ABÉLIANISATION DES ESPACES HOMOGÈNES ET APPLICATIONS ARITHMÉTIQUES

par

Cyril Demarche

Abstract. — For a homogeneous space X (not necessarily principal) of a connected algebraic group G (not necessarily linear) over a field K of characteristic zero, we construct a canonical abelian group $H^0_{\mathrm{ab}}(K, X)$ defined as the hypercohomology group of a complex of semi-abelian varieties of length 3, and a natural canonical map called the abelianization map $\mathrm{ab}^0_X : X(K) \to H^0_{\mathrm{ab}}(K, X)$. This map generalizes Borovoi's abelianization maps for H^0 and H^1 of reductive groups. As an application, if K is a number field, we get a formula for the defects of weak and strong approximations on X in terms of the hypercohomology of an explicit complex of Galois modules.

Résumé. — Étant donné un espace homogène X d'un groupe algébrique connexe G (pas forcément linéaire) sur un corps K de caractéristique nulle, on construit un groupe abélien canoniquement associé à X et noté $H^0_{\mathrm{ab}}(K, X)$, défini comme un groupe d'hypercohomologie d'un complexe de variétés semi-abéliennes de longueur 3. On dispose alors d'une application canonique, appelée application d'abélianisation, $\mathrm{ab}^0_X : X(K) \to H^0_{\mathrm{ab}}(K, X)$, qui est compatible aux applications d'abélianisation de Borovoi pour le H^0 et le H^1 d'un groupe réductif, et qui généralise ces applications. On obtient notamment, comme application de cette construction et dans le cas où K est un corps de nombres, une formule explicite décrivant les défauts d'approximation faible et forte sur X en termes de l'hypercohomologie d'un complexe de modules galoisiens.

0. Introduction

La cohomologie abélianisée des groupes réductifs sur un corps, introduite notamment par Borovoi (voir [**Bor93**] et [**Bor98**]) et Breen, est un outil important pour l'étude de l'arithmétique des groupes algébriques sur les corps locaux et les corps de nombres. Dans ce texte, on étend ces constructions à la cohomologie d'un morphisme de schémas en groupes sur une base quelconque. En particulier, on généralise certains résultats dus à Breen et Labesse dans [**Lab99**], à propos de la cohomologie d'un morphisme de groupes réductifs sur un corps.

Cette construction permet notamment de "dévisser" la cohomologie de certains morphismes de schémas en groupes à l'aide de la cohomologie des morphismes de schémas en groupes semi-simples simplement connexes, et de la cohomologie des complexes de schémas semi-abéliens de longueur 3.

L'une des motivations de cette construction générale est l'arithmétique des espaces homogènes de groupes algébriques sur les corps de nombres. Cela fournit en effet un cadre naturel pour déduire certaines propriétés arithmétiques des espaces homogènes à partir de propriétés similaires pour les variétés semi-abéliennes (les théorèmes de dualité pour les 1-motifs par exemple) et pour les groupes semi-simples simplement connexes (le théorème d'approximation forte par exemple).

Dans ce texte, on présente ainsi deux applications de cette cohomologie abélianisée des morphismes de groupes algébriques. On calcule le défaut d'approximation forte et le défaut d'approximation faible sur un espace homogène (d'un groupe connexe, à stabilisateurs connexes ou linéaires commutatifs) sur un corps de nombres, en termes de l'hypercohomologie galoisienne d'un complexe de modules galoisiens explicites.

Citons par exemple l'application suivante (voir corollaire 6.3). Pour cela, définissons quelques notations : si K est un corps de caractéristique nulle, et G/K est un groupe algébrique connexe, on note G^{lin} le sous-groupe linéaire maximal de G, G^{ab} la variété abélienne quotient G/G^{lin}, G^{u} le radical unipotent de G^{lin}, $G^{\mathrm{red}} := G^{\mathrm{lin}}/G^{\mathrm{u}}$, G^{ss} le sous-groupe dérivé de G^{red} et G^{sc} le revêtement simplement connexe de G^{ss} ; enfin, G^{scu} désigne le produit fibré de G^{u} et G^{sc} au-dessus de G^{red}, et $\rho : G^{\mathrm{scu}} \to G$ le morphisme naturel. Pour finir, pour

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — Primary : 14M17 ; Secondary : 14L15, 11G35, 20G30.

un groupe topologique A, on note $A^D := \mathrm{Hom}_{\mathrm{cont.}}(A, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$. Le résultat suivant donne une formule explicite pour le défaut d'approximation forte sur un espace homogène :

***Théorème* (Corollaire 6.3).** — *Soit k un corps de nombres, G un k-groupe connexe, S_0 un ensemble fini de places de k. Soit H un sous-k-groupe linéaire connexe de G, et soit $X := G/H$. On suppose que le groupe G^{sc} vérifie l'approximation forte hors de S_0 et que $\text{Ш}^1(G^{\mathrm{ab}})$ est fini.*

On note $P^0(k, X) := \prod_{v \in \Omega_\infty} \pi_0(X(k_v)) \times \prod'_{v \in \Omega_f} X(k_v)$ où $\pi_0(X(k_v))$ désigne l'ensemble des composantes connexes de $X(k_v)$, Ω_∞ (resp. Ω_f) l'ensemble des places infinies (resp. finies) de k. On note $\widehat{C}_X$ le complexe $\widehat{C}_X := [\widehat{T}_{G^{\mathrm{lin}}} \to (G^{\mathrm{ab}})^* \oplus \widehat{T}_H \oplus \widehat{T}_{G^{\mathrm{sc}}} \to \widehat{T}_{H^{\mathrm{sc}}}]$, où $\widehat{T}_F$ désigne le module des caractères d'un tore maximal T_F d'un k-groupe linéaire F.

Alors il existe une application naturelle $P^0(k, X) \xrightarrow{\theta} \left(\mathbf{H}^0(k, \widehat{C}_X) / \text{Ш}^0(\widehat{C}_X)\right)^D$, dont le noyau est exactement l'adhérence de $\left(\prod_{v \in S_0} \rho(G^{\mathrm{scu}}(k_v))\right) . X(k)$ dans $P^0(k, X)$. En outre, θ est surjective si le groupe G est linéaire.

Plus généralement, on obtient la description des défauts d'approximation faible et forte pour la cohomologie d'un morphisme de groupes algébriques connexes quelconque, ne correspondant pas nécessairement à un espace homogène (cas où le morphisme est injectif). On obtient également un résultat analogue dans le cas où le groupe H est supposé linéaire commutatif (et non plus connexe) : voir corollaire 6.10.

Le plan du texte est le suivant : la section 1 est consacrée à des rappels sur l'abélianisation de la cohomologie des groupes réductifs et à la généralisation aux groupes non linéaires. Dans les sections 2 et 3, on construit l'application d'abélianisation pour un morphisme de schémas en groupes sur une base quelconque, puis on s'intéresse au cas particulier d'un anneau d'entiers de corps de nombres à la section 4. La section 5 traite des théorèmes de dualité pour certains complexes de variétés semi-abéliennes. Les section 6 et 7 sont consacrées aux applications arithmétiques aux espaces homogènes.

Remerciements : je remercie très chaleureusement David Harari pour ses précieux commentaires. Je remercie également Philippe Gille pour certaines suggestions intéressantes, ainsi que le rapporteur pour ses remarques et commentaires.

1. Applications d'abélianisation pour les groupes connexes sur un corps

Dans tout le texte, K désigne un corps de caractéristique nulle.

L'objectif de cette section est de généraliser les constructions de Borovoi dans [**Bor98**] et [**Bor93**] pour la cohomologie galoisienne, de degré 0 et 1 des groupes réductifs sur K. Si G/K est un groupe algébrique connexe, on note G^{lin} le sous-groupe linéaire maximal de G, G^{ab} la variété abélienne quotient G/G^{lin}, G^{u} le radical unipotent de G^{lin}, $G^{\mathrm{red}} := G^{\mathrm{lin}}/G^{\mathrm{u}}$, G^{ss} le sous-groupe dérivé de G^{red} et G^{sc} le revêtement simplement connexe de G^{ss}.

Rappelons la construction pour un groupe réductif G. On dispose d'un morphisme naturel $\rho : G^{\mathrm{sc}} \to G$. On note Z le centre de G, Z^{sc} celui de G^{sc}, et T un K-tore maximal de G. On pose $T^{\mathrm{sc}} := \rho^{-1}(T)$, qui est un tore maximal de G^{sc}.

Deligne a montré (voir [**Del79**], 2.0.2) que le morphisme $[G^{\mathrm{sc}} \to G]$ définit un module croisé de Picard. On dispose des morphismes naturels suivants entre modules croisés :

$$\begin{tikzcd} Z^{\mathrm{sc}} \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & T^{\mathrm{sc}} \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & G^{\mathrm{sc}} \arrow[d, "\rho"] \\ Z \arrow[r] & T \arrow[r] & G\,. \end{tikzcd}$$

Le lemme 3.8.1 de [**Bor98**] assure que ces morphismes de modules croisés sont des quasi-isomorphismes. Or on dispose d'un morphisme de modules croisés évident

$$G \to [G^{\mathrm{sc}} \to G]$$

duquel on déduit des applications en hypercohomologie :

$$\mathrm{ab}^i_G : H^i(K, G) \to \mathbf{H}^i(K, [T^{\mathrm{sc}} \to T]) =: H^i_{\mathrm{ab}}(K, G)$$

pour $i = 0, 1$. Étendons ces constructions à des K-groupes algébriques connexes (pas nécessairement linéaires).

Soit G un K-groupe algébrique connexe.

Dans [**Dem11c**], section 4.1.1, on a construit, sous l'hypothèse que G^{lin} soit réductif, une sous-variété semi-abélienne maximale SA_G de G, qui est une extension de G^{ab} par T_G. Cette construction utilise par exemple un théorème de Rosenlicht (voir [**Ros56**], corollaire 3 du théorème 12) qui assure l'existence de $D \subset G$ k-sous-groupe distingué connexe minimal tel que $G_{\mathrm{lin}} := G/D$ soit linéaire.

On définit le complexe de variétés semi-abéliennes

$$C_G := [T_G^{\mathrm{sc}} \to \mathrm{SA}_G] .$$

Ce complexe généralise le complexe de tores $[T_G^{\mathrm{sc}} \to T_G]$ pour les groupes non linéaires. Par exemple, si G est réductif, on retrouve $C_G = [T_G^{\mathrm{sc}} \to T_G]$. Si G est une variété semi-abélienne, alors $C_G = [0 \to G]$ peut être considéré comme un 1-motif.

1.1. Application d'abélianisation en degré 0 et 1. — Dans ce paragraphe, on construit les applications ab_G^0 et ab_G^1. On suppose d'abord G^{lin} réductif.

Le théorème 3.5.3 de [**Bor98**] et le lemme 4.3 de [**Dem11c**] assurent que les morphismes naturels

$$\mathbf{H}^i(K, [Z_G^{\mathrm{sc}} \to Z_G]) \to \mathbf{H}^i(K, [T_G^{\mathrm{sc}} \to \mathrm{SA}_G]) \to \mathbf{H}^i(K, [G^{\mathrm{sc}} \to G])$$

sont des isomorphismes de groupes pour $i = 0$ et 1. Ainsi le morphisme naturel de modules croisés $[1 \to G] \to [G^{\mathrm{sc}} \to G]$ induit-il des applications

$$\mathrm{ab}_G^0 : G(K) \to H^0_{\mathrm{ab}}(K, G) := \mathbf{H}^0(K, C_G)$$

$$\mathrm{ab}_G^1 : H^1(K, G) \to H^1_{\mathrm{ab}}(K, G) := \mathbf{H}^1(K, C_G) .$$

Exemples :
- Si G est réductif, on retrouve exactement les applications de Borovoi (cf [**Bor98**], 3.10).
- Si G est une variété semi-abélienne, alors $H^i_{\mathrm{ab}}(K, G) = H^i(K, G)$ et ab_G^i est l'identité.

Généralisons cette construction au cas où G^{lin} n'est pas réductif. Soit G^{u} le radical unipotent de G^{lin}, notons $G^{\mathrm{red}} := G^{\mathrm{lin}}/G^{\mathrm{u}}$ et $G' := G/G^{\mathrm{u}}$. On a un diagramme commutatif exact de groupes algébriques :

$$\begin{tikzcd}
G^{\mathrm{u}} \arrow[r, "="] \arrow[d, hook] & G^{\mathrm{u}} \arrow[d, hook] & \\
G^{\mathrm{lin}} \arrow[r, hook] \arrow[d] & G \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d] & G^{\mathrm{ab}} \arrow[d, "="] \\
G^{\mathrm{red}} \arrow[r, hook] & G' \arrow[r, two heads] & G^{\mathrm{ab}} .
\end{tikzcd}$$

Alors $G'^{\mathrm{lin}} = G^{\mathrm{red}}$ est réductif, donc on peut définir $C_{G'}$ et $\mathrm{ab}_{G'}^i : H^i(K, G') \to H^i_{\mathrm{ab}}(K, G')$. On définit alors $\mathrm{ab}_G^i : H^i(K, G) \to H^i_{\mathrm{ab}}(K, G)$ comme la composée :

$$H^i(K, G) \to H^i(K, G') \xrightarrow{\mathrm{ab}_{G'}^i} H^i_{\mathrm{ab}}(K, G') =: H^i_{\mathrm{ab}}(K, G) .$$

1.2. Propriété des applications d'abélianisation. — Les flèches ab_G^i définies à la section précédente vérifient les mêmes propriétés que dans le cas des groupes réductifs. En particulier, les applications ab_G^i sont fonctorielles en G et indépendantes du tore maximal choisi. Plus généralement, presque toutes les propriétés démontrées dans [**Bor98**] restent valable pour un groupe connexe G quelconque. Montrons par exemple le résultat suivant, où $\Omega_{\mathbf{R}}$ désigne l'ensemble des places réelles de k :

Proposition 1.1. — *Soit k un corps de nombres, G un k-groupe algébrique connexe. Alors le diagramme commutatif suivant*

$$\begin{tikzcd}
H^1(k, G) \arrow[r, "\mathrm{ab}_G^1"] \arrow[d, "\mathrm{loc}_\infty"] & H^1_{\mathrm{ab}}(k, G) \arrow[d, "\mathrm{loc}'_\infty"] \\
\prod_{v \in \Omega_{\mathbf{R}}} H^1(k_v, G) \arrow[r, "\prod_{v \in \Omega_{\mathbf{R}}} \mathrm{ab}_{G_v}^1"] & \prod_{v \in \Omega_{\mathbf{R}}} H^1_{\mathrm{ab}}(k_v, G)
\end{tikzcd}$$

est cartésien.

Démonstration. — C'est un dévissage à partir du cas linéaire traité par Borovoi (théorème 5.11 de [**Bor98**]) : par définition du sous-groupe $D \subset G$, le sous-groupe $D \cap G^{\mathrm{ss}} \subset G^{\mathrm{ss}}$ est central, donc fini. Donc le morphisme naturel $G \to G/D$ induit un isomorphisme naturel entre G^{sc} et le revêtement semi-simple simplement connexe de G_{lin}. Par conséquent, le diagramme (18) de [**Dem11c**] assure que la suite exacte de k-groupes $1 \to D \to G \to G_{\mathrm{lin}} \to 1$ induit une suite exacte de complexes

$$0 \to D \to C_G \to C_{G_{\mathrm{lin}}} \to 0 .$$

On considère le diagramme commutatif à colonnes exactes suivant (on rappelle que D est central) :

$$\begin{tikzcd}
H^0(k, G_{\mathrm{lin}}) \arrow[r] \arrow[d] & H^0_{\mathrm{ab}}(k, G_{\mathrm{lin}}) \times \prod_{v \in \Omega_{\mathbf{R}}} \widehat{H}^0(k_v, G_{\mathrm{lin}}) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{v \in \Omega_{\mathbf{R}}} \widehat{H}^0_{\mathrm{ab}}(k_v, G_{\mathrm{lin}}) \arrow[d] \\
H^1(k, D) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(k, D) \times \prod_{v \in \Omega_{\mathbf{R}}} H^1(k_v, D) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{v \in \Omega_{\mathbf{R}}} H^1(k_v, D) \arrow[d] \\
H^1(k, G) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_{\mathrm{ab}}(k, G) \times \prod_{v \in \Omega_{\mathbf{R}}} H^1(k_v, G) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{v \in \Omega_{\mathbf{R}}} H^1_{\mathrm{ab}}(k_v, G) \arrow[d] \\
H^1(k, G_{\mathrm{lin}}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_{\mathrm{ab}}(k, G_{\mathrm{lin}}) \times \prod_{v \in \Omega_{\mathbf{R}}} H^1(k_v, G_{\mathrm{lin}}) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{v \in \Omega_{\mathbf{R}}} H^1_{\mathrm{ab}}(k_v, G_{\mathrm{lin}}) \\
H^2(k, D) \arrow[r] & H^2(k, D) \times \prod_{v \in \Omega_{\mathbf{R}}} H^2(k_v, D) & .
\end{tikzcd}$$

À l'aide des théorèmes 5.11 de [**Bor98**] appliqué à G_{lin} (qui assure que la quatrième ligne est exacte), et en utilisant l'injectivité de la dernière flèche horizontale ainsi que la surjectivité du morphisme $H^0_{\mathrm{ab}}(k, G_{\mathrm{lin}}) \to \prod_{v \in \Omega_{\mathbf{R}}} \widehat{H}^0_{\mathrm{ab}}(k_v, G_{\mathrm{lin}})$ (conséquence de l'approximation faible aux places réelles : voir théorème 5.10 plus bas), on conclut par une chasse au diagramme. □

Remarque 1.2. — En revanche, contrairement au cas des groupes linéaires, l'application

$$H^1(k, G) \to H^1_{\mathrm{ab}}(k, G) \times \prod_v H^1(k_v, G)$$

n'est pas injective en général. Voir par exemple la proposition 3.16 de [**BCTS08**].

2. Application d'abélianisation pour les morphismes de schémas en groupes connexes

L'objectif de cette section est de généraliser les flèches d'abélianisation (pour le degré 0 uniquement) au cas des morphismes de schémas en groupes connexes sur une base quelconque.

Notons d'abord que Labesse et Breen ont donné dans [**Lab99**], chapitre 1 et appendice B, une définition de la cohomologie galoisienne d'un morphisme de modules croisés et d'une application d'abélianisation pour un complexe de groupes réductifs sur un corps (voir [**Lab99**], section 1.8). Leur construction fait appel à la notion d'ensemble croisé (qui est plus générale que celle de morphisme de modules croisés), et leur définition est exprimée essentiellement en termes de cocycles.

Pour définir la cohomologie d'un morphisme de modules croisés, on ne fait pas ici appel à la notion d'ensemble croisé, mais seulement à la notion plus commune de module croisé, et au lien de cette notion avec la notion de gr-champ. Cela permet de définir les ensembles de cohomologie souhaités en termes de torseurs. Cette définition "géométrique" généralise naturellement la construction cocyclique de Labesse et Breen. On obtient ainsi par exemple une généralisation de l'application d'abélianisation de [**Lab99**], section 1.8, pour un morphisme de groupes réductifs.

Notons au passage que la construction et les propriétés des applications d'abélianisation de Borovoi pour les schémas en groupes réductifs ont récemment été étendues au cas d'un schéma de base quelconque par Gonzalez-Aviles (voir [**GA11**]), avec des techniques analogues à celles que l'on utilise dans la suite.

2.1. Torseurs sous un gr-champ. — Pour plus de détails sur le sujet, on pourra consulter [**Bre90**], [**Bre94**] ou les sections 5.1 et 6.1 de [**Ald08**]. Soient S un schéma muni du site fppf ou du site étale (dans les applications, on se limitera essentiellement au site étale sur $S = \mathrm{Spec}(K)$). Soit $\mathscr{M}$ un gr-champ sur S (voir [**Bre94**], sections 1.1 et 1.2 pour la notion de champ et de gr-champ).

Exemple : un exemple fondamental de gr-champ, en vue de l'application à la cohomologie des morphismes de schémas en groupes, est le suivant : étant donné un module croisé $M := [\alpha : F \to G]$ sur S, on peut lui associer un gr-champ $\mathscr{M}$, défini par Breen (voir [**Bre90**], section 4.4), de manière fonctorielle en M.

On note $\otimes_{\mathscr{M}} : \mathscr{M} \times \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ le foncteur définissant la loi de groupe sur $\mathscr{M}$, et $H^0(S, \mathscr{M})$ le groupe des sections globales de $\mathscr{M}$ modulo transformation.

On peut définir la notion de torseur sous $\mathscr{M}$ (voir [**Bre90**], section 6.1) : un champ en groupoïdes $\mathscr{P}$ sur S est un $\mathscr{M}$-torseur à droite s'il est muni d'un morphisme de champs

$$m : \mathscr{P} \times \mathscr{M} \to \mathscr{P}$$

compatible avec la structure de groupe sur $\mathscr{M}$, et de sorte que le morphisme

$$(\mathrm{pr}_{\mathscr{P}}, m) : \mathscr{P} \times \mathscr{M} \to \mathscr{P} \times \mathscr{P}$$

soit une équivalence. On demande également que cette action de $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{P}$ vérifie des conditions de compatibilité naturelles (voir [**Bre90**], section 6.1), et qu'il existe un recouvrement $(U_i \to S)_{i \in I}$ de S tel que les catégories fibres $\mathscr{P}_{U_i}$ soient non vides. On dispose également de la notion naturelle de morphisme de $\mathscr{M}$-torseurs. On notera $\mathrm{TORS}(\mathscr{M})$ la catégorie des torseurs à droite sous $\mathscr{M}$, et $H^1(S, \mathscr{M})$ l'ensemble pointé des classes d'isomorphisme de $\mathscr{M}$-torseurs.

On dispose de la notion de produit contracté pour des torseurs sous des gr-champs (voir [**Bre90**], section 6.7) : étant donnés un champ en groupoïdes $\mathscr{P}$ muni d'une action à droite de $\mathscr{M}$ et un champ en groupoïdes $\mathscr{Q}$ muni d'une action à gauche de $\mathscr{M}$, on peut construire un champ en groupoïdes produit contracté, que l'on note $\mathscr{P} \wedge^{\mathscr{M}} \mathscr{Q}$. En particulier, si $\varphi : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ est un morphisme de gr-champs, le produit contracté induit un foncteur φ_*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{TORS}(\mathscr{M}) & \longrightarrow & \mathrm{TORS}(\mathscr{N}) \\ \mathscr{P} & \longmapsto & \varphi_*(\mathscr{P}) := \mathscr{P} \wedge^{\mathscr{M}} \mathscr{N} \end{array}$$

où $\mathscr{N}$ désigne le champ en groupoïdes $\mathscr{N}$ munit de l'action de $\mathscr{M}$ induite par φ.

Si $\mathscr{P}$ est un torseur à droite sous $\mathscr{M}$, on appelle trivialisation de $\mathscr{P}$ un morphisme de $\mathscr{M}$-torseurs $\sigma : \mathscr{P} \xrightarrow{\simeq} \mathscr{M}$, où $\mathscr{M}$ est considéré comme le torseur trivial sous $\mathscr{M}$.

Enfin, étant donnés $\mathscr{P}$ un torseur à droite sous $\mathscr{M}$ et U un recouvrement de S trivialisant $\mathscr{P}$, on peut leur associer un cocycle à valeurs dans $\mathscr{M}$ (voir par exemple [**Ald08**], section 5.1.2).

Désormais, on s'intéresse à des torseurs "sous un morphisme de gr-champs" : soit

$$f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$$

un morphisme de gr-champs, on définit suivant [**Ald08**], section 6.1, un $(\mathscr{M}, \mathscr{N})$-torseur comme une paire $(\mathscr{P}, \sigma)$ où $\mathscr{P}$ est un $\mathscr{M}$-torseur et $\sigma : \mathscr{P} \wedge^{\mathscr{M}} \mathscr{N} \xrightarrow{\simeq} \mathscr{N}$ est une trivialisation du $\mathscr{N}$-torseur $\mathscr{P} \wedge^{\mathscr{M}} \mathscr{N} = f_*(\mathscr{P})$, que l'on peut voir de manière équivalente comme un morphisme $\mathscr{M}$-équivariant $\mathscr{P} \to \mathscr{N}$. On notera $\mathrm{TORS}(\mathscr{M}, \mathscr{N})$ la catégorie des $(\mathscr{M}, \mathscr{N})$-torseurs.

À nouveau, à un tel torseur, on peut associer une classe d'équivalence de 1-cocycles, comme dans la section 6.1 de [**Ald08**].

On note $\mathbf{H}^0(K, [\mathscr{M} \xrightarrow{f} \mathscr{N}])$ l'ensemble pointé des classes d'isomorphisme de $(\mathscr{M}, \mathscr{N})$-torseurs.

Lemme 2.1. — *Soit $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ un morphisme de gr-champs. Alors on a une suite exacte naturelle d'ensembles pointés*

$$H^0(S, \mathscr{M}) \xrightarrow{f_*} H^0(S, \mathscr{N}) \to \mathbf{H}^0(S, [\mathscr{M} \xrightarrow{f} \mathscr{N}]) \to H^1(S, \mathscr{M}) \xrightarrow{f_*} H^1(S, \mathscr{N}) .$$

Démonstration. — Les flèches sans nom sont définies de la façon suivante : l'application $H^0(S, \mathscr{N}) \to \mathbf{H}^0(S, [\mathscr{M} \xrightarrow{f} \mathscr{N}])$ envoie la classe d'une section globale $g \in H^0(S, \mathscr{N})$ sur la classe de la paire $(\mathscr{M}, \sigma_g)$, où $\mathscr{M}$ est le $\mathscr{M}$-torseur trivial et σ_g est la trivialisation de $\mathscr{M} \wedge^{\mathscr{M}} \mathscr{N} = \mathscr{N}$ définie par la section g (i.e. σ_g est la translation par g sur $\mathscr{N}$). La flèche $\mathbf{H}^0(S, [\mathscr{M} \xrightarrow{f} \mathscr{N}]) \to H^1(S, \mathscr{M})$ est la flèche naturelle d'oubli de la section, qui envoie la classe d'un $(\mathscr{M}, \mathscr{N})$-torseur $(\mathscr{P}, \sigma)$ sur la classe du $\mathscr{M}$-torseur $\mathscr{P}$. Avec ces définitions, l'exactitude de la suite du lemme est immédiate. □

Remarque 2.2. — En général, les trois derniers ensembles de cette suite ne sont pas des groupes. Cependant, on dispose toujours d'une action (à gauche) du groupe $H^0(S, \mathscr{N})$ sur l'ensemble $\mathbf{H}^0(S, [\mathscr{M} \xrightarrow{f} \mathscr{N}])$, définie de la façon suivante : si g est une section globale de $\mathscr{N}$, g définit un isomorphisme du $\mathscr{N}$-torseur trivial $\sigma_g : \mathscr{N} \to \mathscr{N}$ (par translation à gauche par g). Donc pour tout $(\mathscr{M}, \mathscr{N})$-torseur $(\mathscr{P}, \sigma)$, on définit un $(\mathscr{M}, \mathscr{N})$-torseur $(\mathscr{Q}, \tau) := g.(\mathscr{P}, \sigma)$ où $\mathscr{Q} := \mathscr{P}$ et $\tau : \mathscr{P} \to \mathscr{N}$ est la composée $\mathscr{P} \xrightarrow{\sigma} \mathscr{N} \xrightarrow{\sigma_g} \mathscr{N}$. Cela permet de définir une action à gauche du groupe $H^0(S, \mathscr{N})$ sur l'ensemble $\mathbf{H}^0(S, [\mathscr{M} \xrightarrow{f} \mathscr{N}])$.

