs puisque $H^0(k_v, T_i)/n$, $H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{I}_i)/n$, $H^1(k_v, T_i)$ et $H^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{I}_i)$ sont finis. \square

Notons $\overline{\mathbf{H}^0(U, \mathcal{C})}$ l'adhérence de l'image de $\mathbf{H}^0(U, \mathcal{C})$ dans $\mathcal{P}_S^0(\mathcal{C})$.

Théorème 2.6. *Pour U suffisamment petit, on a une suite exacte, fonctorielle en \mathcal{C} :*

$$0 \rightarrow \overline{\mathbf{H}^0(U, \mathcal{C})} \rightarrow \mathcal{P}_S^0(\mathcal{C}) \xrightarrow{\theta} \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D.$$

Démonstration : Il est clair que cette suite est un complexe (voir théorème 6.1 de [Dem09]). On note Q le quotient de $\mathcal{P}_S^0(\mathcal{C})$ par $\overline{\mathbf{H}^0(U, \mathcal{C})}$. C'est un espace topologique séparé. Montrons que le morphisme de complétion $Q \rightarrow Q^\wedge$ est injectif. Pour cela, il suffit que Q soit compactement engendré. Or si $v \in S$, la finitude de $H^1(k_v, T_1)$ assure que $\mathbf{H}^0(k_v, C)$ contient un sous-groupe d'indice fini, qui est un quotient topologique de $T_2(k_v)$. Or $T_2(k_v)$ est engendré par une partie compacte, donc Q aussi. D'où le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \overline{\mathbf{H}^0(U, \mathcal{C})} & \longrightarrow & \mathcal{P}_S^0(\mathcal{C}) & \longrightarrow & Q \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \overline{\mathbf{H}^0(U, \mathcal{C})}^\wedge & \longrightarrow & \mathcal{P}_S^0(\mathcal{C})^\wedge & \longrightarrow & Q^\wedge. \end{array}$$

Alors une chasse au diagramme, l'application des résultats précédents et l'injectivité de la dernière flèche verticale assurent le résultat. \square

Lemme 2.7. *$\mathbf{P}^0(C)$ et $\mathbf{P}^0(C)^\wedge$ ont même image dans $\mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D$.*

Démonstration : Soit $\mathcal{C} := [\mathcal{I}_1 \rightarrow \mathcal{I}_2]$ un complexe de schémas en groupes commutatifs plats de type fini étendant C sur $\text{Spec } \mathcal{O}_k$ (un tel modèle existe toujours. Pour davantage de précisions sur les modèles entiers de groupes algébriques, on pourra consulter par exemple [BLR90]). On définit le groupe des classes de \mathcal{C} par $\text{Cl}(\mathcal{C}) := \mathbf{P}^0(k, C)/(\mathbf{H}^0(k, C) \cdot \mathcal{C}(\mathbf{A}_\infty))$, où $\mathcal{C}(\mathbf{A}_\infty) := \prod_{v \in S_\infty} \mathbf{H}^0(k_v, C) \times \prod_{v \notin S_\infty} \mathbf{H}^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{C})$.

Lemme 2.8. *Le groupe $\text{Cl}(\mathcal{C})$ est fini.*

Démonstration : On considère le diagramme commutatif à lignes exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(k, T_2) \times \mathcal{I}_2(\mathbf{A}_\infty) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k, C) \times \mathcal{C}(\mathbf{A}_\infty) & \longrightarrow & H^1(k, T_1) \times \mathcal{Q} & \longrightarrow & H^1(k, T_2) \\ \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \downarrow d \\ P^0(k, T_2) & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(k, C) & \longrightarrow & P^1(k, T_1) & \longrightarrow & P^1(k, T_2) \end{array}$$

où \mathcal{Q} est le quotient de $\mathcal{C}(\mathbf{A}_\infty)$ par l'image de $\mathcal{I}_2(\mathbf{A}_\infty)$. Le lemme du serpent assure que la finitude de $\text{Coker}(b)$ est une conséquence des finitudes de $\text{Coker}(a)$, $\text{Coker}(c)$ et $\text{Ker}(d)$. Or $\text{Coker}(a)$ est fini par finitude du nombre de classes du tore T_2 , $\text{Coker}(c)$ est fini grâce à la suite de Poitou-Tate pour T_1 (finitude de $H^1(k, \widehat{T}_1)$), et $\text{Ker}(d) = \text{III}^1(T_2)$ est fini. D'où le lemme. \square

Montrons que ce lemme implique le lemme 2.7. Il est clair qu'il suffit de montrer que le quotient $\mathbf{P}^0(C)/\overline{\mathbf{H}^0(k, C)}$ est compact. Or $\mathcal{C}(\mathbf{A}_\infty)$ est un sous-groupe ouvert de $\mathbf{P}^0(k, C)$, donc $\overline{\mathbf{H}^0(k, C)} \subset \mathbf{H}^0(k, C) \cdot \mathcal{C}(\mathbf{A}_\infty)$, et on a une suite exacte de groupes abéliens :

$$\mathcal{C}(\mathbf{A}_\infty) \rightarrow \mathbf{P}^0(C)/\overline{\mathbf{H}^0(k, C)} \rightarrow \text{Cl}(\mathcal{C}) \rightarrow 0.$$

On remarque que le groupe $\mathcal{C}(\mathbf{A}_\infty)$ est compact (par le théorème de Tychonov et la convention pour les groupes de cohomologie modifiés aux places infinies), et le groupe $\text{Cl}(\mathcal{C})$ est fini par le lemme précédent, donc la suite exacte assure que le groupe $\mathbf{P}^0(C)/\overline{\mathbf{H}^0(k, C)}$ est compact. Cela conclut la preuve du lemme 2.7. \square

Théorème 2.9. *On note $\overline{\mathbf{H}^0(k, C)}$ l'adhérence forte de $\mathbf{H}^0(k, C)$ dans $\mathbf{P}^0(C)$. Alors on a une suite exacte, fonctorielle en C :*

$$0 \rightarrow \overline{\mathbf{H}^0(k, C)} \rightarrow \mathbf{P}^0(C) \rightarrow \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D \rightarrow \mathbb{H}^1(C) \rightarrow 0.$$

Démonstration : On choisit d'abord U suffisamment petit, et S correspondant. Le début de la suite exacte (trois premiers termes) provient du théorème 2.6, en passant à la limite inductive sur T fini contenant S . On extrait la suite exacte suivante de la suite de Poitou-Tate :

$$\mathbf{P}^0(C)^\wedge \rightarrow \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D \rightarrow \mathbb{H}^1(C) \rightarrow 0$$

et on conclut avec le lemme 2.7. \square

3 Approximation forte dans les groupes linéaires connexes

L'objectif de cette section est de déduire le théorème principal (théorème 3.19) du théorème d'approximation forte et du théorème 2.9. On commence par traiter les places réelles.

3.1 Hypercohomologie modifiée à la Tate et abélianisation

L'objectif de cette section est d'étendre les résultats connus, dûs à Deligne dans [Del79], à Breen dans [Bre90] et à Borovoi dans [Bor98], sur l'abélianisation de la cohomologie galoisienne (en degré 0 essentiellement) à la cohomologie modifiée "à la Tate". Soient G_1 et G_2 deux groupes algébriques sur \mathbf{R} , $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ un morphisme de \mathbf{R} -groupes.

Définition 3.1. On note $Z^0(\mathbf{R}, [G_1 \rightarrow G_2])$ la catégorie des couples (X, P) , où X est un \mathbf{R} -torseur sous G_1 et P est une section du \mathbf{R} -torseur X' obtenu en poussant X par le morphisme $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$, les flèches étant les suivantes : deux objets (X, P) et (Y, Q) sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de toseurs $\psi : X \rightarrow Y$ tel que l'image de P par l'isomorphisme $\psi' : X' \rightarrow Y'$ (induit par ψ) est dans la même composante connexe de $Y'(\mathbf{R})$ que Q . L'ensemble des classes d'isomorphisme ainsi obtenues est noté $\widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [G_1 \rightarrow G_2])$. C'est un ensemble pointé par la classe du toseur trivial sous G_1 muni de la trivialisation fournie par le neutre de G_2 .

Remarque 3.2. *On dispose de flèches canoniques surjectives évidentes $\mathbf{H}^0(\mathbf{R}, [G_1 \rightarrow G_2]) \rightarrow \widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [G_1 \rightarrow G_2])$, où $\mathbf{H}^0(\mathbf{R}, [G_1 \rightarrow G_2])$ est défini par exemple dans [Bor98], section 3.1.1.*

Remarque 3.3. On dispose également d'une définition de l'ensemble $\widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [G_1 \rightarrow G_2])$ en terme de cocycles : on note Z^0 l'ensemble des couples (z, g) où $z : \Gamma_R \rightarrow G_1$ est un 1-cocycle au sens usuel, et $g_2 \in G_2$, de sorte que l'on ait la relation $\varphi(z_\sigma^{-1})g_2 = {}^\sigma g_2$ dans G_2 . On munit alors Z^0 de la relation d'équivalence suivante : $(z, g_2) \simeq (z', g'_2)$ s'il existe $g_1 \in G_1$ tel que $z'_\sigma = g_1^{-1}z_\sigma g_1$ et $g'_2 g_2^{-1} \varphi(g_1) \in G_2^0(\mathbf{R})$. Alors on définit $\widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [G_1 \rightarrow G_2])$ comme étant le quotient de Z^0 par cette relation d'équivalence. On vérifie aisément que les deux ensembles de cohomologie modifiés ainsi définis sont canoniquement isomorphes.

Remarque 3.4. L'ensemble $\widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [T^{\text{sc}} \rightarrow T])$ défini dans cette section s'identifie canoniquement au groupe d'hypercohomologie modifiée du complexe de tores $[T^{\text{sc}} \rightarrow T]$ noté également $\widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [T^{\text{sc}} \rightarrow T])$. Cette identification est évidente via la description en termes de cocycles de la remarque 3.3 qui coïncide avec la définition usuelle utilisant des résolutions complètes du groupe Γ_R .

Lemme 3.5. On dispose d'une suite exacte naturelle

$$\widehat{H}^0(\mathbf{R}, G_1) \rightarrow \widehat{H}^0(\mathbf{R}, G_2) \rightarrow \widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [G_1 \rightarrow G_2]) \rightarrow H^1(\mathbf{R}, G_1) \rightarrow H^1(\mathbf{R}, G_2).$$

Démonstration : La définition des flèches apparaissant dans cette suite est claire : la première est la flèche usuelle induite par φ ; la deuxième associe à une composante connexe de $G_2(\mathbf{R})$ la classe du torseur trivial sous G_1 muni de la trivialisaton de G_2 donnée par un point de cette composante connexe ; la troisième flèche est juste la flèche d'oubli de la trivialisaton ; la dernière flèche est la flèche évidente induite par φ . Par définition des flèches, la suite du lemme est bien un complexe.

Montrons son exactitude :

- Exactitude en $\widehat{H}^0(\mathbf{R}, G_2)$: Soit $P \in G_2(\mathbf{R})$ dont la classe dans $\widehat{H}^0(\mathbf{R}, G_2)$ est d'image triviale dans $\widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [G_1 \rightarrow G_2])$. Alors il existe un isomorphisme de G_1 -torseurs $\psi : G_1 \rightarrow G_1$ induisant un morphisme $\psi' : G_2 \rightarrow G_2$ compatible avec φ , de sorte que $\psi'(P)$ est dans la composante neutre de $G_2(\mathbf{R})$. Alors, si e_1 désigne le neutre de G_1 , $\psi^{-1}(e_1)$ est un point de $G_1(\mathbf{R})$ dont l'image par φ est dans la même composante connexe de $G_2(\mathbf{R})$ que P . Donc la classe de P dans $\widehat{H}^0(\mathbf{R}, G_2)$ se relève dans $\widehat{H}^0(\mathbf{R}, G_1)$.
- Exactitude en $\widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [G_1 \rightarrow G_2])$: Soit $[(X, P)]$ une classe dans $\widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [G_1 \rightarrow G_2])$ d'image triviale dans $H^1(\mathbf{R}, G_1)$. Cela signifie exactement que le torseur X est isomorphe au torseur trivial sous G_1 , et donc que la classe $[(X, P)]$ est égale à une classe $[(G_1, P')]$, $P' \in G_2(\mathbf{R})$ correspondant à la trivialisaton P via une trivialisaton $X \cong G_1$, donc $[(X, P)]$ est bien l'image de la classe de P' dans $\widehat{H}^0(\mathbf{R}, G_2)$.
- Exactitude en $H^1(\mathbf{R}, G_1)$: évident par définition de $\widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [G_1 \rightarrow G_2])$. □

Lemme 3.6. Soit

$$1 \rightarrow [A \rightarrow B] \rightarrow [C \rightarrow D] \rightarrow [E \rightarrow F] \rightarrow 1$$

une suite exacte de modules croisés de \mathbf{R} -groupes. Alors on a une suite exacte

$$\widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [A \rightarrow B]) \rightarrow \widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [C \rightarrow D]) \rightarrow \widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [E \rightarrow F]) \rightarrow \mathbf{H}^1(\mathbf{R}, [A \rightarrow B]).$$

Démonstration : L'exactitude en $\widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [E \rightarrow F])$ se déduit immédiatement du résultat analogue pour les groupes non modifiés $\mathbf{H}^0(\mathbf{R}, \cdot)$. Reste donc à montrer l'exactitude en $\widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [C \rightarrow D])$. Soit $[(X, P)] \in \widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [C \rightarrow D])$ d'image triviale dans $\widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [E \rightarrow F])$. On utilise alors les deux suites exactes suivantes

$$H^1(\mathbf{R}, A) \rightarrow H^1(\mathbf{R}, C) \rightarrow H^1(\mathbf{R}, E)$$

et

$$\widehat{H}^0(\mathbf{R}, B) \rightarrow \widehat{H}^0(\mathbf{R}, D) \rightarrow \widehat{H}^0(\mathbf{R}, F)$$

pour montrer que la classe du torseur X provient d'une classe dans $H^1(\mathbf{R}, A)$, et quitte à remplacer P par un autre point dans sa composante connexe, pour montrer que P se relève dans $B(\mathbf{R})$. Cela assure que la classe $[(X, P)]$ provient d'une classe dans $\widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [A \rightarrow B])$. \square

Soit désormais G un \mathbf{R} -groupe réductif. On définit $\rho : G^{\text{sc}} \rightarrow G$, T et T^{sc} comme dans l'introduction de [Bor98].