2.2. Torseurs sous un gr-champ tressé. — Dans cette sous-section, on s'intéresse à des $(\mathscr{M},\mathscr{N})$-torseurs où le morphisme $f:\mathscr{M}\to\mathscr{N}$ est un morphisme de gr-champs tressés ("braided gr-stacks" en anglais), suivant la terminologie de [**Bre94**], section 1.8, ou [**Bre92**] (intuitivement, un gr-champ tressé est un gr-champ vérifiant une certaine condition de commutativité). Pour de tels gr-champs, le morphisme naturel :

$$\otimes_{\mathscr{M}}:\mathscr{M}\times\mathscr{M}\to\mathscr{M}$$

est un morphisme de gr-champs, c'est-à-dire que c'est un morphisme additif (voir [**Bre94**], 2.13, ou [**AN09**], 7.1.2). Par conséquent, on peut pousser en avant un torseur sous $\mathscr{M}\times\mathscr{M}$ pour obtenir un $\mathscr{M}$-torseur, via le foncteur

$$(\otimes_{\mathscr{M}})_*:\mathrm{TORS}(\mathscr{M}\times\mathscr{M})\to\mathrm{TORS}(\mathscr{M})\,.$$

On peut donc ainsi définir une "gr-structure" sur $\mathrm{TORS}(\mathscr{M})$ par la formule suivante (voir [**Bre94**], 2.13) : si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ sont des $\mathscr{M}$-torseurs (à droite), on pose

$$\mathscr{P}.\mathscr{Q}:=(\otimes_{\mathscr{M}})_*(\mathscr{P}\times\mathscr{Q})$$

où $\mathscr{P}\times\mathscr{Q}$ est muni de sa structure naturelle de $\mathscr{M}\times\mathscr{M}$-torseur. En particulier, cette opération définit une structure de groupe sur l'ensemble $H^1(S,\mathscr{M})$. De même, cette opération munit l'ensemble $\mathbf{H}^0(S,[\mathscr{M}\xrightarrow{f}\mathscr{N}])$ d'une structure de groupe. En effet, si $(\mathscr{P},\sigma)$, $(\mathscr{Q},\tau)$ sont deux $(\mathscr{M},\mathscr{N})$-torseurs, on définit leur produit comme le $(\mathscr{M},\mathscr{N})$-torseur $(\mathscr{P}.\mathscr{Q},\sigma.\tau)$ où la trivialisation $\sigma.\tau$ est définie de la façon suivante : on dispose du morphisme $\sigma\times\tau:\mathscr{P}\times\mathscr{Q}\to\mathscr{N}\times\mathscr{N}$. On en déduit un morphisme

$$\sigma.\tau:(\otimes_{\mathscr{M}})_*(\mathscr{P}\times\mathscr{Q})\to(\otimes_{\mathscr{N}})_*(\mathscr{N}\times\mathscr{N})=\mathscr{N}$$

qui est bien une trivialisation de $\mathscr{P}.\mathscr{Q}$.

On vérifie que dans ce cas, la suite exacte du lemme 2.1 est une suite exacte de groupes.

Si de plus les gr-champs $\mathscr{M}$ et $\mathscr{N}$ sont de Picard (au sens de [**Bre94**], section 1.8), alors le groupe $\mathbf{H}^0(S,[\mathscr{M}\xrightarrow{f}\mathscr{N}])$ est un groupe abélien.

Exemple : Soit $S=\mathrm{Spec}\ K$. Soit $f:H\to G$ un morphisme de groupes algébriques connexes sur K. Le module croisé $[H^{\mathrm{sc}}\to H]$ (resp. $[G^{\mathrm{sc}}\to G]$) est alors de Picard (ou stable, selon la terminologie de Conduché dans [**Con84**], 3.11), et donc les gr-champs $\mathscr{M}_H$ et $\mathscr{M}_G$ associés à ces modules croisés (voir [**Bre90**], section 4.4) sont de Picard. Par conséquent, l'ensemble $\mathbf{H}^0(K,[\mathscr{M}_H\to\mathscr{M}_G])$ est canoniquement un groupe abélien.

Proposition 2.3. — *Soit*

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "f"] & M_1' \arrow[d, "f'"] \\ M_2 \arrow[r, "\phi_2"] & M_2' \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif de morphismes de S-modules croisés tressés. On note $\mathscr{M}_i$ (resp. $\mathscr{M}_i'$) le gr-champ associé au module croisé M_i. Si ϕ_1 et ϕ_2 sont des quasi-isomorphismes, le morphisme induit

$$\phi_*:\mathbf{H}^0(S,[\mathscr{M}_1\to\mathscr{M}_2])\to\mathbf{H}^0(S,[\mathscr{M}_1'\to\mathscr{M}_2'])$$

est un isomorphisme de groupes.

Démonstration. — On considère le diagramme commutatif exact suivant de groupes, dont les lignes proviennent du lemme 2.1

$$\begin{tikzcd} H^0(S,\mathscr{M}_1) \arrow[r] \arrow[d, "(\phi_1)_*"] & H^0(S,\mathscr{M}_2) \arrow[r] \arrow[d, "(\phi_2)_*"] & \mathbf{H}^0(S,[\mathscr{M}_1\to\mathscr{M}_2]) \arrow[r] \arrow[d, "\phi_*"] & H^1(S,\mathscr{M}_1) \arrow[r] \arrow[d, "(\phi_1)_*"] & H^1(S,\mathscr{M}_2) \arrow[d, "(\phi_2)_*"] \\ H^0(S,\mathscr{M}_1') \arrow[r] & H^0(S,\mathscr{M}_2') \arrow[r] & \mathbf{H}^0(S,[\mathscr{M}_1'\to\mathscr{M}_2']) \arrow[r] & H^1(S,\mathscr{M}_1') \arrow[r] & H^1(S,\mathscr{M}_2')\,. \end{tikzcd}$$

On sait que les deux premiers et les deux derniers morphismes verticaux sont des isomorphismes (on peut par exemple identifier les groupes en question avec les groupes d'hypercohomologie des modules croisés correspondant, pour lesquels le résultat est connu : voir par exemple le théorème 3.5.3 de [**Bor98**] dans le cas des corps ; on peut aussi appliquer le lemme 5.4.1 de [**AN09**]). Donc par le lemme des cinq, la flèche centrale est un isomorphisme, ce qui conclut la preuve. ☐

2.3. Cas particuliers : morphismes de modules croisés abéliens. — Soient $M_1 = [F_1 \xrightarrow{\alpha_1} G_1]$ et $M_2 = [F_2 \xrightarrow{\alpha_2} G_2]$ deux modules croisés abéliens (i.e. deux complexes de faisceaux en groupes commutatifs sur S). Soit $f : M_1 \to M_2$ un morphisme de complexes, i.e. un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} F_1 \arrow[r, "f_F"] \arrow[d, "\alpha_1"] & F_2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\ G_1 \arrow[r, "f_G"] & G_2 . \end{tikzcd}$$

Suivant Breen (voir [**Bre90**], section 4.4), on peut associer à M_1 et M_2 des gr-champs de Picard $\mathscr{M}_1$ et $\mathscr{M}_2$ sur S, ainsi qu'un morphisme de gr-champs de Picard $f : \mathscr{M}_1 \to \mathscr{M}_2$.

Dans cette section, on compare le groupe $\mathbf{H}^0(S, [\mathscr{M}_1 \xrightarrow{f} \mathscr{M}_2])$ avec le groupe d'hypercohomologie $\mathbf{H}^0(S, \text{Cône}(f))$, où $\text{Cône}(f)$ désigne le cône du morphisme de complexes f, i.e.

$$\text{Cône}(f) := [F_1 \xrightarrow{\alpha_1 \oplus f_F} G_1 \oplus F_2 \xrightarrow{-f_G + \alpha_2} G_2] \, ,$$

avec F_1 est en degré -2.

Le lemme suivant n'est autre que la proposition 6.1.6.(2) de [**Ald08**] :

***Lemme 2.4* (Aldrovandi).** — *Soit $f : M_1 \to M_2$ un morphisme entre des S-modules croisés abéliens $M_i := [F_i \xrightarrow{\alpha_i} G_i]$, et $f : \mathscr{M}_1 \to \mathscr{M}_2$ le morphisme de gr-champs associé. Alors on a un isomorphisme naturel de groupes abéliens*

$$\Lambda : \mathbf{H}^0(S, [\mathscr{M}_1 \xrightarrow{f} \mathscr{M}_2]) \cong \mathbf{H}^0(S, \text{Cône}(f)) \, .$$

Démonstration. — La bijection est construite dans [**Ald08**]. Il suffit donc de vérifier que c'est un morphisme de groupes. On peut le faire en utilisant les formules explicites de [**AN10**], section 7.4 dans le cas des modules croisés abéliens. □

Montrons un résultat de compatibilité :

Proposition 2.5. — *Soit $f : M_1 \to M_2$ un morphisme de modules croisés abéliens, et $f : \mathscr{M}_1 \to \mathscr{M}_2$ le morphisme de gr-champs associé. Le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} H^0(S, \mathscr{M}_2) \arrow[r, "\mathscr{T}"] \arrow[d, "\Lambda_2", "\cong"'] & \mathbf{H}^0(S, [\mathscr{M}_1 \to \mathscr{M}_2]) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Lambda", "\cong"'] & H^1(S, \mathscr{M}_1) \arrow[d, "\Lambda_1", "\cong"'] \\ \mathbf{H}^0(S, M_2) \arrow[r, "T"] & \mathbf{H}^0(S, \text{Cône}(f)) \arrow[r, "\delta"] & \mathbf{H}^1(S, M_1) \end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif de suites exactes de groupes abéliens, où la première ligne est la suite exacte du lemme 2.1, et la seconde ligne est la suite exacte d'hypercohomologie associée au triangle exact $M_1 \xrightarrow{f} M_2 \to \text{Cône}(f) \to M_1[1]$.

Démonstration. — La preuve est immédiate à partir des formules explicites pour les cocycles associés aux torseurs sous un gr-champ que l'on trouve par exemple dans [**Ald08**]. On utilise la suite exacte de complexes $0 \to M_2 \xrightarrow{T} \text{Cône}(f) \xrightarrow{\delta} M_1[1] \to 0$ provenant du diagramme de complexes suivant :

$$\begin{tikzcd} & F_1 \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\alpha_1 \oplus f_F"] & F_1 \arrow[d, "\alpha_1"] \\ F_2 \arrow[r, "(0,\mathrm{id})"] \arrow[d, "\alpha_2"] & G_1 \oplus F_2 \arrow[r, "\mathrm{pr}_{G_1}"] \arrow[d, "-f_G+\alpha_2"] & G_1 \\ G_2 \arrow[r, "\mathrm{id}"] & G_2 & \end{tikzcd}$$

pour en déduire explicitement les morphismes $T : \mathbf{H}^0(S, M_2) \to \mathbf{H}^0(S, \text{Cône}(f))$ et $\delta : \mathbf{H}^0(S, \text{Cône}(f)) \to \mathbf{H}^1(S, M_1)$ en termes de cocycles. □

2.4. Construction de l'application d'abélianisation. —

2.4.1. Sur une base quelconque. — Soit S un schéma muni du site fppf. Soit $f : H \to G$ un morphisme de S-schémas en groupes. On fait les hypothèses suivantes :

1. H et G sont lisses connexes quasi-séparés de présentation finie.
2. H est affine et il existe une suite exacte courte de schémas en groupes
$$1 \to H^{\mathrm{u}} \to H \xrightarrow{\pi} H^{\mathrm{red}} \to 1$$
avec H^{red} réductif et H^{u} unipotent (i.e. à fibres unipotentes). On suppose également cette extension scindée par un morphisme de groupes $s : H^{\mathrm{red}} \to H$ et que pour tout S-torseur P sous H, $H^1(S, {}_P H^{\mathrm{u}}) = 1$.
3. G est extension d'un schéma abélien G^{ab} par un schéma en groupes affine G^{lin}, lui-même extension d'un schéma en groupes réductif G^{red} par un sous-schéma en groupes unipotent G^{u} caractéristique.
4. Le morphisme $H^{\mathrm{u}} \to G/G^{\mathrm{u}}$ se factorise à travers $G^{\mathrm{sc}} \to G/G^{\mathrm{u}}$.

Définissons un complexe de S-schémas en groupes commutatif de longueur 3 associé à f et s, noté $\overline{C}_{f,s}$. Notons $Z_{H^{\mathrm{red}}}$ le centre de H^{red}, qui est un S-groupe de type multiplicatif, et Z'_G le centre de $G' := G/G^{\mathrm{u}}$ (représentable par un sous-schéma en groupes fermé de présentation finie de G'). On dispose alors d'un morphisme naturel $Z_{H^{\mathrm{red}}} \xrightarrow{s} H \xrightarrow{f} G \to G'$.

Or le rang unipotent des fibres de G' est nul, donc par [**SGA3**], exposé XVI, propositions 3.1 et 3.4, Z'_G est plat et le quotient G'/Z'_G est représentable par un S-schéma en groupes. D'où un morphisme de schémas en groupes induit par f et s : $Z_{H^{\mathrm{red}}} \xrightarrow{g} G'/Z'_G$. Alors le noyau de g est un sous-schéma en groupes de type multiplicatif de $Z_{H^{\mathrm{red}}}$, il est donc plat sur S, donc par [**SGA3**], exp. XVI, corollaire 2.3, l'image de g est représentable par un sous-schéma en groupes de type multiplicatif Z'_H de G'/Z'_G. Notons alors $Z_{H,G}$ le produit fibré de Z'_H et G' au-dessus de G'/Z'_G. Alors $Z_{H,G}$ est un sous-schéma en groupes commutatif de G', et le morphisme g induit un morphisme $g : Z_{H^{\mathrm{red}}} \to Z_{H,G}$.

Avec des notations évidentes, on dispose de morphismes induits par s et $f : H^{\mathrm{red}} \to {G'}^{\mathrm{lin}} = G^{\mathrm{red}}$ et $H^{\mathrm{sc}} \to G^{\mathrm{sc}}$, d'où finalement un carré commutatif de schémas en groupes commutatifs sur S

$$\begin{tikzcd} Z_{H^{\mathrm{sc}}} \arrow[r, "g^{\mathrm{sc}}"] \arrow[d, "\rho_H"] & Z^{\mathrm{sc}}_{H,G} \arrow[d, "\rho_G"] \\ Z_{H^{\mathrm{red}}} \arrow[r, "g"] & Z_{H,G}\,, \end{tikzcd}$$

où $Z^{\mathrm{sc}}_{H,G} := \rho_G^{-1}(Z_{H,G})$ et $\rho_G : G^{\mathrm{sc}} \to G'$ est le morphisme naturel. Notons $\mathscr{M}^{\mathrm{ab}}_H \xrightarrow{g} \mathscr{M}^{\mathrm{ab}}_G$ le morphisme de gr-champs sur S associé au morphisme de modules croisés abéliens $g : M^{\mathrm{ab}}_H \to M^{\mathrm{ab}}_G$ donné par le carré précédent.

Par définition, on note $\overline{C}_{f,s}$ (et parfois abusivement $\overline{C}_f$) le cône de ce morphisme de complexes verticaux, à savoir
$$\overline{C}_{f,s} := [Z_{H^{\mathrm{sc}}} \xrightarrow{\rho_H \oplus g^{\mathrm{sc}}} Z_{H^{\mathrm{red}}} \oplus Z^{\mathrm{sc}}_{H,G} \xrightarrow{-g+\rho_G} Z_{H,G}]\,,$$
avec $Z_{H^{\mathrm{sc}}}$ en degré -2.

Construisons maintenant l'application d'abélianisation
$$\mathrm{ab}^0_{f,s} : \mathbf{H}^0(S, [H \xrightarrow{f} G]) \to \mathbf{H}^0(S, \overline{C}_{f,s}) =: H^0_{\mathrm{ab}}(S, [H \xrightarrow{f} G])$$
(on notera parfois abusivement $H^0_{\mathrm{ab}}(S, [H \xrightarrow{f} G])$ le groupe $\mathbf{H}^0(S, \overline{C}_{f,s})$).

On note $g : \mathscr{M}_H \to \mathscr{M}_G$ le morphisme de gr-champs sur S associé au morphisme de modules croisés $g : M_H \to M_G$ représenté par le carré

$$\begin{tikzcd} H^{\mathrm{sc}} \arrow[r, "g^{\mathrm{sc}}"] \arrow[d, "\rho_H"] & G^{\mathrm{sc}} \arrow[d, "\rho_G"] \\ H^{\mathrm{red}} \arrow[r, "g"] & G'\,. \end{tikzcd}$$

Les inclusions des centres dans les groupes respectifs assurent l'existence d'un diagramme commutatif naturel de modules croisés tressés :

$$\begin{tikzcd} M^{\mathrm{ab}}_H \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "g"] & M_H \arrow[d, "g"] \\ M^{\mathrm{ab}}_G \arrow[r, "\phi_2"] & M_G\,. \end{tikzcd}$$

On sait par le lemme 3.8.1 de [**Bor98**] (voir aussi le lemme 4.3 de [**Dem11c**]) que les morphismes ϕ_i sont des quasi-isomorphismes de modules croisés. Donc par la proposition 2.3, ce diagramme induit un isomorphisme de groupes abéliens

$$\phi_* : \mathbf{H}^0(S, [\mathscr{M}_H^{\mathrm{ab}} \to \mathscr{M}_G^{\mathrm{ab}}]) \cong \mathbf{H}^0(S, [\mathscr{M}_H \to \mathscr{M}_G])\,. \tag{1}$$

Cas où H est réductif : si on suppose H réductif, on dispose du diagramme commutatif de modules croisés :

$$\begin{tikzcd} {[1 \to H]} \arrow[r, "{(1,f)}"] \arrow[d, "{(1,\mathrm{id})}"] & {[1 \to G]} \arrow[d, "{(1,\mathrm{id})}"] \\ {[H^{\mathrm{sc}} \to H]} \arrow[r, "{(f^{\mathrm{sc}},f)}"] & {[G^{\mathrm{sc}} \to G']} \end{tikzcd}$$

qui induit par fonctorialité, une application naturelle

$$\mathbf{H}^0(S, [H \to G]) \to \mathbf{H}^0(S, [\mathscr{M}_H \to \mathscr{M}_G])\,.$$

Finalement, sous cette hypothèse, l'isomorphisme (1) et le lemme 2.4 fournissent une application canonique

$$\mathrm{ab}^0_f : \mathbf{H}^0(S, [H \xrightarrow{f} G]) \to \mathbf{H}^0(S, \overline{C}_f)\,.$$

Proposition 2.6. — *Pour tout $g \in G(S)$ et $x \in \mathbf{H}^0(S, [H \to G])$, on a*

$$\mathrm{ab}^0_f(g.x) = T(\mathrm{ab}^0_G(g)) + \mathrm{ab}^0_f(x)$$

où $T : H^0_{\mathrm{ab}}(S, G) \to \mathbf{H}^0(S, \overline{C}_f)$ est le morphisme induit par le triangle exact

$$C_H \xrightarrow{f} C_G \to \overline{C}_f \to C_H[1]\,.$$

Démonstration. — D'après la remarque 2.2, il est clair que les actions de $G(S)$ sur $\mathbf{H}^0(S, [H \to G])$ et de $H^0(S, \mathscr{M}_G)$ sur $\mathbf{H}^0(S, [\mathscr{M}_H \to \mathscr{M}_G])$ sont compatibles avec les morphismes naturels $G(S) \to H^0(S, \mathscr{M}_G)$ et $\mathbf{H}^0(S, [H \to G]) \to \mathbf{H}^0(S, [\mathscr{M}_H \to \mathscr{M}_G])$. En utilisant ensuite la proposition 2.5, on voit qu'il suffit de montrer que si l'on note $T' : H^0(S, \mathscr{M}_G) \to \mathbf{H}^0(S, [\mathscr{M}_H \to \mathscr{M}_G])$, alors on a pour tout $g \in H^0(S, \mathscr{M}_G)$ et tout $\alpha \in \mathbf{H}^0(S, [\mathscr{M}_H \to \mathscr{M}_G])$, $g.\alpha = T'(g) + \alpha$. Et ceci résulte du diagramme commutatif suivant, où $(\mathscr{P}, s : \mathscr{P} \to \mathscr{M}_G)$ désigne un représentant de α :

$$\begin{tikzcd} (\otimes_{\mathscr{M}_H})_* (\mathscr{M}_H \times \mathscr{P}) \arrow[r, "f.s"] \arrow[d, "\cong"] & (\otimes_{\mathscr{M}_G})_* (\mathscr{M}_G \times \mathscr{M}_G) \arrow[r, "\cong"] & \mathscr{M}_G \arrow[r, "g"] \arrow[d, "="] & \mathscr{M}_G \arrow[d, "="] \\ \mathscr{P} \arrow[rr, "s"] & & \mathscr{M}_G \arrow[r, "g"] & \mathscr{M}_G\,. \end{tikzcd}$$

□

Cas général : on ne suppose plus H réductif. Alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^{\mathrm{red}} \arrow[r, "f \circ s"] \arrow[d, "s"] & G \arrow[d, "="] \\ H \arrow[r, "f"] & G \end{tikzcd}$$

induit un morphisme $\alpha : \mathbf{H}^0(S, [H^{\mathrm{red}} \to G]) \to \mathbf{H}^0(S, [H \to G])$.

Lemme 2.7. — *Le morphisme $\alpha : \mathbf{H}^0(S, [H^{\mathrm{red}} \to G]) \to \mathbf{H}^0(S, [H \to G])$ est surjectif.*

Si deux éléments $x, y \in \mathbf{H}^0(S, [H^{\mathrm{red}} \to G])$ vérifient $\alpha(x) = \alpha(y)$, alors $\mathrm{ab}^0_{f \circ s}(x) = \mathrm{ab}^0_{f \circ s}(y)$.

Démonstration. — L'hypothèse (2) assure que l'application naturelle $H^1(S, H) \xrightarrow{\pi_*} H^1(S, H^{\mathrm{red}})$ est une bijection, de réciproque s_*. La surjectivité de α résulte alors d'une chasse au diagramme dans le diagramme exact suivant

$$\begin{tikzcd} H^{\mathrm{red}}(S) \arrow[r, "f \circ s"] \arrow[d, "s"] & G(S) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathbf{H}^0(S, [H^{\mathrm{red}} \to G]) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & H^1(S, H^{\mathrm{red}}) \arrow[r, "(f \circ s)_*"] \arrow[d, "s_*", "\cong"'] & H^1(S, G) \arrow[d, "="] \\ H(S) \arrow[r, "f"] & G(S) \arrow[r] & \mathbf{H}^0(S, [H \to G]) \arrow[r] & H^1(S, H) \arrow[r, "f_*"] & H^1(S, G)\,. \end{tikzcd}$$

Soient $x, y \in \mathbf{H}^0(S, [H^{\mathrm{red}} \to G])$ tels que $\alpha(x) = \alpha(y)$. Au vu de la proposition 2.12 qui suit (dans le cas où H est réductif), si (P, t) désigne un représentant de x, il suffit de montrer que $\mathrm{ab}^0_{f \circ s; x}(y') = 0$, où y' est l'image de y dans $\mathbf{H}^0(S,[{}_PH^{\mathrm{red}} \to G])$ obtenue après torsion de y par (P,t). Par hypothèse, ${}_P\alpha(y')$ est la classe neutre dans $\mathbf{H}^0(S,[{}_{s_*P}H \to G])$. Donc une chasse au diagramme dans le diagramme suivant (obtenu en tordant le précédent)

$$\begin{tikzcd}
{}_PH^{\mathrm{red}}(S) \arrow[r] \arrow[d, "{}_Ps"] & G(S) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathbf{H}^0(S,[{}_PH^{\mathrm{red}} \to G]) \arrow[r] \arrow[d, "{}_P\alpha"] & H^1(S,{}_PH^{\mathrm{red}}) \arrow[r] \arrow[d, "{}_Ps_*", "\cong"'] & H^1(S,G) \arrow[d, "="] \\
{}_{s_*P}H(S) \arrow[r, "s_*Pf"] & G(S) \arrow[r] & \mathbf{H}^0(S,[{}_{s_*P}H \to G]) \arrow[r] & H^1(S,{}_{s_*P}H) \arrow[r, "s_*Pf_*"] & H^1(S,G)
\end{tikzcd}$$

assure qu'il existe $g \in G(S)$ (modulo ${}_PH^{\mathrm{red}}(S)$) tel que $g.y'$ est la classe neutre dans $\mathbf{H}^0(S,[{}_PH^{\mathrm{red}} \to G])$. Puisque ${}_P\alpha(y')$ est triviale, on a $g \in {}_{s_*P}H(S)$. Or les éléments g et ${}_Ps\left({}_{s_*P}\pi(g)\right)$ dans ${}_{s_*P}H(S)$ diffèrent d'un élément $u \in {}_{s_*P}H^{\mathrm{u}}(S)$, de sorte que $g.y' = u.y'$ (puisque ${}_Ps\left({}_{s_*P}\pi(g)\right)$ agit trivialement sur $\mathbf{H}^0(S,[{}_PH^{\mathrm{red}} \to G])$).

Par l'hypothèse (4), le morphisme ${}_{s_*P}H \to G/G^{\mathrm{u}}$ se factorise à travers $G^{\mathrm{sc}} \to G/G^{\mathrm{u}}$. Par conséquent, l'image dans $G(S)$ de l'élément $u \in {}_{s_*P}H^{\mathrm{u}}(S)$ provient d'un élément $g' \in G^{\mathrm{sc}}(S)$, donc $g'.y'$ est triviale dans $\mathbf{H}^0(S,[{}_PH^{\mathrm{red}} \to G])$. Donc $\mathrm{ab}^0_{f\circ s;x}(g'.y') = 0$. Or la proposition 2.6 assure que $\mathrm{ab}^0_{f\circ s;x}(g'.y') = T(\mathrm{ab}^0_G(g')) + \mathrm{ab}^0_{f\circ s;x}(y')$. Puisque $g' \in G^{\mathrm{sc}}(S)$, on a $\mathrm{ab}^0_G(g') = 0$, donc $\mathrm{ab}^0_{f\circ s;x}(y') = 0$, ce qui conclut la preuve. □

On peut désormais, à l'aide du lemme 2.7, définir l'application $\mathrm{ab}^0_{f,s}$ en toute généralité. Si $x \in \mathbf{H}^0(S,[H \xrightarrow{f} G])$, il existe $x' \in \mathbf{H}^0(S,[H^{\mathrm{red}} \xrightarrow{f\circ s} G])$ tel que $\alpha(x') = x$. Alors on pose $\mathrm{ab}^0_{f,s}(x) := \mathrm{ab}^0_{f\circ s}(x') \in \mathbf{H}^0(S,\overline{C}_{f,s})$. D'après le lemme 2.7, la classe $\mathrm{ab}^0_{f\circ s}(x') \in \mathbf{H}^0(S,\overline{C}_{f,s})$ ne dépend pas du relevé x' de x choisi, donc cela définit bien une application

$$\mathrm{ab}^0_{f,s} : \mathbf{H}^0(S,[H \xrightarrow{f} G]) \to \mathbf{H}^0(S,\overline{C}_{f,s})\,.$$

Remarque 2.8. — En général, cette construction dépend du choix de la section s. En revanche, si l'on suppose que toutes les sections de la suite exacte

$$1 \to H^{\mathrm{u}} \to H \to H^{\mathrm{red}} \to 1$$

sont conjuguées par un élément de $H^{\mathrm{u}}(S)$, alors on montre que le complexe $\overline{C}_{f,s}$ et l'application $\mathrm{ab}^0_{f,s}$ ne dépendent pas de la section s choisie.

Théorème 2.9. — *On dispose d'un diagramme commutatif naturel à lignes exactes :*

$$\begin{tikzcd}
H(S) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{ab}^0_H"] & G(S) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ab}^0_G"] & \mathbf{H}^0(S,[H \to G]) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mathrm{ab}^0_{f,s}"] & H^1(S,H) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\mathrm{ab}^1_H"] & H^1(S,G) \arrow[d, "\mathrm{ab}^1_G"] \\
H^0_{\mathrm{ab}}(S,H) \arrow[r, "f_*"] & H^0_{\mathrm{ab}}(S,G) \arrow[r, "T"] & \mathbf{H}^0(S,\overline{C}_{f,s}) \arrow[r, "\delta"] & H^1_{\mathrm{ab}}(S,H) \arrow[r, "f_*"] & H^1_{\mathrm{ab}}(S,G)
\end{tikzcd}$$

où les morphismes de la première ligne sont les morphismes usuels, et la seconde ligne est extraite de la suite exacte longue d'hypercohomologie associée au triangle exact

$$C_H \to C_G \to \overline{C}_{f,s} \to C_H[1]\,.$$

En outre, étant donnés $g \in G(S)$ et $x \in \mathbf{H}^0(S,[H \to G])$, on a

$$\mathrm{ab}^0_{f,s}(g.x) = T(\mathrm{ab}^0_G(g)) + \mathrm{ab}^0_{f,s}(x) \in H^0_{\mathrm{ab}}(S,[H \to G])\,.$$

Démonstration. — La commutativité du premier et du dernier carrés résulte de la fonctorialité en L des flèches ab^0_L et ab^1_L pour un schéma en groupes connexe L. Pour les deux carrés centraux, c'est une conséquence de la définition des applications ab^0_G, ab^0_f et ab^1_H, ainsi que de la proposition 2.5.

Concernant la dernière assertion du théorème, si H est réductif, c'est exactement la proposition 2.6. Pour le cas général, on se donne une section s de $H \to H^{\mathrm{red}}$. On a vu qu'alors le morphisme naturel $\mathbf{H}^0(S,[H^{\mathrm{red}} \xrightarrow{f\circ s} G]) \to \mathbf{H}^0(S,[H \to G])$ est surjectif. On relève x en $y \in \mathbf{H}^0(S,[H^{\mathrm{red}} \to G])$. On sait alors, grâce au cas déjà traité (H^{red} est réductif), que

$$\mathrm{ab}^0_{f\circ s}(g.y) = T_{f\circ s}(\mathrm{ab}^0_G(g)) + \mathrm{ab}^0_{f\circ s}(y) \in \mathbf{H}^0(S,[H^{\mathrm{red}} \to G])\,.$$

Enfin, par définition, $\mathrm{ab}^0_{f,s}(x) = \mathrm{ab}^0_{f\circ s}(y)$, $\mathrm{ab}^0_{f,s}(g.x) = \mathrm{ab}^0_{f\circ s}(g.y)$ et $T_{f\circ s}(\mathrm{ab}^0_G(g)) = T(\mathrm{ab}^0_G(g))$. □

Étudions le comportement de l'application ab^0_f vis-à-vis de la torsion par un torseur (voir par exemple [**Gir71**], III.2.6 pour la définition de la torsion par un torseur. Dans ce texte, si P et X sont deux torseurs (à droite) sous H, on note ${}_PX$ le torseur noté $\Theta_P(X)$ dans la proposition III.2.6.1 de [**Gir71**]). On peut tordre l'ensemble $\mathbf{H}^0(S,[H \to G])$ de deux façons : par un H-torseur P ou par un (H,G)-torseur (P,t). Remarquons que le faisceau en groupes tordu ${}_P H$ est représentable puisque H/S est affine (voir [**Ray70**], théorème XI.3.1 ou [**Mil80**], théorème III.4.3).

Si P est un H-torseur, on dispose naturellement d'une application de torsion

$$\mathbf{H}^0(S, [H \xrightarrow{f} G]) \xrightarrow{\theta_P} \mathbf{H}^0(S, [{}_P H \xrightarrow{{}_P f} {}_P G])$$

où l'image d'un (H, G)-torseur (Q, r) est le $({}_P H, {}_P G)$-torseur (Q', r') défini par $Q' := {}_P Q$ et $r' := {}_P r : {}_P Q \to {}_P G$.

De même, si (P, t) est un (H, G) torseur, on dispose d'une application de torsion

$$\mathbf{H}^0(S, [H \xrightarrow{f} G]) \xrightarrow{\theta_{(P,t)}} \mathbf{H}^0(S, [{}_P H \xrightarrow{{}_{(P,t)} f} G])$$

où le morphisme ${}_{(P,t)} f$ est défini par la composée

$${}_P H \xrightarrow{{}_P f} {}_{f_* P} G \xrightarrow{t_*} G \, .$$

Par définition, si (Q, r) est un (H, G)-torseur, on lui associe le torseur $(Q', r') := \theta_{(P,t)}(Q, r)$ tel que $Q' := {}_P Q$ et $r' : {}_P Q \xrightarrow{{}_P r} {}_{r_* P} G \xrightarrow{t_*} G$. Le lemme suivant est évident :

Lemme 2.10. — 1. *Soit P un H-torseur. Alors on a un diagramme commutatif à lignes exactes, dont les colonnes sont des bijections*

$$\begin{tikzcd}
H(S) \arrow[r, "f"] & G(S) \arrow[r] & \mathbf{H}^0(S, [H \xrightarrow{f} G]) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_P"', "\cong"] & H^1(S, H) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\theta_P"', "\cong"] & H^1(S, G) \arrow[d, "\theta_P"', "\cong"] \\
{}_P H(S) \arrow[r, "{}_P f"] & {}_P G(S) \arrow[r] & \mathbf{H}^0(S, [{}_P H \xrightarrow{{}_P f} {}_P G]) \arrow[r] & H^1(S, {}_P H) \arrow[r, "({}_P f)_*"] & H^1(S, {}_P G) \, .
\end{tikzcd}$$

2. *Soit (P, t) un (H, G)-torseur. Alors on a un diagramme commutatif à lignes exactes, dont les colonnes sont des bijections*

$$\begin{tikzcd}
H(S) \arrow[r, "f"] & G(S) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathbf{H}^0(S, [H \xrightarrow{f} G]) \arrow[r] \arrow[d, "\theta_{(P,t)}"', "\cong"] & H^1(S, H) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\theta_P"', "\cong"] & H^1(S, G) \arrow[d, "="] \\
{}_P H(S) \arrow[r, "{}_P f"] & G(S) \arrow[r] & \mathbf{H}^0(S, [{}_P H \xrightarrow{{}_{(P,t)} f} G]) \arrow[r] & H^1(S, {}_P H) \arrow[r, "({}_P f)_*"] & H^1(S, G) \, .
\end{tikzcd}$$

Lemme 2.11. — *Soit P un H-torseur. Alors on a un isomorphisme canonique de complexes*

$$\overline{C}_{f,s} \xrightarrow{\cong} \overline{C}_{{}_P f, {}_P s} \, ,$$

où ${}_P f : {}_P H \to {}_P G$ est obtenu par torsion à partir de $f : H \to G$. En particulier, on a un isomorphisme canonique de groupes abéliens

$$\mathbf{H}^0(S, \overline{C}_{f,s}) \cong \mathbf{H}^0(S, \overline{C}_{{}_P f, {}_P s}) \, .$$

Démonstration. — On remarque que le morphisme $P \times Z_H \to P \times H$ provenant de l'inclusion de Z_H dans H définit un morphisme injectif de groupes $Z_H \to {}_P H$ s'insérant dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
P \times Z_H \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"] & P \times H \arrow[d, "\pi"] \\
Z_H \arrow[r] & {}_P H \, ,
\end{tikzcd}$$

où π désigne le quotient par l'action diagonale de H. Ce diagramme permet d'identifier canoniquement Z_H au centre de ${}_P H$ (l'action de H sur Z_H par conjugaison est triviale).

De même, le morphisme $P \times Z_{H,G} \to P \times G$ induit après quotient par l'action diagonale de H un morphisme injectif $Z_{H,G} \to {}_P G$ qui identifie naturellement le groupe $Z_{H,G}$ au groupe $Z_{{}_P H, {}_P G}$.

En résumé, le quotient du diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
P \times Z_H \arrow[r] \arrow[d, "f"] & P \times H \arrow[d, "f"] \\
P \times Z_{H,G} \arrow[r] & P \times G
\end{tikzcd}$$

par l'action diagonale de H induit un diagramme commutatif de groupes

$$\begin{tikzcd} Z_H \arrow[r] \arrow[d, "f"] & {}_P H \arrow[d, "{}_P f"] \\ Z_{H,G} \arrow[r] & {}_P G\,. \end{tikzcd}$$

Ce dernier diagramme induit alors naturellement le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} Z_H \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f"] & Z_{{}_P H} \arrow[d, "{}_P f"] \\ Z_{H,G} \arrow[r, "\cong"] & Z_{{}_P H, {}_P G}\,. \end{tikzcd}$$

Le même raisonnement avec les groupes H^{sc} et G^{sc} assure finalement le résultat. □

Proposition 2.12. — *Soit (P,t) un (H,G)-torseur. Alors on a un diagramme commutatif naturel*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{H}^0(S,[H \xrightarrow{f} G]) \arrow[r, "\theta_{(P,t)}"] \arrow[d, "\mathrm{ab}^0_{f,s}"] & \mathbf{H}^0(S,[{}_P H \xrightarrow{(P,t)f} G]) \arrow[d, "\mathrm{ab}^0_{{}_P f, {}_P s}"] \\ \mathbf{H}^0(S,\overline{C}_{f,s}) \arrow[r, "t_{(P,t)}"] & \mathbf{H}^0(S,\overline{C}_{f,s}) \cong \mathbf{H}^0(S,\overline{C}_{{}_P f, {}_P s})\,, \end{tikzcd}$$

où $t_{(P,t)}(\alpha) := \alpha - \mathrm{ab}^0_{f,s}(P,t)$ et l'isomorphisme en bas à droite provient du lemme 2.11.

Démonstration. — Soit (Q,r) un (H,G)-torseur. On note $(\mathscr{Q},\mathscr{R})$ et $(\mathscr{P},\mathscr{T})$ les $(\mathscr{M}_H,\mathscr{M}_G)$-torseurs associés à (Q,r) et (P,t). Alors l'image de (Q,r) dans $\mathbf{H}^0(S,[\mathscr{M}_H \to \mathscr{M}_G])$ est donnée par le $(\mathscr{M}_H,\mathscr{M}_G)$-torseur $\mathscr{Q} \xrightarrow{\mathscr{R}} \mathscr{M}_G$, et si l'on tord ce torseur par $(\mathscr{P},\mathscr{T})$, on obtient le $(\mathscr{M}_{{}_P H},\mathscr{M}_G)$-torseur ${}_{\mathscr{P}}\mathscr{Q} \to \mathscr{M}_G$, qui n'est autre que l'image du $({}_P H, G)$-torseur $\theta_{(P,t)}(Q,r) = ({}_P Q \to G)$ dans $\mathbf{H}^0(S,[\mathscr{M}_{{}_P H} \to \mathscr{M}_G])$. Par conséquent, la définition de l'application d'abélianisation, ainsi que le fait que pour des gr-champs abéliens, la torsion par un torseur induit sur le groupe de cohomologie la translation par l'opposé de la classe dudit torseur, assurent le résultat. □

2.4.2. Sur un corps de caractéristique nulle. — Dans cette section, on montre que la construction générale précédente s'exprime en termes d'un complexe de variétés semi-abéliennes.

Soit K un corps de caractéristique nulle. On note $S := \mathrm{Spec}(K)$, et on considère $f : H \to G$ un morphisme de K-groupes algébriques connexes (on ne suppose pas H linéaire ici). Remarquons d'abord que si H est linéaire, alors les conditions (1), (2), (3) et (4) de la section 2.4.1 sont vérifiées.

Si H n'est pas linéaire, on considère l'extension suivante :

$$1 \to H^{\mathrm{u}} \to H^{\mathrm{lin}} \xrightarrow{p} H^{\mathrm{red}} \to 1$$

où H^{u} est le radical unipotent de H^{lin}. On sait que cette extension est scindée par un morphisme $s : H^{\mathrm{red}} \to H^{\mathrm{lin}}$ (voir [**SGA3**], XXVI.2.3). Définissons $H' \subset H$ comme le sous-groupe de H engendré par D_H et $s(H^{\mathrm{red}})$. Alors H' se surjecte dans H^{ab}, et le noyau de $H' \to H^{\mathrm{ab}}$ s'identifie au sous-groupe de H engendré par $s(H^{\mathrm{red}})$ et $H^{\mathrm{lin}} \cap D_H$. Or $H^{\mathrm{lin}} \cap D_H$ est un sous-groupe central de H^{lin}, donc il est contenu dans $s(H^{\mathrm{red}})$, donc on a une suite exacte courte naturelle :

$$1 \to s(H^{\mathrm{red}}) \to H' \to H^{\mathrm{ab}} \to 1\,.$$

Par conséquent, ${H'}^{\mathrm{lin}}$ est réductif. En outre, on vérifie que le morphisme $H \to H/H^{\mathrm{u}}$ induit un isomorphisme $H' \xrightarrow{\cong} H/H^{\mathrm{u}}$, c'est-à-dire que le diagramme commutatif suivant définit une section notée également s du morphisme $H \to H/H^{\mathrm{u}}$:

(2)
$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & H^{\mathrm{u}} \arrow[r] & H \arrow[r] & H/H^{\mathrm{u}} \arrow[r] & 1 \\ & & H' \arrow[u] \arrow[ur, "\cong"'] & & \end{tikzcd}$$

La section s définit un carré de variétés semi-abéliennes naturel suivant, noté $\widetilde{C}_{f,s}$, vu comme un morphisme dans la catégorie des complexes de modules galoisiens, entre les complexes $[T_H^{\mathrm{sc}} \to \mathrm{SA}_H]$ et $[T_G^{\mathrm{sc}} \to \mathrm{SA}_G]$:

$$\begin{tikzcd} T_H^{\mathrm{sc}} \arrow[r, "g^{\mathrm{sc}}"] \arrow[d, "\rho_H"] & T_G^{\mathrm{sc}} \arrow[d, "\rho_G"] \\ \mathrm{SA}_H \arrow[r, "g"] & \mathrm{SA}_G\,. \end{tikzcd}$$

On note $C_{f,s}$ le cône de ce morphisme, à savoir le complexe

$$C_{f,s} := [T_{H^{\mathrm{sc}}} \xrightarrow{\rho_H \oplus g^{\mathrm{sc}}} \mathrm{SA}_H \oplus T_{G^{\mathrm{sc}}} \xrightarrow{-g+\rho_G} \mathrm{SA}_G]$$

avec $T_{H^{\mathrm{sc}}}$ en degré -2.

On vérifie que les inclusions de $Z_{H/H^{\mathrm{u}}} \subset \mathrm{SA}_H$, $Z_{H^{\mathrm{sc}}} \subset T_{H^{\mathrm{sc}}}$, $Z_{H,G} \subset \mathrm{SA}_G$ et $Z_{H,G}^{\mathrm{sc}} \subset Z_{G^{\mathrm{sc}}}$ induisent des quasi-isomorphismes de modules croisés abéliens $[Z_{H^{\mathrm{sc}}} \to Z_{H/H^{\mathrm{u}}}] \to [T_{H^{\mathrm{sc}}} \to \mathrm{SA}_H]$ et $[Z_{H,G}^{\mathrm{sc}} \to Z_{H,G}] \to [G^{\mathrm{sc}} \to \mathrm{SA}_G]$. Ces morphismes induisent donc un quasi-isomorphisme canonique (dans le cas où le groupe H est linéaire)

$$\overline{C}_{f,s} \to C_{f,s}\,.$$

On peut donc voir l'application d'abélianisation construite plus haut comme une application

$$\mathrm{ab}^0_{f,s} : \mathbf{H}^0(K, [H \to G]) \to \mathbf{H}^0(K, C_{f,s})\,.$$

Remarquons en particulier que le quasi-isomorphisme $\overline{C}_{f,s} \to C_{f,s}$ canonique assure que le groupe $\mathbf{H}^0(K, C_{f,s})$ et l'application $\mathrm{ab}^0_{f,s} : \mathbf{H}^0(K, [H \to G]) \to \mathbf{H}^0(K, C_{f,s})$ ne dépendent pas des tores maximaux choisis.

Remarque 2.13. — Dans le cas $S = \mathrm{Spec}(K)$ considéré ici, toutes les sections de la suite exacte

$$1 \to H^{\mathrm{u}} \to H^{\mathrm{lin}} \to H^{\mathrm{red}} \to 1$$

sont conjuguées, donc $\mathrm{ab}^0_{f,s}$ et $\mathbf{H}^0(K, C_{f,s})$ ne dépendent pas de la section s choisie.

On peut alors comparer l'application ab^0_f avec les applications d'abélianisation de Borovoi (et celles de la section 1). En effet, on dispose d'un diagramme commutatif exact

$$\begin{tikzcd} G(K) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ab}^0_G"] & \mathbf{H}^0(K, [H \to G]) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ab}^0_f"] & H^1(K, H) \arrow[d, "\mathrm{ab}^1_H"] \\ H^0_{\mathrm{ab}}(K, G) \arrow[r] & \mathbf{H}^0(K, C_f) \arrow[r] & H^1_{\mathrm{ab}}(K, H)\,, \end{tikzcd}$$

où la ligne inférieure est un morceau de la suite exacte longue d'hypercohomologie provenant de la suite exacte de complexes

$$0 \to C_G \to C_f \to C_H[1] \to 1\,.$$

Remarque 2.14. — Si $K = \mathbf{R}$, on peut donner une version "modifiée à la Tate" de cette application, comme dans [**Dem11a**] 3.1, pour obtenir une application canonique

$$\widehat{\mathrm{ab}^0_f} : \widehat{H}^0(\mathbf{R}, [H \to G]) \to \widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, C_f)$$

où $\widehat{H}^0(\mathbf{R}, [H \to G])$ est défini dans [**Dem11a**], 3.1, et $\widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, C_f)$ est le groupe d'hypercohomologie modifiée à la Tate du complexe C_f. En outre, cette application $\widehat{\mathrm{ab}^0_f}$ est compatible avec l'application ab^0_f, via les flèches naturelles $\mathbf{H}^0(\mathbf{R}, [H \to G]) \to \widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, [H \to G])$ et $\mathbf{H}^0(\mathbf{R}, C_f) \to \widehat{\mathbf{H}}^0(\mathbf{R}, C_f)$.

2.5. Application à l'abélianisation des espaces homogènes. — Revenons au cas général d'un schéma de base S, et de deux schémas en groupes H et G satisfaisant les hypothèses (1), (2), (3) et (4) de la section 2.4.1. On suppose que le morphisme $f : H \to G$ est une immersion fermée d'un sous-groupe H de G, de sorte que le quotient $X := G/H$ soit représentable par un S-schéma. On note $\pi : G \to X$ le morphisme quotient.

Dans ce contexte, la proposition III.3.1.1 de [**Gir71**] assure que l'on a une bijection naturelle

$$X(S) \cong \mathbf{H}^0(S, [H \xrightarrow{f} G])\,.$$

Par conséquent, l'application $\mathrm{ab}^0_{f,s}$ induit naturellement une application notée $\mathrm{ab}^0_{X,s}$ (notée par fois abusivement ab^0_X) de la forme

$$\mathrm{ab}^0_{X,s} : X(S) \to H^0_{\mathrm{ab}}(S, X) := \mathbf{H}^0(S, \overline{C}_{X,s})\,,$$

où $\overline{C}_{X,s} = \overline{C}_X$ est le complexe $\overline{C}_{f,s}$ défini plus haut.

On peut alors traduire les résultats précédents dans ce contexte particulier des espaces homogènes. Par exemple, on dispose de la suite exacte fondamentale suivante (voir théorème 2.9) :

Théorème 2.15. — *On a un diagramme commutatif naturel à lignes exactes :*

$$\begin{tikzcd} H(S) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{ab}^0_H"] & G(S) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{ab}^0_G"] & X(S) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\mathrm{ab}^0_X"] & H^1(S,H) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "\mathrm{ab}^1_H"] & H^1(S,G) \arrow[d, "\mathrm{ab}^1_G"] \\ H^0_{\mathrm{ab}}(S,H) \arrow[r, "f_*"] & H^0_{\mathrm{ab}}(S,G) \arrow[r, "T"] & H^0_{\mathrm{ab}}(S,X) \arrow[r, "\delta"] & H^1_{\mathrm{ab}}(S,H) \arrow[r, "f_*"] & H^1_{\mathrm{ab}}(S,G) \end{tikzcd}$$

où les morphismes de la première ligne sont les morphismes usuels, et la seconde ligne est extraite de la suite exacte longue d'hypercohomologie associée au triangle exact

$$C_H \to C_G \to \overline{C}_X \to C_H[1] .$$

En outre, étant donnés $g \in G(S)$ et $x \in X(S)$, on a

$$\mathrm{ab}^0_X(g.x) = T(\mathrm{ab}^0_G(g)) + \mathrm{ab}^0_X(x) \in H^0_{\mathrm{ab}}(S,X) .$$

On dispose aussi d'une formule relative au changement de point de base dans X. La construction de ab^0_X est associée à une identification de l'espace homogène X avec le quotient G/H. Si on se donne un point $x \in X(S)$, le morphisme $\pi_x : G \to X$ défini par $\pi_x(g) := g.x$ permet d'identifier X avec le quotient de G par le stabilisateur H_x de x dans G. De cette façon, on peut construire pour tout $x \in X(S)$, un complexe $\overline{C}_{X,x}$, un groupe $H^0_{\mathrm{ab}}(S,X;x) := \mathbf{H}^0(S,\overline{C}_{X,x})$ et une application

$$\mathrm{ab}^0_{X,x} : X(S) \to H^0_{\mathrm{ab}}(S,X;x) .$$

Proposition 2.16. — *Soit X comme plus haut. Soient $x_1, x_2 \in X(S)$. Alors il existe un isomorphisme canonique de groupes abéliens $H^0_{\mathrm{ab}}(S,X;x_2) \xrightarrow{\cong} H^0_{\mathrm{ab}}(S,X;x_1)$ tel que le diagramme naturel*

$$\begin{tikzcd} X(S) \arrow[r, "\mathrm{ab}^0_{X,x_2}"] \arrow[d, "\mathrm{ab}^0_{X,x_1}"'] & H^0_{\mathrm{ab}}(S,X;x_2) \arrow[d, "\cong"] \\ H^0_{\mathrm{ab}}(S,X;x_1) \arrow[r, "t_{x_1,x_2}"] & H^0_{\mathrm{ab}}(S,X;x_1) \end{tikzcd}$$

soit commutatif, où $t_{x_1,x_2} : H^0_{\mathrm{ab}}(S,X;x_1) \to H^0_{\mathrm{ab}}(S,X;x_1)$ est la translation par $-\mathrm{ab}^0_{X,x_1}(x_2)$ (i.e. $t_{x_1,x_2}(\alpha) := \alpha - \mathrm{ab}^0_{X,x_1}(x_2)$).

Démonstration. — On commence par rappeler le lemme suivant :

Lemme 2.17. — *Notons $\pi : G \to X$ la projection.*

Alors pour tout $x \in X(S)$, on a un isomorphisme canonique de S-schémas en groupes

$${}_{\pi^{-1}(x)}H \xrightarrow{\cong} \mathrm{Stab}_G(x)$$

entre le groupe H tordu par le torseur $\pi^{-1}(x)$ et le stabilisateur $\mathrm{Stab}_G(x)$ de x dans G.

Démonstration. — On note $i : H \to G$ l'immersion fermée de H dans G et $P := \pi^{-1}(x)$. On définit un morphisme (de S-schémas) $\psi : P \times_S H \to G$ par la formule suivante :

$$\psi(p,h) := p.i(h).p^{-1} .$$

Alors
- le morphisme ψ est à valeurs dans le sous-schéma en groupes $\mathrm{Stab}_G(x)$ de G.
- le morphisme ψ se factorise par l'action diagonale de H sur $P \times_S H$ définie par $h'.(p,h) := (p.h'^{-1}, h'.h.h'^{-1})$, donc ψ induit un morphisme $\psi' : {}_PH \to \mathrm{Stab}_G(x)$.

Enfin, on vérifie que le morphisme ψ' ainsi défini est un isomorphisme de schémas en groupes. □

Avec ce lemme, la proposition 2.16 est une conséquence de la proposition 2.12. □

2.6. Application d'abélianisation sur un corps local ou sur un corps de nombres. —

Proposition 2.18. — *Soit K un corps local non archimédien. Alors l'application*

$$\mathrm{ab}^0_f : \mathbf{H}^0(K,[H \to G]) \to H^0_{\mathrm{ab}}(K,[H \to G])$$

est surjective.

Démonstration. — On considère le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
H(K) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{ab}^0_H"] & G(K) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ab}^0_G"] & \mathbf{H}^0(K,[H\to G]) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ab}^0_f"] & H^1(K,H) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{ab}^1_H"] & H^1(K,G) \arrow[d, "\mathrm{ab}^1_G"] \\
H^0_{\mathrm{ab}}(K,H) \arrow[r] & H^0_{\mathrm{ab}}(K,G) \arrow[r] & H^0_{\mathrm{ab}}(K,[H\to G]) \arrow[r] & H^1_{\mathrm{ab}}(K,H) \arrow[r] & H^1_{\mathrm{ab}}(K,G)\,.
\end{tikzcd}$$

Or on sait que le morphisme $\mathrm{ab}^1_H : H^1(K,H) \to H^1_{\mathrm{ab}}(K,H)$ est surjectif : voir [**Bor98**], théorème 5.4 dans le cas où H est réductif ; pour le cas général, on remarque que le morphisme $H^1(K,H) \to H^1(K,H/H^{\mathrm{u}})$ est bijectif par trivialité de la cohomologie des groupes unipotents, puis on conclut par dévissage au cas des variétés abéliennes et des groupes réductifs.

De même, le morphisme $\mathrm{ab}^1_G : H^1(K,G) \to H^1_{\mathrm{ab}}(K,G)$ est injectif : voir [**Bor98**], corollaire 5.4.1 pour le cas où G est réductif ; pour le cas général, on utilise à nouveau la bijectivité de $H^1(K,G) \to H^1(K,G/G^{\mathrm{u}})$ et un dévissage au cas des groupes réductifs et des variétés abéliennes. Enfin, le morphisme $\mathrm{ab}^0_G : G(K) \to H^0_{\mathrm{ab}}(K,G)$ est surjectif : voir [**Bor98**], proposition 5.1 quand G est réductif ; il suffit de remarquer que $G(K)$ se surjecte dans $G/G^{\mathrm{u}}(K)$ et de faire un dévissage pour le cas général. On conclut alors la preuve par une chasse au diagramme évidente, en utilisant la proposition 2.6. □

Remarque 2.19. — Cette proposition est en fait valable sur tout corps K de caractéristique nulle, de dimension cohomologique ≤ 2, tel que pour toute extension finie L/K, indice et exposant des L-algèbres simples centrales coïncident, et tel que la dimension cohomologique de l'extension abélienne maximale de K est ≤ 1. La preuve précédente s'étend en effet à ce cadre ([**CT08**], théorème 8.4.(ii)) grâce aux cas connus de la conjecture II de Serre (voir [**CTGP04**], théorème 1.2). Par exemple, cette proposition est valable si K est un corps de nombres totalement imaginaire, ou une extension finie du corps $\mathbf{C}((x,y))$.

Proposition 2.20. — *Soit K un corps local non archimédien. Soient $x, y \in \mathbf{H}^0(K,[H \to G])$. Alors $\mathrm{ab}^0_f(x) = \mathrm{ab}^0_f(y)$ si et seulement si il existe $g \in G^{\mathrm{scu}}(K)$ tel que $y = g.x$.*

Démonstration. — Tout d'abord, la condition est bien suffisante, grâce à la proposition 2.6. Montrons sa nécessité. On note également x un (H,G)-torseur représentant x. Par la proposition 2.12, on sait que $\mathrm{ab}^0_{{}_xf}({}_xy) = 0$ dans $H^0_{\mathrm{ab}}(K,[{}_xH \to G])$. Donc l'image $h \in H^1(K,{}_xH)$ de ${}_xy$ s'envoie sur 0 par $\mathrm{ab}^1_{{}_xH}$. Or l'application $\mathrm{ab}^1_{{}_xH}$ est injective, donc h est la classe triviale dans $H^1(K,{}_xH)$.

Donc par la suite exacte du théorème 2.9, ${}_xy$ provient d'un élément $g_0 \in G(K)$. Par commutativité du diagramme du théorème 2.9, l'image de $\mathrm{ab}^0_G(g_0)$ dans $H^0_{\mathrm{ab}}(K,[{}_xH \to G])$ est nulle, donc $\mathrm{ab}^0_G(g_0)$ se relève en $h_0' \in H^0_{\mathrm{ab}}(K,{}_xH)$. Or le morphisme

$$\mathrm{ab}^0_{{}_xH} : H^0(K,{}_xH) \to H^0_{\mathrm{ab}}(K,{}_xH)$$

est surjectif, donc h_0' se relève en $h_0 \in {}_xH(K)$. Posons alors $g_1 := g_0.{h_0}^{-1} \in G(K)$. Il est clair que $\mathrm{ab}^0_G(g_1) = 0$, donc g_1 est l'image d'un élément g de $G^{\mathrm{scu}}(K)$. Enfin, par construction, on a

$$g.x = (g_0.{h_0}^{-1}).x = g_0.x = y$$

car h_0^{-1} est dans le stabilisateur ${}_xH$ de x, ce qui conclut la preuve. □

Le corollaire suivant généralise le corollaire 5.2 de [**Bor98**] (cas où $H = 1$) et le corollaire 5.4.1 de [**Bor98**] (cas où $G = 1$).