Lemme 3.7. – *Les modules croisés $[G^{\text{sc}} \rightarrow G]$ et $[T^{\text{sc}} \rightarrow T]$ sont quasi-isomorphes.*
– *Le morphisme $\widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [T^{\text{sc}} \rightarrow T]) \rightarrow \widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [G^{\text{sc}} \rightarrow G])$ est une bijection d'ensembles pointés.*

Démonstration :

- Voir [Bor98], lemme 3.8.1.
- On dispose de deux suites exactes de complexes de groupes (en utilisant le premier point) :

$$1 \rightarrow \text{Ker}(\rho)[1] \rightarrow [G^{\text{sc}} \rightarrow G] \rightarrow \text{Coker}(\rho) \rightarrow 1$$

et

$$1 \rightarrow \text{Ker}(\rho)[1] \rightarrow [T^{\text{sc}} \rightarrow T] \rightarrow \text{Coker}(\rho) \rightarrow 1.$$

On vérifie d'abord que les éléments du noyau de $\widehat{H}^0(\mathbf{R}, \text{Ker}(\rho)[1]) \rightarrow \widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [G^{\text{sc}} \rightarrow G])$ sont exactement ceux qui se relèvent dans $\widehat{H}^{-1}(\mathbf{R}, \text{Coker}(\rho))$: en effet, on dispose du diagramme commutatif exact naturel suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & & \widehat{H}^{-1}(\mathbf{R}, \text{Coker } \rho) & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ \widehat{H}^0(\mathbf{R}, G^{\text{sc}}) & \longrightarrow & \widehat{H}^0(\mathbf{R}, \text{Im } \rho) & \longrightarrow & H^1(\mathbf{R}, \text{Ker } \rho) & \longrightarrow & H^1(\mathbf{R}, G^{\text{sc}}) \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ \widehat{H}^0(\mathbf{R}, G^{\text{sc}}) & \longrightarrow & \widehat{H}^0(\mathbf{R}, G) & \longrightarrow & \widehat{H}^0(\mathbf{R}, [G^{\text{sc}} \rightarrow G]) & \longrightarrow & H^1(\mathbf{R}, G^{\text{sc}}) \end{array}$$

et on conclut par une chasse au diagramme. On applique alors le lemme précédent, et on obtient le diagramme suivant, à lignes exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc} \widehat{H}^{-1}(\mathbf{R}, \text{Coker}(\rho)) & \longrightarrow & H^1(\mathbf{R}, \text{Ker}(\rho)) & \longrightarrow & \widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [T^{\text{sc}} \rightarrow T]) & \longrightarrow & \widehat{H}^0(\mathbf{R}, \text{Coker}(\rho)) & \longrightarrow & H^2(\mathbf{R}, \text{Ker}(\rho)) \\ \downarrow = & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow = & & \downarrow = \\ \widehat{H}^{-1}(\mathbf{R}, \text{Coker}(\rho)) & \longrightarrow & H^1(\mathbf{R}, \text{Ker}(\rho)) & \longrightarrow & \widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [G^{\text{sc}} \rightarrow G]) & \longrightarrow & \widehat{H}^0(\mathbf{R}, \text{Coker}(\rho)) & \longrightarrow & H^2(\mathbf{R}, \text{Ker}(\rho)) \end{array}$$

et on conclut grâce au lemme des cinq. \square

3.2 Approximation forte dans les groupes linéaires connexes

Commençons par une définition qui nous servira dans toute la suite :

Définition 3.8. Soit G un k -groupe algébrique semi-simple simplement connexe, et S_0 un ensemble fini de places de k . On dit que le groupe G vérifie l'approximation forte hors de S_0 lorsque $G(k).G_{S_0}$ est dense dans $P^0(k, G)$ (muni de la topologie adélique).

On rappelle ici l'énoncé du théorème d'approximation forte (voir [PR94], théorème 7.12)

Théorème (Kneser, Platonov). *Soit k un corps de nombres, G/k un groupe algébrique semi-simple, simplement connexe. Soit S_0 un ensemble fini de places tel que $G_{S_0}^i := \prod_{v \in S_0} G^i(k_v)$ est non compact pour tout k -facteur presque k -simple G^i de G . Alors G vérifie l'approximation forte hors de S_0 .*

En particulier, si le groupe G est presque k -simple simplement connexe, et si v_0 est une place de k telle que $G(k_{v_0})$ est non compact, alors $G(k).G(k_{v_0})$ est dense dans $P^0(k, G)$.

Desormais, dans cette section, G est un groupe algébrique sur k , supposé réductif. On note G^{ss} son sous-groupe dérivé, G^{sc} le revêtement semi-simple simplement connexe de G^{ss} , T un tore maximal de G , T^{sc} l'image réciproque de T dans G^{sc} et $C := [T^{\text{sc}} \xrightarrow{\rho} T]$ le complexe de tores associé. On se donne S_1 un ensemble fini de places, contenant les places archimédiennes de k , tel que G s'étende respectivement en un schéma en groupes réductif \mathcal{G} sur $V := \text{Spec } \mathcal{O}_{k, S_1}$ (au sens de [DG70]). On note \mathcal{T} l'adhérence schématique de T dans \mathcal{G} . C'est un schéma en groupes de type fini sur V . On note \mathcal{G}^{ss} le sous-groupe dérivé de \mathcal{G} , et \mathcal{G}^{sc} le revêtement simplement connexe de \mathcal{G}^{ss} . On note aussi \mathcal{Z} le centre de \mathcal{G} et \mathcal{Z}^{sc} celui de \mathcal{G}^{sc} , et $\rho : \mathcal{G}^{\text{sc}} \rightarrow \mathcal{G}$. On utilise alors le corollaire 6.3 de l'exposé XV de [DG70] pour savoir que, quitte à réduire V , on peut supposer que $\mathcal{T} \subset \mathcal{G}$ est un sous-tore maximal de \mathcal{G} (au sens de [DG70]). On a alors un diagramme commutatif de schémas en groupes sur V (dont les lignes sont les immersions fermées naturelles) :

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{Z}^{\text{sc}} & \longrightarrow & \mathcal{T}^{\text{sc}} & \longrightarrow & \mathcal{G}^{\text{sc}} \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho & & \downarrow \rho \\ \mathcal{Z} & \longrightarrow & \mathcal{T} & \longrightarrow & \mathcal{G} \end{array}$$

On dispose ainsi de trois modules croisés sur V , qui sont quasi-isomorphes (voir [Bor98], lemme 3.8.1) : $[\mathcal{G}^{\text{sc}} \rightarrow \mathcal{G}]$, $[\mathcal{Z}^{\text{sc}} \rightarrow \mathcal{Z}]$ et $\mathcal{C} := [\mathcal{T}^{\text{sc}} \rightarrow \mathcal{T}]$. Ces modules croisés permettent de définir un morphisme naturel $\text{ab}^0 : H^0(V, \mathcal{G}) \rightarrow H_{\text{ab}}^0(V, \mathcal{G}) := \mathbf{H}^0(V, \mathcal{C})$ (pour des précisions sur ce morphisme d'abélianisation, voir [Del79], [Bre90] ou [Bor98]).

On note aussi, pour un ensemble fini de places S suffisamment grand (i.e. contenant S_1), $\mathcal{P}_S^i(\mathcal{G}) := \prod_{v \in S} H^i(k_v, G) \times \prod_{v \notin S} H^i(\mathcal{O}_v, \mathcal{G})$ pour $i = 0$ ou 1 .

Lemme 3.9. *$\text{Ker}(\rho : G^{\text{sc}} \rightarrow G)$ est un groupe algébrique abélien fini.*

Démonstration : En effet, $\text{ker}(\rho) = \text{Ker}(G^{\text{sc}} \rightarrow G^{\text{ss}})$ est le groupe fondamental de G^{ss} (voir [Bor98], lemme 2.4.1) \square

On va avoir besoin ici du lemme suivant, qui dit essentiellement que la complétion profinie commute au produit fini de groupes topologiques :

Lemme 3.10. *Soient G et H deux groupes topologiques. Alors il existe un isomorphisme canonique $(G \times H)^\wedge \cong G^\wedge \times H^\wedge$.*

Démonstration : On dispose d'un morphisme canonique $\phi : (G \times H)^\wedge \rightarrow G^\wedge \times H^\wedge$.

- ϕ est injectif : pour montrer cette injectivité, il suffit de montrer que tout sous-groupe distingué K ouvert d'indice fini dans $G \times H$ contient un produit $K_1 \times K_2$, où K_1 (resp. K_2) est un sous-groupe distingué ouvert d'indice fini de G (resp. H). Soit donc un tel sous-groupe

K . On note G' (resp. H') le sous-groupe $G \times 1$ (resp. $1 \times H$) de $G \times H$; ce sous-groupe est isomorphe comme groupe topologique à G (resp. H). On dispose du diagramme commutatif exact de groupes topologiques suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & G' \cap K & \longrightarrow & G' & \longrightarrow & G'/(G' \cap K) & \longrightarrow & 1 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 1 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & G \times H & \longrightarrow & (G \times H)/K & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

où la dernière flèche verticale est injective. Alors $G' \cap K$ est un sous-groupe distingué ouvert d'indice fini de G' , et définit naturellement un sous-groupe distingué ouvert d'indice fini K_1 de G , de sorte que $K_1 \times 1 \subset K$. De même on construit $K_2 \subset H$ sous-groupe ouvert d'indice fini tel que $1 \times K_2 \subset K$. Alors il est clair que $K_1 \times K_2$ est contenu dans K , ce qui assure l'injectivité de ϕ .

- ϕ est surjectif : pour la surjectivité, on remarque que par functorialité, les morphismes $p_1 : (G \times H)^\wedge \rightarrow G^\wedge$ et $p_2 : (G \times H)^\wedge \rightarrow H^\wedge$ (induits par les projections $G \times H \rightarrow G, H$) admettent des sections i_1 et i_2 . Or $\phi(x) = (p_1(x), p_2(x))$ pour tout $x \in (G \times H)^\wedge$, donc tout élément $(a, b) \in G^\wedge \times H^\wedge$ s'écrit $(a, b) = (a, 1) \cdot (1, b) = \phi(i_1(a)) \cdot \phi(i_2(b)) = \phi(i_1(a) \cdot i_2(b))$, donc ϕ est surjectif.

□

Désormais, $U = \text{Spec}(\mathcal{O}_{k,S})$ est un ouvert de V , avec $S_1 \subset S$. On va maintenant utiliser les morphismes d'abélianisation pour le H^0 . Montrons d'abord que le conoyau du morphisme d'abélianisation est contrôlé par le H^1 du revêtement universel de G :

Lemme 3.11. *Soit X un schéma, H un X -schéma en groupes réductif. Alors $\text{ab}^0 : H^0(X, H) \rightarrow H_{\text{ab}}^0(X, H)$ est un morphisme de groupes, de conoyau s'injectant dans $H^1(X, H^{\text{sc}})$ de sorte que le diagramme suivant commute (δ est le morphisme d'ensembles pointés provenant du morphisme de modules croisés $[H^{\text{sc}} \rightarrow H] \rightarrow [H^{\text{sc}} \rightarrow 1]$) :*

$$\begin{array}{ccccc} H^0(X, H) & \xrightarrow{\text{ab}^0} & H_{\text{ab}}^0(X, H) & \xrightarrow{\delta} & H^1(X, H^{\text{sc}}) \\ & & \searrow & & \nearrow i \\ & & \text{Coker}(\text{ab}^0) & & \end{array} .$$

Démonstration : On sait que ab^0 est un morphisme de groupes (voir par exemple [Bre90]). Il reste à montrer que l'application i du diagramme précédent est bien définie. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $g' \in H_{\text{ab}}^0(X, H)$ et tout $g \in H^0(X, H)$, on a $\delta(g' \cdot \text{ab}^0(g)) = \delta(g')$. Mais ceci est évident par définition de la structure de groupe sur $H_{\text{ab}}^0(X, H)$ et du morphisme δ (voir par exemple [Bor98] 3.3.1, pour une définition en termes de cocycles). □

Lemme 3.12. *On a une suite exacte naturelle d'ensembles pointés (dont les trois premiers termes forment une suite exacte de groupes) :*

$$\mathcal{P}_S^0(\mathcal{G}^{\text{sc}})^\wedge \xrightarrow{\rho} \mathcal{P}_S^0(\mathcal{G})^\wedge \xrightarrow{\text{ab}^0} \mathcal{P}_S^0(\mathcal{C})^\wedge \rightarrow \mathcal{P}_S^1(\mathcal{G}^{\text{sc}}).$$

Démonstration : On remarque d'abord que l'ensemble pointé $\mathcal{P}_S^1(\mathcal{G}^{\text{sc}})$ est fini et est isomorphe à $\prod_{v \in \Omega_\infty} H^1(k_v, G^{\text{sc}})$ (voir [PR94], théorème 6.4 pour les places $v \in S \setminus S_\infty$, ainsi que le théorème de Lang pour les places $v \notin S$). Montrons que la suite

$$\mathcal{P}_S^0(\mathcal{G})^\wedge \xrightarrow{\text{ab}^0} \mathcal{P}_S^0(\mathcal{C})^\wedge \rightarrow \mathcal{P}_S^1(\mathcal{G}^{\text{sc}})$$

est exacte ($\mathcal{P}_S^1(\mathcal{G}^{\text{sc}})$ est un ensemble pointé fini, les autres ensembles étant des groupes). Si v est une place finie hors de S , le morphisme d'abélianisation $\text{ab}_v^0 : H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{G}) \rightarrow \mathbf{H}^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{C})$ est un morphisme surjectif de groupes compacts (puisque $H^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{G}^{\text{sc}}) = 1$ par le théorème de Lang), donc la surjection $\prod_{v \text{ finie } \notin S} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{G}) \rightarrow \prod_{v \text{ finie } \notin S} \mathbf{H}^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{C})$ n'est pas affectée par l'opération de complétion profinie. Si v est une place finie dans S , la complétion de la surjection $H^0(k_v, G) \rightarrow \mathbf{H}^0(k_v, C)$ donne une surjection $H^0(k_v, G)^\wedge \rightarrow \mathbf{H}^0(k_v, C)^\wedge$. Enfin, si v est une place réelle, on a une suite exacte de groupes finis

$$\widehat{H}^0(\mathbf{R}, G) \rightarrow \widehat{H}^0(\mathbf{R}, C) \rightarrow Q_v \rightarrow 0$$

et une suite exacte d'ensembles pointés

$$\widehat{H}^0(\mathbf{R}, G) \rightarrow \widehat{H}^0(\mathbf{R}, C) \rightarrow H^1(\mathbf{R}, G^{\text{sc}})$$

avec Q_v s'injectant naturellement dans $H^1(\mathbf{R}, G^{\text{sc}})$ par le lemme 3.11. Donc en prenant la complétion profinie de la première suite, on obtient la même suite exacte, et on peut bien envoyer Q_v dans $H^1(\mathbf{R}, G^{\text{sc}})$ de manière injective. Ainsi, à l'aide du lemme 3.10, on conclut que la suite

$$\mathcal{P}_S^0(\mathcal{G})^\wedge \xrightarrow{\text{ab}^0} \mathcal{P}_S^0(\mathcal{C})^\wedge \rightarrow \mathcal{P}_S^1(\mathcal{G}^{\text{sc}})$$

est exacte.

Reste à montrer l'exactitude de la suite de l'énoncé en $\mathcal{P}_S^0(\mathcal{G})^\wedge$. Puisque la complétion profinie commute au produit fini (voir lemme 3.10), il suffit de montrer l'exactitude au niveau de chaque place $v \in S$: en effet, la suite exacte $\prod_{v \notin S} \mathcal{G}^{\text{sc}}(\mathcal{O}_v) \rightarrow \prod_{v \notin S} \mathcal{G}(\mathcal{O}_v) \rightarrow \prod_{v \notin S} \mathbf{H}^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{C}) \rightarrow 0$ est une suite exacte de groupes compacts ($H^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{G}^{\text{sc}}) = 0$ grâce au théorème de Lang), donc sa complétion profinie est égale à elle-même. Par conséquent, en voyant $\mathcal{P}_S^0(\mathcal{G})^\wedge$ comme le produit fini de $\prod_{v \notin S} \mathcal{G}(\mathcal{O}_v)$ et des $H^0(k_v, G)$ pour $v \in S$, le lemme 3.10 assure bien qu'il suffit de montrer l'exactitude de la suite complétée en chaque place $v \in S$. Si $v \in S$ est non archimédienne, on considère la suite exacte courte suivante :

$$1 \rightarrow \text{Ker}(\text{ab}_v^0) \rightarrow G(k_v) \xrightarrow{\text{ab}_v^0} \text{Im}(\text{ab}_v^0) \rightarrow 0.$$

Or le morphisme $\text{ab}_v^0 : G(k_v) \rightarrow \mathbf{H}^0(k_v, C)$ est ouvert, par définition de la topologie sur $\mathbf{H}^0(k_v, C)$ et par commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc} G(k_v) & \xrightarrow{\text{ab}_v^0} & \mathbf{H}^0(k_v, C) \\ \uparrow & \nearrow & \\ T(k_v) & & \end{array} .$$

Donc la complétion profinie fournit une suite exacte

$$\text{Ker}(\text{ab}_v^0)^\wedge \rightarrow G(k_v)^\wedge \xrightarrow{\text{ab}^0} \text{Im}(\text{ab}_v^0)^\wedge .$$

D'où un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} G^{\text{sc}}(k_v)^\wedge & \longrightarrow & G(k_v)^\wedge & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(k_v, C)^\wedge \\ \downarrow & & \downarrow = & & \uparrow \\ \text{Ker}(\text{ab}_v^0)^\wedge & \longrightarrow & G(k_v)^\wedge & \longrightarrow & \text{Im}(\text{ab}_v^0)^\wedge . \end{array}$$

Or la première flèche verticale est surjective, et la dernière est injective car $\text{Im}(\text{ab}_v^0)$ est un sous-groupe de $\mathbf{H}^0(k_v, C)$ d'indice fini. Une chasse au diagramme assure alors l'exactitude de la première ligne de ce diagramme. Pour les places archimédiennes dans S , le raisonnement est le même en utilisant les groupes de composantes connexes. \square

Obstruction de Brauer-Manin et abélianisation On commence par rappeler la définition de l'accouplement de Brauer-Manin sur G (voir par exemple le livre de Skorobogatov [Sko01], section 5.2 pour davantage de détails). On considère l'application suivante :

$$\begin{array}{ccc} P^0(k, G) \times \text{Br}(G) & \longrightarrow & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ (P, A) & \longmapsto & \langle A, P \rangle_{\text{BM}} := \sum_{v \in \Omega_k} j_v(A(P_v)) \end{array}$$

où $j_v : \text{Br}(k_v) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ est l'invariant donné par la théorie du corps de classes local et $A(P_v) \in \text{Br}(k_v)$ est l'évaluation de $A \in \text{Br}(G)$ en $P_v \in H^0(k_v, G)$. On peut alors définir, pour toute partie B de $\text{Br}(G)$ l'ensemble suivant :

$$P^0(k, G)^B := \{P \in P^0(k, G) : \langle A, P \rangle_{\text{BM}} = 0, \forall A \in B\}.$$

Grâce à la loi de réciprocité de la théorie du corps de classes global, on sait que $\overline{G(k)} \subset P^0(k, G)^B$. Enfin, les éléments de $\text{Br } k \subset \text{Br } G$ sont orthogonaux à tous les points de $P^0(k, G)$, donc l'accouplement précédent se factorise en une application $P^0(k, G) \times \text{Br}(G)/\text{Br } k \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, et fournit donc un morphisme $P^0(k, G) \rightarrow (\text{Br}(G)/\text{Br } k)^D$.

Or, grâce aux travaux de Borovoi et Van Hamel, on sait que l'on dispose d'un isomorphisme canonique $\kappa : \mathbf{H}^1(k, \widehat{C}) \cong \text{Br}_a(G)$ (voir [BvH09], théorème 4.8 et corollaire 2.20.(ii)). On note également κ l'isomorphisme correspondant par dualité $\kappa : \text{Br}_a(G)^D \cong \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D$.

On considère désormais le diagramme suivant :

$$(2) \quad \begin{array}{ccccc} H^0(U, \mathcal{G}^{\text{sc}})^\wedge & \longrightarrow & \mathcal{P}_S^0(\mathcal{G}^{\text{sc}})^\wedge & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H^0(U, \mathcal{G})^\wedge & \longrightarrow & \mathcal{P}_S^0(\mathcal{G})^\wedge & \xrightarrow{\theta_{\text{BM}}} & \text{Br}_a(G)^D \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \kappa \\ \mathbf{H}^0(U, \mathcal{C})^\wedge & \longrightarrow & \mathcal{P}_S^0(\mathcal{C})^\wedge & \xrightarrow{\theta} & \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H^1(U, \mathcal{G}^{\text{sc}}) & \longrightarrow & \mathcal{P}_S^1(\mathcal{G}^{\text{sc}}) & & \end{array}$$

les flèches sans nom dans ce diagramme étant les flèches évidentes, à l'exception de la flèche $\mathbf{H}^0(U, \mathcal{C})^\wedge \rightarrow H^1(U, \mathcal{G}^{\text{sc}})$, qui est obtenue à partir de la flèche $\mathbf{H}^0(U, \mathcal{C}) \rightarrow H^1(U, \mathcal{G}^{\text{sc}})$ grâce au lemme 3.11 et à la finitude de $H^1(U, \mathcal{G}^{\text{sc}})$. La flèche θ_{BM} est la flèche induite par l'accouplement de Brauer-Manin, et la flèche θ est la flèche induite par la dualité locale pour les complexes de tores.

On va d'abord montrer que le carré de droite dans ce diagramme est commutatif, à savoir le lemme suivant :

Lemme 3.13. Soit $\theta_{BM} : P^0(k, G) \rightarrow \text{Br}_a(G)^D$ induit par l'accouplement de Brauer-Manin, et $\theta : \mathbf{P}^0(k, C) \rightarrow \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D$ l'accouplement induit par la dualité locale. Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} P^0(k, G) & \xrightarrow{\theta_{BM}} & \text{Br}_a(G)^D \\ \downarrow \text{ab}^0 & & \downarrow \kappa \\ \mathbf{P}^0(k, C) & \xrightarrow{\theta} & \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D \end{array}$$

est commutatif et fonctoriel en C .

Démonstration : Les deux flèches θ_{BM} et θ étant définies par des sommes de contributions locales, il suffit de montrer la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} H^0(k_v, G) & \xrightarrow{\theta_{BM,v}} & \text{Br}_1(G_v)^D \\ \downarrow \text{ab}_v^0 & & \downarrow \kappa'_v \\ \mathbf{H}^0(k_v, C) & \xrightarrow{\theta_v} & \mathbf{H}^1(k_v, \widehat{C})^D \end{array}$$

où κ'_v est obtenu en dualisant la composée de $\kappa_v : \mathbf{H}^1(k_v, \widehat{C}) \rightarrow \text{Br}_a(G_v)$ avec l'inclusion $\text{Br}_a(G_v) \rightarrow \text{Br}_1(G_v)$ donnée par la section unité de G_v . Montrons qu'il suffit alors de considérer seulement le cas où G est un k -tore : on sait qu'il existe un k -groupe réductif H , avec H^{ss} simplement connexe, et un morphisme surjectif $\phi : H \rightarrow G$, dont le noyau est un tore quasi-trivial (voir par exemple [DMOS82], p 297, proposition 3.1). Supposons que pour H , le diagramme local soit commutatif. Par fonctorialité de la flèche d'abelianisation ab^0 (voir [Bor98], proposition 3.11), un tel H induit le diagramme suivant (où C' est le complexe de tores associé à H) :

$$\begin{array}{ccccc} H(k_v) & \xrightarrow{\theta_{BM,v}} & \text{Br}_1(H_v)^D & & \\ \downarrow \phi & \searrow \text{ab}_v^0 & \downarrow & \searrow \kappa'_v & \\ & \mathbf{H}^0(k_v, C') & \xrightarrow{\theta_v} & \mathbf{H}^1(k_v, \widehat{C}')^D & \\ & \downarrow \phi_* & & \downarrow \phi'_* & \\ G(k_v) & \xrightarrow{\theta_{BM,v}} & \text{Br}_1(G_v)^D & & \\ \downarrow \phi & \searrow \text{ab}_v^0 & \downarrow & \searrow \kappa'_v & \\ & \mathbf{H}^0(k_v, C) & \xrightarrow{\theta_v} & \mathbf{H}^1(k_v, \widehat{C})^D & \end{array}$$

où toutes les faces verticales du cube sont des diagrammes commutatifs (fonctorialités de l'abelianisation, de l'accouplement de Brauer-Manin, de la dualité locale et de l'isomorphisme κ_v). Or la flèche $\phi : H(k_v) \rightarrow G(k_v)$ est surjective, donc la commutativité de la face supérieure et des faces verticales impliquent la commutativité de la face inférieure. Par conséquent, il suffit de prouver le résultat pour G groupe réductif tel que G^{ss} est simplement connexe. On considère dans ce cas la suite exacte suivante :

$$1 \rightarrow G^{\text{ss}} \rightarrow G \rightarrow T \rightarrow 1$$

où T est un k -tore. Supposons que l'on sache démontrer la commutativité du diagramme pour le tore T . Déduisons-en la propriété pour le groupe G : on dispose du diagramme suivant, dont les colonnes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccc}
G^{\text{ss}}(k_v) & \xrightarrow{\theta_{BM,v}} & \text{Br}_1(G_v^{\text{ss}})^D & & \\
\downarrow & \searrow \text{ab}_v^0 & \downarrow & \searrow \kappa'_v & \\
& & \mathbf{H}^0(k_v, C') & \xrightarrow{\theta_v} & \mathbf{H}^1(k_v, \widehat{C}')^D \\
& & \downarrow & & \downarrow \\
G(k_v) & \xrightarrow{\theta_{BM,v}} & \text{Br}_1(G_v)^D & & \\
\downarrow & \searrow \text{ab}_v^0 & \downarrow & \searrow \kappa'_v & \\
& & \mathbf{H}^0(k_v, C) & \xrightarrow{\theta_v} & \mathbf{H}^1(k_v, \widehat{C})^D \\
& & \downarrow & & \downarrow \\
T(k_v) & \xrightarrow{\theta_{BM,v}} & \text{Br}_1(T_v)^D & & \\
\downarrow & \searrow \text{ab}_v^0 & \downarrow & \searrow \kappa'_v & \\
& & \mathbf{H}^0(k_v, T) & \xrightarrow{\theta_v} & \mathbf{H}^2(k_v, \widehat{T})^D
\end{array}$$

Or par functorialité les faces verticales sont des diagrammes commutatifs ; la face inférieure est un diagramme commutatif par hypothèse. Enfin, la nullité de $\text{Br}_a(G_v^{\text{ss}}) \cong \mathbf{H}^1(k_v, \widehat{C}')$ assure que le morphisme $\text{Br}_a(G_v)^D = \mathbf{H}^1(k_v, \widehat{C})^D \rightarrow \text{Br}_a(T_v)^D = \mathbf{H}^2(k_v, \widehat{T})^D$ est injectif (voir par exemple [San81], corollaire 6.11.2). Une chasse au diagramme immédiate assure alors la commutativité du carré horizontal central. Par conséquent, on s'est ramené à montrer la propriété de compatibilité au cas où G est un tore. Or ce cas est connu (voir par exemple [HS08], preuve du théorème 6.1). Par conséquent, le lemme 3.13 est démontré. \square

Par conséquent, le diagramme (2) est commutatif.

On connaît en outre les faits suivants : la deuxième colonne de ce diagramme est exacte (c'est le lemme 3.12), la première est exacte en $\mathbf{H}^0(U, \mathcal{C})^\wedge$ et la troisième ligne est exacte (voir proposition 2.5).

Lemme 3.14. *On suppose que G^{sc} vérifie l'approximation forte hors de S_0 , pour $S_0 \subset S$. Alors l'application $H^1(U, \mathcal{G}^{\text{sc}}) \rightarrow \mathcal{P}_S^1(\mathcal{G}^{\text{sc}})$ a un noyau trivial.*

Démonstration : Par un résultat de Nisnevich (voir [Nis84], théorème 2.1) démontré par Gille (théorème 5.1 dans l'appendice de [Gil02]), si on note $c(G) := G(\mathbf{A}_S) \backslash G(\mathbf{A}_k) / G(k)$ le groupe des S -classes de G , on dispose d'une suite exacte

$$1 \rightarrow c(G^{\text{sc}}) \rightarrow H_{\text{fppf}}^1(U, \mathcal{G}^{\text{sc}}) \rightarrow H^1(k, G^{\text{sc}})$$

puisque par théorème de Lang, les ensembles $H_{\text{fppf}}^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{G}^{\text{sc}})$ sont triviaux pour $v \notin S$. Or le groupe G^{sc} vérifie l'approximation forte hors de $S_0 \subset S$, donc l'ensemble $c(G)$ est trivial (voir [PR94], proposition 5.4). Enfin, on peut identifier l'ensemble $H_{\text{fppf}}^1(U, \mathcal{G}^{\text{sc}})$ à l'ensemble de cohomologie étale $H^1(U, \mathcal{G}^{\text{sc}})$ puisque \mathcal{G}^{sc} est lisse sur U (voir [Gro68], III, théorème 11.7). Cela assure le résultat, puisque le morphisme $H^1(k, G^{\text{sc}}) \rightarrow \mathbf{P}^1(k, G^{\text{sc}})$ est injectif (principe de Hasse pour les groupes semi-simples simplement connexes, voir par exemple [PR94], théorème 6.6). \square

Introduisons désormais le défaut d'approximation forte sur U , à savoir le quotient topologique :

$$A_{S, S_0}(G) := \mathcal{P}_S^0(\mathcal{G}) / \overline{H^0(U, \mathcal{G}) \cdot G_{S_0}^{\text{sc}}}.$$

On dispose alors du résultat suivant (le cas semi-simple est la proposition 8.8 de [PR94]) :

Proposition 3.15. *Soit G un groupe réductif sur k . On suppose que G^{sc} vérifie l'approximation forte hors de $S_0 \subset S$. Quitte à réduire U , l'ensemble $\overline{H^0(U, \mathcal{G})} \cdot G_{S_0}^{\text{sc}}$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{P}_S^0(\mathcal{G})$ et le quotient $A_{S, S_0}(G)$ est un groupe topologique abélien.*

Démonstration : Quitte à réduire U , on peut supposer \mathcal{G} réductif sur U . On considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \overline{H^0(U, \mathcal{G}^{\text{sc}})} \cdot G_{S_0}^{\text{sc}} & \longrightarrow & \mathcal{P}_S^0(\mathcal{G}^{\text{sc}}) \\ \downarrow \rho & & \downarrow \rho \\ \overline{H^0(U, \mathcal{G})} \cdot \rho(G_{S_0}^{\text{sc}}) & \longrightarrow & \mathcal{P}_S^0(\mathcal{G}) \\ \downarrow & & \downarrow \text{ab}^0 \\ \mathbf{H}^0(U, \mathcal{C}) & \longrightarrow & \mathcal{P}_S^0(\mathcal{C}). \end{array}$$