Corollaire 2.21. — *Soit K un corps local non archimédien. L'application ab^0_f induit une bijection*

$$\mathrm{ab}^0_f : G^{\mathrm{scu}}(K)\backslash\mathbf{H}^0(K,[H \to G]) \xrightarrow{\cong} H^0_{\mathrm{ab}}(K,[H \to G])$$

Démonstration. — C'est la conjonction des propositions 2.18 et 2.20. □

Théorème 2.22. — *Soit k un corps de nombres. On suppose les groupes H et G linéaires. On rappelle que $\Omega_{\mathbf{R}}$ désigne l'ensemble des places réelles de k. Alors le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{H}^0(k,[H\to G]) \arrow[r, "\mathrm{ab}^0_f"] \arrow[d, "\mathrm{loc}_\infty"] & H^0_{\mathrm{ab}}(k,[H\to G]) \arrow[d, "\mathrm{loc}'_\infty"] \\
\prod_{v\in\Omega_{\mathbf{R}}} \widehat{\mathbf{H}}^0(k_v,[H\to G]) \arrow[r, "\prod_{v\in\Omega_{\mathbf{R}}} \mathrm{ab}^0_{f_v}"] & \prod_{v\in\Omega_{\mathbf{R}}} \widehat{H}^0_{\mathrm{ab}}(k_v,[H\to G])
\end{tikzcd}$$

est cartésien, où les applications $\mathrm{ab}^0_{f_v}$ sont définies à la remarque 2.14.

Démonstration. — Notons $\mathrm{ab}^0_\infty := \prod_{v\in\Omega_{\mathbf{R}}} \mathrm{ab}^0_{f_v}$.

Soient $x' \in H^0_{\mathrm{ab}}(k,[H\to G])$ et $x_\infty \in \prod_{v\in\Omega_{\mathbf{R}}} \widehat{\mathbf{H}}^0(k_v,[H\to G])$ tels que $\mathrm{loc'}_\infty(x') = \mathrm{ab}^0_\infty(x_\infty)$. On cherche un élément $x \in \mathbf{H}^0(k,[H\to G])$ tel que $\mathrm{ab}^0_f(x) = x'$ et $\mathrm{loc}_\infty(x) = x_\infty$.

Pour cela, on considère le diagramme commutatif à lignes exactes (les lignes proviennent du théorème 2.9) :
(3)

$$\begin{tikzcd}
H(k) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & G(k) \arrow[r, dashed] \arrow[dr] \arrow[dd] & {} & \\
& H^0_{\mathrm{ab}}(k,H) \arrow[rr] \arrow[dd] & & H^0_{\mathrm{ab}}(k,G) \arrow[r, dashed] \arrow[dd] & {} \\
\widehat{H}^0(k_\infty,H) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \widehat{H}^0(k_\infty,G) \arrow[r, dashed] \arrow[dr] & {} & \\
& \widehat{H}^0_{\mathrm{ab}}(k_\infty,H) \arrow[rr] & & \widehat{H}^0_{\mathrm{ab}}(k_\infty,G) \arrow[r, dashed] & {}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{H}^0(k,[H\to G]) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & H^1(k,H) \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & H^1(k,G) \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& H^0_{\mathrm{ab}}(k,[H\to G]) \arrow[rr] \arrow[dd] & & H^1_{\mathrm{ab}}(k,H) \arrow[rr] \arrow[dd] & & H^1_{\mathrm{ab}}(k,G) \arrow[dd] \\
\widehat{H}^0(k_\infty,[H\to G]) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^1(k_\infty,H) \arrow[rr] \arrow[dr] & & H^1(k_\infty,G) \arrow[dr] & \\
& \widehat{H}^0_{\mathrm{ab}}(k_\infty,[H\to G]) \arrow[rr] & & H^1_{\mathrm{ab}}(k_\infty,H) \arrow[rr] & & H^1_{\mathrm{ab}}(k_\infty,G) .
\end{tikzcd}$$

Notons h' l'image de x' dans $H^1_{\mathrm{ab}}(k,H)$ et h_∞ celle de x_∞ dans $H^1(k_\infty,H)$. Alors par commutativité du diagramme, les éléments h' et h_∞ ont même image dans $H^1_{\mathrm{ab}}(k_\infty,H)$. Donc par le théorème 5.11 de [**Bor98**] (voir aussi la proposition 1.1), il existe $h \in H^1(k,H)$ tel que $\mathrm{loc}_\infty(h) = h_\infty$ et $\mathrm{ab}^1_H(h) = h'$. En reprenant le diagramme (3), on constate que l'image de h dans $H^1(k,G)$ s'envoie sur 0 dans $H^1_{\mathrm{ab}}(k,G)$ et sur la classe triviale dans $H^1(k_\infty,G)$. Donc en utilisant à nouveau le théorème 5.11 de [**Bor98**], appliqué à G, on en déduit que $g \in H^1(k,G)$ est la classe triviale. Donc par exactitude du diagramme (3), h se relève en $x^0 \in \mathbf{H}^0(k,[H\to G])$. Alors, en notant $x^0_\infty := \mathrm{loc}_\infty(x)$ et $x^{0'} := \mathrm{ab}^0_f(x^0)$, on constate par commutativité de (3) que $x^{0'}$ et x' ont même image h' dans $H^1_{\mathrm{ab}}(k,H)$, et que x^0_∞ et x_∞ ont même image h_∞ dans $H^1(k_\infty,H)$. Donc par exactitude, il existe $g' \in H^0_{\mathrm{ab}}(k,G)$ et $g_\infty \in \widehat{H}^0(k_\infty,G)$ tels que $x' = T(g') + x^{0'}$ dans $H^0_{\mathrm{ab}}(k,[H\to G])$ et $x_\infty = g_\infty . x^0_\infty$ dans $\widehat{H}^0(k_\infty,[H\to G])$. Les éléments $\mathrm{loc}'_\infty(g')$ et $\mathrm{ab}_\infty(g_\infty)$ de $\widehat{H}^0_{\mathrm{ab}}(k_\infty,G)$ ont même image ${x^0_\infty}' - x'_\infty$ dans $\widehat{H}^0_{\mathrm{ab}}(k_\infty,[H\to G])$, donc il existe $\overline{h}'_\infty \in \widehat{H}^0_{\mathrm{ab}}(k_\infty,H)$ tel que

$$f(\overline{h}'_\infty) = \mathrm{loc}'_\infty(g') - \mathrm{ab}_\infty(g_\infty)\,.$$

On utilise alors le théorème 5.10 pour trouver $\overline{h}' \in H^0_{\mathrm{ab}}(k,H)$ tel que $\mathrm{loc}'_\infty(\overline{h}') = \overline{h}'_\infty$. On a alors un diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} G(k) \arrow[r, "\mathrm{ab}^0_G"] \arrow[d, "\mathrm{loc}_\infty"] & H^0_{\mathrm{ab}}(k,G) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\mathrm{loc}'_\infty"] & H^1(k,G^{\mathrm{scu}}) \arrow[d, "\mathrm{loc}^{\mathrm{scu}}_\infty"] \\ \widehat{H}^0(k_\infty,G) \arrow[r, "\mathrm{ab}^0_G"] & \widehat{H}^0_{\mathrm{ab}}(k_\infty,G) \arrow[r] & H^1(k_\infty,G^{\mathrm{scu}}) . \end{tikzcd}$$

Or par construction, le point $g' - f(\overline{h}') \in H^0_{\mathrm{ab}}(k,G)$ s'envoie par l'application ∂ sur une classe $\Delta \in H^1(k,G^{\mathrm{scu}})$ telle que $\mathrm{loc}_\infty(\Delta)$ est la classe triviale dans $H^1(k_\infty,G^{\mathrm{scu}})$. Or $\mathrm{loc}^{\mathrm{scu}}_\infty$ a un noyau trivial (principe de Hasse pour les groupes semi-simple simplement connexes : voir [**PR94**], théorème 6.6), donc Δ est triviale, donc le diagramme précédent assure que $g' - f(\overline{h}') = \mathrm{ab}^0_G(\overline{g})$ pour un $\overline{g} \in G(k)$. Or on a par construction l'égalité $\mathrm{ab}_\infty(g_\infty) = \mathrm{loc}'_\infty(g' - f(\overline{h}'))$ dans $\widehat{H}^0_{\mathrm{ab}}(k_\infty,G)$, donc on en déduit que $\mathrm{ab}^0_G(\mathrm{loc}_\infty(\overline{g})) = \mathrm{ab}^0_G(g_\infty)$ dans $\widehat{H}^0_{\mathrm{ab}}(k_\infty,G)$. Or le morphisme

$$\mathrm{ab}^0_G : \widehat{H}^0(k_\infty,G) \to \widehat{H}^0_{\mathrm{ab}}(k_\infty,G)$$

est injectif, puisque $H^0(k_\infty,G^{\mathrm{scu}})$ est connexe, donc on en déduit que $\mathrm{loc}_\infty(\overline{g}) = g_\infty$. Finalement, on pose

$$x := \overline{g}.x^0 \in \mathbf{H}^0(k,[H \to G]) .$$

Alors par construction, grâce à la commutativité du diagramme (3), le point x vérifie les deux conditions souhaitées, à savoir $\mathrm{ab}^0_f(x) = x'$ et $\mathrm{loc}_\infty(x) = x_\infty$, d'où le théorème. □

2.7. Abélianisation et résolutions flasques. — Sur un corps K, on va donner une définition équivalente de l'application d'abélianisation, pour un morphisme de groupes linéaires connexes, en termes de résolutions flasques des groupes H et G. Pour les définitions et les propriétés des résolutions flasques, on renvoie aux travaux de Colliot-Thélène dans [**CT08**].

On se donne $f : H \to G$ un morphisme de K-groupes algébriques linéaires connexes. Soient

$$1 \to S_{H'} \to H' \to H \to 1$$

$$1 \to S_{G'} \to G' \to G \to 1$$

des résolutions flasques de H et G : $S_{H'}$ et $S_{G'}$ sont des K-tores flasques, H' et G' sont des groupes quasi-triviaux, et les extensions précédentes sont centrales. On note $\mathscr{F}_{H'}$ le gr-champ associé au module croisé $[S_{H'} \to H']$, et de même pour $\mathscr{F}_{G'}$. Par la preuve de la proposition 6.6 de [**CT08**], il existe deux morphismes $f_1 : S_{H'} \to S_{G'}$ et $f_2 : H' \to G'$ de sorte que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & S_{H'} \arrow[r] \arrow[d, "f_1"] & H' \arrow[r] \arrow[d, "f_2"] & H \arrow[r] \arrow[d, "f"] & 1 \\ 1 \arrow[r] & S_{G'} \arrow[r] & G' \arrow[r] & G \arrow[r] & 1 . \end{tikzcd}$$

On vérifie que le morphisme naturel

$$\mathbf{H}^0(K,[\mathscr{F}_{H'} \xrightarrow{f_*} \mathscr{F}_{G'}]) \to \mathbf{H}^0(K,[H \to G])$$

est une bijection Considérons désormais le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} S_{H'} \arrow[r, "f_1"] \arrow[d] & S_{G'} \arrow[d] \\ P_{H'} \arrow[r, "f_2"] & P_{G'} \end{tikzcd}$$

où $P_{H'}$ (resp. $P_{G'}$) est le K-tore quasi-trivial H'^{tor} (resp. G'^{tor}). On note $\overline{C}_{H',G',f}$ le cône de ce carré de tores. Si $\mathscr{F}^{\mathrm{ab}}_{H'}$ désigne le gr-champ associé au module croisé abélien $[S_{H'} \to P_{H'}]$ (idem pour G'), on a des morphismes naturels de gr-champs $\mathscr{F}_{H'} \to \mathscr{F}^{\mathrm{ab}}_{H'}$ et $\mathscr{F}_{G'} \to \mathscr{F}^{\mathrm{ab}}_{G'}$, de sorte que l'on a un morphisme canonique

$$\mathbf{H}^0(K,[\mathscr{F}_{H'} \xrightarrow{f_*} \mathscr{F}_{G'}]) \to \mathbf{H}^0(K,[\mathscr{F}^{\mathrm{ab}}_{H'} \xrightarrow{f_*} \mathscr{F}^{\mathrm{ab}}_{G'}]) .$$

Enfin, le groupe $\mathbf{H}^0(K,[\mathscr{F}^{\mathrm{ab}}_{H'} \xrightarrow{f_*} \mathscr{F}^{\mathrm{ab}}_{G'}])$ s'identifie naturellement au groupe d'hypercohomologie $\mathbf{H}^0(K,\overline{C}_{H',G',f})$ (voir lemme 2.4 ou [**Ald08**], proposition 6.1.6). On a construit une application

$$\overline{\mathrm{ab}}^0_{H',G',f} : \mathbf{H}^0(K,[H \to G]) \to \mathbf{H}^0(K,\overline{C}_{H',G',f}) .$$

On vérifie que cette construction ne dépend pas des résolutions H' et G' choisies (voir proposition 3.2.(iv) de [**CT08**]), ni des morphismes f_1 et f_2 (voir [**CT08**], preuve de la proposition 6.6).

Enfin, la proposition A.1.(iv) de [**CT08**] assure que les complexes $\overline{C}_{H',G',f}$ et C_f sont naturellement quasi-isomorphes, et on a ainsi défini une application

$$\overline{\mathrm{ab}}^0_f : \mathbf{H}^0(K, [H \to G]) \to \mathbf{H}^0(K, C_f) = H^0_{\mathrm{ab}}(K, [H \to G])\,.$$

Un calcul assure que cette flèche coïncide avec la flèche ab^0_f définie plus haut.

3. Application d'abélianisation pour les espaces homogènes à stabilisateurs abéliens

Dans cette section, on ne suppose plus H connexe, mais on lui impose d'être commutatif, extension d'un schéma abélien par un groupe linéaire commutatif, lui-même extension d'un schéma en groupes de type multiplicatif par un sous-schéma en groupes unipotent caractéristique. On note H^{u} le radical unipotent de H^{lin}. On dispose des morphismes quotients suivants : $H \to H^{\mathrm{tma}} := H/H^{\mathrm{u}}$ et $G \to G^{\mathrm{sab}}$. Le groupe H^{tma} est une extension d'une variété abélienne H^{ab} par un groupe de type multiplicatif $H^{\mathrm{tm}} = H^{\mathrm{lin}}/H^{\mathrm{u}}$; on a également un morphisme naturel $H^{\mathrm{tma}} \to G^{\mathrm{sab}}$ induit par l'inclusion de H dans G (le morphisme $H^{\mathrm{u}} \to G^{\mathrm{sab}}$ est trivial par [**SGA3**], exposé XVII, lemme 6.2.5). De la même manière que dans la section précédente, on a un morphisme d'abélianisation naturel

$$\mathrm{ab}^{0'}{}_f : \mathbf{H}^0(S, [H \to G]) \to \mathbf{H}^0(S, [H^{\mathrm{tma}} \to G^{\mathrm{sab}}])\,.$$

Le diagramme suivant est alors commutatif (C^{ab}_f désigne le complexe $[H^{\mathrm{tma}} \to G^{\mathrm{sab}}]$) :

$$\begin{tikzcd}
G(S) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ab}^{0'}{}_G"] & \mathbf{H}^0(S, [H \to G]) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ab}^{0'}{}_f"] & H^1(S, H) \arrow[d, "\mathrm{ab}^{1'}{}_H"] \\
H^0(S, G^{\mathrm{sab}}) \arrow[r, "T"] & \mathbf{H}^0(S, C^{\mathrm{ab}}_f) \arrow[r] & H^1(S, H^{\mathrm{tma}})
\end{tikzcd}$$

où la seconde ligne provient du triangle exact dans la catégorie dérivée :

$$H^{\mathrm{tma}} \to G^{\mathrm{sab}} \to C^{\mathrm{ab}}_f \to H^{\mathrm{tma}}[1]\,.$$

On a également une formule de compatibilité analogue au théorème 2.9, à savoir que l'on a, pour tout $g \in G(S)$, $x \in \mathbf{H}^0(S, [H \to G])$:

$$\mathrm{ab}^{0'}{}_f(g.x) = T(\mathrm{ab}^0_G(g)) + \mathrm{ab}^{0'}{}_f(x)\,.$$

Si le groupe H est connexe, l'application $\mathrm{ab}^{0'}{}_f$ est compatible avec l'application ab^0_f définie dans les sections précédentes, au sens où $\mathrm{ab}^{0'}{}_f$ est la composée

$$\mathbf{H}^0(S, [H \to G]) \xrightarrow{\mathrm{ab}^0_f} \mathbf{H}^0(K, \overline{C}_f) \xrightarrow{t_*} \mathbf{H}^0(K, C^{\mathrm{ab}}_f)$$

où le morphisme t_* provient du morphisme de complexes naturel $\overline{C}_f \to C^{\mathrm{ab}}_f$.

Enfin, mentionnons que l'on dispose aussi dans ce contexte de l'analogue de la proposition 2.12.

4. Applications d'abélianisation sur un anneau d'entiers

Soit k un corps de nombres, $\mathscr{O}_k$ son anneau des entiers et U un ouvert de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_k)$. L'objectif de cette section est de montrer que si U est suffisamment petit, les constructions de la section 2.4.2 (avec les tores maximaux) s'étendent sur l'ouvert U.

À partir de cette section, et jusqu'à la fin du texte, la cohomologie considérée est *la cohomologie étale*, sauf mention explicite du contraire. Remarquons que puisque tous les schémas en groupes considérés sont supposés lisses, la cohomologie étale coïncide avec la cohomologie fppf.

4.1. Cas d'un stabilisateur connexe. — Soient $f : H \to G$ un morphisme de k-groupes connexes. On suppose H linéaire réductif. Quitte à réduire U, on peut supposer qu'il existe $\mathscr{H} \xrightarrow{f} \mathscr{G}$ un morphisme de schémas en groupes lisses connexes sur U, de sorte que H (resp. G, resp. $f : H \to G$) s'identifie à la fibre générique de $\mathscr{H}$ (resp. $\mathscr{G}$, resp. $f : \mathscr{H} \to \mathscr{G}$). Quitte à réduire encore U, on suppose que $\mathscr{H}$ est réductif sur U, et que $\mathscr{G}$ est extension d'un schéma abélien par un groupe affine, lui-même extension scindée d'un schéma en groupes réductif par un schéma en groupes unipotent. On vérifie alors que l'on satisfait les hypothèses (1), (2), (3) et (4) : pour les hypothèses (1) et (3), on peut par exemple utiliser [**Gro66**], théorème 8.10.5, [**SGA3**], exposé VI-B proposition 9.2 et [**Ana73**], théorème 4.C. Les hypothèses (2) et (4) sont évidentes puisque $\mathscr{H}$

est réductif sur U. On définit $T_{\mathscr{H}^{\mathrm{sc}}}$ (resp. $T_{\mathscr{G}^{\mathrm{sc}}}$, resp. $T_{\mathscr{H}}$, resp. $\mathrm{SA}_{\mathscr{G}}$) comme l'adhérence schématique de T_H^{sc} (resp. T_G^{sc}, resp. T_H, resp. SA_G) dans $\mathscr{H}^{\mathrm{sc}}$ (resp. $\mathscr{G}^{\mathrm{sc}}$, resp. $\mathscr{H}$, resp. $\mathscr{G}/\mathscr{G}^{\mathrm{u}}$). Alors, quitte à réduire encore U, on peut supposer que les schémas en groupes ainsi obtenus sont des sous-schémas semi-abéliens maximaux des schémas en groupes correspondants. On dispose alors de morphismes d'abélianisation

$$H^i(U,\mathscr{H}) \to \mathbf{H}^i(U,[T_{\mathscr{H}^{\mathrm{sc}}} \to T_{\mathscr{H}}])$$

$$H^i(U,\mathscr{G}) \to \mathbf{H}^i(U,[T_{\mathscr{G}^{\mathrm{sc}}} \to \mathrm{SA}_{\mathscr{G}}])$$

pour $i = 0$ et 1.

On obtient aussi une application naturelle

$$\mathrm{ab}^0_f : \mathbf{H}^0(U,[\mathscr{H} \to \mathscr{G}]) \to H^0_{\mathrm{ab}}(U,[\mathscr{H} \to \mathscr{G}]) := \mathbf{H}^0(U,[T_{\mathscr{H}^{\mathrm{sc}}} \to T_{\mathscr{H}} \oplus T_{\mathscr{G}^{\mathrm{sc}}} \to \mathrm{SA}_{\mathscr{G}}])$$

fonctorielle en U et qui coïncide avec l'application d'abélianisation de la section 2.4.1, au vu des quasi-isomorphismes (sur U suffisamment petit) $[Z^{\mathrm{sc}}_{\mathscr{H}} \to Z_{\mathscr{H}}] \to [T^{\mathrm{sc}}_{\mathscr{H}} \to T_{\mathscr{H}}]$ et $[Z^{\mathrm{sc}}_{\mathscr{H},\mathscr{G}} \to Z_{\mathscr{H},\mathscr{G}}] \to [T^{\mathrm{sc}}_{\mathscr{G}} \to \mathrm{SA}_{\mathscr{G}}]$.

De même si H n'est pas supposé réductif, on a une interprétation analogue de l'application d'abélianisation en termes de schémas semi-abéliens, sur un ouvert U assez petit. Il faut tout de même vérifier les hypothèses (1), (2), (3) et (4) de la section 2.4.1. Comme auparavant, les hypothèses (1) et (3) sont vérifiées dans ce contexte, si U est suffisamment petit. De même, l'hypothèse (4) est satisfaite puisque sur k, le morphisme $H^{\mathrm{u}} \to G/G^{\mathrm{u}}$ se factorise à travers $G^{\mathrm{sc}} \to G/G^{\mathrm{u}}$, donc c'est aussi le cas sur un ouvert assez petit. Vérifions l'hypothèse (2). Si U est assez petit, $\mathscr{H}$ est bien extension scindée d'un schéma en groupes réductif par un schéma en groupes unipotent. Montrons que pour tout U-torseur P sous $\mathscr{H}$, on a $H^1(U, {}_P\mathscr{H}^{\mathrm{u}}) = 1$. Par le théorème 2.1 de [**Nis84**], le noyau de $H^1(U, {}_P\mathscr{H}^{\mathrm{u}}) \to H^1(k, {}_PH^{\mathrm{u}}) = 1$ s'identifie au groupe des classes de ${}_P\mathscr{H}^{\mathrm{u}}$ sur U. Or ${}_PH^{\mathrm{u}}$ est unipotent, donc il vérifie l'approximation forte sur U, donc le groupe des classes de ${}_P\mathscr{H}^{\mathrm{u}}$ sur U est trivial, donc $H^1(U, {}_P\mathscr{H}^{\mathrm{u}}) = 1$.

Donc l'hypothèse (2) est vérifiée. On peut donc définir l'application $\mathrm{ab}^0_{f,s}$.

Et on a donc bien dans ce contexte une description de l'application $\mathrm{ab}^0_{f,s}$ sur l'ouvert U en termes d'un complexe de schémas semi-abéliens sur U.

4.2. Cas d'un stabilisateur abélien. — Soit $f : H \to G$ un morphisme de k-groupes, avec H linéaire commutatif et G connexe. Si U est un ouvert suffisamment petit, on étend la situation pour obtenir un morphisme $f : \mathscr{H} \to \mathscr{G}$ entre un U-schéma en groupes affine lisse commutatif et un U-schéma en groupes lisse connexe $\mathscr{G}$. Quitte à réduire U, on peut supposer que le groupe $\mathscr{H}$ est isomorphe au produit direct $\mathscr{H}^{\mathrm{u}} \times \mathscr{H}^{\mathrm{m}}$, où $\mathscr{H}^{\mathrm{u}}$ est le radical unipotent de $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}^{\mathrm{m}}$ est un groupe de type multiplicatif, quotient de $\mathscr{H}$.

Comme dans le cas des corps, on dispose d'une application naturelle, définie pour un ouvert U suffisamment petit :

$$\mathrm{ab}^{0\prime}{}_f : \mathbf{H}^0(U,[\mathscr{H} \to \mathscr{G}]) \to \mathbf{H}^0(U,[\mathscr{H}^{\mathrm{m}} \to \mathscr{G}^{\mathrm{sab}}]) .$$

Enfin, notons que puisque H^{u} est unipotent, il vérifie l'approximation forte, donc le groupe $H^1(U,\mathscr{H}^{\mathrm{u}})$ est trivial, et donc on a une bijection naturelle

$$H^1(U,\mathscr{H}) \cong H^1(U,\mathscr{H}^{\mathrm{m}}) .$$

De même, si v une place de k associée à un point fermé de U, alors les applications

$$H^1(\mathscr{O}_v,\mathscr{H}) \to H^1(\mathscr{O}_v,\mathscr{H}^{\mathrm{m}})$$

$$H^1(k_v,H) \to H^1(k_v,H^{\mathrm{m}})$$

sont des bijections.

5. Théorèmes de dualité pour certains complexes de 1-motifs

Dans cette section, on généralise à certains complexes de longueur 3 les théorèmes de dualité pour les complexes de tores de longueur 2 obtenus dans [**Dem11a**].

Définition 5.1. — *Un complexe de longueur* 3 *sur* S *est un complexe de* S*-schémas en groupes lisses commutatifs, de longueur* 3*, i.e. un complexe*

$$\left[M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} M_3\right]$$

où les M_i *sont des* S*-schémas en groupes lisses commutatifs,* M_1 *étant en degré* -2.

Remarque 5.2. — On voit un tel objet dans la catégorie des complexes bornés de faisceaux fppf sur S, ou parfois dans la catégorie dérivée associée à cette catégorie abélienne.

En particulier, soit un diagramme commutatif de morphismes de S-groupes commutatifs

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\rho"] & G_1' \arrow[d, "\rho'"] \\ G_2 \arrow[r, "f_2"] & G_2' , \end{tikzcd}$$

on peut le voir comme un complexe (de longueur 2) de complexes de groupes commutatifs (de longueur 2) $[G_1 \xrightarrow{\rho} G_2] \xrightarrow{f} [G_1' \xrightarrow{\rho'} G_2']$, et alors son cône

$$[G_1 \xrightarrow{f_1 \oplus \rho} G_1' \oplus G_2 \xrightarrow{\rho' - f_2} G_2']$$

est un exemple de complexe de longueur 3.

Hypothèse : on suppose dans toute la section 5 que Ker f_1 *est fini*, que les groupes M_1 *et* M_2 *sont des schémas en groupes de type multiplicatif* et que M_3 *est un schéma semi-abélien.*

Dans toute la suite de cette section, si C désigne un complexe de longueur 3, on note $\widehat{C}$ le complexe dual, à savoir le cône du complexe

$$\left[\widehat{M_3} \xrightarrow{\widehat{f_2}} \widehat{M_2} \xrightarrow{\widehat{f_1}} \widehat{M_1}\right]$$

où $\widehat{M_i}$ désigne le 1-motif dual du 1-motif (éventuellement avec torsion, au sens de [**Jos09**]) associé à M_i, et où $\widehat{M_3}$ est en degré -2. Explicitement, $\widehat{C}$ est représenté par le complexe

$$\widehat{C} := [\widehat{M_3^{\mathrm{lin}}} \to ({M_3}^{\mathrm{ab}})^* \oplus \widehat{M_2} \to \widehat{M_1}] \, ,$$

avec $\widehat{M_3^{\mathrm{lin}}}$ en degré -2. On dispose d'un accouplement naturel $C \otimes^{\mathbf{L}} \widehat{C} \to \mathbb{G}_m[2]$ qui induit notamment des accouplements en cohomologie

$$\mathbf{H}^i(S, C) \times \mathbf{H}^{-i}(S, \widehat{C}) \to H^2(S, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Br}(S) \, .$$

Comme dans [**Dem11a**], pour un tel complexe C sur un corps de nombres k, on note, pour toute place archimédienne v de k, $\mathbf{H}^0(k_v, C)$ le groupe d'hypercohomologie *modifié* à la Tate, et $\mathbf{P}^0(k, C)$ le produit restreint des $\mathbf{H}^0(k_v, C)$ pour toutes les places v de k.

5.1. Topologie. — Dans ce paragraphe, K est un corps local, et C est un complexe de longueur 3 sur K. On cherche à munir $\mathbf{H}^0(K, C)$ d'une topologie naturelle.

Notons $C_1 := \left[M_1 \xrightarrow{f_1} M_2\right]$, complexe de longueur 2. On considère le triangle exact évident

$$C_1 \to M_3 \to C \to C_1[1] \, .$$

On en déduit une suite exacte en hypercohomologie :

$$\mathbf{H}^0(K, C_1) \xrightarrow{f_2'} H^0(K, M_3) \to \mathbf{H}^0(K, C) \to \mathbf{H}^1(K, C_1) \, . \tag{4}$$

Lemme 5.3. — *Le morphisme* $f_2' : \mathbf{H}^0(K, C_1) \to H^0(K, M_3)$ *est d'image fermée dans* $H^0(K, M_3)$ *(muni de la topologie induite par celle de* K*).*

Démonstration. — On regarde le diagramme commutatif à lignes exactes suivant

$$\begin{tikzcd} M_1(K) \arrow[r, "f_1"] & M_2(K) \arrow[r, two heads, "\varpi"] \arrow[d, "f_2"] & Q \arrow[d, "f_2''"] \\ & M_3(K) \arrow[r, "="] & M_3(K) , \end{tikzcd}$$

où Q est le conoyau de f_1, muni de la topologie quotient. Alors $\mathrm{Im}(f_2'') = \mathrm{Im}(f_2)$, et cette dernière est fermée (voir [**Mar91**], Corollaire I.2.1.3 et [**PR94**], corollaire 1 à la proposition 3.3), donc f_2'' est d'image fermée. On regarde alors le diagramme commutatif suivant, à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} Q \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "f_2''"] & \mathbf{H}^0(K, C_1) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "f_2'"] & H^1(K, M_1) \\ M_3(K) \arrow[r, "="] & M_3(K) & . \end{tikzcd}$$

Or par définition de la topologie sur $\mathbf{H}^0(K, C_1)$, Q s'identifie à un sous-groupe fermé d'indice fini dans $\mathbf{H}^0(K, C_1)$ ($H^1(K, M_1)$ est fini car M_1 est de type multiplicatif). Et f_2'' est d'image fermée, donc $\mathrm{Im}(f_2')$ est un sous-groupe de $M_3(K)$ contenant comme sous-groupe d'indice fini le sous-groupe fermé $\mathrm{Im}(f_2'')$. Donc $\mathrm{Im}(f_2')$ est un sous-groupe fermé de $M_3(K)$. □

La suite exacte initiale (4) identifie le conoyau de f_2' avec un sous-groupe d'indice fini de $\mathbf{H}^0(K, C)$ ($\mathbf{H}^1(K, C_1)$ est fini grâce au triangle exact $\mathrm{Ker}(f_1)[1] \to C_1 \to \mathrm{Coker}(f_1) \to \mathrm{Ker}(f_1)[2]$). On munit ce sous-groupe de la topologie quotient, et cela définit bien une topologie sur le groupe $\mathbf{H}^0(K, C)$. Cette topologie est séparée grâce au fait que $\mathrm{Im}(f_2')$ est un sous-groupe fermé de $H^0(K, M_3)$ (voir lemme 5.3), et le morphisme $H^0(K, M_3) \to \mathbf{H}^0(K, C)$ est alors un morphisme ouvert.

De façon analogue, pour un morphisme de K-groupes $f : H \to G$, on munit l'ensemble $\mathbf{H}^0(K, [H \to G])$ de la topologie naturelle induite par l'action du groupe topologique $G(K)$: $U \subset \mathbf{H}^0(K, [H \to G])$ est ouvert si et seulement si l'intersection de U avec toute orbite de $G(K)$ est un ouvert de cette orbite (lorsqu'elle est munie de la topologie quotient). Autrement dit, on munit $\mathbf{H}^0(K, [H \to G])$ de la topologie somme disjointe des orbites sous $G(K)$, chaque orbite étant munie de la topologie quotient.

Alors $\mathbf{H}^0(K, [H \to G])$ est un espace topologique séparé, et les morphismes

$$G(K) \to \mathbf{H}^0(K, [H \to G]) \to H^1(K, H)$$

sont continus et ouverts ($H^1(K, H)$ est muni de la topologie discrète). On vérifie alors que si $f : \mathscr{H} \to \mathscr{G}$ est un morphisme de $\mathscr{O}_K$-schémas en groupes de type fini, l'image de $\mathbf{H}^0(\mathscr{O}_K, [\mathscr{H} \to \mathscr{G}])$ dans $\mathbf{H}^0(K, [H \to G])$ est un ouvert ; on vérifie aussi que l'application d'abélianisation $\mathrm{ab}_f^0 : \mathbf{H}^0(K, [H \to G]) \to H^0_{\mathrm{ab}}(K, [H \to G])$ est continue.

Enfin, on vérifie que si H est un K-sous-groupe de G, et si $X := G/H$, les topologies sur $X(K)$ et $\mathbf{H}^0(K, [H \to G])$ coïncident via l'identification $X(K) \cong \mathbf{H}^0(K, [H \to G])$.

5.2. Suites exactes de Poitou-Tate. — Dans cette section, k est un corps de nombres. On reprend les notations de [**Dem11b**], à savoir que si A est un groupe topologique, on note $A^\wedge$ le complété de A pour la topologie des sous-groupes ouverts distingués d'indice fini ; si en outre A est commutatif, on note ${}_nA$ le sous-groupe de n-torsion de A, et $A_\wedge := \varprojlim_n A/nA$. Enfin, A^D désigne le groupe des morphismes de groupes continus $A \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$.

Proposition 5.4. — *Soit C un complexe de longueur 3 sur k, avec $Ш^1(M_3^{\mathrm{ab}})$ fini. On suppose le complexe C exact en degré -1 Alors on a une suite exacte de groupes abéliens :*

$$\mathbf{H}^0(k, C)^\wedge \to \mathbf{P}^0(k, C)^\wedge \to \left(\mathbf{H}^0(k, \widehat{C})\right)^D \to Ш^0(\widehat{C})^D \to 0\,.$$

Démonstration. — On considère le diagramme suivant, commutatif,

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ker}\ f_1 \arrow[d, hook] & & \\
M_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "f_1"] & M_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "="] & M_3 \arrow[d, "="] \\
\mathrm{Im}\ f_1 \arrow[r] & M_2 \arrow[r, "f_2"] & M_3
\end{tikzcd}$$

dont les colonnes sont exactes. La ligne inférieure de ce diagramme est naturellement quasi-isomorphe au complexe de longueur 2 $[\mathrm{Coker}\ f_1 \to M_3]$, lequel est quasi-isomorphe à la variété semi-abélienne quotient $M := M_3/\mathrm{Coker}\ f_1$. En résumé, on a donc un triangle exact dans la catégorie dérivée de la forme :

$$\mathrm{Ker}\ f_1[2] \to C \to M \to \mathrm{Ker}\ f_1[3]\,. \tag{5}$$

On en déduit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & H^2(k, \mathrm{Ker}\ f_1)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(k, C)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & H^0(k, M)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & H^3(k, \mathrm{Ker}\ f_1) \arrow[d] \\
P^{-1}(k, M) \arrow[r] \arrow[d] & P^2(k, \mathrm{Ker}\ f_1)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{P}^0(k, C)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & P^0(k, M)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & P^3(k, \mathrm{Ker}\ f_1) \arrow[d] \\
\mathbf{H}^2(k, \widehat{M})^D \arrow[r] & H^0(k, \widehat{\mathrm{Ker}\ f_1})^D \arrow[r] & \mathbf{H}^0(k, \widehat{C})^D \arrow[r] & \mathbf{H}^1(k, \widehat{M})^D \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{6}$$

où $P^{-1}(k,M) = \prod_{v \text{ réelle}} H^{-1}(k_v, M)$ et $P^3(k, \mathrm{Ker}\ f_1) = \prod_{v \text{ réelle}} H^3(k_v, \mathrm{Ker}\ f_1)$. Le morphisme $P^{-1}(k,M) \to \mathbf{H}^2(k,\widehat{M})^D$ est défini via la dualité locale aux places réelles pour les 1-motifs (voir [**HS05**], Proposition 2.9).

La finitude de $H^3(k, \mathrm{Ker}\ f_1)$ assure, via l'appendice de [**HS05**], que la suite

$$\mathbf{H}^0(k,C)^\wedge \to H^0(k,M)^\wedge \to H^3(k, \mathrm{Ker}\ f_1)$$

est exacte. De même, considérons le morphisme $P^2(k, \mathrm{Ker}\ f_1) \to \mathbf{P}^0(k,C)$ et notons Q son conoyau (muni de la topologie quotient). Alors la finitude de $P^3(k, \mathrm{Ker}\ f_1)$ assure que le morphisme $Q^\wedge \to P^0(k,M)^\wedge$ reste injectif, et donc on conclut (en utilisant l'appendice de [**HS05**]) que

$$P^2(k, \mathrm{Ker}\ f_1)^\wedge \to \mathbf{P}^0(k,C)^\wedge \to P^0(k,M)^\wedge$$

est exacte. Les groupes $\mathbf{H}^2(k,\widehat{M})$, $H^0(k,\widehat{\mathrm{Ker}\ f_1})$ et $\mathbf{H}^0(k,\widehat{C})$ étant discrets, on a une suite exacte

$$\mathbf{H}^2(k,\widehat{M})^D \to H^0(k,\widehat{\mathrm{Ker}\ f_1})^D \to \mathbf{H}^0(k,\widehat{C})^D .$$

Le morphisme $H^3(k, \mathrm{Ker}\ f_1) \to P^3(k, \mathrm{Ker}\ f_1)$ est un isomorphisme (voir [**Mil06**], théorème I.2.13). En outre, puisque M est une variété semi-abélienne, un dévissage au cas des tores et des variétés abéliennes, à l'aide du théorème 5.6 de [**HS05**], de la proposition 5.9 de [**HS05**] et du corollaire I.6.24 de [**Mil06**], assure que le morphisme $P^{-1}(k,M) \to \mathbf{H}^2(k,\widehat{M})^D$ est un isomorphisme.

Donc la proposition découle de l'exactitude des lignes du diagramme (6), et des suites de Poitou-Tate pour M (voir théorème 5.6 de [**HS05**]) et $\mathrm{Ker}\ f_1$ (deuxième colonne du diagramme : on peut compléter la suite de Poitou-Tate usuelle car $H^0(k,\widehat{\mathrm{Ker}\ f_1})$ est fini). En ce qui concerne le conoyau du morphisme $\mathbf{P}^0(k,C)^\wedge \to \mathbf{H}^0(k,\widehat{C})^D$, il s'identifie par le lemme du serpent au conoyau de $P^0(k,M)^\wedge \to \mathbf{H}^1(k,\widehat{M})^D$, qui est égal à $Ш^1(\widehat{M})^D$ par Poitou-Tate. Enfin, le dual du triangle exact (5) fournit un isomorphisme canonique $Ш^1(\widehat{M}) \cong Ш^0(\widehat{C})$, ce qui conclut la preuve. □

Théorème 5.5. — *Soit C un complexe de longueur 3 sur k, avec $Ш^1(M_3{}^{\mathrm{ab}})$ fini.*

Alors on a une suite exacte de groupes abéliens :

$$\mathbf{H}^0(k,C)^\wedge \to \mathbf{P}^0(k,C)^\wedge \to \left(\mathbf{H}^0(k,\widehat{C})\right)^D \to Ш^0(\widehat{C})^D \to 0 .$$

Démonstration. — On se ramène au cas précédent (proposition 5.4), où le complexe C est exact en degré -1. Pour cela, on plonge le groupe de type multiplicatif $\mathrm{Coker}\ f_1$ dans un tore quasi-trivial P : on note $i : \mathrm{Coker}\ f_1 \to P$ un tel plongement. Notons C' le complexe de longueur 3 suivant :

$$C' := \left[M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2 \oplus i} M_3 \oplus P\right] .$$

Par construction, C' vérifie les hypothèses de la proposition précédente, à savoir que C' est exact en degré -1 (i.e. $\mathrm{Ker}(f_2 \oplus i) = \mathrm{Im}(f_1)$). Or on a un triangle exact naturel

$$P \to C' \to C \to P[1] ,$$

donc on dispose du diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
H^0(k,P)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(k,C')^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(k,C)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
P^0(k,P)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{P}^0(k,C')^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{P}^0(k,C)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
H^2(k,\widehat{P})^D \arrow[r] & \mathbf{H}^0(k,\widehat{C'})^D \arrow[r] & \mathbf{H}^0(k,\widehat{C})^D \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

Par la proposition 5.4, la deuxième colonne est exacte, et P étant quasi-trivial, par Poitou-Tate, la flèche $P^0(k,P)^\wedge \to H^2(k,\widehat{P})^D$ est surjective, donc une chasse au diagramme assure l'exactitude de la troisième colonne. En outre, la surjectivité de $P^0(k,P)^\wedge \to H^2(k,\widehat{P})^D$ assure que les conoyaux des morphismes $\mathbf{P}^0(k,C')^\wedge \to \mathbf{H}^0(k,\widehat{C'})^D$ et $\mathbf{P}^0(k,C)^\wedge \to \mathbf{H}^0(k,\widehat{C})^D$ sont canoniquement isomorphes ; or le premier est naturellement isomorphe (via la proposition 5.4) au groupe $Ш^0(\widehat{C'})^D$, et il ne reste donc qu'à identifier $Ш^0(\widehat{C})$ et $Ш^0(\widehat{C'})$. On utilise le triangle exact

$$\widehat{C} \to \widehat{C'} \to \widehat{P}[2] \to \widehat{C}[1] ,$$

qui assure que les lignes du diagramme suivant sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
H^1(k,\widehat{P})=0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(k,\widehat{C}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(k,\widehat{C'}) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(k,\widehat{P}) \arrow[d] \\
P^1(k,\widehat{P})=0 \arrow[r] & \mathbf{P}^0(k,\widehat{C}) \arrow[r] & \mathbf{P}^0(k,\widehat{C'}) \arrow[r] & \mathbf{P}^2(k,\widehat{P}).
\end{tikzcd}$$

Or P est quasi-trivial, donc $Ш^2(k,\widehat{P}) = 0$, donc le lemme du serpent assure que le morphisme naturel $Ш^0(\widehat{C}) \to Ш^0(\widehat{C'})$ est un isomorphisme, ce qui conclut la preuve du théorème. □

Désormais, on donne une version de ces résultats sur un ouvert $U = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{k,S})$ de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_k)$. Soit $\mathscr{C} = [\mathscr{M}_1 \xrightarrow{f_1} \mathscr{M}_2 \xrightarrow{f_2} \mathscr{M}_3]$ un complexe de longueur 3 sur U : les U-schémas en groupes $\mathscr{M}_i$ sont lisses commutatifs, $\mathscr{M}_1$ et $\mathscr{M}_2$ sont de type multiplicatif, $\mathrm{Ker}(f_1)$ est fini et $\mathscr{M}_3$ est un schéma semi-abélien. On suppose toujours $Ш^1({M_3}^{\mathrm{ab}})$ fini. On définit les groupes $\mathscr{P}^i_S(\mathscr{C})$:

(7) $$\mathscr{P}^i_S(\mathscr{C}) := \prod_{v\in S} \mathbf{H}^i(k_v, C) \times \prod_{v\notin S} \mathbf{H}^i(\mathscr{O}_v, \mathscr{C}),$$

et comme dans [**Har08**], section 2, on note pour $v \notin S$, $\mathbf{H}^i_r(k_v, C) := \mathbf{H}^i(k_v, C)/\mathbf{H}^i(\mathscr{O}_v, \mathscr{C})$.

On s'intéresse au diagramme commutatif suivant :

(8) $$\begin{tikzcd}
\mathbf{H}^0(U,\mathscr{C})^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{P}^0_S(\mathscr{C})^\wedge \arrow[r] \arrow[d, "i"] & \mathbf{H}^0(k,\widehat{C})^D \arrow[d, "="] \\
\mathbf{H}^0(k,C)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{P}^0(k,C)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(k,\widehat{C})^D \\
(\bigoplus_{v\notin S} \mathbf{H}^0_r(k_v,C))^\wedge \arrow[r, "="] & (\bigoplus_{v\notin S} \mathbf{H}^0_r(k_v,C))^\wedge & .
\end{tikzcd}$$

Montrons les propriétés suivantes, quand l'ouvert U est assez petit :
- i est injective.
- La première colonne est exacte.

Proposition 5.6. — *Pour U suffisamment petit, la suite suivante*

$$\mathbf{H}^0(U,\mathscr{C}) \to \mathbf{H}^0(k,C) \to \bigoplus_{v\notin S} \mathbf{H}^0_r(k_v,C)$$

est exacte.

Démonstration. — – On suppose que le complexe $\mathscr{C}$ est exact en degré -1. Le triangle exact

$$\mathrm{Ker}\ f_1[2] \to \mathscr{C} \to \mathscr{M} \to \mathrm{Ker}\ f_1[3],$$

où $\mathscr{M}$ est un U-schéma semi-abélien, induit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^2(U,\mathrm{Ker} f_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(U,\mathscr{C}) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(U,\mathscr{M}) \arrow[r] \arrow[d] & H^3(U,\mathrm{Ker} f_1) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^2(k,\mathrm{Ker} f_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(k,C) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(k,M) \arrow[r] \arrow[d] & H^3(k,\mathrm{Ker} f_1) \\
& \bigoplus_{v\notin S} H^2_r(k_v,\mathrm{Ker} f_1) \arrow[r] & \bigoplus_{v\notin S} \mathbf{H}^0_r(k_v,C) \arrow[r] & \bigoplus_{v\notin S} H^0_r(k_v,M) & .
\end{tikzcd}$$

Les deux premières lignes sont exactes, le morphisme $H^3(U,\mathrm{Ker} f_1) \to H^3(k,\mathrm{Ker} f_1)$ est injectif ($\mathrm{Ker} f_1$ est fini, donc la proposition II.2.9 et le théorème I.4.10.(c) de [**Mil06**] identifient canoniquement ces deux groupes à $\bigoplus_{v \text{ réelle}} H^3(k_v,\mathrm{Ker} f_1)$) ; en outre, le morphisme $\bigoplus_{v\notin S} H^2_r(k_v,\mathrm{Ker} f_1) \to \bigoplus_{v\notin S} \mathbf{H}^0_r(k_v,C)$ est injectif (par une chasse au diagramme facile utilisant l'injectivité de $H^0(\mathscr{O}_v,\mathscr{M}) \to H^0(k_v,M)$ et de $H^2(k_v,\mathrm{Ker} f_1) \to \mathbf{H}^0(k_v,C)$ pour $v \notin S$). Alors l'exactitude de la deuxième colonne est une conséquence immédiate de ces propriétés et du fait que la troisième colonne est exacte ; ce dernier fait est démontré à la fin de la preuve de la proposition 1 de [**Har08**]. D'où la proposition dans ce cas particulier.

– Montrons désormais le cas général. Pour cela, comme dans la preuve du théorème 5.5, on sait qu'il existe un triangle exact $\mathscr{P} \to \mathscr{C}' \to \mathscr{C} \to \mathscr{P}[1]$, où $\mathscr{P}$ est un U-tore quasi-trivial et $\mathscr{C}'$ vérifie les hypothèses du premier point (voir par exemple [**CTS87**], Proposition 1.3 pour l'existence de $\mathscr{P}$). On a alors le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} H^0(U,\mathscr{P}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(U,\mathscr{C}') \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(U,\mathscr{C}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ H^0(k,P) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(k,C') \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(k,C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ \bigoplus_{v\notin S} H^0_r(k_v,P) \arrow[r] & \bigoplus_{v\notin S} \mathbf{H}^0_r(k_v,C') \arrow[r] & \bigoplus_{v\notin S} \mathbf{H}^0_r(k_v,C) & \end{tikzcd}$$

dont les trois lignes sont exactes (la troisième par une chasse au diagramme facile). Alors le cas précédent assure l'exactitude de la deuxième colonne, et pour U assez petit la flèche $H^0(k,P) \to \bigoplus_{v\notin S} H^0_r(k_v,P)$ est surjective (le nombre de classes de P est fini), donc une chasse au diagramme assure la proposition dans le cas général.

□

Proposition 5.7. — *Pour U suffisamment petit, la suite suivante est exacte :*

$$\mathbf{H}^0(U,\mathscr{C})^\wedge \to \mathbf{H}^0(k,C)^\wedge \to (\bigoplus_{v\notin S} \mathbf{H}^0_r(k_v,C))^\wedge .$$

Démonstration. — Il s'agit essentiellement de compléter la suite exacte de la proposition précédente. Pour cela, il suffit de montrer que le morphisme $\mathbf{H}^0(k,C) \to \bigoplus_{v\notin S} \mathbf{H}^0_r(k_v,C)$ a un conoyau fini.

– On suppose d'abord que le complexe $\mathscr{C}$ est exact en degré -1. On a un triangle exact

$$\mathrm{Ker}\ f_1[2] \to \mathscr{C} \to \mathscr{M} \to \mathrm{Ker}\ f_1[3]\,,$$

d'où un diagramme commutatif à lignes exactes (l'exactitude de la seconde ligne résulte d'une chasse au diagramme utilisant la trivialité des groupes $H^3(k_v,\mathrm{Ker}\ f_1)$ et $H^3(\mathscr{O}_v,\mathrm{Ker}\ f_1)$) :

$$\begin{tikzcd} H^2(k,\mathrm{Ker}\ f_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(k,C) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(k,M) \arrow[r] \arrow[d] & H^3(k,\mathrm{Ker}\ f_1) \\ \bigoplus_{v\notin S} H^2_r(k_v,\mathrm{Ker}\ f_1) \arrow[r] & \bigoplus_{v\notin S} \mathbf{H}^0_r(k_v,C) \arrow[r] & \bigoplus_{v\notin S} H^0_r(k_v,M) & . \end{tikzcd}$$

Alors la finitude de $H^3(k,\mathrm{Ker}\ f_1)$, la finitude des conoyaux des première et troisième flèches verticales (via Poitou-Tate pour les groupes finis pour la première, et via le lemme 3 de [**Har08**] pour la troisième) et le lemme du serpent assurent la finitude du conoyau de la deuxième flèche verticale, et donc la proposition dans ce cas.

– Cas général : on sait qu'il existe un triangle exact $\mathscr{P} \to \mathscr{C}' \to \mathscr{C} \to \mathscr{P}[1]$ où $\mathscr{P}$ est un U-tore quasi-trivial et $\mathscr{C}'$ vérifie les hypothèses du premier point. On considère alors le diagramme commutatif suivant à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd} H^0(k,P) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(k,C') \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(k,C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ \bigoplus_{v\notin S} H^0_r(k_v,P) \arrow[r] & \bigoplus_{v\notin S} \mathbf{H}^0_r(k_v,C') \arrow[r] & \bigoplus_{v\notin S} \mathbf{H}^0_r(k_v,C) \arrow[r] & 0\,. \end{tikzcd}$$

Par le cas précédent, la deuxième flèche verticale a un conoyau fini, donc par le lemme du serpent, la troisième également, ce qui conclut la preuve.

□

Proposition 5.8. — *Pour S assez grand, le morphisme $i : \mathscr{P}^0_S(\mathscr{C})^\wedge \to \mathbf{P}^0(k,C)^\wedge$ est injectif.*

Démonstration. — Considérons le triangle exact suivant

$$\mathscr{C} \xrightarrow{n} \mathscr{C} \to \mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n \to \mathscr{C}[1]\,.$$

Suivant la preuve du lemme 5.3 de [**HS05**], pour montrer que $\mathscr{P}^0_S(\mathscr{C})_\wedge \to \mathbf{P}^0(k,C)_\wedge$ est injectif, il suffit de montrer que pour toute place v hors de S et pour tout entier n non nul, le morphisme

$$\mathbf{H}^0_{\mathrm{fppf}}(\mathscr{O}_v,\mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \mathbf{H}^0_{\mathrm{fppf}}(k_v, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$$

est injectif (voir la preuve de la proposition 2.5 de [**Dem11a**] et du lemme 5.21 de [**Dem11b**]), puis d'utiliser le fait que $\mathscr{C}$ est lisse sur U pour identifier $\mathbf{H}^0_{\text{fppf}}(\mathscr{O}_v, \mathscr{C})$ et $\mathbf{H}^0_{\text{ét}}(\mathscr{O}_v, \mathscr{C})$.

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. Puisque $\mathscr{M}_3$ est un U-schéma semi-abélien, le morphisme $f_2 - n : \mathscr{M}_2 \oplus \mathscr{M}_3 \to \mathscr{M}_3$ est surjectif. Par conséquent, on dispose du triangle exact suivant :

$$ {}_n\text{Ker } f_1[3] \to \mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n \to [\text{Coker}(n \oplus f_1) \to \text{Ker}(f_2 - n)] \to {}_n\text{Ker } f_1[4] \,. $$

On en déduit donc le diagramme commutatif à lignes exactes suivant, pour toute place $v \notin S$:

$$\begin{tikzcd}
H^3_{\text{fppf}}(\mathscr{O}_v, {}_n\text{Ker } f_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0_{\text{fppf}}(\mathscr{O}_v, \mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0_{\text{fppf}}(\mathscr{O}_v, [\text{Coker}(n \oplus f_1) \to \text{Ker}(f_2 - n)]) \arrow[d] \\
H^3_{\text{fppf}}(k_v, {}_n\text{Ker } f_1) \arrow[r] & \mathbf{H}^0_{\text{fppf}}(k_v, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \arrow[r] & \mathbf{H}^0_{\text{fppf}}(k_v, [\text{Coker}(n \oplus f_1) \to \text{Ker}(f_2 - n)]) \,.
\end{tikzcd}$$

Or par le lemme III.1.1 de [**Mil06**], le groupe $H^3_{\text{fppf}}(\mathscr{O}_v, {}_n\text{Ker } f_1)$ est trivial. Donc l'injectivité de la deuxième flèche verticale est une conséquence de celle de la troisième. Pour montrer celle-ci, on utilise le triangle exact suivant :

$$ K_n[1] \to [\text{Coker}(n \oplus f_1) \to \text{Ker}(f_2 - n)] \to T_{\mathbf{Z}/n}([\mathscr{M}_2 \xrightarrow{f_2} \mathscr{M}_3]) \to K_n[2] $$

où K_n est un U-schéma en groupes de type multiplicatif fini, quotient de ${}_n\text{Ker } f_2$ et, par définition, $T_{\mathbf{Z}/n}(A) := H^0(A[-1] \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n)$ pour tout complexe A de faisceaux fppf (voir [**Dem11b**], définition 2.2). On considère alors le diagramme commutatif à lignes exactes :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1_{\text{fppf}}(\mathscr{O}_v, K_n) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0_{\text{fppf}}(\mathscr{O}_v, [\text{Coker}(n \oplus f_1) \to \text{Ker}(f_2 - n)]) \arrow[r] \arrow[d] & H^0_{\text{fppf}}(\mathscr{O}_v, T_{\mathbf{Z}/n}([\mathscr{M}_2 \xrightarrow{f_2} \mathscr{M}_3])) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^1_{\text{fppf}}(k_v, K_n) \arrow[r] & \mathbf{H}^0_{\text{fppf}}(k_v, [\text{Coker}(n \oplus f_1) \to \text{Ker}(f_2 - n)]) \arrow[r] & H^0_{\text{fppf}}(k_v, T_{\mathbf{Z}/n}([M_2 \xrightarrow{f_2} M_3])) \,.
\end{tikzcd}$$

La troisième flèche verticale est injective, et la première aussi puisque $H^1_v(\mathscr{O}_v, K_n) = 0$ (le groupe K_n est fini plat sur $\mathscr{O}_v$: voir lemme III.1.1 de [**Mil06**]). Donc on en déduit que le morphisme

$$ \mathbf{H}^0_{\text{fppf}}(\mathscr{O}_v, [\text{Coker}(n \oplus f_1) \to \text{Ker}(f_2 - n)]) \to \mathbf{H}^0_{\text{fppf}}(k_v, [\text{Coker}(n \oplus f_1) \to \text{Ker}(f_2 - n)]) $$

est injectif, ce qui implique l'injectivité du morphisme

$$ \mathbf{H}^0_{\text{fppf}}(\mathscr{O}_v, \mathscr{C} \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \to \mathbf{H}^0_{\text{fppf}}(k_v, C \otimes^{\mathbf{L}} \mathbf{Z}/n) \,. $$

On en déduit alors que l'on a une injection $\mathscr{P}^0_S(\mathscr{C})_\wedge \to \mathbf{P}^0(k, C)_\wedge$. Or on vérifie facilement que $\mathscr{P}^0_S(\mathscr{C})_\wedge \cong \mathscr{P}^0_S(\mathscr{C})^\wedge$ et que le morphisme $\mathbf{P}^0(k, C)_\wedge \to \mathbf{P}^0(k, C)^\wedge$ est injectif (voir preuve de la proposition 5.4 de [**HS05**]), donc cela conclut la preuve. □

Théorème 5.9. — *Soit $\mathscr{C}$ un complexe de longueur 3 sur U, avec $Ш^1(M_3{}^{\text{ab}})$ fini. Alors, quitte à réduire U, on a une suite exacte de groupes abéliens :*

$$ \mathbf{H}^0(U, \mathscr{C})^\wedge \to \mathscr{P}^0_S(\mathscr{C})^\wedge \to \mathbf{H}^0(k, \widehat{C})^D \,. $$

Démonstration. — Il s'agit juste d'une chasse au diagramme dans le diagramme (8) considéré plus haut : l'exactitude de la deuxième ligne (théorème 5.5), de la première colonne (proposition 5.7) et l'injectivité de i (proposition 5.8) assurent l'exactitude de la première ligne, d'où le théorème. □

Terminons cette section par un résultat d'approximation faible aux places infinies :

Théorème 5.10. — *Soit C un complexe de longueur 3 sur k, tel que M_3 est linéaire (donc un k-tore). Alors le morphisme*

$$ \mathbf{H}^0(k, C) \to \prod_{v \in S_\infty} \mathbf{H}^0(k_v, C) $$

est surjectif.