On sait que $\mathbf{H}^0(U, \mathcal{C})$ est un sous-groupe du groupe abélien $\mathcal{P}_S^0(\mathcal{C})$, et que la première flèche horizontale est une égalité (par le théorème d'approximation forte). Soit alors $h \in \overline{H^0(U, \mathcal{G})} \cdot \rho(G_{S_0}^{\text{sc}})$ et $g \in \mathcal{P}_S^0(\mathcal{G})$. Montrons que l'élément $h' := ghg^{-1}h^{-1}$ est dans $\overline{H^0(U, \mathcal{G})} \cdot \rho(G_{S_0}^{\text{sc}})$. On a $\text{ab}^0(h') = 0$ car $\mathcal{P}_S^0(\mathcal{C})$ est abélien. Donc h' se relève en un élément h'' dans $\mathcal{P}_S^0(\mathcal{G}^{\text{sc}})$. Par théorème d'approximation forte, $h'' \in \overline{H^0(U, \mathcal{G}^{\text{sc}})} \cdot G_{S_0}^{\text{sc}}$, et donc $h' = \rho(h'') \in \overline{H^0(U, \mathcal{G})} \cdot \rho(G_{S_0}^{\text{sc}})$, ce qui assure que $\overline{H^0(U, \mathcal{G})} \cdot \rho(G_{S_0}^{\text{sc}})$ est un sous-groupe distingué de $\mathcal{P}_S^0(\mathcal{G})$. Montrons désormais que le quotient $Q := \mathcal{P}_S^0(\mathcal{G}) / \overline{H^0(U, \mathcal{G})} \cdot \rho(G_{S_0}^{\text{sc}})$ est abélien : soient $a, b \in Q$, notons a', b' des relevés de a et b dans $\mathcal{P}_S^0(\mathcal{G})$. Alors $g := a'b'a'^{-1}b'^{-1}$ s'envoie sur 0 dans le groupe abélien $\mathcal{P}_S^0(\mathcal{C})$, donc comme plus haut, g se relève en $h \in \mathcal{P}_S^0(\mathcal{G}^{\text{sc}})$. Or par approximation forte, $h \in \overline{H^0(U, \mathcal{G}^{\text{sc}})} \cdot G_{S_0}^{\text{sc}}$, donc $g = \rho(h) \in \overline{H^0(U, \mathcal{G})} \cdot \rho(G_{S_0}^{\text{sc}})$, ce qui assure que le commutateur $aba^{-1}b^{-1}$ est trivial dans Q , donc Q est abélien. \square

Montrons alors le résultat suivant :

Théorème 3.16. *Soit $S_0 \subset S$ un ensemble fini de places de k tel que G^{sc} vérifie la propriété d'approximation forte hors de S_0 . Alors la suite suivante*

$$\left(\overline{H^0(U, \mathcal{G})} \cdot \rho(G_{S_0}^{\text{sc}}) \right)^\wedge \rightarrow \mathcal{P}_S^0(\mathcal{G})^\wedge \rightarrow (\text{Br}_a G)^D$$

est exacte et fonctorielle en \mathcal{G} .

Démonstration : Cette suite est un complexe car les éléments de $G_{S_0}^{\text{sc}}$ ont une image nulle dans $(\text{Br}_a G)^D$ (voir le diagramme commutatif (2)).

Soit $(g_v) \in \mathcal{P}_S^0(\mathcal{G})^\wedge$ d'image nulle dans $(\text{Br}_a G)^D$. On note (g'_v) son image dans $\mathcal{P}_S^0(\mathcal{C})^\wedge$. Par exactitude de la troisième ligne du diagramme (2), (g'_v) se relève en un élément $g' \in \mathbf{H}^0(U, \mathcal{C})^\wedge$ qui s'envoie sur 1 dans $H^1(U, \mathcal{G}^{\text{sc}})$. Par exactitude de la première colonne, g' se relève donc en un élément $\tilde{g} \in \overline{H^0(U, \mathcal{G})}^\wedge$ dont l'image (\tilde{g}_v) dans $\mathcal{P}_S^0(\mathcal{G})^\wedge$ a même image que (g_v) dans $\mathcal{P}_S^0(\mathcal{C})^\wedge$. Donc par exactitude de la deuxième colonne, l'élément $(\tilde{g}_v)^{-1} \cdot (g_v) \in \mathcal{P}_S^0(\mathcal{G})^\wedge$ se relève en un élément $(h_v) \in \mathcal{P}_S^0(\mathcal{G}^{\text{sc}})^\wedge$. On utilise désormais le lemme suivant :

Lemme 3.17. *La flèche naturelle $\left(\overline{H^0(U, \mathcal{G}^{\text{sc}})} \cdot G_{S_0}^{\text{sc}} \right)^\wedge \rightarrow \mathcal{P}_S^0(\mathcal{G}^{\text{sc}})^\wedge$ est surjective.*

Démonstration : C'est une conséquence immédiate de la propriété d'approximation forte pour le groupe semi-simple simplement connexe G^{sc} hors des places S_0 . \square

Avec ce lemme, l'élément (h_v) provient d'un élément $h \in \left(\overline{H^0(U, \mathcal{G}^{\text{sc}}).G_{S_0}^{\text{sc}}}\right)^\wedge$. On considère alors l'image $\rho(h) \in \left(\overline{H^0(U, \mathcal{G}).\prod_{v \in S_0} H^0(k_v, G)}\right)^\wedge$: par functorialité, l'élément $\rho(h).\tilde{g} \in \left(\overline{H^0(U, \mathcal{G}).G_{S_0}^{\text{sc}}}\right)^\wedge$ s'envoie alors sur (g_v) dans $\mathcal{P}_S^0(\mathcal{G})^\wedge$. \square

Corollaire 3.18. *On a une suite exacte functorielle en G :*

$$1 \rightarrow \overline{H^0(U, \mathcal{G}).G_{S_0}^{\text{sc}}} \rightarrow \mathcal{P}_S^0(\mathcal{G}) \rightarrow (\text{Br}_a G)^D$$

Démonstration : On considère le conoyau topologique $Q = A_{S, S_0}(G)$ de l'injection $\overline{H^0(U, \mathcal{G}).G_{S_0}^{\text{sc}}} \rightarrow \mathcal{P}_S^0(\mathcal{G})$. On dispose alors du diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & \longrightarrow & \overline{H^0(U, \mathcal{G}).G_{S_0}^{\text{sc}}} & \longrightarrow & \mathcal{P}_S^0(\mathcal{G}) & \longrightarrow & Q \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \overline{H^0(U, \mathcal{G}).G_{S_0}^{\text{sc}}}^\wedge & \longrightarrow & \mathcal{P}_S^0(\mathcal{G})^\wedge & \longrightarrow & Q^\wedge \end{array}$$

La première ligne est exacte par définition, la seconde ligne est un complexe, et la dernière flèche verticale est injective car le groupe topologique abélien Q , comme quotient de $\mathcal{P}_S^0(\mathcal{G})$, est compactement engendré ($G(k_v)$ est compactement engendré pour $v \in S$). On conclut alors grâce au théorème 3.16, avec une chasse au diagramme (voir [Har08], preuve du théorème 1). \square

Théorème 3.19. *Soit G un k -groupe réductif, S_0 un ensemble fini de places de k tel que G^{sc} vérifie l'approximation forte hors de S_0 (c'est le cas lorsque $(G^{\text{sc}})_{S_0}^i$ est non compact pour tout k -facteur presque k -simple $(G^{\text{sc}})^i$ de G^{sc}). L'ensemble $\text{III}^1(k, G)$ est muni d'une structure de groupe abélien via un isomorphisme functoriel $\mathbb{B}(G)^D \cong \text{III}^1(k, G)$. Alors l'adhérence $\overline{G(k).\rho(G_{S_0}^{\text{sc}})}$ est un sous-groupe distingué de $P^0(k, G)$ et on a une suite exacte de groupes, functorielle en G :*

$$1 \rightarrow \overline{G(k).\rho(G_{S_0}^{\text{sc}})} \rightarrow P^0(k, G) \rightarrow (\text{Br}_a G)^D \rightarrow \text{III}^1(k, G) \rightarrow 0.$$

Démonstration : Pour les trois premiers termes, il s'agit de passer à la limite sur U dans le corollaire 3.18. Concernant l'exactitude au terme $(\text{Br}_a G)^D$, il suffit de montrer que les images de $P^0(k, G)$ et de $P^0(k, C)$ dans $\mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D$ coïncident. Pour cela, on utilise le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccc} G(k) & \longrightarrow & P^0(k, G) & \longrightarrow & \text{Br}_a(G)^D & \longrightarrow & \text{III}^1(G) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\ \mathbf{H}^0(k, C) & \longrightarrow & \mathbf{P}^0(k, C) & \longrightarrow & \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D & \longrightarrow & \text{III}^1(C) \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^1(k, G^{\text{sc}}) & \xrightarrow{\simeq} & P^1(k, G^{\text{sc}}) & & & & \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \text{III}^1(G) & \longrightarrow & H^1(k, G) & \longrightarrow & P^1(k, G) & & \\ \downarrow \simeq & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{III}^1(C) & \longrightarrow & \mathbf{H}^1(k, C) & \longrightarrow & \mathbf{P}^1(k, C) & & \end{array}$$

le morphisme d'abélianisation $\text{III}^1(G) \rightarrow \text{III}^1(C)$ étant un isomorphisme par [Bor98], théorème 5.12. Soit alors un élément $\gamma \in \mathbf{H}^1(k, \widehat{C})^D$ provenant d'un $\alpha \in \mathbf{P}^0(k, C)$. On cherche à montrer que ce γ se relève dans $P^0(k, G)$. Soit $\beta \in P^1(k, G^{\text{sc}})$ l'image de α . On relève alors β en un élément $\beta \in H^1(k, G^{\text{sc}})$ par le théorème 6.6 de [PR94]. Par commutativité du diagramme et exactitude de la troisième colonne, l'image δ de β dans $H^1(k, G)$ s'envoie sur 0 dans $P^1(k, G)$. Donc $\delta \in \text{III}^1(G)$. Par exactitude de la deuxième colonne, δ s'envoie sur 0 dans $\mathbf{H}^1(k, C)$, i.e. δ est dans le noyau de $\text{III}^1(G) \rightarrow \text{III}^1(C)$. Donc par le théorème 5.12 de [Bor98], δ est trivial, donc par exactitude de la deuxième colonne, β se relève en $\epsilon \in \mathbf{H}^0(k, C)$. L'image de ϵ dans $\mathbf{P}^0(k, C)$ définit un $\mu \in P^0(k, G)$ par exactitude de la troisième colonne. Alors par commutativité du diagramme, cet élément $\mu \in P^0(k, G)$ a même image que α dans $\text{Br}_a(G)^D$, à savoir γ , ce qui conclut la preuve. \square

On peut sans difficultés étendre ce résultat au cas des groupes linéaires connexes quelconques (non nécessairement réductifs) :

Corollaire 3.20. *Soit G un k -groupe linéaire connexe, S_0 comme plus haut (i.e. tel que le revêtement simplement connexe G^{sc} du quotient réductif G^{red} de G vérifie l'approximation forte hors de S_0). On note G^{scu} le produit fibré $G \times_{G^{\text{red}}} G^{\text{sc}}$. Alors on a une suite exacte de groupes, fonctorielle en G :*

$$1 \rightarrow \overline{G(k) \cdot \rho(G_{S_0}^{\text{scu}})} \rightarrow P^0(k, G) \rightarrow (\text{Br}_a G)^D \rightarrow \text{III}^1(k, G) \rightarrow 0.$$

Remarque 3.21. *Si le groupe G est commutatif, on peut prendre $S_0 = \emptyset$. Si G n'est pas commutatif, S_0 doit être non vide.*

Démonstration : On considère le dévissage suivant :

$$1 \rightarrow R_u G \rightarrow G \rightarrow H \rightarrow 1$$

où $R_u G$ est le radical unipotent de G , et $H = G^{\text{red}}$ un groupe réductif, la suite exacte étant scindée. On conclut à partir du théorème 3.19 en utilisant la trivialité de $H^1(k, R_u G)$ et $P^1(k, R_u G)$, ainsi que le fait bien connu que les groupes unipotents vérifient la propriété d'approximation forte, c'est-à-dire que pour un k -groupe unipotent U , l'adhérence de $U(k)$ dans $P^0(k, U)$ est $P^0(k, U)$ tout entier (en prenant à nouveau les groupes de composantes connexes au niveau des places infinies, et en utilisant le fait que si v est une place infinie, $U(k_v)$ est connexe). \square

Remarque 3.22. *Ce résultat est à rapprocher du résultat de Sansuc (voir théorème 8.12 de [San81]) qui traite de l'approximation faible dans les groupes connexes, et que l'on peut résumer ainsi : si G/k un groupe linéaire connexe, alors on a une suite exacte de groupes*

$$1 \rightarrow \overline{G(k)}^f \rightarrow \prod_v G(k_v) \rightarrow \text{E}_\omega(G)^D \rightarrow \text{III}^1(k, G) \rightarrow 0,$$

où $\overline{G(k)}^f$ désigne l'adhérence de $G(k)$ dans $\prod_v G(k_v)$ muni de la topologie produit.

On peut également reformuler le corollaire 3.20 à la manière du théorème 8.12 de [San81] : pour cela, on introduit le défaut d'approximation forte $A_{S_0}(G) := P^0(k, G) / \overline{G(k) \cdot \rho(G_{S_0}^{\text{scu}})}$, qui est un groupe abélien grâce aux résultats précédents. On dispose alors de la reformulation suivante :

Corollaire 3.23. *Sous les hypothèses précédentes, l'accouplement naturel*

$$A_{S_0}(G) \times \text{Br}_a(G) / \text{E}(G) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

est une dualité parfaite de groupes abéliens, fonctorielle en G .

On présente maintenant une application du résultat principal :

Application : points entiers sur les toseurs sous un groupe linéaire L'objectif ici est d'étudier l'obstruction de Brauer-Manin entière sur un toseur sous un groupe linéaire connexe. On rappelle que si \mathcal{X} est un \mathcal{O} -schéma de fibre générique X , $\mathcal{X}(\mathbf{A}_S)$ désigne $\prod_{v \in S} X(k_v) \times \prod_{v \notin S} \mathcal{X}(\mathcal{O}_v)$. En particulier, on a $\mathcal{X}(\mathbf{A}_\emptyset) = \prod_{v \text{ infinie}} X(k_v) \times \prod_{v \text{ finie}} \mathcal{X}(\mathcal{O}_v)$.

Théorème 3.24. *Soit \mathcal{X} un \mathcal{O} -schéma plat, dont la fibre générique X est un toseur sous un k -groupe linéaire connexe G . Soit S_0 un ensemble fini de places de k tel que $G_{S_0}^i := \prod_{v \in S_0} G^i(k_v)$ est non compact pour tout k -facteur presque k -simple G^i de G^{sc} .*

Soit alors un ensemble fini S de places de k contenant S_0 . On suppose qu'il existe un point $(P_v) \in \mathcal{X}(\mathbf{A}_S)$ qui est orthogonal au groupe $\text{Br}_1(X)$. Alors il existe un point dans $\mathcal{X}(\mathcal{O}_S)$ qui est arbitrairement proche de P_v pour $v \in S \setminus S_0$ non archimédienne, et dans la même composante connexe de $X(k_v)$ pour $v \in S$ réelle.

En particulier, si $S_0 \subset S_\infty$ et si $(P_v) \in \mathcal{X}(\mathbf{A}_\emptyset)$, alors $\mathcal{X}(\mathcal{O}) \neq \emptyset$.