Démonstration. — – On suppose d'abord que C est exact en degré -1. On a un triangle exact

$$ \text{Ker } f_1[2] \to C \to M \to \text{Ker } f_1[3] $$

où M est un quotient de M_3, donc un k-tore. D'où le diagramme commutatif exact suivant :

$$\begin{tikzcd} H^2(k, \mathrm{Ker}\ f_1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(k, C) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(k, M) \arrow[r] \arrow[d] & H^3(k, \mathrm{Ker}\ f_1) \arrow[d, "\cong"] \\ P^2_\infty(k, \mathrm{Ker}\ f_1) \arrow[r] & \mathbf{P}^0_\infty(k, C) \arrow[r] & P^0_\infty(k, M) \arrow[r] & P^3_\infty(k, \mathrm{Ker}\ f_1) . \end{tikzcd}$$

Or dans ce diagramme aux lignes exactes, la première et la troisième colonnes sont surjectives (pour la première, c'est une conséquence de la suite de Poitou-Tate pour Ker f_1 : voir [**NSW08**], proposition 9.2.1. Pour la troisième, c'est une conséquence de l'approximation faible aux places infinies pour un tore : voir [**San81**], corollaire 3.5.(iii)), et la dernière est un isomorphisme, donc une chasse au diagramme assure la surjectivité de la deuxième flèche verticale.

– Cas général : il existe un triangle exact $P \to C' \to C \to P[1]$ où P est un tore quasi-trivial et où C' vérifie les hypothèses du point précédent. Le résultat est alors évident par le cas précédent et la surjectivité de $\mathbf{P}^0_\infty(k, C') \to \mathbf{P}^0_\infty(k, C)$.

□

6. Le défaut d'approximation forte dans les espaces homogènes

L'objectif ici est de combiner les résultats des sections précédentes pour calculer le défaut d'approximation forte pour un espace homogène. On pourra consulter [**BD11**] pour un calcul indépendant de ce défaut en termes d'obstruction de Brauer-Manin.

Rappelons quelques notations usuelles : si G est un groupe connexe sur un corps de nombres k, pour un ensemble fini de places S, on note G_S le groupe $\prod_{v \in S} G(k_v)$ et $\rho : G^{\mathrm{scu}} \to G$ le morphisme naturel. Si X est une variété algébrique sur k, on note $P^0(k, X)$ l'ensemble des points adéliques modifiés de X, à savoir le produit

$$P^0(k, X) := \prod_{v \in \Omega_\infty} \pi_0(X(k_v)) \times \prod_{v \in \Omega_f}{}' X(k_v)$$

où $\pi_0(X(k_v))$ désigne l'ensemble des composantes connexes de $X(k_v)$, Ω_∞ (resp. Ω_f) l'ensemble des places infinies (resp. finies) de k, et $\prod'_{v \in \Omega_f} X(k_v)$ désigne le produit restreint des $X(k_v)$ par rapport aux $\mathscr{X}(\mathscr{O}_v)$ (pour un modèle $\mathscr{X}$ de X sur un ouvert de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_k)$). On a donc une surjection naturelle $X(\mathbf{A}_k) \to P^0(k, X)$.

Rappelons enfin que pour un morphisme $f : H \to G$ de k-groupes algébriques, on dispose de l'espace topologique adélique $\mathbf{P}^0(k, [H \to G])$ muni de sa topologie de produit restreint (voir section 5.1 pour la définition de la topologie sur un corps local).

6.1. Espaces homogènes à stabilisateurs connexes. —

Théorème 6.1. — *Soit k un corps de nombres, G un k-groupe connexe, H un k-groupe linéaire connexe, S_0 un ensemble fini de places de k. Soit $f : H \to G$ un morphisme de k-groupes. On suppose que le groupe G^{sc} vérifie l'approximation forte hors de S_0 et que $Ш^1(G^{\mathrm{ab}})$ est fini.*

Alors il existe une application naturelle (surjective si G est linéaire) $\mathbf{P}^0(k, [H \to G]) \xrightarrow{\theta} \left(\mathbf{H}^0(k, \widehat{C}_f)/\ Ш^0(\widehat{C}_f)\right)^D$, dont le noyau est exactement l'adhérence forte $\overline{\rho(G^{\mathrm{scu}}_{S_0}).\mathbf{H}^0(k, [H \to G])}$ de $\rho(G^{\mathrm{scu}}_{S_0}).\mathbf{H}^0(k, [H \to G])$ dans $\mathbf{P}^0(k, [H \to G])$.

Remarque 6.2. — Le cas particulier $H = 1$ fournit une généralisation du corollaire 3.20 de [**Dem11a**] au cas des groupes non linéaires. Le cas particulier $G = 1$ n'est autre que la suite exacte de Kottwitz-Borovoi (voir [**Bor98**], théorème 5.16 et [**Dem11a**], théorème 5.1, deuxième ligne de la première suite exacte).

Corollaire 6.3. — *Soit k un corps de nombres, G un k-groupe connexe, S_0 un ensemble fini de places de k. Soit H un sous-k-groupe linéaire connexe de G, et soit $X := G/H$. On suppose que le groupe G^{sc} vérifie l'approximation forte hors de S_0 et que $Ш^1(G^{\mathrm{ab}})$ est fini. On note $C_X := C_f$, où $f : H \to G$ est l'inclusion naturelle.*

Alors il existe une application naturelle (surjective si G est linéaire) $P^0(k, X) \xrightarrow{\theta} \left(\mathbf{H}^0(k, \widehat{C}_X)/\ Ш^0(\widehat{C}_X)\right)^D$, dont le noyau est exactement l'adhérence forte $\overline{\rho(G^{\mathrm{scu}}_{S_0}).X(k)}$ de $\rho(G^{\mathrm{scu}}_{S_0}).X(k)$ dans $P^0(k, X)$.

Démonstration du corollaire 6.3. — Il suffit d'appliquer le théorème 6.1 à l'inclusion $f : H \to G$ de H dans G, et d'identifier $\mathbf{H}^0(k, [H \to G])$ avec $X(k)$. □

Remarque 6.4. — 1. L'hypothèse de linéarité de H dans le corollaire n'est pas une restriction importante : en effet, tout espace homogène d'un groupe connexe G à stabilisateur connexe peut être muni d'une structure d'espace homogène d'un groupe connexe G' à stabilisateur *linéaire* connexe.

2. On peut formuler ce corollaire sous la forme d'une suite exacte naturelle d'ensembles pointés

$$1 \to \overline{\rho(G^{\mathrm{scu}}_{S_0}).X(k)} \to P^0(k,X) \xrightarrow{\theta} \left(\mathbf{H}^0(k,\widehat{C}_X)/\ Ш^0(\widehat{C}_X)\right)^D \to 1\,.$$

3. Pour toute place archimédienne v de k, le groupe $G^{\mathrm{scu}}(k_v)$ est connexe, donc par définition de l'ensemble $P^0(k,X)$, on peut remplacer dans l'énoncé du corollaire l'adhérence de $\rho(G^{\mathrm{scu}}_{S_0}).X(k)$ par l'adhérence de $\rho(G^{\mathrm{scu}}_{S_0^f}).X(k)$, où S_0^f est l'ensemble des places finies contenues dans S_0. Par exemple, si $S_0 \subset \Omega_\infty$, alors le corollaire 6.3 décrit l'adhérence de $X(k)$ dans $P^0(k,X)$.

4. Au vu du résultat principal de [**Dem11c**], le groupe $\mathbf{H}^0(k,\widehat{C}_X)/\ Ш^0(\widehat{C}_X)$ s'identifie au sous-groupe $\mathrm{Br}_a(X,G)$ du groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)$ introduit dans [**BD11**]. On peut donc voir le corollaire 6.3 comme une version cohomologique explicite du résultat principal de [**BD11**].

Démonstration du théorème 6.1. — Soit $U = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{k,S})$ un ouvert de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_k)$ de bonne réduction pour H, G et f, avec S contenant S_0 et les places archimédiennes de k. On suppose U suffisamment petit pour pouvoir appliquer les résultats des sections 4.1 et 5. On note $\mathscr{H}$, $\mathscr{G}$ et f des modèles respectifs de H, G et f sur U. On note C_H, C_G, C_f les complexes de k-groupes introduits à la section 4, et $\mathscr{C}_H$, $\mathscr{C}_G$ et $\mathscr{C}_f$ leurs analogues sur U.

On considère alors le diagramme commutatif suivant (les flèches obliques sont les flèches d'abélianisation pour H, G et f, les flèches étiquetées θ sont définies via la dualité locale ou l'obstruction de Brauer-Manin), construit notamment à partir du théorème 2.15 :

(9)
$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \mathbf{H}^0(U,\mathscr{C}_H)^\wedge \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathscr{P}^0_S(\mathscr{C}_H)^\wedge \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd] & & \mathbf{H}^1(k,\widehat{C}_H)^D \arrow[dd] \\
H^0(U,\mathscr{H}) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathscr{P}^0_S(\mathscr{H}) \arrow[ur] \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd] & & \mathrm{Br}_a(H)^D \arrow[ur, "\cong"] \arrow[dd] & \\
& \mathbf{H}^0(U,\mathscr{C}_G)^\wedge \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathscr{P}^0_S(\mathscr{C}_G)^\wedge \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd] & & \mathbf{H}^1(k,\widehat{C}_G)^D \arrow[dd] \\
H^0(U,\mathscr{G}) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathscr{P}^0_S(\mathscr{G}) \arrow[ur] \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd] & & \mathrm{Br}_a(G)^D \arrow[ur, "\cong"] & \\
& \mathbf{H}^0(U,\mathscr{C}_f)^\wedge \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathscr{P}^0_S(\mathscr{C}_f)^\wedge \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd, "\partial'"] & & \mathbf{H}^0(k,\widehat{C}_f)^D \\
\mathbf{H}^0(U,[\mathscr{H}\to\mathscr{G}]) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathscr{P}^0_S([\mathscr{H}\to\mathscr{G}]) \arrow[ur] \arrow[dd, "\partial"] & & & \\
& \mathbf{H}^1(U,\mathscr{C}_H) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathscr{P}^1_S(\mathscr{C}_H) \arrow[dd] & & \\
H^1(U,\mathscr{H}) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "f_*"] & & \mathscr{P}^1_S(\mathscr{H}) \arrow[ur] \arrow[dd] & & & \\
& \mathbf{H}^1(U,\mathscr{C}_G) \arrow[rr] & & \mathscr{P}^1_S(\mathscr{C}_G) & & \\
H^1(U,\mathscr{G}) \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathscr{P}^1_S(\mathscr{G}) \arrow[ur] & & & .
\end{tikzcd}$$

On rappelle que les groupes $\mathscr{P}^i_S(\mathscr{C}_H)$, $\mathscr{P}^i_S(\mathscr{C}_G)$ et $\mathscr{P}^i_S(\mathscr{C}_f)$ ont été définis en (7).

6.1.0.1. Première étape :— Montrons l'exactitude de deux suites extraites du diagramme (9) :

Lemme 6.5. — *Les suites suivantes*

$$\mathbf{H}^0(U, \mathscr{C}_G)^\wedge \to \mathbf{H}^0(U, \mathscr{C}_f)^\wedge \to \mathbf{H}^1(U, \mathscr{C}_H)$$
$$\mathscr{P}^0_S(\mathscr{C}_H)^\wedge \to \mathscr{P}^0_S(\mathscr{C}_G)^\wedge \to \mathscr{P}^0_S(\mathscr{C}_f)^\wedge$$

sont exactes.

Démonstration. — On montre d'abord la finitude de $\mathbf{H}^1(U, \mathscr{C}_H)$. Il suffit de considérer le triangle exact suivant

$$\mathrm{Ker}(\rho_{\mathscr{H}})[1] \to \mathscr{C}_H \to \mathscr{H}^{\mathrm{tor}} \to \mathrm{Ker}(\rho_{\mathscr{H}})[2]$$

et d'utiliser les finitudes de $H^1(U, \mathscr{H}^{\mathrm{tor}})$ (voir [**Mil06**], théorème II.4.6.a)) et de $H^2(U, \mathrm{Ker}(\rho_{\mathscr{H}}))$ (voir [**Mil06**], corollaire II.3.3). Par conséquent, on en déduit immédiatement l'exactitude de la première suite du lemme.

Montrons l'exactitude de la seconde suite du lemme. Puisque la complétion de groupes abéliens commute au produit, il suffit de montrer l'exactitude de la suite suivante :

$$\mathbf{H}^0(k_v, C_H)^\wedge \to \mathbf{H}^0(k_v, C_G)^\wedge \to \mathbf{H}^0(k_v, C_f)^\wedge$$

pour toute place v dans S. Si v est une place finie, la définition de la topologie sur $\mathbf{H}^0(k_v, C_f)$ à partir de la topologie quotient $\mathbf{H}^0(k_v, C_G)/\mathbf{H}^0(k_v, C_H)$ assure, grâce à la finitude de $\mathbf{H}^1(k_v, C_H)$ (H est linéaire), que la suite précédente est exacte. Si v est une place infinie, tous les groupes apparaissant sont des groupes finis, donc la suite reste exacte (et inchangée) après complétion, ce qui termine la preuve. □

6.1.0.2. Deuxième étape :— La preuve du théorème 6.1 consiste essentiellement en une chasse au diagramme dans le diagramme (9). On commence par montrer deux résultats préliminaires :

Lemme 6.6. — *Soit $\mathscr{C} = [\mathscr{T} \to \mathscr{S}]$ un complexe de longueur 2 sur un ouvert U de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_k)$, où $\mathscr{T}$ est un U-tore et $\mathscr{S}$ un U-schéma semi-abélien.*

Si U est suffisamment petit, alors le morphisme $\mathbf{H}^1(U, \mathscr{C}) \to \mathbf{H}^1(k, C)$ est injectif.

Démonstration. — Montrons d'abord que le groupe $\mathrm{Ker}(\mathbf{H}^1(U, \mathscr{C}) \to \mathbf{H}^1(k, C))$ est annulé par un entier N indépendant de U : par un argument de restriction-corestriction, on peut supposer que les tores $\mathscr{T}$ et $\mathscr{S}^{\mathrm{lin}}$ sont déployés sur U. Or le morphisme $\mathrm{Br}(U) \to \mathrm{Br}(k)$ est injectif, donc par Hilbert 90, pour montrer que le noyau $\mathrm{Ker}(\mathbf{H}^1(U, \mathscr{C}) \to \mathbf{H}^1(k, C))$ est trivial, il suffit de montrer l'injectivité de $H^1(U, \mathscr{S}) \to H^1(k, S)$. On voit alors $\mathscr{S}$ comme une extension d'un schéma abélien $\mathscr{A}$ par le U-tore déployé $\mathscr{S}^{\mathrm{lin}}$. On dispose du diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
0 = H^1(U, \mathscr{S}^{\mathrm{lin}}) \arrow[r] & H^1(U, \mathscr{S}) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(U, \mathscr{A}) \arrow[d] \\
0 = H^1(k, S^{\mathrm{lin}}) \arrow[r] & H^1(k, S) \arrow[r] & H^1(k, A)\,,
\end{tikzcd}$$

où l'égalité $H^1(U, \mathscr{S}^{\mathrm{lin}}) = 0$ est valable si U est assez petit, car le groupe $\mathrm{Pic}(U)$ est trivial pour U assez petit. La preuve du lemme II.5.5 de [**Mil06**] assure que la dernière flèche verticale est injective, donc le morphisme $H^1(U, \mathscr{S}) \to H^1(k, S)$ est injectif. Cela assure donc qu'il existe un entier N tel que pour tout ouvert U assez petit, $\mathrm{Ker}(\mathbf{H}^1(U, \mathscr{C}) \to \mathbf{H}^1(k, C))$ est annulé par N. Soit alors U assez petit pour avoir la propriété précédente, et de sorte que N soit inversible sur U. Alors la proposition 5.3 de [**Dem11b**] assure que le morphisme $\mathbf{H}^1(U, \mathscr{C}) \to \mathbf{H}^1(k, C)$ est injectif. □

Proposition 6.7. — *Soit $\mathscr{H}$ un schéma en groupes affine lisse connexe sur un ouvert de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_k)$. Alors pour tout ouvert U de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_k)$ suffisamment petit, le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd}
H^1(U, \mathscr{H}) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ab}^1_{\mathscr{H}}"] & \mathscr{P}^1_S(\mathscr{H}) \arrow[d, "\mathrm{ab}^1_{\mathscr{H}}"] \\
H^1_{\mathrm{ab}}(U, \mathscr{H}) \arrow[r] & \mathscr{P}^1_S(\mathscr{C}_H)
\end{tikzcd}$$

est cartésien.

Démonstration. — Le théorème 5.11.(i) de [**Bor98**] assure que le diagramme suivant est cartésien :

$$\begin{tikzcd}
H^1(k, H) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{ab}^1_H"] & P^1(k, H) \arrow[d, "\mathrm{ab}^1_H"] \\
H^1_{\mathrm{ab}}(k, H) \arrow[r] & \mathbf{P}^1(k, C_H)\,.
\end{tikzcd}$$

La proposition est alors une conséquence immédiate du corollaire A.8 de [**GP08**] (voir également le classique lemme 4.1.3 de [**Har67**]), de l'injectivité de $\mathscr{P}^1_S(\mathscr{H}) \to P^1(k,H)$ et du lemme 6.6. $\square$

Poursuivons la deuxième étape de la preuve du théorème. Soit $(x_v) \in \mathbf{P}(k,[H \to G])$ d'image nulle dans $\mathbf{H}^0(k,\widehat{C}_f)^D$. L'objectif de cette étape et de la suivante est de montrer que (x_v) est dans l'adhérence de $\rho(G^{\mathrm{scu}}_{S_0}).\mathbf{H}^0(k,[H \to G])$ dans $\mathbf{P}^0(k,[H \to G])$.

Tout d'abord, quitte à réduire U, on peut supposer que $(x_v) \in \mathscr{P}^0_S([\mathscr{H} \to \mathscr{G}])$.

Grâce au théorème 5.9, l'élément $(x'_v) := \mathrm{ab}^0_f(x_v) \in \mathscr{P}^0_S(\mathscr{C}_f)^\wedge$ se relève en un élément $x' \in \mathbf{H}^0(U,\mathscr{C}_f)^\wedge$. On note h' l'image de x' dans $\mathbf{H}^1(U,\mathscr{C}_H)$. Par commutativité du diagramme (9), $(h_v) := \partial((x_v)) \in \mathscr{P}^1_S(\mathscr{H})$ et h' ont même image (h'_v) dans $\mathscr{P}^1_S(\mathscr{C}_H)$. La proposition 6.7 assure alors qu'il existe $h \in H^1(U,\mathscr{H})$ relevant $(h_v) \in \mathscr{P}^1_S(\mathscr{H})$ de sorte que $\mathrm{ab}^1_{\mathscr{H}}(h) = h'$. Montrons que l'image $g := f_*(h) \in H^1(U,\mathscr{G})$ de h est triviale, quitte à réduire encore U.

Pour cela, on considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{P}^0_S([\mathscr{H} \to \mathscr{G}]) \arrow[rr] \arrow[d] & & \mathscr{P}^1_S(\mathscr{H}) \arrow[d] & \\
 & \mathscr{P}^0_S(\mathscr{G}^{\mathrm{ab}}) \arrow[rr] & & \mathscr{P}^1_S(\mathscr{G}^{\mathrm{lin}}) & \\
H^0(U,\mathscr{G}^{\mathrm{ab}})^\wedge \arrow[ur] \arrow[dr, "="'] \arrow[rr] & & H^1(U,\mathscr{G}^{\mathrm{lin}}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & H^1(U,\mathscr{H}) \arrow[ll] \arrow[uul] \arrow[ddl] \\
 & H^0(U,\mathscr{G}^{\mathrm{ab}})^\wedge \arrow[rr] & & H^1_{\mathrm{ab}}(U,\mathscr{G}^{\mathrm{lin}}) & \\
 & H^0(U,[\mathscr{H} \to \mathscr{G}])^\wedge \arrow[rr] \arrow[u] & & H^1_{\mathrm{ab}}(U,\mathscr{H}) \arrow[u] &
\end{tikzcd}.$$

Notons que la classe g provient d'une classe $g' \in H^1(U,\mathscr{G}^{\mathrm{lin}})$.

Notons g_0 l'image de x' par le morphisme $H^0(U,[\mathscr{H} \to \mathscr{G}])^\wedge \to H^0(U,\mathscr{G}^{\mathrm{ab}})^\wedge$, et g'_0 l'image de g_0 dans $H^1(U,\mathscr{G}^{\mathrm{lin}})$. Alors par construction, $(g_{0,v}) \in \mathscr{P}^0_S(\mathscr{G}^{\mathrm{ab}})$ est l'image de (x_v) par $\mathscr{P}^0_S([\mathscr{H} \to \mathscr{G}]) \to \mathscr{P}^0_S(\mathscr{G}^{\mathrm{ab}})$. Alors, par commutativité du diagramme, les classes g'_0 et g' dans $H^1(U,\mathscr{G}^{\mathrm{lin}})$ ont même image dans $\mathscr{P}^1_S(\mathscr{G}^{\mathrm{lin}})$ et dans $H^1_{\mathrm{ab}}(U,\mathscr{G}^{\mathrm{lin}})$. Par conséquent, en utilisant le théorème 5.11 de [**Bor98**] , on en déduit que $g' = g'_0$ dans $H^1(k,G^{\mathrm{lin}})$. Donc cela assure finalement que $g' \in H^1(k,G^{\mathrm{lin}})$ provient d'un élément de $H^0(k,G^{\mathrm{ab}})^\wedge$, donc aussi d'un élément de $H^0(k,G^{\mathrm{ab}})$. Donc l'image de g dans $H^1(k,G)$ est triviale. Donc quitte à réduire U, on peut supposer que g est trivial dans $H^1(U,\mathscr{G})$.

Alors, par exactitude de la première colonne du diagramme (9), h se relève en un point $\overline{x} \in \mathbf{H}^0(U,[\mathscr{H} \to \mathscr{G}])$. Alors les points (x_v) et $(\overline{x}_v)$ dans $\mathscr{P}^0_S([\mathscr{H} \to \mathscr{G}])$ ont même image (h_v) dans $\mathscr{P}^1_S(\mathscr{H})$, donc par exactitude de la troisième colonne du diagramme, il existe un point $(\overline{g}_v) \in \mathscr{P}^0_S(\mathscr{G})$ tel que $(x_v) = (\overline{g}_v).(\overline{x}_v)$ dans $\mathscr{P}^0_S([\mathscr{H} \to \mathscr{G}])$.

6.1.0.3. Troisième étape :— On a construit à l'étape précédente un point $(\overline{g}_v) \in \mathscr{P}^0_S(\mathscr{G})$ tel que $(x_v) = (\overline{g}_v).(\overline{x}_v)$. Dans cette étape, on approxime le point $(\overline{g}_v)$ ainsi obtenu par un point rationnel de G, grâce aux résultats sur le défaut d'approximation forte dans les groupes connexes.

On considère le morphisme tordu par (un représentant de) $\overline{x}$, noté ${}_{\overline{x}}f : {}_{\overline{x}}\mathscr{H} \to \mathscr{G}$. On peut construire l'analogue du diagramme (9) pour ${}_{\overline{x}}f$, avec l'application $\mathrm{ab}^0_{\overline{x}f}$ décrite dans la proposition 2.16. On utilise cette proposition dans la suite, sans nécessairement la mentionner.

On note $(\overline{g}'_v) := (\mathrm{ab}^0_{\mathscr{G}}(\overline{g}_v)) \in \mathscr{P}^0(\mathscr{C}_G)$. Par commutativité du diagramme, les points x' et $\overline{x}' := \mathrm{ab}^0_{\overline{x}f}(\overline{x})$ dans $\mathbf{H}^0(U,\mathscr{C}_f;\overline{x})$ ont même image $\widetilde{h}'$ dans $\mathbf{H}^1(U,\mathscr{C}_{\overline{x}H})$, donc par exactitude, ces deux points diffèrent d'un élément $\widetilde{g}' \in \mathbf{H}^0(U,\mathscr{C}_G)^\wedge$. Par commutativité de l'analogue du diagramme (9), avec ${}_{\overline{x}}\mathscr{H}$ à la place de $\mathscr{H}$, les éléments $(\overline{g}'_v)$ et $(\widetilde{g}'_v)$ (qui sont dans $\mathscr{P}^0_S(\mathscr{C}_G)^\wedge$) ont même image dans $\mathscr{P}^0_S(\mathscr{C}_f;\overline{x})$ (à savoir (x'_v)). Par conséquent, il existe $(\overline{h}'_v) \in \mathscr{P}^0_S(\mathscr{C}_{\overline{x}H})^\wedge$ tel que $(\overline{h}'_v)$ s'envoie dans $\mathscr{P}^0_S(\mathscr{C}_G)^\wedge$ sur la différence $(\widetilde{g}'_v) - (\overline{g}'_v)$.

Or la preuve du théorème 3.19 et le lemme 2.7 de [**Dem11a**] assurent que $P^0(k,{}_{\overline{x}}H)$ et $\mathbf{P}^0(k,C_{\overline{x}H})^\wedge$ ont même image par θ dans $\mathbf{H}^1(k,\widehat{C}_{\overline{x}H})^D$. Donc il existe $(\overline{h}_v) \in P^0(k,{}_{\overline{x}}H)$ tel que $\theta((\overline{h}_v)) = \theta((\overline{h}'_v))$ dans $\mathbf{H}^1(k,\widehat{C}_{\overline{x}H})^D$. Considérons alors le point $(\overline{p}_v) := (\overline{g}_v).(\overline{h}_v)^{-1} \in P^0(k,G)$. Par commutativité du cube supérieur droit de (9) et par construction des divers points, il est clair que $\theta((\overline{p}_v)) = 0$ dans $\mathrm{Br}_a(G)^D$. Donc grâce au résultat pour les groupes connexes (voir corollaire 3.20 de [**Dem11a**] dans le cas linéaire ; le cas général peut se démontrer de la même façon en remplaçant la proposition 2.5 de [**Dem11a**] par le théorème 5.9), on en déduit que l'élément $(\overline{p}_v) \in P^0(k,G)$ est dans l'adhérence de $\rho(G^{\mathrm{scu}}_{S_0}).G(k)$. Donc par commutativité du diagramme, le point $(x_v) = (\overline{p}_v).(\overline{x}_v) = \pi_{\overline{x}}((\overline{p}_v))$ est produit d'un élément de $\overline{\rho(G^{\mathrm{scu}}_{S_0}).G(k)}$ par un élément de $\mathbf{H}^0(U, [\mathscr{H} \to \mathscr{G}])$. En particulier, le point (x_v) est dans l'adhérence de $\rho(G^{\mathrm{scu}}_{S_0}).\mathbf{H}^0(k,[H \to G])$ dans $\mathscr{P}^0_S([\mathscr{H} \to \mathscr{G}])$.