Démonstration : On sait que $X(\mathbf{A}_k)^{\text{Br}_a} \neq \emptyset$, donc par le corollaire 2.5 de [Bor96], $X(k) \neq \emptyset$. Donc X est k -isomorphe à G . On conclut alors grâce au corollaire 3.20, à la manière du théorème 4 de [Har08]. \square

Remarque 3.25. Ce résultat, sous cette forme, est un résultat théorique : en effet, le groupe $\text{Br}_a(X)$ est infini en général, et donc ce théorème ne fournit pas a priori un algorithme pour décider si l'ensemble $\mathcal{X}(\mathcal{O}_S)$ est vide ou non. Cependant, d'après la remarque due à Colliot-Thélène à la fin de [Har08], si l'ensemble $\mathcal{X}(\mathcal{O})$ est vide, seul un nombre fini d'éléments de $\text{Br}_1(X)$ est nécessaire pour obtenir une obstruction de Brauer-Manin entière. On peut alors se demander si l'on peut déterminer de façon effective un sous-groupe fini de $\text{Br}_1(X)$ qui suffit pour décider la question de l'existence d'un point entier sur \mathcal{X} . Pour un résultat dans cette direction dans le cas des tores, on renvoie aux travaux récents de Dasheng Wei et Fei Xu dans [WX09].

3.3 Une variante : cas où le groupe vérifie l'approximation faible

Dans cette section, on se propose de montrer l'analogie du théorème 3 de [Har08], ce qui va constituer une sorte de raffinement du théorème 8.12 de [San81]. On rappelle d'abord un résultat de Sansuc (voir théorème 8.12 de [San81] et remarque 3.22) : le groupe G vérifie l'approximation faible si et seulement si $\mathbb{B}_\omega(G)/\mathbb{B}(G) = 0$.

Théorème 3.26. *Soit G un k -groupe réductif, S_0 un ensemble fini de places de k , contenant les places archimédiennes, tel que G s'étende en un $\text{Spec}(\mathcal{O}_{k,S_0})$ -schéma en groupes réductif \mathcal{G} . On suppose que :*

- G^{sc} vérifie l'approximation forte hors de S_0 .
- G vérifie l'approximation faible sur k , i.e. $\mathbb{B}_\omega(G)/\mathbb{B}(G) = 0$.

Soit S' un ensemble fini de places de k disjoint de S_0 . Alors il existe S contenant S_0 tel que $S \cap S' = \emptyset$ et $\mathcal{G}(\mathcal{O}_{k,S})$ est dense dans $\prod_{v \in S'} \mathcal{G}(\mathcal{O}_v)$.

Démonstration : On commence par le lemme suivant :

Lemme 3.27. *Si $\mathbf{H}_{S,S'}^1(k, \widehat{C})$ désigne le sous-groupe de $\mathbf{H}^1(k, \widehat{C})$ formé des éléments α tels que α_v est orthogonal à $G(k_v)$ si $v \in S$ et α_v est orthogonal à $\mathcal{G}(\mathcal{O}_v)$ si $v \notin S \cup S'$, on a une suite exacte*

$$1 \rightarrow \overline{H^0(U, \mathcal{G})}^{S'} \rightarrow \prod_{v \in S'} \mathcal{G}(\mathcal{O}_v) \rightarrow \left(\mathbf{H}_{S,S'}^1(k, \widehat{C}) / \mathbb{H}^1(k, \widehat{C}) \right)^D.$$

Démonstration : On considère la suite exacte suivante (voir théorème 3.19) :

$$1 \rightarrow \overline{H^0(k, G).G_{S_0}^{\text{sc}}} \rightarrow P^0(k, G) \rightarrow \text{Br}_a(G)^D \rightarrow \text{III}^1(G) \rightarrow 0$$

En remarquant que l'adhérence de $H^0(U, \mathcal{G}).G_{S_0}^{\text{sc}}$ dans $\mathcal{P}_S^0(\mathcal{G})$ est exactement l'intersection de $\overline{H^0(k, G).G_{S_0}^{\text{sc}}}$ avec $\mathcal{P}_S^0(\mathcal{G})$ (dans $P^0(k, G)$), on en déduit l'exactitude de la suite suivante :

$$1 \rightarrow \overline{H^0(U, \mathcal{G}).G_{S_0}^{\text{sc}}} \rightarrow \mathcal{P}_{S_0}^0(\mathcal{G}) \rightarrow \text{Br}_a(G)^D$$

On se donne alors $(g_v)_{v \in S'} \in \prod_{v \in S'} \mathcal{G}(\mathcal{O}_v)$, orthogonal au groupe $\mathbf{H}_{S, S'}^1(k, \widehat{C})$. On plonge (g_v) dans $\mathcal{P}_{S_0}^0(\mathcal{G})$ en complétant par l'unité de $G(k_v)$ pour $v \notin S'$. Alors ce point définit une obstruction $\delta \in \text{Br}_a(G)^D$ qui s'envoie sur 0 dans $\mathbf{H}_{S, S'}^1(k, \widehat{C})^D$. Si H est un sous-ensemble de $G(k_v)$, on définit

$$H^\perp := \{A \in \text{Br}_1(G_v) : A(P) = 0 \in \text{Br}(k_v), \forall P \in H\}.$$

On a alors une suite exacte

$$\mathbf{H}_{S, S'}^1(k, \widehat{C}) \rightarrow \text{Br}_a(G) \rightarrow \prod_{v \in S} \text{Br}_1(G_v)/(G(k_v)^\perp) \times \prod_{v \notin S \cup S'} \text{Br}_1(G_v)/(\mathcal{G}(\mathcal{O}_v)^\perp).$$

Donc par dualité locale, on en déduit qu'il existe $(g'_v)_{v \notin S'} \in I := \prod_{v \in S} G(k_v)^\wedge \times \prod_{v \notin S \cup S'} \mathcal{G}(\mathcal{O}_v)$ tel que l'élément $g \in \prod_{v \in S} G(k_v)^\wedge \times \prod_{v \notin S} G(k_v)$ obtenu en "concaténant" les g_v et les g'_v soit d'image nulle dans $\text{Br}_a(G)^D$. Or la suite

$$1 \rightarrow \overline{G(k). \rho(G_{S_0}^{\text{sc}})}^I \rightarrow I \rightarrow \text{Br}_a(G)^D$$

est exacte par le même argument que dans la preuve du corollaire 3.18 (où $(\cdot)^I$ désigne l'adhérence dans I). Par conséquent, g' est dans $\overline{G(k). \rho(G_{S_0}^{\text{sc}})}^I$, et donc (g_v) est dans $\overline{H^0(U, \mathcal{G})}^{S'}$. \square

Remarque 3.28. Dans ce lemme, on n'a en fait pas besoin que \mathcal{G} soit réductif sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_{k, S_0})$: ce résultat est valable pour tout $\text{Spec}(\mathcal{O}_{k, S_0})$ -schéma en groupes plat de type fini de fibre générique G .

Poursuivons la preuve du théorème : soit v une place de S' . On remarque d'abord le fait suivant :

Lemme 3.29. Le groupe abélien $H_{\text{ab}}^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{G})$ est l -divisible pour presque tout nombre premier l .

Démonstration : On note \mathcal{C} le complexe de schémas en groupes commutatifs $[\mathcal{Z}^{\text{sc}} \xrightarrow{\rho} \mathcal{Z}]$ associé à \mathcal{G} , de sorte que $H_{\text{ab}}^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{G}) = \mathbf{H}^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{C})$. On note aussi $\mathcal{K} := \text{Ker}(\rho)$, qui est un schéma en groupes commutatif fini, et $\mathcal{Z}' := \mathcal{Z}/\rho(\mathcal{Z}^{\text{sc}})$. Étant donné un nombre premier l , on considère le diagramme commutatif de groupes abéliens suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{K}) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{C}) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{Z}') & \longrightarrow & H^2(\mathcal{O}_v, \mathcal{K}) \\ \downarrow [l] & & \downarrow [l] & & \downarrow [l] & & \downarrow [l] \\ H^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{K}) & \longrightarrow & \mathbf{H}^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{C}) & \longrightarrow & H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{Z}') & \longrightarrow & H^2(\mathcal{O}_v, \mathcal{K}) \end{array}$$

où $[l]$ désigne l'application de multiplication par l . La structure des groupes de Lie commutatifs p -adiques compacts assure que le morphisme $H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{Z}') \xrightarrow{[l]} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{Z}')$ est surjectif pour presque tout l . Si N désigne le cardinal de \mathcal{K} , alors les groupes $\mathbf{H}^i(\mathcal{O}_v, \mathcal{K})$ sont de N -torsion, donc si l

est premier à N , le morphisme $H^i(\mathcal{O}_v, \mathcal{K}) \xrightarrow{[l]} H^i(\mathcal{O}_v, \mathcal{K})$ est un isomorphisme. Par conséquent, une chasse au diagramme assure immédiatement que le morphisme $H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{C}) \xrightarrow{[l]} H^0(\mathcal{O}_v, \mathcal{C})$ est surjectif pour presque tout l , ce qui conclut la preuve. \square

Sachant cela, on en déduit qu'il suffit de trouver S convenable tel que $\mathbf{H}_{S, S'}^1(k, \widehat{C})[l] = 0$ pour un ensemble fini donné de nombres premiers l . Et pour cela, on utilise le théorème 7 de [Ser94], section II.6.2, pour montrer par dévissage que $\mathbf{H}_{S_0, S'}^1(k, \widehat{C})[l]$ est fini pour chaque l , et on conclut comme dans la preuve du théorème 3 de [Har08] grâce à l'hypothèse sur la trivialité de $\mathbb{H}_\omega^1(k, \widehat{C})/\mathbb{H}^1(k, \widehat{C})$. \square

3.4 Une preuve "géométrique" à partir du cas des tores

Dans cette section, on va remonter une partie du théorème 3.19 à partir du résultat de Harari sur les 1-motifs ([Har08], théorème 2). On va pour cela se ramener au cas connu des tores, en utilisant une z -extension.

Soit k un corps de nombres, G un k -groupe linéaire réductif tel que $(G^{\text{sc}})_{S_0}^i$ est non compact pour tout facteur presque k -simple $(G^{\text{sc}})^i$ de G^{sc} . On sait que G admet une z -extension (voir [DMOS82], p 297, proposition 3.1), c'est-à-dire qu'il existe une suite exacte

$$1 \rightarrow P \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1$$

de groupes réductifs sur k , de sorte que P est un k -tore quasi-trivial et H un k -groupe réductif tel que son sous-groupe dérivé H^{ss} soit (semi-simple) simplement connexe. On considère alors le diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(k, P) & \longrightarrow & H^0(k, H) & \longrightarrow & H^0(k, G) & \longrightarrow & H^1(k, P) = 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ P^0(k, P) & \longrightarrow & P^0(k, H) & \longrightarrow & P^0(k, G) & \longrightarrow & P^1(k, P) = 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{Br}_a(P)^D = H^2(k, \widehat{P})^D & \longrightarrow & \text{Br}_a(H)^D & \longrightarrow & \text{Br}_a(G)^D & & \end{array} .$$

Le point crucial est le suivant : le morphisme $P^0(k, P) \rightarrow H^2(k, \widehat{P})^D$ est surjectif. En effet, P étant quasi-trivial, il suffit de montrer la surjectivité de $P^0(L, \mathbf{G}_m) \rightarrow H^2(L, \mathbf{Z})^D$ pour L un corps de nombres, et ceci est une conséquence de la théorie du corps de classes : en effet, cette flèche s'identifie, grâce à la proposition 3 du paragraphe 1, chapitre XIV de [Ser68], au morphisme de réciprocity de la théorie du corps de classes $\mathbf{A}_L^* \rightarrow \Gamma_L^{\text{ab}}$ entre le groupe des classes d'idèles et l'abélianisé du groupe de Galois absolu de L ; et il est bien connu que cette flèche est surjective (voir par exemple [NSW08], proposition 8.1.25).

Supposons désormais le résultat connu pour le groupe H , i.e. $\overline{H(k).H_{S_0}^{\text{sc}}} = P^0(k, H)^{\text{Br}_a}$ avec les notations précédentes. Déduisons-en le résultat analogue pour G : prenons $(g_v) \in P^0(k, G)^{\text{Br}_a}$. Par exactitude du diagramme précédent, on relève (g_v) en $(h_v) \in P^0(k, H)$. A priori, (h_v) n'est pas dans $P^0(k, H)^{\text{Br}_a}$, mais on va le modifier par un élément de $P^0(k, P)$ pour que cela soit le cas. En effet, l'image de (h_v) dans $\text{Br}_a(H)^D$ s'envoie sur 0 dans $\text{Br}_a(G)^D$, donc elle se relève en un élément δ dans $\text{Br}_a(P)^D$. Par surjectivité de la flèche $P^0(k, P) \rightarrow \text{Br}_a(P)^D$, δ se relève en $(p_v) \in P^0(k, P)$.

Notons alors $(h'_v) := (p_v)^{-1} \cdot (h_v) \in P^0(k, H)$. Par construction, (h'_v) s'envoie sur 0 dans $\text{Br}_a(H)^D$, donc il est dans l'adhérence de $H(k) \cdot H_{S_0}^{\text{sc}}$. Et (h'_v) relève $(g_v) \in P^0(k, G)$, donc $(g_v) \in \overline{G(k) \cdot G_{S_0}^{\text{sc}}}$.

Il suffit donc désormais de montrer le résultat pour un groupe réductif H tel que H^{ss} est simplement connexe ². Pour cela, on considère la suite exacte

$$1 \rightarrow H^{\text{ss}} \rightarrow H \rightarrow T \rightarrow 1$$

où T est un k -tore. On voit donc T comme un espace homogène de H à stabilisateur H^{ss} .

On se donne un point $(h_v) \in P^0(k, H)$ Brauer-Manin orthogonal au groupe $\text{Br}_a(H)$, que l'on pousse dans $P^0(k, T)$ pour obtenir un point (t_v) . Grâce au résultat de Harari sur les tores (théorème 2 de [Har08]), on sait que (t_v) est dans l'adhérence forte de $T(k)$. Soit alors un point t_0 suffisamment proche de (t_v) pour la topologie forte sur $P^0(k, T)$. La fibre H_{t_0} est alors un espace principal homogène de H^{ss} (qui est simplement connexe), et cette fibre a des points locaux en toutes les places réelles par approximation, donc elle a un point rationnel puisque $H^1(k, G^{\text{ss}}) \rightarrow \prod_{v \text{ réelle}} H^1(k_v, G^{\text{ss}})$ est injective (principe de Hasse pour les groupes semi-simples simplement connexes, voir [PR94], théorème 6.6 par exemple), donc H_{t_0} est k -isomorphe à un groupe semi-simple simplement connexe. On conclut alors par le théorème d'approximation forte sur H_{t_0} (et le théorème des fonctions implicites pour obtenir des points locaux dans H_{t_0} proches des points h_v initiaux).

Finalement, on a retrouvé le fait que $\overline{G(k) \cdot G_{S_0}^{\text{sc}}} = P^0(k, G)^{\text{Br}_a}$ pour tout groupe réductif G , à partir du résultat analogue pour les tores.

4 Groupe des classes d'un groupe réductif

Dans cette section, le problème est le suivant : étant donné un k -groupe réductif, et S_0 un ensemble fini de places contenant les places archimédiennes tel que G^{sc} vérifie l'approximation forte hors de S_0 , et si \mathcal{G} est un schéma en groupes plat de type fini sur \mathcal{O}_k , de fibre générique G , on définit l'ensemble des classes de \mathcal{G} comme l'ensemble de doubles classes suivant :

$$\text{Cl}_{S_0}(\mathcal{G}) := G(k) \backslash G(\mathbf{A}_k) / \mathcal{G}(\mathbf{A}_{S_0})$$

où $\mathcal{G}(\mathbf{A}_{S_0}) := \prod_{v \in S_0} G(k_v) \times \prod_{v \notin S_0} \mathcal{G}(\mathcal{O}_v)$, et on note $\text{cl}_{S_0}(\mathcal{G})$ son cardinal.

Remarque 4.1. *On ne demande pas que le modèle \mathcal{G} soit séparé : pour toute place v de k , on dispose d'un morphisme naturel $\mathcal{G}(\mathcal{O}_v) \rightarrow G(k_v)$ qui n'est pas nécessairement injectif. Aussi le quotient $G(\mathbf{A}_k) / \mathcal{G}(\mathbf{A}_{S_0})$ désigne-t-il le quotient de $G(\mathbf{A}_k)$ par l'image de $\mathcal{G}(\mathbf{A}_{S_0})$ dans $G(\mathbf{A}_k)$.*

On sait que $\text{Cl}_{S_0}(\mathcal{G})$ est naturellement un groupe abélien fini (voir [PR94], proposition 8.8 dans le cas où G est semi-simple, ou [Kne66] pour le cas général), de cardinal $\text{cl}_{S_0}(\mathcal{G})$, et qu'il coïncide avec le groupe $G(\mathbf{A}_k) / G(k) \cdot \mathcal{G}(\mathbf{A}_{S_0})$. L'objectif ici est de décrire ce groupe "explicitement" en fonction du groupe de Brauer de G .

Pour cela, on définit le groupe $\text{Br}_{a, \text{nr}}^{S_0}(\mathcal{G})$ comme étant le sous-groupe des éléments de $\text{Br}_a(G)$ (identifié à $\text{Br}_e(G) := \text{Ker}(\text{Br}_1(G) \xrightarrow{e^*} \text{Br}(k))$, $e \in G(g)$ étant l'élément neutre de G) qui sont orthogonaux à $G(k_v)$ dans $\text{Br}_1(G_v)$ pour $v \in S_0$, et qui sont orthogonaux à $\mathcal{G}(\mathcal{O}_v)$ pour $v \notin S_0$, pour l'accouplement local $G(k_v) \times \text{Br}_1(G_v) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

Théorème 4.2. *L'accouplement de Brauer-Manin induit une dualité parfaite de groupes finis, fonctorielle en \mathcal{G} :*

$$\text{Cl}_{S_0}(\mathcal{G}) \times \text{Br}_{a, \text{nr}}^{S_0}(\mathcal{G}) / \text{B}(G) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

²Je remercie Jean-Louis Colliot-Thélène pour ses suggestions à propos de cette partie de la preuve.

Démonstration : Si $U = \text{Spec}(\mathcal{O}_{k,S})$ est un ouvert suffisamment petit, la suite suivante :

$$\overline{H^0(U, \mathcal{G})} \cdot \overline{G_{S_0}^{\text{sc}}} \cdot \mathcal{P}_{S_0}^0(\mathcal{G}) \rightarrow \mathcal{P}_S^0(\mathcal{G}) \rightarrow \text{Br}_{a, \text{nr}}^{S_0}(\mathcal{G})^D$$

est exacte : en effet, cela se déduit facilement de la suite exacte du corollaire 3.18 et de la dualité locale (voir la preuve du lemme 3.27). On passe ensuite à la limite sur U . On obtient la suite exacte suivante :

$$\overline{G(k)} \cdot \overline{G_{S_0}^{\text{sc}}} \cdot \mathcal{P}_{S_0}^0(\mathcal{G}) \rightarrow P^0(k, G) \rightarrow \text{Br}_{a, \text{nr}}^{S_0}(\mathcal{G})^D .$$

Or $\mathcal{P}_{S_0}^0(\mathcal{G})$ est un sous-groupe ouvert pour la topologie adélique, on en déduit donc facilement que $\overline{G(k)} \cdot \overline{G_{S_0}^{\text{sc}}} \cdot \mathcal{P}_{S_0}^0(\mathcal{G})$ coïncide avec l'image de $G(k) \cdot \mathcal{P}_{S_0}^0(\mathcal{G})$ dans $P^0(k, G)$, d'où une suite exacte

$$G(k) \cdot \mathcal{P}_{S_0}^0(\mathcal{G}) \rightarrow P^0(k, G) \rightarrow \text{Br}_{a, \text{nr}}^{S_0}(\mathcal{G})^D .$$

Pour finir, il est clair que l'on peut remplacer simultanément $\mathcal{P}_{S_0}^0(\mathcal{G})$ par $\mathcal{G}(\mathbf{A}_{S_0})$ et $P^0(k, G)$ par $G(\mathbf{A}_k)$, d'où la suite exacte

$$G(k) \cdot \mathcal{G}(\mathbf{A}_{S_0}) \rightarrow G(\mathbf{A}_k) \rightarrow \text{Br}_{a, \text{nr}}^{S_0}(\mathcal{G})^D ,$$

et enfin on vérifie immédiatement (grâce au théorème 3.19) que le conoyau de la dernière flèche s'identifie à $\text{B}(G)^D$, ce qui conclut la preuve du théorème 4.2. \square

Une conséquence de ce résultat est une généralisation et un raffinement du théorème 8.12 de [PR94], qui concerne la comparaison du nombre de classes d'un groupe avec celui de ses tores maximaux :

Corollaire 4.3. *Soit T est un k -tore maximal de G , $\rho : G^{\text{sc}} \rightarrow G$ son revêtement semi-simple simplement connexe et $T^{\text{sc}} := \rho^{-1}(T)$. Soit \mathcal{T} l'adhérence schématique de T dans \mathcal{G} , on a alors l'inégalité suivante :*

$$\text{cl}_{S_0}(\mathcal{T}) \geq \frac{|\text{III}^1(G)|}{|\text{III}^1(T)| \cdot |H^1(k, \widehat{T^{\text{sc}}})|} \text{cl}_{S_0}(\mathcal{G})$$

où $H^1(k, \widehat{T^{\text{sc}}})$ est isomorphe à $\text{Pic}(T^{\text{sc}})$. On a également l'inégalité :

$$\text{cl}_{S_0}(\mathcal{T}) \geq \frac{|\text{Pic}(T)/\text{Pic}(G)|}{|\text{Pic}(T^{\text{sc}})|} \frac{|\text{III}^1(G)|}{|\text{III}^1(T)|} \text{cl}_{S_0}(\mathcal{G}) .$$

De façon plus précise, il existe un entier $N(\mathcal{G}) \geq 1$ tel que

$$\text{cl}_{S_0}(\mathcal{T}) = N(\mathcal{G}) \cdot \frac{|\text{III}^1(G)|}{|\text{III}^1(T)| \cdot |H^1(k, \widehat{T^{\text{sc}}})|} \text{cl}_{S_0}(\mathcal{G}) .$$

Démonstration : Il s'agit de comparer les cardinaux des ensembles $H_{\text{nr}, S_0}^2(k, \widehat{\mathcal{T}})$ et $\mathbf{H}_{\text{nr}, S_0}^1(k, \widehat{\mathcal{G}})$, où $H_{\text{nr}, S_0}^2(k, \widehat{\mathcal{T}})$ est le sous-groupe de $H^2(k, \widehat{T})$ formé des éléments α tels que $\alpha_v = 0$ si $v \in S_0$ et α_v est orthogonal à $\mathcal{T}(\mathcal{O}_v)$ pour $v \notin S_0$, et $\mathbf{H}_{\text{nr}, S_0}^1(k, \widehat{\mathcal{G}})$ est le sous-groupe de $\mathbf{H}^1(k, \widehat{C})$ formé des éléments β tels que β_v est orthogonal à $G(k_v)$ si $v \in S_0$ et à $\mathcal{G}(\mathcal{O}_v)$ pour $v \notin S_0$. Pour cela, on remarque que la suite exacte

$$H^1(k, \widehat{T^{\text{sc}}}) \rightarrow \mathbf{H}^1(k, \widehat{C}) \rightarrow H^2(k, \widehat{T})$$

envoie le sous-groupe $\mathbf{H}_{\text{nr},S_0}^1(k, \widehat{\mathcal{C}})$ dans $H_{\text{nr},S_0}^2(k, \widehat{\mathcal{T}})$ en raison de la commutativité des diagrammes suivants issus de la dualité locale :

$$\begin{array}{ccc} G(k_v) \times \mathbf{H}^1(k_v, \widehat{C}) & \longrightarrow & \mathbf{Q}/\mathbf{Z} \\ \uparrow & & \downarrow = \\ T(k_v) \times H^2(k_v, \widehat{T}) & \longrightarrow & \mathbf{Q}/\mathbf{Z}. \end{array}$$

On en déduit donc l'inégalité suivante sur les cardinaux de ces ensembles :

$$|\mathbf{H}_{\text{nr},S_0}^1(k, \widehat{\mathcal{C}})| \leq |H_{\text{nr},S_0}^2(k, \widehat{\mathcal{T}})| \cdot |H^1(k, \widehat{T}^{\text{sc}})|$$

et on conclut grâce au théorème 4.2, après avoir identifié $\mathbf{H}_{\text{nr},S_0}^1(k, \widehat{\mathcal{C}}) \cong \text{Br}_{a,\text{nr}}^{S_0}(\mathcal{G})$ et $H_{\text{nr},S_0}^2(k, \widehat{\mathcal{T}}) \cong \text{Br}_{a,\text{nr}}^{S_0}(\mathcal{T})$, ce qui donne la première inégalité. Pour la seconde, on considère la suite exacte suivante :

$$\mathbf{H}^0(k, \widehat{C}) \rightarrow H^1(k, \widehat{T}) \rightarrow H^1(k, \widehat{T}^{\text{sc}}) \rightarrow \mathbf{H}_{S_0}^1(k, \widehat{\mathcal{C}})' \rightarrow H_{\text{nr},S_0}^2(k, \widehat{\mathcal{T}})$$

où $\mathbf{H}_{S_0}^1(k, \widehat{\mathcal{C}})'$ désigne le sous-groupe de $\mathbf{H}^1(k, \widehat{C})$, contenant $\mathbf{H}_{S_0}^1(k, \widehat{\mathcal{C}})$, formé des éléments dans $\mathbf{H}^1(k, \widehat{C})$ localement orthogonaux à l'image de $T(k_v)$ (ou $\mathcal{T}(\mathcal{O}_v)$ selon que $v \in S_0$ ou non). Cette suite exacte fournit l'inégalité suivante sur les cardinaux :

$$|H^1(k, \widehat{T}^{\text{sc}})| |H_{\text{nr},S_0}^2(k, \widehat{\mathcal{T}})| \geq |H^1(k, \widehat{T})/\mathbf{H}^0(k, \widehat{C})| |\mathbf{H}_{S_0}^1(k, \widehat{\mathcal{C}})'|$$

et on conclut en identifiant $H^1(k, \widehat{T}^{\text{sc}})$, $H^1(k, \widehat{T})$ et $\mathbf{H}^0(k, \widehat{C})$ à $\text{Pic}(T^{\text{sc}})$, $\text{Pic}(T)$ et $\text{Pic}(G)$ respectivement, en minorant $|\mathbf{H}_{S_0}^1(k, \widehat{\mathcal{C}})'|$ par $|\mathbf{H}_{\text{nr},S_0}^1(k, \widehat{\mathcal{C}})|$, et en appliquant le théorème 4.2 pour exprimer $|\mathbf{H}_{\text{nr},S_0}^1(k, \widehat{\mathcal{C}})|$ et $|H_{\text{nr},S_0}^2(k, \widehat{\mathcal{T}})|$ en fonction des nombres de classes respectifs de T et G . \square

Une autre application concerne la comparaison du nombre de classes de G avec celui d'un quotient de G :

Corollaire 4.4. *Soit $1 \rightarrow G_1 \rightarrow G_2 \rightarrow G_3 \rightarrow 1$ une suite exacte de k -groupes réductifs. Soit \mathcal{G}_2 un schéma en groupes plat de type fini étendant G_2 sur $\text{Spec}(\mathcal{O}_{k,S_0})$. On note \mathcal{G}_1 l'adhérence schématique de G_1 dans \mathcal{G}_2 et \mathcal{G}_3 le quotient de \mathcal{G}_2 par \mathcal{G}_1 . Alors \mathcal{G}_3 est un schéma en groupes plat de type fini, et on a les inégalités suivantes :*

$$\text{cl}_{S_0}(\mathcal{G}_3) \leq \frac{|\mathbb{H}^1(G_2)|}{|\mathbb{H}^1(G_3)|} |\text{Pic}(G_1)| \text{cl}_{S_0}(\mathcal{G}_2)$$

et

$$\text{cl}_{S_0}(\mathcal{G}_3) \leq \frac{|\mathbb{H}^1(G_2)|}{|\mathbb{H}^1(G_3)|} \frac{|\text{Pic}(G_1)|}{|\text{Pic}(G_2)/\text{Pic}(G_3)|} \text{cl}_{S_0}(\mathcal{G}_2).$$

Plus précisément, il existe un entier $M(\mathcal{G}_2) \geq 1$ tel que

$$\text{cl}_{S_0}(\mathcal{G}_2) = M(\mathcal{G}_2) \cdot \frac{|\mathbb{H}^1(G_3)|}{|\mathbb{H}^1(G_2)|} \frac{1}{|\text{Pic}(G_1)|} \text{cl}_{S_0}(\mathcal{G}_3).$$

Démonstration : On sait que \mathcal{G}_1 est un sous-schéma en groupes plat de type fini distingué dans \mathcal{G}_2 . Alors par [DG70], exposé VI_B, proposition 9.2, et grâce au théorème 4.C. de [Ana73], le quotient $\mathcal{G}_2/\mathcal{G}_1$ est représentable par un $\text{Spec}(\mathcal{O}_{k,S_0})$ -schéma en groupes plat de type fini \mathcal{G}_3 .