D'où finalement une suite exacte, en passant à la limite inductive sur U :

$$\overline{\rho(G^{\mathrm{scu}}_{S_0}).\mathbf{H}^0(k,[H \to G])} \to \mathbf{P}^0(k,[H \to G]) \xrightarrow{\theta} \mathbf{H}^0(k, \widehat{C}_f)^D .$$

6.1.0.4. Quatrième étape :— on suppose G linéaire. L'objectif de cette étape de la preuve est de calculer le conoyau de l'application $\theta : \mathbf{P}^0(k,[H \to G]) \to \mathbf{H}^0(k,\widehat{C}_f)^D$. Pour cela, on montre que $\mathbf{P}^0(k,C_f)$ et $\mathbf{P}^0(k,[H \to G])$ ont même image par θ. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathbf{P}^0(k,C_G) \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd] & & \mathbf{H}^1(k,\widehat{C}_G)^D \arrow[dd] \\
 & & P^0(k,G) \arrow[ur] \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd] & & \mathrm{Br}_a(G)^D \arrow[ur, "\cong"] & \\
 & \mathbf{H}^0(k,C_f) \arrow[rr] & & \mathbf{P}^0(k,C_f) \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd, "\partial'"] & & \mathbf{H}^0(k,\widehat{C}_f)^D \arrow[dd] \\
\mathbf{H}^0(k,[H \to G]) \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathbf{P}^0(k,[H \to G]) \arrow[ur] \arrow[dd, "\partial"] & & & \\
 & & & \mathbf{P}^1(k,C_H) \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd] & & \mathbf{H}^0(k,\widehat{C}_H)^D \\
 & & P^1(k,H) \arrow[ur] \arrow[dd] & & & \\
 & & & \mathbf{P}^1(k,C_G) & & \\
 & & P^1(k,G) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Soit alors $\gamma \in \mathbf{H}^0(k,\widehat{C}_f)^D$ et $\alpha \in P^0(k,C_f)$ tel que $\theta(\alpha) = \gamma$. Par le théorème 5.10, on sait que le morphisme $\mathbf{H}^0(k,C_f) \to \mathbf{P}^0_\infty(k,C_f)$ est surjectif. Donc il existe $\alpha' \in \mathbf{H}^0(k,C_f)$ tel que $\alpha'_\infty = \alpha_\infty$. Notons alors $\alpha^0 := \alpha - \alpha' \in \mathbf{P}^0(k,C_f)$. On a toujours $\theta(\alpha^0) = \gamma$. On note β l'image de α^0 dans $P^1(k,C_H)$ et γ' celle de γ dans $\mathbf{H}^0(k,\widehat{C}_H)^D$. Par le théorème 5.11 de [**Bor98**], il existe $\tau \in P^1(k,H)$, trivial aux places infinies, tel que $\mathrm{ab}^0_H(\tau) = \beta$. Notons g l'image de τ dans $P^1(k,G)$.

Par construction, g_∞ est trivial, et g s'envoie sur 0 dans $P^1(k,C_G)$. Donc par le même théorème 5.11 de [**Bor98**], g est trivial. Par conséquent, τ se relève en un élément $x' \in \mathbf{P}^0(k,[H \to G])$. Par commutativité du diagramme, on voit que $(x'_v) \in \mathbf{P}^0(k,C_f)$ s'envoie sur β dans $\mathbf{P}^1(k,C_H)$, donc par exactitude de la troisième colonne, $\alpha^0 - (x'_v)$ se relève en un élément g' dans $\mathbf{P}^0(k,C_G)$. La preuve du théorème 3.19 de [**Dem11a**] assure que $\mathbf{P}^0(k,C_G)$ et $P^0(k,G)$ ont même image dans $\mathbf{H}^1(k,\widehat{C}_G)^D$ par le morphisme θ. Donc il existe $g^0 \in P^0(k,G)$ tel que $\theta(g^0) = \theta(g')$ dans $\mathbf{H}^1(k,\widehat{C}_G)^D$. Finalement, l'élément $g^0.x' \in \mathbf{P}^0(k,[H \to G])$ vérifie bien $\theta(g^0.x') = \gamma$. Cela assure donc que $\mathbf{P}^0(k,[H \to G])$ et $\mathbf{P}^0(k,C_f)$ ont même image dans $\mathbf{H}^0(k,\widehat{C}_f)^D$. Or pour des raisons topologiques, $\mathbf{P}^0(k,C_f)$ et $\mathbf{P}^0(k,C_f)^\wedge$ ont même image également par θ ; enfin, le conoyau de $\theta : \mathbf{P}^0(k,C_f)^\wedge \to \mathbf{H}^0(k,\widehat{C}_f)^D$ est $Ш^0(\widehat{C}_f)^D$ (voir théorème 5.5). Cela termine la preuve du théorème 6.1. □

6.2. Espaces homogènes à stabilisateurs abéliens. — Dans cette section, on s'intéresse au cas où le groupe H est abélien, non nécessairement connexe.

Théorème 6.8. — *Soit k un corps de nombres, G un k-groupe connexe tel que G^{ss} est simplement connexe, H un k-groupe linéaire commutatif, S_0 un ensemble fini de places de k. Soit $f : H \to G$ un morphisme de k-groupes. On suppose que le groupe G^{sc} vérifie l'approximation forte hors de S_0 et que $Ш^1(G^{\mathrm{ab}})$ est fini.*

Alors la dualité locale définit une application (surjective si G est linéaire) $\mathbf{P}^0(k,[H \to G]) \xrightarrow{\theta} \left(\mathbf{H}^1(k,\widehat{C}_f^{\mathrm{ab}})/ Ш^1(\widehat{C}_f^{\mathrm{ab}})\right)^D$ *dont le noyau est l'adhérence forte* $\overline{\rho(G_{S_0}^{\mathrm{scu}}).\mathbf{H}^0(k,[H \to G])}$ *de* $\rho(G_{S_0}^{\mathrm{scu}}).\mathbf{H}^0(k,[H \to G])$ *dans* $\mathbf{P}^0(k,[H \to G])$.

Remarque 6.9. — Le cas particulier $G = 1$ n'est autre que la suite exacte de Poitou-Tate en degré 1 pour les groupes linéaires commutatifs (voir la deuxième ligne de la première suite de [**Dem11b**], théorème 6.3).

Corollaire 6.10. — *Soit k un corps de nombres, G un k-groupe connexe tel que G^{ss} est simplement connexe, S_0 un ensemble fini de places de k. Soit H un sous-k-groupe linéaire commutatif de G, et soit $X := G/H$. On suppose que le groupe G^{sc} vérifie l'approximation forte hors de S_0 et que $Ш^1(G^{\mathrm{ab}})$ est fini. On note $C_X^{\mathrm{ab}} := C_f^{\mathrm{ab}}$, où $f : H \to G$ est l'inclusion naturelle.*

Alors la dualité locale définit une application (surjective si G est linéaire) $P^0(k,X) \xrightarrow{\theta} \left(\mathbf{H}^1(k,\widehat{C}_X^{\mathrm{ab}})/ Ш^1(\widehat{C}_X^{\mathrm{ab}})\right)^D$ *dont le noyau est l'adhérence forte* $\overline{\rho(G_{S_0}^{\mathrm{scu}}).X(k)}$ *de* $\rho(G_{S_0}^{\mathrm{scu}}).X(k)$ *dans* $P^0(k,X)$.

Démonstration du corollaire 6.10. — Il suffit d'appliquer le théorème 6.8 à l'inclusion $f : H \to G$ de H dans G, et d'identifier $\mathbf{H}^0(k,[H \to G])$ avec $X(k)$. $\square$

Remarque 6.11. — En utilisant l'isomorphisme $\mathrm{Br}_1(X)/\mathrm{Br}(k) \cong \mathbf{H}^1(k,\widehat{C}_X^{\mathrm{ab}})$ (voir [**BvH11**], théorème 7.2), ainsi que la comparaison entre l'accouplement de Brauer-Manin et l'accouplement $P^0(k,C_X^{\mathrm{ab}}) \times \mathbf{H}^1(k,\widehat{C}_X^{\mathrm{ab}}) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ induit par le cup-produit local (voir [**Dem09**], lemme 4.5.1, ou [**HS08**], fin de la section 6 pour le cas des tores), ce corollaire généralise le théorème 4.5 de [**CTX09**] et le théorème 4.3 de [**HS11**], où le groupe G est supposé semi-simple simplement connexe. En résumé, le corollaire 6.10 affirme que l'obstruction de Brauer-Manin algébrique à l'approximation forte sur X est la seule.

Démonstration du théorème 6.8. — Soit $U = \mathrm{Spec}(\mathscr{O}_{k,S})$ un ouvert de $\mathrm{Spec}(\mathscr{O}_k)$ de bonne réduction pour H, G et f, avec S contenant S_0 et les places archimédiennes de k. On suppose U suffisamment petit pour pouvoir appliquer les résultats des sections 5 et 4.2. On note $\mathscr{H}$, $\mathscr{G}$ et f des modèles respectifs de H, G et f sur U. Les hypothèses sur G assurent que C_G est quasi-isomorphe à G^{sab}.

On considère alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& H^0(U,\mathscr{H}^{\mathrm{m}})^\wedge \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathscr{P}^0_S(\mathscr{H}^{\mathrm{m}})^\wedge \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd] & & H^2(k,\widehat{H^{\mathrm{m}}})^D \arrow[dd] \\
H^0(U,\mathscr{H}) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathscr{P}^0_S(\mathscr{H}) \arrow[ur] \arrow[dd] & & & \\
& H^0(U,\mathscr{G}^{\mathrm{sab}})^\wedge \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathscr{P}^0_S(\mathscr{G}^{\mathrm{sab}})^\wedge \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd] & & \mathbf{H}^2(k,\widehat{G^{\mathrm{sab}}})^D \arrow[dd] \\
H^0(U,\mathscr{G}) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathscr{P}^0_S(\mathscr{G}) \arrow[ur] \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd] & & \mathrm{Br}_a(G)^D \arrow[ur, "\cong"] \arrow[dd] & \\
& \mathbf{H}^0(U,\mathscr{C}_f^{\mathrm{ab}})^\wedge \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathscr{P}^0_S(\mathscr{C}_f^{\mathrm{ab}})^\wedge \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd, "\partial'"] & & \mathbf{H}^1(k,\widehat{C}_f^{\mathrm{ab}})^D \\
\mathbf{H}^0(U,[\mathscr{H}\to\mathscr{G}]) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathscr{P}^0_S([\mathscr{H}\to\mathscr{G}]) \arrow[ur] \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd, "\partial"] & & \mathbf{H}^1(k,\widehat{C}_f^{\mathrm{ab}})^D \arrow[ur, "="] & \\
& H^1(U,\mathscr{H}^{\mathrm{m}}) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathscr{P}^1_S(\mathscr{H}^{\mathrm{m}}) \arrow[dd] & & \\
H^1(U,\mathscr{H}) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "f_*"] & & \mathscr{P}^1_S(\mathscr{H}) \arrow[ur] \arrow[dd] & & & \\
& H^1(U,\mathscr{G}^{\mathrm{sab}}) \arrow[rr] & & \mathscr{P}^1_S(\mathscr{G}^{\mathrm{sab}}) & & \\
H^1(U,\mathscr{G}) \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathscr{P}^1_S(\mathscr{G}) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

.

6.2.0.5. Première étape :— On se donne $(x_v) \in \mathbf{P}^0(k,[H\to G])$ d'image nulle dans $\mathbf{H}^1(k,\widehat{C}_f^{\mathrm{ab}})^D$. Quitte à réduire l'ouvert U, on peut supposer que $(x_v) \in \mathscr{P}^0_S([\mathscr{H}\to\mathscr{G}])$. Grâce au théorème 5.9, l'élément $(x'_v) := {\mathrm{ab}_f^0}'(x_v) \in \mathscr{P}^0_S(\mathscr{C}_f^{\mathrm{ab}})^\wedge$ se relève en un élément $x' \in \mathbf{H}^0(U,\mathscr{C}_f^{\mathrm{ab}})^\wedge$. Le groupe $H^1(U,\mathscr{H}^{\mathrm{m}})$ étant fini, on peut considérer l'image h' de x' dans $H^1(U,\mathscr{H}^{\mathrm{m}})$. Or les morphismes $H^1(U,\mathscr{H}) \to H^1(U,\mathscr{H}^{\mathrm{m}})$ et $\mathscr{P}^1_S(\mathscr{H}) \to \mathscr{P}^1_S(\mathscr{H}^{\mathrm{m}})$ sont des bijections grâce à la section 4.2. Donc on peut voir h' dans $H^1(U,\mathscr{H})$ et considérer alors $g := f_*(h') \in H^1(U,\mathscr{G})$.

Comme dans la preuve du théorème 6.1, on montre que quitte à réduire U, on peut supposer que g est trivial dans $H^1(U,\mathscr{G})$. Par exactitude de la première colonne du diagramme, h' se relève alors en un point $\overline{x} \in \mathbf{H}^0(U,[\mathscr{H}\to\mathscr{G}])$.

Les points (x_v) et $(\overline{x}_v)$ dans $\mathscr{P}^0_S([\mathscr{H}\to\mathscr{G}])$ ont alors même image (h_v) dans $\mathscr{P}^1_S({}_{\overline{x}}\mathscr{H})$, donc par exactitude de la troisième colonne du diagramme, il existe un point $(\overline{g}_v) \in \mathscr{P}^0_S(\mathscr{G})$ tel que $(x_v) = (g_v).(\overline{x}_v)$ dans $\mathscr{P}^0_S([\mathscr{H}\to\mathscr{G}])$.

6.2.0.6. Deuxième étape :— À partir de maintenant, on considère le morphisme ${}_{\overline{x}}f : {}_{\overline{x}}\mathscr{H} \to \mathscr{G}$ tordu par $\overline{x}$. Comme dans la preuve du théorème 6.1, on utilise dans la suite (parfois sans la citer) l'analogue évident de la proposition 2.16 dans le contexte du stabilisateur abélien.

On note $(\overline{g}'_v) := (\mathrm{ab}^0_G(\overline{g}_v)) \in \mathscr{P}^0_S(\mathscr{G}^{\mathrm{sab}})$. Par commutativité du diagramme, les points x' et $\overline{x}' := \mathrm{ab}^0_{f,\overline{x}}(\overline{x})$ dans $\mathbf{H}^0(U,\mathscr{C}^{\mathrm{ab}}_{\overline{x}f})$ ont même image $\widetilde{h}'$ dans $H^1(U,{}_{\overline{x}}\mathscr{H}^{\mathrm{m}})$, donc par exactitude, ces deux points diffèrent d'un élément $\widetilde{g}' \in H^0(U,\mathscr{G}^{\mathrm{sab}})^\wedge$.

Les éléments $(\overline{g}'_v)$ et $(\widetilde{g}'_v)$ (qui sont dans $\mathscr{P}^0_S(\mathscr{G}^{\mathrm{sab}})^\wedge$) ont même image dans $\mathscr{P}^0_S(\mathscr{C}^{\mathrm{ab}}_{\overline{x}f})$ (à savoir (x'_v)). Par conséquent, il existe $(\overline{h}'_v) \in \mathscr{P}^0_S({}_{\overline{x}}\mathscr{H}^{\mathrm{m}})^\wedge$ tel que $(\overline{h}'_v)$ s'envoie dans $\mathscr{P}^0_S(\mathscr{G}^{\mathrm{sab}})^\wedge$ sur la différence $(\widetilde{g}'_v) - (\overline{g}'_v)$.

Or le morphisme $\mathscr{P}^0_S({}_{\overline{x}}\mathscr{H}) \to \mathscr{P}^0_S({}_{\overline{x}}\mathscr{H}^{\mathrm{m}})$ est surjectif (car $H^1(\mathscr{O}_v,{}_{\overline{x}}\mathscr{H}^{\mathrm{u}})$ est trivial), et les groupes $P^0(k,{}_{\overline{x}}H^{\mathrm{m}})$ et $P^0(k,{}_{\overline{x}}H^{\mathrm{m}})^\wedge$ ont même image par θ dans $H^2(k,\widehat{{}_{\overline{x}}H^{\mathrm{m}}})^D$, donc on peut trouver un point $(\overline{h}_v)$ dans $P^0(k,{}_{\overline{x}}H^{\mathrm{m}})$ tel que $\theta((\overline{h}_v)) = \theta((\overline{h}'_v))$ dans $H^2(k,\widehat{{}_{\overline{x}}H^{\mathrm{m}}})^D$.

Considérons alors le point $(\overline{p}_v) := (\overline{g}_v).(\overline{h}_v)^{-1} \in P^0(k,G)$. Par commutativité du diagramme, il est clair que $\theta((\overline{p}_v)) = 0$ dans $\mathrm{Br}_a(G)^D$. Grâce au résultat pour les groupes connexes (corollaire 3.20 de [**Dem11a**] et généralisation au cas non linéaire en utilisant le théorème 5.9), on en déduit que l'élément $(\overline{p}_v) \in P^0(k,G)$ est dans l'adhérence de $\rho(G^{\mathrm{scu}}_{S_0}).G(k)$. Donc par commutativité du diagramme, le point $(x_v) = (\overline{p}_v).(\overline{x}_v)$ est produit d'un élément de $\overline{\rho(G^{\mathrm{scu}}_{S_0}).G(k)}$ par un élément de $\mathbf{H}^0(U,[\mathscr{H} \to \mathscr{G}])$. En particulier, le point (x_v) est dans l'adhérence de $\rho(G^{\mathrm{scu}}_{S_0}).\mathbf{H}^0(k,[H \to G])$ dans $\mathbf{P}^0(k,[H \to G])$. D'où la suite exacte suivante, en passant à la limite sur U :

$$\overline{\rho(G^{\mathrm{scu}}_{S_0}).\mathbf{H}^0(k,[H \to G])} \to \mathbf{P}^0(k,[H \to G]) \xrightarrow{\theta} \mathbf{H}^0(k,\widehat{C}^{\mathrm{ab}}_f)^D .$$

6.2.0.7. Troisième étape :— Montrons pour finir que si G est linéaire, $\mathbf{P}^0(k,C^{\mathrm{ab}}_f)$ et $\mathbf{P}^0(k,[H \to G])$ ont même image par θ. Pour cela, on regarde le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & P^0(k,G^{\mathrm{sab}}) \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd] & & \mathbf{H}^2(k,\widehat{G^{\mathrm{sab}}})^D \arrow[dd] \\
 & & P^0(k,G) \arrow[ur] \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd] & & \mathrm{Br}_a(G)^D \arrow[ur, "\cong"] \arrow[dd] & \\
 & \mathbf{H}^0(k,C^{\mathrm{ab}}_f) \arrow[rr] & & \mathbf{P}^0(k,C^{\mathrm{ab}}_f) \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd, "\partial'"] & & \mathbf{H}^1(k,\widehat{C}^{\mathrm{ab}}_f)^D \arrow[dd] \\
\mathbf{H}^0(k,[H \to G]) \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathbf{P}^0(k,[H \to G]) \arrow[ur] \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd, "\partial"] & & \mathbf{H}^1(k,\widehat{C}^{\mathrm{ab}}_f)^D \arrow[ur, "\cong"] & \\
 & & & P^1(k,H^{\mathrm{m}}) \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd] & & H^1(k,\widehat{H^{\mathrm{m}}})^D \\
 & & P^1(k,H) \arrow[ur] \arrow[dd] & & & \\
 & & & P^1(k,G^{\mathrm{sab}}) & & \\
 & & P^1(k,G) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Soit $\gamma \in \mathbf{H}^1(k,\widehat{C}^{\mathrm{ab}}_f)^D$ et $\alpha \in P^0(k,C^{\mathrm{ab}}_f)$ tel que $\theta(\alpha) = \gamma$. On sait que le morphisme $\mathbf{H}^0(k,C^{\mathrm{ab}}_f) \to \mathbf{P}^0_\infty(k,C^{\mathrm{ab}}_f)$ est surjectif (voir théorème 5.10). Donc il existe $\alpha' \in \mathbf{H}^0(k,C^{\mathrm{ab}}_f)$ tel que $\alpha'_\infty = \alpha_\infty$. Notons alors $\alpha^0 := \alpha - \alpha' \in \mathbf{P}^0(k,C^{\mathrm{ab}}_f)$. On a toujours $\theta(\alpha^0) = \gamma$. On note β l'image de α^0 dans $P^1(k,H^m)$ et γ' celle de γ dans $H^1(k,\widehat{H^{\mathrm{m}}})^D$.

Par trivialité de la cohomologie des groupes unipotents, il existe $\tau \in P^1(k,H)$, trivial aux places infinies, tel que ${\mathrm{ab}^0_H}'(\tau) = \beta$. Notons alors g l'image de τ dans $P^1(k,G)$. Par construction, g_∞ est trivial, et g s'envoie sur 0 dans $P^1(k,G^{\mathrm{sab}})$. Donc par le théorème 5.11 de [**Bor98**], g est trivial. Par conséquent, τ se relève en un élément $x' \in \mathbf{P}^0(k,[H \to G])$. L'élément $(x'_v) \in \mathbf{P}^0(k,C^{\mathrm{ab}}_f)$ s'envoie sur β dans $P^1(k,H^{\mathrm{m}})$, donc par exactitude de la troisième colonne, $\alpha^0 - (x'_v)$ se relève en un élément g' dans $P^0(k,G^{\mathrm{sab}})$. Or par le cas des groupes (voir la preuve du théorème 3.19 de [**Dem11a**] ; on rappelle que G est linéaire ici), on sait que $P^0(k,G^{\mathrm{sab}})$ et $P^0(k,G)$ ont même image dans $H^1(k,\widehat{G^{\mathrm{sab}}})^D$ par le morphisme θ. Donc il existe $g^0 \in P^0(k,G)$ tel que $\theta(g^0) = \theta(g')$ dans $H^1(k,\widehat{G^{\mathrm{sab}}})^D$. Finalement, l'élément $g^0.x' \in \mathbf{P}^0(k,[H \to G])$ vérifie bien $\theta(g^0.x') = \gamma$. Cela assure donc que $\mathbf{P}^0(k,[H \to G])$ et $\mathbf{P}^0(k,C^{\mathrm{ab}}_f)$ ont même image dans $\mathbf{H}^1(k,\widehat{C}^{\mathrm{ab}}_f)^D$. Or pour des raisons topologiques, $\mathbf{P}^0(k,C^{\mathrm{ab}}_f)$ et $\mathbf{P}^0(k,C^{\mathrm{ab}}_f)^\wedge$ ont même image également par θ ; et on a calculé le conoyau de $\theta : \mathbf{P}^0(k,C^{\mathrm{ab}}_f)^\wedge \to \mathbf{H}^1(k,\widehat{C}^{\mathrm{ab}}_f)^D$ au théorème 5.5 et c'est exactement $\text{Ш}^1(\widehat{C}^{\mathrm{ab}}_f)^D$. Cela termine la preuve du théorème. □

7. Le défaut d'approximation faible sur les espaces homogènes

L'objectif de cette section est d'appliquer les méthodes d'abélianisation pour calculer le défaut d'approximation faible sur l'espace homogène $X = G/H$. On obtient des résultats qui généralisent ceux de Borovoi dans [**Bor99**]. On adopte la convention suivante : si S est un ensemble de places d'un corps de nombres k, $H^i(k_S,.)$ désigne $\prod_{v\in S} H^i(k_v,.)$, avec la convention que si v est une place archimédienne, $H^i(k_v,.)$ désigne le groupe de cohomologie modifié à la Tate. De même, si X est une k-variété algébrique, on note $X(k_S) := \prod_{v\in S} X(k_v)$, en remplaçant, pour les places archimédiennes v, l'ensemble $X(k_v)$ par l'ensemble des composantes connexes de $X(k_v)$; en outre, Ω désigne l'ensemble des places de k. Enfin, pour un complexe de modules galoisiens C, on définit $Ш^i_S(C) := \mathrm{Ker}(\mathbf{H}^i(k,C) \to \prod_{v\notin S} \mathbf{H}^i(k_v,C))$, et $Ш^i_\omega(C) := \{\alpha \in \mathbf{H}^i(k,C) : \alpha_v = 0 \text{ pour presque toute place } v\}$.

7.1. Cas du stabilisateur connexe. —

Théorème 7.1. — *Soit k un corps de nombres, G un k-groupe connexe, H un k-groupe linéaire connexe et soit $f : H \to G$ un morphisme. On suppose $Ш^1(G^{\mathrm{ab}})$ fini.*

Alors il existe une application naturelle (surjective si G est linéaire) $\mathbf{H}^0(k_\Omega,[H\to G]) \xrightarrow{\theta} \left(Ш^0_\omega(k,\widehat{C}_f)/\, Ш^0(\widehat{C}_f)\right)^D$, dont le noyau est l'adhérence faible $\overline{\mathbf{H}^0(k,[H\to G])}^f$ de $\mathbf{H}^0(k,[H\to G])$ dans $\mathbf{H}^0(k_\Omega,[H\to G])$.

En outre, pour tout ensemble fini de places S de k contenant les places archimédiennes, l'application θ induit une application (surjective si G est linéaire) $\theta_S : \mathbf{H}^0(k_S,[H\to G]) \to \left(Ш^0_S(k,\widehat{C}_f)/\, Ш^0(\widehat{C}_f)\right)^D$ dont le noyau est l'adhérence $\overline{\mathbf{H}^0(k,[H\to G])}^S$ de $\mathbf{H}^0(k,[H\to G])$ dans $\mathbf{H}^0(k_S,[H\to G])$.

Corollaire 7.2. — *Soit k un corps de nombres, G un k-groupe connexe, H un sous-k-groupe linéaire connexe de G, et soit $X := G/H$. On suppose $Ш^1(G^{\mathrm{ab}})$ fini.*

Alors il existe une application naturelle (surjective si G est linéaire) $X(k_\Omega) \xrightarrow{\theta} \left(Ш^0_\omega(k,\widehat{C}_X)/\, Ш^0(\widehat{C}_X)\right)^D$ dont le noyau est l'adhérence faible $\overline{X(k)}^f$ de $X(k)$ dans $X(k_\Omega)$.

En outre, pour tout ensemble fini de places S de k contenant les places archimédiennes, l'application θ induit une application (surjective si G est linéaire) $\theta_S : X(k_S) \to \left(Ш^0_S(k,\widehat{C}_X)/\, Ш^0(\widehat{C}_X)\right)^D$ dont le noyau est l'adhérence $\overline{X(k)}^S$ de $X(k)$ dans $X(k_S)$.

Remarque 7.3. — Ce corollaire est à rapprocher des résultats analogues obtenus par Borovoi aux théorèmes 1.3, 1.11 et au corollaire 1.12 de [**Bor99**].

Démonstration du théorème 7.1. — On commence par montrer une variante du théorème 5.5

Proposition 7.4. — *Soit $C = [M_1 \to M_2 \to M_3]$ un complexe de longueur 3 sur k, et S un ensemble fini de places de k. Si $Ш^1({M_3}^{\mathrm{ab}})$ est fini, alors on a une suite exacte de groupes abéliens :*

$$\mathbf{H}^0(k,C)^\wedge \to \prod_{v\in S} \mathbf{H}^0(k_v,C)^\wedge \to \left(Ш^0_S(k,\widehat{C})\right)^D \to Ш^0(k,\widehat{C})^D \to 0\,.$$

Démonstration. — Tout d'abord, on remarque que l'exactitude du morceau

$$\prod_{v\in S} \mathbf{H}^0(k_v,C)^\wedge \to \left(Ш^0_S(k,\widehat{C})\right)^D \to Ш^0(k,\widehat{C})^D \to 0$$

est une conséquence de l'exactitude de $\mathbf{P}^0(k,C)^\wedge \to \mathbf{H}^0(k,\widehat{C})^D \to Ш^0(k,\widehat{C})^D \to 0$ que l'on a montrée au théorème 5.5, via le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} \mathbf{P}^0(k,C)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(k,\widehat{C})^D \arrow[d] \\ \prod_{v\in S} \mathbf{H}^0(k_v,C)^\wedge \arrow[r] & Ш^0_S(k,\widehat{C})^D\,. \end{tikzcd}$$

Par conséquent, il reste à montrer l'exactitude en $\prod_{v\in S} \mathbf{H}^0(k_v,C)^\wedge$.