On considère alors la suite exacte suivante (voir par exemple [San81], corollaire 6.11) :

$$\mathrm{Pic}(G_3) \rightarrow \mathrm{Pic}(G_2) \rightarrow \mathrm{Pic}(G_1) \rightarrow \mathrm{Br}_a(G_3) \rightarrow \mathrm{Br}_a(G_2) \rightarrow \mathrm{Br}_a(G_1).$$

On en déduit alors la suite exacte suivante :

$$\mathrm{Pic}(G_3) \rightarrow \mathrm{Pic}(G_2) \rightarrow \mathrm{Pic}(G_1)' \rightarrow \mathrm{Br}_{a,\mathrm{nr}}^{S_0}(\mathcal{G}_3) \rightarrow \mathrm{Br}_{a,\mathrm{nr}}^{S_0}(\mathcal{G}_2)$$

où $\mathrm{Pic}(G_1)'$ est un sous-groupe de $\mathrm{Pic}(G_1)$. Le corollaire est alors une conséquence directe du théorème 4.2, en exprimant les cardinaux des groupes apparaissant dans cette suite exacte en fonction des nombres de classes respectifs. \square

Exemples : Le corollaire précédent fournit entre autres les cas particuliers suivants :

- Si G est un k -groupe réductif, et si \mathcal{G} est un schéma en groupes plat de type fini étendant G sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{k,S_0})$, on note $\mathcal{G}^{\mathrm{tor}}$ le quotient de \mathcal{G} par l'adhérence de G^{ss} . C'est un schéma en groupes plat de type fini sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{k,S_0})$, dont la fibre générique est le tore $G^{\mathrm{tor}} := G/G^{\mathrm{ss}}$. Alors on a l'inégalité

$$\mathrm{cl}_{S_0}(\mathcal{G}^{\mathrm{tor}}) \leq \frac{|\mathrm{III}^1(G)|}{|\mathrm{III}^1(G^{\mathrm{tor}})|} |\mathrm{Pic}(G^{\mathrm{ss}})| \mathrm{cl}_{S_0}(\mathcal{G})$$

et même

$$\mathrm{cl}_{S_0}(\mathcal{G}) = M(\mathcal{G}) \cdot \frac{|\mathrm{III}^1(G^{\mathrm{tor}})|}{|\mathrm{III}^1(G)|} \frac{1}{|\mathrm{Pic}(G^{\mathrm{ss}})|} \mathrm{cl}_{S_0}(\mathcal{G}^{\mathrm{tor}})$$

pour un entier $M(\mathcal{G}) \geq 1$.

- Si G est un groupe réductif, tel que G^{ss} est simplement connexe, alors avec les notations du point précédent, $\mathrm{cl}_{S_0}(\mathcal{G}^{\mathrm{tor}})$ divise $\mathrm{cl}_{S_0}(\mathcal{G})$, et on dispose même d'un morphisme canonique surjectif

$$\mathrm{Cl}_{S_0}(\mathcal{G}) \rightarrow \mathrm{Cl}_{S_0}(\mathcal{G}^{\mathrm{tor}}).$$

- Si $1 \rightarrow Z \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1$ est une z -extension de G , et si \mathcal{H} est un schéma en groupes plat de type fini étendant H sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_{k,S_0})$, alors on a un morphisme canonique surjectif

$$\mathrm{Cl}_{S_0}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathrm{Cl}_{S_0}(\mathcal{G}).$$

Un cas particulier du théorème 4.2 est celui des tores :

Corollaire 4.5. *Soit T/k un tore algébrique. Soit S_0 un ensemble fini de places contenant les places archimédiennes. Alors on a une dualité parfaite de groupes finis*

$$\mathrm{Cl}_{S_0}(\mathcal{T}) \times H_{\mathrm{nr},S_0}^2(k, \widehat{\mathcal{T}}) / \mathrm{III}^2(\widehat{T}) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

où $H_{\mathrm{nr},S_0}^2(k, \widehat{\mathcal{T}})$ est le sous-groupe de $H^2(k, \widehat{T})$ formé des éléments α tels que $\alpha_v = 0$ si $v \in S_0$ et α_v est orthogonal à $\mathcal{T}(\mathcal{O}_v)$ pour $v \notin S_0$. En particulier, si \mathcal{T} a bonne réduction hors de S_0 , on obtient

$$H_{\mathrm{nr},S_0}^2(k, \widehat{\mathcal{T}}) = \left\{ \alpha \in H^2(k, \widehat{T}) : \alpha_v = 0 \text{ si } v \in S_0 \text{ et } \alpha_v \text{ non ramifié si } v \notin S_0 \right\}.$$

Exemples : Un calcul immédiat à l'aide du corps de classes de Hilbert montre que ce corollaire est cohérent avec le fait bien connu que $\mathrm{Cl}_{S_\infty}(\mathbf{G}_m)$ est isomorphe au groupe des classes d'idéaux de k .

Un autre cas particulier du théorème 4.2 est le suivant :

Corollaire 4.6. *Soit G un k -groupe semi-simple de groupe fondamental B . Soit \mathcal{G} un $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_k)$ -schéma en groupes plat de type fini étendant G . Alors on a une dualité parfaite*

$$\mathrm{Cl}_{S_0}(\mathcal{G}) \times H_{\mathrm{nr}, S_0}^1(k, \widehat{\mathcal{B}}) / \mathrm{III}^1(\widehat{B}) \rightarrow \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$$

où $H_{\mathrm{nr}, S_0}^1(k, \widehat{\mathcal{B}})$ est l'ensemble des $\alpha \in H^1(k, \widehat{B})$ tels que α_v est orthogonal à l'image de $G(k_v)$ dans $H^1(k_v, B)$ si $v \in S_0$, et α_v est orthogonal à l'image de $\mathcal{G}(\mathcal{O}_v)$ si $v \notin S_0$.

Terminons cette partie par une remarque sur le morphisme de normes défini dans [Thă08] (voir théorème 14 de [Thă08]). À l'aide des résultats précédents, on peut montrer le théorème suivant :

Théorème 4.7 (Thang). *Supposons que \mathcal{G} soit un schéma en groupes réductifs sur \mathcal{O}_{k, S_0} . Alors pour toute extension finie L/k , il existe un homomorphisme canonique et fonctoriel en \mathcal{G} :*

$$N_{L/k} : \mathrm{Cl}_{S_0, L}(\mathcal{G}_{\mathcal{O}_L}) \rightarrow \mathrm{Cl}_{S_0}(\mathcal{G})$$

de sorte que pour une tour d'extensions $k \subset L \subset M$, on ait

$$N_{M/k} = N_{L/k} \circ N_{M/L}.$$

Ce morphisme $N_{L/k}$ est induit par le dual du morphisme de restriction usuel sur le groupe de Brauer $\mathrm{Res}_{L/k} : \mathrm{Br}(G) \rightarrow \mathrm{Br}(G_L)$, via le théorème 4.2.

Démonstration : En regard du théorème 4.2, il suffit de montrer que le morphisme de restriction $\mathrm{Res}_{L/k} : \mathrm{Br}(G) \rightarrow \mathrm{Br}(G_L)$ envoie bien le sous-groupe $\mathrm{Br}_{a, \mathrm{nr}}^{S_0}(\mathcal{G})$ de $\mathrm{Br}(G)$ dans le sous-groupe $\mathrm{Br}_{a, \mathrm{nr}}^{S_0, L}(\mathcal{G}_{\mathcal{O}_L})$ de $\mathrm{Br}(G_L)$. Et ce fait est une conséquence immédiate des deux résultats suivants :

- l'existence d'un morphisme de corestriction $H_{\mathrm{ab}}^1(\mathcal{O}_w, \mathcal{G}) \rightarrow H_{\mathrm{ab}}^1(\mathcal{O}_v, \mathcal{G})$ pour toute place w de L divisant une place v de k hors de S_0 (voir par exemple [Del79] et [AGV73], exposé XVII, section 6.3).
- la validité du principe de corestriction pour le morphisme d'abélianisation $\mathrm{ab}^0 : G(k_v) \rightarrow H_{\mathrm{ab}}^0(k_v, G)$ pour $v \in S_0$ (voir par exemple [Del79] ou [Thă02]).

□

5 Une suite de Poitou-Tate non abélienne

On se propose dans cette section de démontrer l'existence d'une suite de Poitou-Tate pour un groupe linéaire connexe G/k , fonctorielle en G , et qui est compatible, via les flèches d'abélianisation, à la suite exacte de Poitou-Tate pour le complexe de k -tores $C_G = [T_G^{\mathrm{sc}} \rightarrow T_G]$ (voir section 2.1 et théorème 6.1 de [Dem09]).

Concernant la définition et les propriétés de base de l'ensemble de cohomologie non abélienne $H^2(k, G)$, on renvoie à [FSS98], section 1, ou alors à [Bor93]. On rappelle que l'ensemble $H^2(k, G)$, lorsqu'il est non vide (ce qui est le cas ici), est un espace principal homogène sous le groupe $H^2(k, Z(G))$ (pour une action naturelle, notée $+$), $Z(G)$ étant le centre de G . Ainsi, si $\eta, \eta' \in H^2(k, G)$, il existe un unique $z \in H^2(k, Z)$ tel que $z + \eta' = \eta$; on note alors $z := \eta - \eta'$. On considère alors le complexe de k -groupes commutatifs $C := [Z^{\mathrm{sc}} \rightarrow Z]$, quasi-isomorphe à $[T^{\mathrm{sc}} \rightarrow T]$. On a un morphisme naturel $j_* : H^2(k, Z) \rightarrow \mathbf{H}^2(k, C)$, et si $n(G) \in H^2(k, G)$ est la classe neutre associée à la k -forme G , on a par définition $\mathrm{ab}^2(\eta) := j_*(\eta - n(G)) \in H_{\mathrm{ab}}^2(k, G) := \mathbf{H}^2(k, C)$ (voir [Bor93], section 5.3).

Définissons une relation d'équivalence \sim sur le H^2 non abélien d'un k -groupe connexe G de centre Z : soient $\eta, \eta' \in H^2(k, G)$. On dira que η et η' sont équivalents lorsque $\eta - \eta' \in H^2(k, Z)$

est dans l'image du cobord $\delta : H^1(k, G/Z) \rightarrow H^2(k, Z)$. La classe d'équivalence de la classe neutre $n(G)$ associée à la k -forme G est donc exactement l'ensemble des classes neutres de $H^2(k, G)$ (voir [Bor93], théorème 5.5). On vérifie alors (voir [Bor93], section 5) que l'on a la relation suivante : $\eta \sim \eta'$ si et seulement si $\text{ab}^2(\eta) = \text{ab}^2(\eta') \in H_{\text{ab}}^2(k, G)$, donc il est clair que \sim est une relation d'équivalence.

Enfin, on rappelle que $\text{UPic}(\overline{G})$ est défini comme le complexe de modules galoisiens (en degrés -1 et 0)

$$\text{UPic}(\overline{G}) := [\overline{k}(G)^*/\overline{k}^* \rightarrow \text{Div}(\overline{G})]$$

qui est quasi-isomorphe au dual du complexe de k -tores $[T_G^{\text{sc}} \rightarrow T_G]$ par le corollaire 2.20 de [BvH09] (T_G et T_G^{sc} sont des tores maximaux de G^{red} et G^{sc}). On obtient alors le résultat suivant :

Théorème 5.1. *Soit G/k un groupe linéaire connexe.*

- Alors on a une suite exacte naturelle d'ensembles pointés (la première ligne est une suite exacte de groupes), fonctorielle en G :

$$\begin{array}{ccccccc} (\text{Br}_a G)^D & \longleftarrow & P^0(k, G) & \longleftarrow & P^0(k, G)^{\text{Br}_a} & \longleftarrow & 0 \\ \downarrow & & & & & & \\ H^1(k, G) & \longrightarrow & P^1(k, G) & \longrightarrow & (\text{Pic } G)^D & & \\ & & & & \downarrow & & \\ 0 & \longleftarrow & (k[G]^*/k^*)^D & \longleftarrow & \bigoplus_{v \in \Omega_k} H^2(k_v, G)/\sim & \longleftarrow & H^2(k, G)/\sim \end{array}$$

et cette suite est compatible avec la suite exacte de Poitou-Tate pour le complexe de k -tores $C_G = [T_G^{\text{sc}} \rightarrow T_G]$ (voir section 2.1 ou théorème 6.1 de [Dem09]), via les applications d'abélianisation $\text{ab}_G^i : H^i(\cdot, G) \rightarrow \mathbf{H}^i(\cdot, C_G)$.

- Si de plus G vérifie que $G_{S_0}^i := \prod_{v \in S_0} G^i(k_v)$ est non compact pour tout k -facteur presque k -simple G^i de G^{sc} , alors on peut identifier $P^0(k, G)^{\text{Br}_a}$ à $\overline{G_{S_0}^{\text{scu}} G(k)}$.
- Dans tous les cas, on dispose de la suite exacte duale de groupes abéliens :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \widehat{G}(k)^\wedge & \longrightarrow & \left(\prod' \widehat{G}(k_v) \right)^\wedge & \longrightarrow & H_{\text{ab}}^2(k, G)^D \\ & & & & & & \downarrow \\ & & H_{\text{ab}}^1(k, G)^D & \longleftarrow & \prod_{v \in \Omega_k} \text{Pic}(G_v) & \longleftarrow & \text{Pic}(G) \\ & & \downarrow & & & & \\ & & \text{Br}_a(G) & \longrightarrow & \left(\prod' \text{Br}_a(G_v) \right)_{\text{tors}} & \longrightarrow & (H_{\text{ab}}^0(k, G)^D)_{\text{tors}} \\ & & & & & & \downarrow \\ 0 & \longleftarrow & \text{Ker}(\rho)(k)^D & \longleftarrow & \mathbf{P}^2(k, \text{UPic}(\overline{G})) & \longleftarrow & \mathbf{H}^2(k, \text{UPic}(\overline{G})) \end{array}$$

où le produit restreint $\prod' \text{Br}_a(G_v)$ est considéré par rapport aux sous-groupes $\mathbf{H}^1(\mathcal{O}_v, [\widehat{\mathcal{T}}_G \rightarrow \widehat{\mathcal{T}}_G^{\text{sc}}])$.

Exemples :

- Si $G = T$ est un k -tore, on obtient la suite de Poitou-Tate "usuelle" pour les tores (voir par exemple [HS05], théorème 5.6 ou [Dem09], théorème 6.1) :

$$\begin{array}{ccccccc}
H^2(k, \widehat{T})^D & \longleftarrow & P^0(k, T) & \longleftarrow & \overline{T(k)} & \longleftarrow & 0 \\
\downarrow & & & & & & \\
H^1(k, T) & \longrightarrow & P^1(k, T) & \longrightarrow & H^1(k, \widehat{T})^D & & \\
& & & & \downarrow & & \\
0 & \longleftarrow & H^0(k, \widehat{T})^D & \longleftarrow & P^2(k, T) & \longleftarrow & H^2(k, T)
\end{array}$$

Et la suite duale correspond exactement à la suite de Poitou-Tate pour le module des caractères de T :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \widehat{T(k)}^\wedge & \longrightarrow & P^0(k, \widehat{T})^\wedge & \longrightarrow & H^2(k, T)^D \\
& & & & & & \downarrow \\
& & & & H^1(k, T)^D & \longleftarrow & P^1(k, \widehat{T}) \longleftarrow H^1(k, \widehat{T}) \\
& & & & \downarrow & & \\
& & & & H^2(k, \widehat{T}) & \longrightarrow & P^2(k, \widehat{T})_{\text{tors}} \longrightarrow (T(k)^D)_{\text{tors}} \longrightarrow 0
\end{array}$$

et fournit l'isomorphisme $H^3(k, \widehat{T}) \cong P^3(k, \widehat{T})$.

- Si G est semi-simple simplement connexe, dans le cas non compact, cette suite se découpe en trois isomorphismes :

$$\overline{G(k) \cdot G_{S_0}} = P^0(k, G)$$

qui n'est autre que le théorème d'approximation forte pour G ,

$$H^1(k, G) \cong P^1(k, G)$$

qui traduit le principe de Hasse et l'approximation faible pour G , et

$$H^2(k, G) / \sim \cong \bigoplus_v (H^2(k_v, G) / \sim)$$

qui traduit le principe local-global pour le H^2 non abélien. Quant à la suite duale, tous ses termes sont nuls.