– On suppose le complexe C exact en degré -1. On a alors un triangle exact

$$\mathrm{Ker}\ f_1[2] \to C \to M \to \mathrm{Ker}\ f_1[3]\,,$$

où $M := M_3/\text{Coker } f_1$. On en déduit le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
H^2(k, \text{Ker } f_1)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(k, C)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & H^0(k, M)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & H^3(k, \text{Ker } f_1) \arrow[d] \\
\prod_{v\in S} H^2(k_v, \text{Ker } f_1)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{v\in S} \mathbf{H}^0(k_v, C)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{v\in S} H^0(k_v, M)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{v\in S} H^3(k_v, \text{Ker } f_1) \arrow[d] \\
Ш^0_S(k, \widehat{\text{Ker } f_1})^D = 0 \arrow[r] & Ш^0_S(k, \widehat{C})^D \arrow[r] & Ш^1_S(k, \widehat{M})^D \arrow[r] & 0 \,.
\end{tikzcd}$$

La finitude de $H^3(k, \text{Ker } f_1)$ assure, via l'appendice de [**HS05**], que la suite

$$\mathbf{H}^0(k, C)^\wedge \to H^0(k, M)^\wedge \to H^3(k, \text{Ker } f_1)$$

est exacte. De même, considérons le morphisme $\prod_{v\in S} H^2(k_v, \text{Ker } f_1) \to \prod_{v\in S} \mathbf{H}^0(k_v, C)$ et notons Q son conoyau (muni de la topologie quotient). Alors la finitude de $\prod_{v\in S} H^3(k_v, \text{Ker } f_1)$ assure que le morphisme $Q^\wedge \to \prod_{v\in S} H^0(k_v, M)^\wedge$ reste injectif, et donc on conclut (en utilisant l'appendice de [**HS05**]) que la suite suivante est exacte :

$$\prod_{v\in S} H^2(k_v, \text{Ker } f_1)^\wedge \to \prod_{v\in S} \mathbf{H}^0(k_v, C)^\wedge \to \prod_{v\in S} H^0(k, M)^\wedge \,.$$

Or le morphisme $H^3(k, \text{Ker } f_1) \to \prod_{v\in S} H^3(k_v, \text{Ker } f_1)$ est un isomorphisme (voir [**Mil06**], théorème I.2.13), ainsi que le morphisme $\prod_{v\in S} H^{-1}(k_v, M) \to \mathbf{H}^2(k, \widehat{M})^D$ (par dévissage à partir du théorème I.4.10 de [**Mil06**] et de la proposition 5.9 de [**HS05**]), donc la proposition découle de l'exactitude des lignes du diagramme, et des suites de Cassels-Tate pour la variété semi-abélienne M (proposition 5.3 de [**HS08**]) et $\text{Ker } f_1$ (première colonne du diagramme : on peut compléter la suite de Cassels-Tate usuelle). Cela conclut la preuve dans ce cas particulier.

– Cas général. On peut plonger $\text{Coker } f_1$, qui est un groupe de type multiplicatif, dans un tore quasi-trivial P : on note $i : \text{Coker } f_1 \to P$ un tel plongement. Notons alors C' le complexe

$$C' := \left[M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2 \oplus i} M_3 \oplus P\right] \,.$$

Alors C' vérifie les hypothèses du cas précédent, et on a un triangle exact naturel $P \to C' \to C \to P[1]$. Donc on dispose du diagramme commutatif suivant, dont les lignes sont exactes (l'exactitude de la dernière ligne résulte d'une chasse au diagramme facile) :

$$\begin{tikzcd}
H^0(k, P)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(k, C')^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{H}^0(k, C)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
\prod_{v\in S} H^0(k_v, P)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{v\in S} \mathbf{H}^0(k_v, C')^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{v\in S} \mathbf{H}^0(k_v, C)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
Ш^2_S(k, \widehat{P})^D \arrow[r] & Ш^0_S(k, \widehat{C'})^D \arrow[r] & Ш^0_S(k, \widehat{C})^D \arrow[r] & 0 \,.
\end{tikzcd}$$

Par le cas précédent, la deuxième colonne est exacte, et P étant quasi-trivial, par Poitou-Tate, la flèche $\prod_{v\in S} H^0(k_v, P)^\wedge \to Ш^2_S(k, \widehat{P})^D$ est surjective, donc une chasse au diagramme assure l'exactitude de la troisième colonne, ce qui conclut la preuve de la proposition.

□

Poursuivons la preuve du théorème 7.1 : on s'intéresse d'abord au cas particulier où $H = 1$. Montrons la seconde partie du théorème dans ce cas : on considère le diagramme

$$\begin{tikzcd}
H^0(k,G^{\mathrm{sc}})^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{v\in S} H^0(k_v,G^{\mathrm{sc}})^\wedge \arrow[d] & \\
H^0(k,G)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{v\in S} H^0(k_v,G)^\wedge \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & Ш^1_S(k,\widehat{C}_G)^D \arrow[d, "="] \\
\mathbf{H}^0(k,C_G)^\wedge \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{v\in S} \mathbf{H}^0(k_v,C_G)^\wedge \arrow[r, "\theta"] \arrow[d] & Ш^1_S(k,\widehat{C}_G)^D \\
H^1(k,G^{\mathrm{sc}}) \arrow[r] & \prod_{v\in S} H^1(k_v,G^{\mathrm{sc}}) & .
\end{tikzcd} \tag{10}$$

Soit $(g_v) \in \prod_{v\in S} H^0(k_v,G)$ tel que $\theta((g_v)) = 0$. Alors, par la proposition 7.4, l'image de $(\mathrm{ab}^0_G(g_v))$ dans $\prod_{v\in S} \mathbf{H}^0(k_v,C_G)^\wedge$ se relève en un élément g' dans $\mathbf{H}^0(k,C_G)^\wedge$. Alors le diagramme précédent assure que l'image de g' dans $H^1(k,G^{\mathrm{sc}})$ est dans $Ш^1_{\Omega\setminus S}(k,G^{\mathrm{sc}}) = Ш^1(k,G^{\mathrm{sc}}) = 1$, donc g' se relève en $\tilde{g} \in H^0(k,G)^\wedge$. Par exactitude de la deuxième colonne, l'élément $(\tilde{g}_v)^{-1}.(\mathrm{ab}^0_G(g_v)) \in \prod_{v\in S} H^0(k_v,G)^\wedge$ se relève en un élément $(h_v) \in \prod_{v\in S} H^0(k_v,G^{\mathrm{sc}})^\wedge$. On utilise le lemme :

Lemme 7.5. — *La flèche naturelle* $\left(\overline{H^0(k,G^{\mathrm{sc}})}^S\right)^\wedge \to \prod_{v\in S} H^0(k_v,G^{\mathrm{sc}})^\wedge$ *est surjective.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de l'approximation faible sur G^{sc}. □

Avec ce lemme, l'élément (h_v) provient d'un élément $h \in \left(\overline{H^0(k,G^{\mathrm{sc}})}^S\right)^\wedge$. On considère alors l'image $\rho(h) \in \left(\overline{H^0(k,G)}^S\right)^\wedge$: par fonctorialité, l'élément $\rho(h).\tilde{g} \in \left(\overline{H^0(k,\mathscr{G})}^S\right)^\wedge$ s'envoie alors sur (g_v) dans $\prod_{v\in S} H^0(k_v,G)^\wedge$. On a donc montré que la suite suivante

$$\left(\overline{H^0(k,G)}^S\right)^\wedge \to \prod_{v\in S} H^0(k_v,G)^\wedge \to (\ Ш^1_S(k,\widehat{C}_G))^D$$

est exacte. Comme dans le corollaire 3.18 de [**Dem11a**], on en déduit l'exactitude de la suite

$$\overline{H^0(k,G)}^S \to \prod_{v\in S} H^0(k_v,G) \to (\ Ш^1_S(k,\widehat{C}_G))^D\ ,$$

d'où la seconde partie du théorème 7.1 dans le cas où $H = 1$.

Montrons ce même résultat dans le cas général : on considère le diagramme commutatif

(11)

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{H}^0(k, C_H)^\wedge \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathbf{H}^0(k_S, C_H)^\wedge \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd] & & Ш^1_S(k, \widehat{C}_H)^D \arrow[dd] \\
H^0(k, H) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & H^0(k_S, H) \arrow[ur] \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd] & & Б_S(H)^D \arrow[ur, "\cong"] \arrow[dd] & \\
& \mathbf{H}^0(k, C_G)^\wedge \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathbf{H}^0(k_S, C_G)^\wedge \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd] & & Ш^1_S(k, \widehat{C}_G)^D \arrow[dd] \\
H^0(k, G) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & H^0(k_S, G) \arrow[ur] \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd] & & Б_S(G)^D \arrow[ur, "\cong"] & \\
& \mathbf{H}^0(k, C_f)^\wedge \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathbf{H}^0(k_S, C_f)^\wedge \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd, "\partial'"] & & Ш^0_S(k, \widehat{C}_f)^D \\
\mathbf{H}^0(k, [H \to G]) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathbf{H}^0(k_S, [H \to G]) \arrow[ur] \arrow[dd, "\partial"] & & & \\
& \mathbf{H}^1(k, C_H) \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathbf{H}^1(k_S, C_H) \arrow[dd] & & \\
H^1(k, H) \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd, "f_*"] & & H^1(k_S, H) \arrow[ur] \arrow[dd] & & & \\
& \mathbf{H}^1(k, C_G) \arrow[rr] & & H^1(k_S, G) & & \\
H^1(k, G) \arrow[ur] \arrow[rr] & & H^1(k_S, G) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

où S est un ensemble fini de places de k contenant S_∞. On suit alors exactement la structure de la preuve du théorème 6.1, pour montrer la seconde partie du théorème 7.1 via une chasse au diagramme dans le grand diagramme précédent, en utilisant la proposition 7.4, le théorème 5.11 de [**Bor98**] et le cas $H = 1$ montré plus haut. Pour conclure la preuve, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 7.6. — *Soit H un k-groupe linéaire connexe, S un ensemble fini de places de k contenant S_∞. Alors on a l'égalité suivante :*

$$\mathrm{Im}\left(H^0(k_S, H) \xrightarrow{\theta} \mathbf{H}^1(k, \widehat{C}_H)^D\right) = \mathrm{Im}\left(\mathbf{H}^0(k_S, C_H)^\wedge \xrightarrow{\theta} \mathbf{H}^1(k, \widehat{C}_H)^D\right).$$

Démonstration. — Tout d'abord, il est clair que les images de $\prod_{v \in S} \mathbf{H}^0(k_v, C_H)^\wedge$ et $\prod_{v \in S} \mathbf{H}^0(k_v, C_H)$ par θ coïncident. Il suffit donc de montrer que

$$\mathrm{Im}\left(H^0(k_S, H) \xrightarrow{\theta} \mathbf{H}^1(k, \widehat{C}_H)^D\right) = \mathrm{Im}\left(\mathbf{H}^0(k_S, C_H) \xrightarrow{\theta} \mathbf{H}^1(k, \widehat{C}_H)^D\right).$$

En s'inspirant de la preuve du théorème 3.19 de [**Dem11a**], on constate qu'il suffit pour cela de montrer que l'application ab^1_H induit une injection

$$\mathrm{ab}^1_H : Ш^1_{\Omega \setminus S}(k, H) \hookrightarrow Ш^1_{\Omega \setminus S}(k, C_H).$$

C'est une conséquence du théorème 5.12 de [**Bor98**]. □

Ce lemme permet donc de conclure la preuve de l'exactitude de la suite suivante

$$1 \to \overline{\mathbf{H}^0(k, [H \to G])}^S \to \prod_{v \in S} \mathbf{H}^0(k_v, [H \to G]) \xrightarrow{\theta_S} Ш^0_S(\widehat{C}_f)^D.$$

Reste à montrer l'exactitude du complexe (si G est linéaire)

$$\prod_{v \in S} \mathbf{H}^0(k_v, [H \to G]) \xrightarrow{\theta_S} \text{Ш}^0_S(\widehat{C}_f)^D \to \text{Ш}^0(\widehat{C}_f)^D .$$

Grâce au théorème 5.5, on constate qu'il suffit de montrer que $\prod_{v \in S} \mathbf{H}^0(k_v, [H \to G])$ et $\prod_{v \in S} H^0_{\mathrm{ab}}(k_v, [H \to G])$ ont même image dans $\text{Ш}^0_S(\widehat{C}_f)^D$. Et ceci se démontre exactement de la même façon que dans la preuve de la quatrième étape du théorème 6.1. On en déduit finalement l'exactitude de la suite :

$$1 \to \overline{\mathbf{H}^0(k, [H \to G])}^S \to \prod_{v \in S} \mathbf{H}^0(k_v, [H \to G]) \xrightarrow{\theta_S} \left(\text{Ш}^0_S(k, \widehat{C}_f) / \text{Ш}^0(\widehat{C}_f) \right)^D \to 1 .$$

Étudions désormais l'exactitude de la suite suivante

$$1 \to \overline{\mathbf{H}^0(k, [H \to G])}^f \to \mathbf{H}^0(k_\Omega, [H \to G]) \xrightarrow{\theta} \left(\text{Ш}^1_\omega(k, \widehat{C}_f) / \text{Ш}^1(\widehat{C}_f) \right)^D \to 1 .$$

L'exactitude en $\mathbf{H}^0(k_\Omega, [H \to G])$ est une conséquence directe de la suite exacte précédente en passant à la limite projective sur S.

Dans le cas où G est linéaire, il reste finalement à montrer que le morphisme θ est surjectif. Par la proposition 7.4, on sait que le morphisme $\theta' : \prod_{v \in \Omega} \mathbf{H}^0(k_v, C_f) \to \left(\text{Ш}^0_\omega(k, \widehat{C}_f) / \text{Ш}^0(\widehat{C}_f) \right)^D$ est surjectif. Par conséquent il suffit de montrer que les ensembles $\mathbf{H}^0(k_\Omega, [H \to G])$ et $\prod_{v \in \Omega} \mathbf{H}^0(k_v, C_f)$ ont même image dans $\left(\text{Ш}^0_\omega(k, \widehat{C}_f) \right)^D$. Pour cela, on considère le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
 & & & \mathbf{H}^0(k_\Omega, C_G) \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd] & & \text{Ш}^1_\omega(k, \widehat{C}_G)^D \arrow[dd] \\
 & & H^0(k_\Omega, G) \arrow[ur] \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd] & & \text{Б}_\omega(G)^D \arrow[ur, "\cong"] & \\
 & \mathbf{H}^0(k, C_f) \arrow[rr] & & \mathbf{H}^0(k_\Omega, C_f) \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd, "\partial'"] & & \text{Ш}^0_\omega(k, \widehat{C}_f)^D \arrow[dd] \\
\mathbf{H}^0(k, [H \to G]) \arrow[ur] \arrow[rr] & & \mathbf{H}^0(k_\Omega, [H \to G]) \arrow[ur] \arrow[dd, "\partial"] & & & \\
 & & & \mathbf{H}^1(k_\Omega, C_H) \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dd] & & \text{Ш}^0_\omega(k, \widehat{C}_H)^D \\
 & & H^1(k_\Omega, H) \arrow[ur] \arrow[dd] & & & \\
 & & & \mathbf{H}^1(k_\Omega, C_G) & & \\
 & & H^1(k_\Omega, G) \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

.

Soit $\gamma \in \text{Ш}^0_\omega(k, \widehat{C}_f)^D$ et $\alpha \in \prod_{v \in \Omega} \mathbf{H}^0(k_v, C_f)$ tel que $\theta(\alpha) = \gamma$. Par le théorème 5.10, on sait que le morphisme $\mathbf{H}^0(k, C_f) \to \prod_{v \in S_\infty} \mathbf{H}^0(k_v, C_f)$ est surjectif. Donc il existe $\alpha' \in \mathbf{H}^0(k, C_f)$ tel que $\alpha'_\infty = \alpha_\infty$. Notons alors $\alpha^0 := \alpha - \alpha' \in \prod_{v \in \Omega} \mathbf{H}^0(k_v, C_f)$. On a toujours $\theta(\alpha^0) = \gamma$. On note β l'image de α^0 dans $\prod_{v \in \Omega} \mathbf{H}^1(k, C_H)$ et γ' celle de γ dans $\text{Ш}^0_\omega(k, \widehat{C}_H)^D$. Par le théorème 5.11 de [**Bor98**], il existe $\tau \in \prod_{v \in \Omega} H^1(k_v, H)$, trivial aux places infinies, tel que $\mathrm{ab}^0_H(\tau) = \beta$. Notons alors g l'image de τ dans $\prod_{v \in \Omega} H^1(k, G)$.

Par construction, g_∞ est trivial, et g s'envoie sur 0 dans $\prod_{v \in \Omega} \mathbf{H}^1(k, C_G)$. Donc par le même théorème 5.11 de [**Bor98**], g est trivial. Par conséquent, τ se relève en un élément $x' \in \prod_{v \in \Omega} \mathbf{H}^0(k_v, [H \to G])$. Par commutativité du diagramme, on voit que $(x'_v) \in \prod_{v \in \Omega} \mathbf{H}^0(k_v, C_f)$ s'envoie sur β dans $\prod_{v \in \Omega} \mathbf{H}^1(k_v, C_H)$, donc par exactitude de la troisième colonne, $\alpha^0 - (x'_v)$ se relève en un élément g' dans $\prod_{v \in \Omega} \mathbf{H}^0(k_v, C_G)$. Or $\prod_{v \in \Omega} \mathbf{H}^0(k_v, C_G)$ et $\prod_{v \in \Omega} H^0(k_v, G)$ ont même image dans $\text{Ш}^1_\omega(k, \widehat{C}_G)^D$ par le morphisme θ (la preuve est exactement la même que celle du théorème 3.19 de [**Dem11a**]). Donc il existe $g^0 \in \prod_{v\in\Omega} H^0(k_v, G)$ tel que $\theta(g^0) = \theta(g')$ dans $Ш^1_\omega(k, \widehat{C}_G)^D$. Finalement, l'élément $g^0.x' \in \prod_{v\in\Omega} \mathbf{H}^0(k_v, [H \to G])$ vérifie bien $\theta(g^0.x') = \gamma$. Cela assure donc que $\prod_{v\in\Omega} \mathbf{H}^0(k_v, [H \to G])$ et $\prod_{v\in\Omega} \mathbf{H}^0(k, C_f)$ ont même image dans $Ш^1_\omega(k, \widehat{C}_f)^D$. Or pour des raisons topologiques, $\prod_{v\in\Omega} \mathbf{H}^0(k_v, C_f)$ et $\prod_{v\in\Omega} \mathbf{H}^0(k_v, C_f)^\wedge$ ont même image également par θ ; on a calculé le conoyau de $\theta : \prod_{v\in\Omega} \mathbf{H}^0(k_v, C_f)^\wedge \to Ш^0_\omega(k, \widehat{C}_f)^D$ à la proposition 7.4, et c'est exactement $Ш^0(\widehat{C}_f)^D$. Cela termine la preuve du théorème 7.1. □

7.2. Cas du stabilisateur abélien. — On peut également démontrer de manière analogue les versions à stabilisateur abélien des énoncés précédents, à savoir :

Théorème 7.7. — *Soit k un corps de nombres, G un k-groupe connexe, H un k-groupe linéaire commutatif et soit $f : H \to G$ un morphisme. On suppose G^{ss} simplement connexe et $Ш^1(G^{\mathrm{ab}})$ fini.*

Alors il existe une application naturelle (surjective si G est linéaire) $\mathbf{H}^0(k_\Omega, [H \to G]) \xrightarrow{\theta} \left(Ш^1_\omega(k, \widehat{C}^{\mathrm{ab}}_f)/\, Ш^1(\widehat{C}^{\mathrm{ab}}_f)\right)^D$, dont le noyau est l'adhérence faible $\overline{\mathbf{H}^0(k, [H \to G])}^f$ de $\mathbf{H}^0(k, [H \to G])$ dans $\mathbf{H}^0(k_\Omega, [H \to G])$.

En outre, pour tout ensemble fini de places S de k contenant les places archimédiennes, l'application θ induit une application (surjective si G est linéaire) $\theta_S : \mathbf{H}^0(k_S, [H \to G]) \to \left(Ш^1_S(k, \widehat{C}^{\mathrm{ab}}_f)/\, Ш^1(\widehat{C}^{\mathrm{ab}}_f)\right)^D$ dont le noyau est l'adhérence $\overline{\mathbf{H}^0(k, [H \to G])}^S$ de $\mathbf{H}^0(k, [H \to G])$ dans $\mathbf{H}^0(k_S, [H \to G])$.

Corollaire 7.8. — *Soit k un corps de nombres, G un k-groupe connexe, H un sous-k-groupe linéaire commutatif de G, et soit $X := G/H$. On suppose G^{ss} simplement connexe et $Ш^1(G^{\mathrm{ab}})$ fini.*

Alors il existe une application naturelle (surjective si G est linéaire) $X(k_\Omega) \xrightarrow{\theta} \left(Ш^1_\omega(k, \widehat{C}^{\mathrm{ab}}_X)/\, Ш^1(\widehat{C}^{\mathrm{ab}}_X)\right)^D$ dont le noyau est exactement l'adhérence faible $\overline{X(k)}^f$ de $X(k)$ dans $X(k_\Omega)$.

En outre, pour tout ensemble fini de places S de k contenant les places archimédiennes, l'application θ induit une application (surjective si G est linéaire) $\theta_S : X(k_S) \to \left(Ш^1_S(k, \widehat{C}^{\mathrm{ab}}_X)/\, Ш^1(\widehat{C}^{\mathrm{ab}}_X)\right)^D$ dont le noyau est exactement l'adhérence $\overline{X(k)}^S$ de $X(k)$ dans $X(k_S)$.

Références

[Ald08] E. Aldrovandi – « 2-gerbes bound by complexes of *gr*-stacks, and cohomology », *J. Pure Appl. Algebra* **212** (2008), no. 5, p. 994–1038.

[AN09] E. Aldrovandi & B. Noohi – « Butterflies. I. Morphisms of 2-group stacks », *Adv. Math.* **221** (2009), no. 3, p. 687–773.

[AN10] ______, « Butterflies II : torsors for 2-group stacks », *Adv. Math.* **225** (2010), no. 2, p. 922–976.

[Ana73] S. Anantharaman – « Schémas en groupes, espaces homogènes et espaces algébriques sur une base de dimension 1 », Sur les groupes algébriques, Soc. Math. France, Paris, 1973, p. 5–79. Bull. Soc. Math. France, Mém. 33.

[BCTS08] M. Borovoi, J.-L. Colliot-Thélène & A. N. Skorobogatov – « The elementary obstruction and homogeneous spaces », *Duke Math. J.* **141** (2008), no. 2, p. 321–364.

[BD11] M. Borovoi & C. Demarche – « Manin obstruction to strong approximation for homogeneous spaces », *Comment. Math. Helv.* (2011), à paraître.

[Bor93] M. Borovoi – « Abelianization of the second nonabelian Galois cohomology », *Duke Math. J.* **72** (1993), no. 1, p. 217–239.

[Bor98] ______, « Abelian Galois cohomology of reductive groups », *Mem. Amer. Math. Soc.* **132** (1998), no. 626, p. viii+50.

[Bor99] ______, « The defect of weak approximation for homogeneous spaces », *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **8** (1999), no. 2, p. 219–233.

[Bre90] L. Breen – « Bitorseurs et cohomologie non abélienne », The Grothendieck Festschrift, Vol. I, Progr. Math., vol. 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 401–476.

[Bre92] ______, « Théorie de Schreier supérieure », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **25** (1992), no. 5, p. 465–514.

[Bre94] ______, « On the classification of 2-gerbes and 2-stacks », *Astérisque* (1994), no. 225, p. 160.

[BvH11] M. Borovoi & J. van Hamel – « Extended equivariant picard complexes and homogeneous spaces », *Transform. Groups* **17** (2012), p. 51–86.

[Con84] D. Conduché – « Modules croisés généralisés de longueur 2 », *J. Pure Appl. Algebra* **34** (1984), no. 2-3, p. 155–178.

[CT08] J.-L. Colliot-Thélène – « Résolutions flasques des groupes linéaires connexes », *J. Reine Angew. Math.* **618** (2008), p. 77–133.

[CTGP04] J.-L. Colliot-Thélène, P. Gille & R. Parimala – « Arithmetic of linear algebraic groups over 2-dimensional geometric fields », *Duke Math. J.* **121** (2004), no. 2, p. 285–341.

[CTS87] J.-L. Colliot-Thélène & J.-J. Sansuc – « Principal homogeneous spaces under flasque tori : applications », *J. Algebra* **106** (1987), no. 1, p. 148–205.

[CTX09] J.-L. Colliot-Thélène & F. Xu – « Brauer-Manin obstruction for integral points of homogeneous spaces and representation by integral quadratic forms », *Compos. Math.* **145** (2009), no. 2, p. 309–363, With an appendix by Dasheng Wei and Xu.

[Del79] P. Deligne – « Variétés de Shimura : interprétation modulaire, et techniques de construction de modèles canoniques », Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., XXXIII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979, p. 247–289.

[Dem09] C. Demarche – « Méthodes cohomologiques pour l'étude des points rationnels sur les espaces homogènes », Thèse de l'université Paris-Sud, 2009.

[Dem11a] ______, « Le défaut d'approximation forte dans les groupes linéaires connexes », *Proc. Lond. Math. Soc. (3)* **102** (2011), no. 3, p. 563–597.

[Dem11b] ______, « Suites de Poitou-Tate pour les complexes de tores à deux termes », *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2011), no. 1, p. 135–174.

[Dem11c] ______, « Une formule pour le groupe de Brauer algébrique d'un torseur », *J. Algebra* **347** (2011), p. 96–132.

[GA11] C. Gonzalez-Aviles – « Quasi-abelian crossed modules and nonabelian cohomology », prépublication, 2011.

[Gir71] J. Giraud – *Cohomologie non abélienne*, Springer-Verlag, Berlin, 1971, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 179.

[GP08] P. Gille & A. Pianzola – « Isotriviality and étale cohomology of Laurent polynomial rings », *J. Pure Appl. Algebra* **212** (2008), no. 4, p. 780–800.

[Gro66] A. Grothendieck – « Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. III », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1966), no. 28, p. 255.

[Har67] G. Harder – « Halbeinfache Gruppenschemata über Dedekindringen », *Inventiones Mathematicae* **4** (1967), p. 165–191.

[Har08] D. Harari – « Le défaut d'approximation forte pour les groupes algébriques commutatifs », *Algebra and Number Theory* **2** (2008), no. 5, p. 595–611.

[HS05] D. Harari & T. Szamuely – « Arithmetic duality theorems for 1-motives », *J. reine angew. Math.* **578** (2005), p. 93–128, et *Corrigenda for "Aritmetic duality theorems for 1-motives"*, disponible sur http ://www.math.u-psud/~harari/errata/corrigcrelle.pdf.

[HS08] ______, « Local-global principles for 1-motives », *Duke Math. J.* **143** (2008), no. 3, p. 531–557.

[HS11] D. Harari & A. Skorobogatov – « Descent theory for open varieties », à paraître dans *Torsors, étale homotopy and applications to rational points* (Edimbourg 2011), 2011.

[Jos09] P. Jossen – « The arithmetic of 1-motives », Thèse, 2009.

[Lab99] J.-P. Labesse – « Cohomologie, stabilisation et changement de base », *Astérisque* (1999), no. 257, p. vi+161, Appendix A by Laurent Clozel and Labesse, and Appendix B by Lawrence Breen.

[Mar91] G. A. Margulis – *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], vol. 17, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[Mil80] J. S. Milne – *Étale cohomology*, Princeton Mathematical Series, vol. 33, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1980.

[Mil06] ______, *Arithmetic duality theorems*, second ed., BookSurge, LLC, Charleston, SC, 2006.

[Nis84] Y. A. Nisnevich – « Espaces homogènes principaux rationnellement triviaux et arithmétique des schémas en groupes réductifs sur les anneaux de Dedekind », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **299** (1984), no. 1, p. 5–8.

[NSW08] J. Neukirch, A. Schmidt & K. Wingberg – *Cohomology of number fields*, second ed., Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 323, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[PR94] V. Platonov & A. Rapinchuk – *Algebraic groups and number theory*, Pure and Applied Mathematics, vol. 139, Academic Press Inc., Boston, MA, 1994, Translated from the 1991 Russian original by Rachel Rowen.

[Ray70] M. Raynaud – *Faisceaux amples sur les schémas en groupes et les espaces homogènes*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 119, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[Ros56] M. Rosenlicht – « Some basic theorems on algebraic groups », *Amer. J. Math.* **78** (1956), p. 401–443.

[San81] J.-J. Sansuc – « Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires sur un corps de nombres », *J. reine angew. Math.* **327** (1981), p. 12–80.

[SGA3] M. Demazure & A. Grothendieck – *Schémas en groupes*, Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3). Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 151-152-153, Springer-Verlag, Berlin, 1970.

---

10 avril 2012

Cyril Demarche, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6), Institut de Mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France • *E-mail :* `demarche@math.jussieu.fr`