- Si G est semi-simple (toujours dans le cas non compact), de groupe fondamental B , la suite de Poitou-Tate devient

$$\begin{array}{ccccccc}
H^1(k, \widehat{B})^D & \longleftarrow & P^0(k, G) & \longleftarrow & \overline{G_{S_0}^{\text{sc}} G(k)} & \longleftarrow & 0 \\
\downarrow & & & & & & \\
H^1(k, G) & \longrightarrow & P^1(k, G) & \longrightarrow & \widehat{B(k)}^D & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

et un isomorphisme $H^2(k, G) / \sim \cong \bigoplus_v (H^2(k_v, G) / \sim)$. Quant à la suite duale, c'est exacte-

ment la suite de Poitou-Tate pour le module fini \widehat{B} :

$$\begin{array}{ccccccc}
H^2(k, B)^D & \longleftarrow & P^0(k, \widehat{B}) & \longleftarrow & \widehat{B}(k) & \longleftarrow & 0 \\
\downarrow & & & & & & \\
H^1(k, \widehat{B}) & \longrightarrow & P^1(k, \widehat{B}) & \longrightarrow & H^1(k, B)^D & & \\
& & & & \downarrow & & \\
0 & \longleftarrow & B(k)^D & \longleftarrow & P^2(k, \widehat{B}) & \longleftarrow & H^2(k, \widehat{B})
\end{array}$$

avec l'isomorphisme $H^3(k, \widehat{B}) \cong P^3(k, \widehat{B})$.

- Si G vérifie les hypothèses du théorème 5.1, si $T = G^{\text{tor}}$ désigne le quotient torique de G , alors les suites de Poitou-Tate de G et de T sont compatibles au morphisme $G \rightarrow T$.

Démonstration : On remarque d'abord que l'on peut supposer G réductif pour prouver le théorème.

L'exactitude des deux premières lignes résulte de la section précédente (voir théorème 3.19) et de la suite exacte de Kottwitz-Borovoi démontrée dans [Bor98], théorème 5.16, et qui se déduit de la suite de Poitou-Tate du théorème 6.1 de [Dem09] par abélianisation.

Reste à montrer l'exactitude de la suite (d'ensembles pointés) suivante :

$$0 \rightarrow K \rightarrow H^2(k, G)/\sim \rightarrow \bigoplus_v (H^2(k_v, G)/\sim) \rightarrow \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})^D \rightarrow 0$$

et à identifier le noyau K (qui est seulement un ensemble pointé a priori) avec le groupe abélien $\text{III}^2(C)$.

Tout d'abord, montrons que la flèche de localisation $H^2(k, G)/\sim \rightarrow \prod_v H^2(k_v, G)/\sim$ a bien son image contenue dans $\bigoplus_v H^2(k_v, G)/\sim$. Prenons $\eta \in H^2(k, G)$, et notons $\eta' := \text{ab}^2(\eta) \in H_{\text{ab}}^2(k, G) = \mathbf{H}^2(k, C)$. Alors $(\eta'_v) \in \mathbf{P}^2(k, C)$, et on sait que $\mathbf{P}^2(k, C) = \bigoplus_v \mathbf{H}^2(k_v, C)$ car $H^i(\mathcal{O}_v, \mathcal{S}) = 0$ pour tout \mathcal{O}_v -tore \mathcal{S} et tout $i \geq 2$, car $H^i(\mathcal{O}_v, \mathcal{S}) \cong H^i(\mathbf{F}_v, \mathcal{S} \times_{\mathcal{O}_v} \mathbf{F}_v)$ et \mathbf{F}_v est de dimension cohomologique 1. Ainsi pour presque toute place v , $\text{ab}^2(\eta_v) = 0 \in H^2(k_v, C)$, donc $(\eta_v) \in \bigoplus_v H^2(k_v, G)/\sim$. Donc l'application $H^2(k, G)/\sim \rightarrow \bigoplus_v H^2(k_v, G)/\sim$ est bien définie. On remarque ensuite que la flèche d'abélianisation ab^2 envoie K dans $\text{III}^2(C)$. En outre, par définition de la relation \sim sur $H^2(k, G)$, l'application $K \xrightarrow{\text{ab}^2} \text{III}^2(C)$ est injective (ce qui est plus fort que de dire qu'elle est de noyau trivial). Montrons sa surjectivité. Soit $\alpha' \in \text{III}^2(C)$, et considérons le diagramme suivant :

$$(3) \quad \begin{array}{ccc}
H^2(k, Z) & \longrightarrow & P^2(k, Z) \\
\downarrow j_* & & \downarrow \\
\mathbf{H}^2(k, C) & \longrightarrow & \mathbf{P}^2(k, C) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^3(k, Z^{\text{sc}}) & \xrightarrow{\cong} & P^3(k, Z^{\text{sc}}).
\end{array}$$

Par hypothèse, α' s'envoie sur 0 dans $\mathbf{P}^2(k, C)$, donc aussi dans $H^3(k, Z^{\text{sc}})$. Par exactitude de la première colonne, α' se relève donc en $\tilde{\alpha} \in H^2(k, Z)$. Alors $\text{ab}^2(\tilde{\alpha} + n(G)) = \alpha'$, et si l'on regarde l'image β de $\tilde{\alpha} + n(G) \in H^2(k, G)$ dans $P^2(k, G)$, on constate que $\text{ab}^2(\beta) = 0$ dans $\mathbf{P}^2(k, C)$, et donc β est neutre localement partout, ce qui signifie exactement que $\alpha := \tilde{\alpha} + n(G) \in K$. On a

donc trouvé $\alpha \in K$ relevant α' . Donc l'application $\text{ab}^2 : K \xrightarrow{\sim} \text{III}^2(C)$ est une bijection. Montrons maintenant l'exactitude en $\bigoplus_v H^2(k_v, G)/\sim$. Soit donc $\alpha \in \bigoplus_v H^2(k_v, G)/\sim$ d'image nulle dans $\mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})^D$. On regarde le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} H^2(k, G)/\sim & \longrightarrow & \bigoplus_v H^2(k_v, G)/\sim & \longrightarrow & (k[G]^*/k^*)^D \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = \\ \mathbf{H}^2(k, C) & \longrightarrow & \mathbf{P}^2(k, C) & \longrightarrow & \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})^D \end{array}$$

dont on sait que la seconde ligne est exacte (voir section 2.1 ou théorème 6.1 de [Dem09]). Soit alors $(\alpha_v) \in \prod_v H^2(k_v, G)$ relevant α , donc d'image nulle dans $(k[G]^*/k^*)^D$. On pose $(\alpha'_v) := \text{ab}^2(\alpha_v) \in \mathbf{P}^2(k, C)$. Par exactitude de la seconde ligne, (α'_v) provient d'un élément α' de $\mathbf{H}^2(k, C)$. Comme plus haut, on écrit $(\alpha_v) = (\eta_v) + (n(G)_v)$ avec $(\eta_v) \in P^2(k, Z)$: alors avec le diagramme (3), α' s'envoie sur 0 dans $H^3(k, Z^{\text{sc}})$, donc $\alpha' = j_*(\eta^0)$ pour un certain $\eta^0 \in H^2(k, Z)$. Alors l'élément $\alpha^0 := \eta^0 + n(G) \in H^2(k, G)/\sim$ s'envoie sur $\alpha \in \bigoplus_v H^2(k_v, G)/\sim$ par injectivité de la flèche $\bigoplus_v H^2(k_v, G)/\sim \rightarrow \mathbf{P}^2(k, C)$.

Reste à montrer la surjectivité de la flèche $\bigoplus_v H^2(k_v, G)/\sim \rightarrow (k[G]^*/k^*)^D$. Pour cela, on utilise la surjectivité de la flèche $\mathbf{P}^2(k, C) \rightarrow \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})^D$ (voir section 2.1 ou théorème 6.1 de [Dem09]). Or pour toute place v , l'image de $\text{ab}^2 : H^2(k_v, G) \rightarrow \mathbf{H}^2(k_v, C)$ est exactement $\text{Im}(H^2(k_v, Z) \xrightarrow{j_*} \mathbf{H}^2(k_v, C))$; cette image est exactement $\mathbf{H}^2(k_v, C)$ si v est une place finie, mais elle peut être plus petite si v est infinie. On conclut de la façon suivante : soit $\delta \in \mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})^D$. On sait qu'il existe $c \in \mathbf{P}^2(k, C)$ d'image δ dans $\mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})^D$. Notons $c_\infty \in \prod_{v \in S_\infty} \mathbf{H}^2(k_v, C)$ la composante de c aux places infinies. On sait que le morphisme $\mathbf{H}^2(k, C) \rightarrow \prod_{v \in S_\infty} \mathbf{H}^2(k_v, C)$ est surjective (par dévissage, en se ramenant au cas des tores). Ainsi c_∞ se relève en $c' \in \mathbf{H}^2(k, C)$. Notons $c'' := c - c' \in \mathbf{P}^2(k, C)$. Alors $c''_\infty = 0$ et c'' s'envoie sur δ dans $\mathbf{H}^{-1}(k, \widehat{C})^D$. Alors c'' se relève dans $\bigoplus_v H^2(k_v, G)/\sim$ en un élément g dont l'image dans $(k[G]^*/k^*)^D$ est exactement δ , ce qui conclut la preuve. \square

Références

- [AGV73] Michael Artin, Alexander Grothendieck, and Jean-Louis Verdier, *Théorie des topes et cohomologie étale des schémas.*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269-270-305, Springer-Verlag, Berlin, 1973, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat.
- [Ana73] Sivaramakrishna Anantharaman, *Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension 1*, Sur les groupes algébriques, Soc. Math. France, Paris, 1973, pp. 5–79. Bull. Soc. Math. France, Mém. 33.
- [BLR90] Siegfried Bosch, Werner Lütkebohmert, and Michel Raynaud, *Néron models*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 21, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [Bor93] Mikhail Borovoi, *Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology*, Duke Math. J. **72** (1993), no. 1, 217–239.
- [Bor96] ———, *The Brauer-Manin obstructions for homogeneous spaces with connected or abelian stabilizer*, J. reine angew. Math. **473** (1996), 181–194.

- [Bor98] ———, *Abelian Galois cohomology of reductive groups*, Mem. Amer. Math. Soc. **132** (1998), no. 626, viii+50.
- [Bre90] Lawrence Breen, *Bitorseurs et cohomologie non abélienne*, The Grothendieck Festschrift, Vol. I, Progr. Math., vol. 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, pp. 401–476.
- [BvH09] Mikhail Borovoi and Joost van Hamel, *Extended Picard complexes and linear algebraic groups*, J. reine angew. Math. **2009** (2009), no. 627, 53–82.
- [CTX09] Jean-Louis Colliot-Thélène and Fei Xu, *Brauer-Manin obstruction for integral points of homogeneous spaces and representation by integral quadratic forms*, Compositio Mathematica **145** (2009), no. 02, 309–363.
- [Del79] Pierre Deligne, *Variétés de Shimura : interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques*, Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, pp. 247–289.
- [Dem09] Cyril Demarche, *Théorèmes de dualité pour les complexes de tores*, preprint [arXiv :0906.3453v1 \[math.NT\]](https://arxiv.org/abs/0906.3453v1), disponible sur [http ://www.math.u-psud.fr/~demarche/tores.pdf](http://www.math.u-psud.fr/~demarche/tores.pdf), 2009.
- [DG70] Michel Demazure and Alexander Grothendieck, *Schémas en groupes.*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 151-152-153, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [DMOS82] Pierre Deligne, James S. Milne, Arthur Ogus, and Kuang-yen Shih, *Hodge cycles, motives, and Shimura varieties*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 900, Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- [FSS98] Yuval Z. Flicker, Claus Scheiderer, and Ramdorai Sujatha, *Grothendieck’s theorem on non-abelian H^2 and local-global principles*, J. Amer. Math. Soc. **11** (1998), no. 3, 731–750.
- [Gil02] Philippe Gille, *Torseurs sur la droite affine*, Transform. Groups **7** (2002), no. 3, 231–245.
- [GP08] Philippe Gille and Arturo Pianzola, *Isotriviality and étale cohomology of Laurent polynomial rings*, J. Pure Appl. Algebra **212** (2008), no. 4, 780–800.
- [Gro68] Alexander Grothendieck, *Le groupe de Brauer. I, II et III.*, Dix Exposés sur la Cohomologie des Schémas, North-Holland, Amsterdam, 1968, pp. 46–188.
- [Har02] David Harari, *Groupes algébriques et points rationnels*, Math. Ann. **322** (2002), no. 4, 811–826.
- [Har08] ———, *Le défaut d’approximation forte pour les groupes algébriques commutatifs*, Algebra and Number Theory **2** (2008), no. 5, 595–611.
- [HS05] David Harari and Tamás Szamuely, *Arithmetic duality theorems for 1-motives*, J. reine angew. Math. **578** (2005), 93–128, et *Corrigenda for "Arithmetic duality theorems for 1-motives"*, disponible sur [http ://www.math.u-psud/~harari/errata/corrigecrelle.pdf](http://www.math.u-psud.fr/~harari/errata/corrigecrelle.pdf).
- [HS08] ———, *Local-global principles for 1-motives*, Duke Math. J. **143** (2008), no. 3, 531–557.
- [Kne66] Martin Kneser, *Strong approximation*, Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups (Proc. Sympos. Pure Math., Boulder, Colo., 1965), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1966, pp. 187–196.
- [Lan56] Serge Lang, *Algebraic groups over finite fields*, Amer. J. Math. **78** (1956), 555–563. MR [MR0086367](https://mathscinet.ams.org/mathscinet/item.aspx?label=MR) (19,174a)

- [Mil80] James S. Milne, *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.
- [Mil06] J. S. Milne, *Arithmetic duality theorems*, second ed., BookSurge, LLC, Charleston, SC, 2006.
- [Nis84] Yevsey A. Nisnevich, *Espaces homogènes principaux rationnellement triviaux et arithmétique des schémas en groupes réductifs sur les anneaux de Dedekind*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **299** (1984), no. 1, 5–8.
- [NSW08] Jürgen Neukirch, Alexander Schmidt, and Kay Wingberg, *Cohomology of number fields*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
- [PR94] Vladimir Platonov and Andrei Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory*, Pure and Applied Mathematics, vol. 139, Academic Press Inc., Boston, MA, 1994, Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen.
- [San81] Jean-Jacques Sansuc, *Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres*, J. reine angew. Math. **327** (1981), 12–80.
- [Ser68] Jean-Pierre Serre, *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968, Deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago, No. VIII.
- [Ser94] ———, *Cohomologie galoisienne*, fifth ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [Sko01] Alexei Skorobogatov, *Torsors and rational points*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 144, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.
- [Thă02] Nguyễn Quốc Thăng, *On corestriction principle in non abelian Galois cohomology over local and global fields*, J. Math. Kyoto Univ. **42** (2002), no. 2, 287–304.
- [Thă08] ———, *Corestriction Principle for non-abelian cohomology of reductive group schemes over Dedekind rings of integers of local and global fields*, preprint (2008).
- [Wei94] Charles A. Weibel, *An introduction to homological algebra*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 38, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
- [WX09] Dasheng Wei and Fei Xu, *Integral points for groups of multiplicative type*, preprint, 2009.

Cyril Demarche

Laboratoire de Mathématiques, Bâtiment 425, Université de Paris-Sud, F-91405 Orsay, France
cyril.demarche@math.u-psud.fr